Efecto del módulo elástico cortante en el cálculo de deflexiones en vigas de madera

Por Ing. Juan B. Tuk*

INTRODUCCION

La utilización de la madera en vigas sometidas a cargas cortantes altas o vigas de gran peralte como en el caso de madera laminada encolada, requiere que se consideren no solo las deformaciones inducidas por efecto del momento flector, sino también las deformaciones por carga cortante.

En el diseño de estructuras metálicas o de hormigón, la deformación por efecto de la carga cortante es prácticamente despreciable si se compara con las deflexiones por flexión. En el acero el módulo elástico es de 2.1×10^6 Kg/cm^2, mientras que el módulo cortante es de $.85 \times 10^6$ Kg/cm^2. Comparativamente la razón E/G es de 2.5 (ver nomenclatura).

En la madera, la diferencia es mayor. Por ejemplo, en ensayos realizados en el Centro de Investigación de Ingeniería en Maderas (CIIM) del Instituto Tecnológico de Costa Rica, con madera de Laurel seco a 12°/o de C.H. se han registrado módulos de elasticidad de 2.5×10^5 y para la misma muestra, un módulo de cortante de 1.79×10^4. La razón E/G es de 14.0. Luego puede apreciarse que el efecto sobre la deformación por cortantes es 5.6 veces mayor que el presentado por una viga de acero cuya razón E/G es menor.

2. CONSIDERACION DE LA DEFORMACION POR CORTANTE

El cálculo de deformación debida al cortante, puede realizarse fácilmente si se conoce el módulo de elasticidad en cortante** y el diagrama de distribución de fuerza cortante a lo largo de la viga.

Cuando no se disponga, es posible estimar el módulo G a partir del valor de E, empleando la ecuación (I).

$$(I) \quad G_{LT} = .0215 \ (E)^{1.082}$$

Un método para el cálculo de la deflexión debida al cortante fue desarrollado por Hilbrand (1). El método se basa en la utilización del teorema de Castigliano ($\partial U / \partial P_n = \delta n$), aplicado a la energía total de deformación por cortante. Además, se asume la validez de la fórmula para el calculo de esfuerzo cortante sobre la sección de: $\tau = VQ/Ib$.

Con las anteriores bases, es posible demostrar la ecuación II la cual da la deformación debida al cortante en un punto cualquiera x.

$$(II) \quad \delta_x = K \left[(1\text{-}p\text{-}A_{ax} - pA_{xb} \right]$$

El valor K es el factor de forma de la sección que se puede calcular por integración para cualquier sección. Sin embargo, las vigas que se presentan normalmente en el diseño con madera son de sección rectangular o circular para las cuales el valor de K es 6/5 y 10/9 respectivamente. El significado de las otras variables se puede ver en la nomenclatura.

3. EJEMPLO DE APLICACION

Comparar la deflexión máxima por flexión y por cortante de una viga de madera de Laurel de 5 x 20 centímetros, simplemente apoyada en un claro de 1.50 mts. como se muestra. La carga uniformemente distribuida tiene una intensidad de 8.0 KG/cm. El módulo elástico a usar es de 2.5×10^5 KG/cm^2.

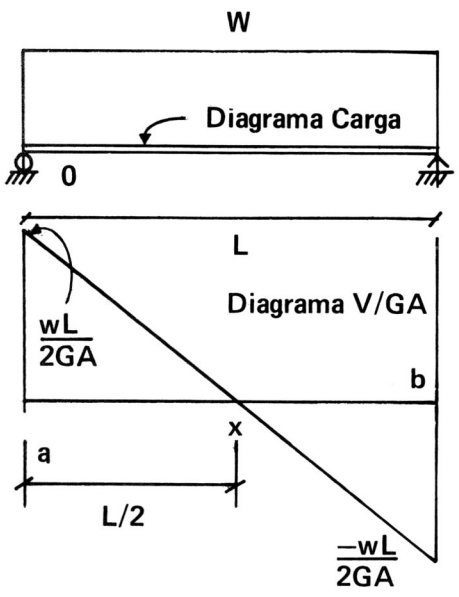
3.1 Estimación de G por ecuación (I) = $1.49 \times 10^4 \frac{KG}{cm^2}$

3.2 Los diagramas de carga y cortante dividido por GA son los siguientes:

* El autor es Ingeniero Civil y master en el área de Tecnología de Maderas. Actualmente es el Director del Centro de Investigación de Ingeniería en Maderas del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

** Actualmente se realiza una investigación en el CIIM del ITCR para la obtención del módulo G en algunas maderas de uso común.

Viga Sección BxD



ya que la deflexión máxima ocurre en el centro del claro, entonces $p = \frac{L/2}{L} = 0.5$. Notando que la distribución de carga es simétrica, tenemos que:

$$A_{ax} = - A_{xb}$$

Luego

$$A_{ax} = (wL/2GA) \times (L/2)/2 = wL^2/8GA$$

así que la deformación por acción del cortante es:

$$\delta_{L/2} = 6/5 \times \left[(1-.5)\ (wL^2/8GA) - .5\ (-wL^2/8\ GA)\right]$$

$$\delta_{L/2} = 3wl^2/20GA$$

Debido a la flexión:

$$\delta_{L/2} = 5wL^4/384\ EI$$

Sustituyendo los valores correspondientes tenemos que las deflexiones al centro del claro por cortante y flexión son:

δ Cortante = 1.81×10^{-2} cm.

δ Flexión = 6.3×10^{-2} cm.

δ Total = 8.11×10^{-2} cm.

Como puede verse, la deformación total está compuesta en un 77.7°/o por la acción del momento y un 22.3°/o por acción del cortante. Esta magnitud de deformación debida al cortante no puede ser despreciada. La diferencia crece al disminuir el tamaño del claro o al aumentar el peralte de la viga.

4. CONCLUSION

Se presenta un procedimiento sencillo para evaluar el efecto del cortante en la deflexión de vigas de madera. Este procedimiento requiere el valor del módulo G, el cual se puede estimar a partir del módulo E. Los cálculos necesarios son sencillos y utilizan los diagramas de cortante, fáciles de encontrar en tablas ya desarrolladas de vigas bajo diversos estados de solicitación.

5. NOMENCLATURA

A_{ax} = Area bajo el diagrama V/GA comprendida entre el punto a y el x.

A_{xb} = Area bajo el diagrama V/GA comprendido entre el punto x y el b.

A = Area sección transversal

B = Ancho viga

D = Peralte viga

δ = Deflexión en cualquier punto x sobre la viga

E = Módulo de elasticidad en flexión

G = Módulo de elasticidad en cortante

I = Segundo momento de área respecto al eje centroidal

K = Constante que depende únicamente de la forma de la sección transversal de la viga.

L = Longitud del claro entre soportes de la viga

p = Razón de la distancia ax respecto al claro de la viga

p_n = Una carga cualquiera del sistema de cargas que actúan sobre la viga

τ = Esfuerzo cortante

U = Energía de deformación total

W = Intensidad de la carga uniformemente distribuida sobre la viga.

LITERATURA CONSULTADA

1.– Hilbrand H.C. Graphical solution for sheard deflection of flesural members. Wisconsin: Forest Products Laboratory, 1967.

2.– Ramírez C., y Tuk, J.B. Correlación entre el módulo de elasticidad y los módulos de ruptura y cortante en madera de Laurel. Cartago: Centro de Investigación de Ingeniería en Maderas, ITCR, 1978. Sin publicar.

3.– Roark, R. J. Formula for strees and strain. New York: Mc Graw Hill, 1954.

4.– Seely F.B. and Smith, J.O. Advanced Mechanics of materials. New York: John Wiley.