

Cálculo dinámico de las estructuras por el método de los elementos finitos

Ing. Serge Scandiuzzi*

INTRODUCCION:

Los problemas debidos a la presencia de vibraciones en un sistema mecánico, tienen solución a partir de la evaluación de las fuerzas excitadoras aplicadas a la estructura metálica y del conocimiento de sus frecuencias de resonancia, a las cuales se asocian las deformaciones dinámicas, llamadas más comúnmente "modos de vibración". Con el fin de conocer estas características intrínsecas de las estructuras, se desarrollaron métodos experimentales tales como:

- método de apropiación modal.
- método de impedancia mecánica.

Por otro lado, sobre un plano teórico, la introducción de la noción de vibraciones aleatorias, derivada de la teoría de las señales, resultó ser un auxiliar eficaz para acercarse a los fenómenos dinámicos.

Paralelamente a la difusión de estas técnicas, nuevos métodos de cálculo, debido al desarrollo de las computadoras; sustituyeron a los antiguos métodos o, por lo menos renovaron el punto de vista de manera suficientemente profunda para permitir la elaboración y el tratamiento de modelos matemáticos complejos, simulando de manera satisfactoria el comportamiento dinámico de las estructuras reales.

Entre todos estos métodos (diferencias finitas, matrices de transferencia, etc.), que utilizan el cálculo matricial, el método de los elementos fi-

nitos presentó desde su aparición en 1956, un desarrollo constante que fue consagrado por múltiples seminarios y publicaciones.

El presente artículo tiene como objetivo presentar las características principales de la aplicación de los elementos finitos al cálculo dinámico de las estructuras.

La formulación del método necesita un conocimiento previo de la dinámica de los cuerpos isotrópicos o llamado también "medio continuo".

HIPOTESIS SIMPLIFICADORA:

Con el fin de facilitar la formulación matemática de las ecuaciones fundamentales del movimiento, se han establecido las siguientes hipótesis:

- Se supone el sistema elástico, lineal e isótropo
- No existen fuerzas que dependen de la velocidad de desplazamiento.
- Los puntos de aplicación de las fuerzas exteriores son inmóviles.
- Las tensiones iniciales (mecánicas, térmicas), son nulas, lo cual simplifica la expresión de la energía elástica (potencial).

Las consecuencias de estas hipótesis, relativas a las aplicaciones en la parte dinámica son:

- Los desplazamientos considerados son pequeños.
- No existe amortiguamiento y por lo tanto, el

* Ingeniero Mecánico del Instituto Nacional de Ciencias Aplicadas de Lyon, Francia. Miembro del Programa de Cooperación Técnica, Gobierno de Francia - Instituto Tecnológico de Costa Rica.

sistema es conservativo permitiendo calcular los eigenvalores y eigenvectores.

- Los efectos giroscópicos no se toman en cuenta.

1. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO:

Las ecuaciones del movimiento suelen obtenerse de distintos métodos utilizando ya sea:

- Las ecuaciones diferenciales
- Las ecuaciones integrales de FREDHOLM
- Una aproximación energética.

FORMULACION DIFERENCIAL:

Cada punto de un cuerpo en el espacio, se define por sus coordenadas $[x]$ y su vector desplazamiento $[u(x), t]$, llamamos ρ su densidad, E su módulo de Young, ν su coeficiente de Poisson.

$$\text{con } [x]^T = [x_1, x_2, x_3] \quad [u]^T = [u_1, u_2, u_3]$$

El tensor deformación $[\epsilon]$ es igual a:

$$[\epsilon]^T = [\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}] \quad (1)$$

$$\text{con } \epsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \epsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad i \neq j (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$$

El tensor de los esfuerzos $[\sigma]$ es igual a:

$$[\sigma]^T = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}]$$

los dos tensores quedan relacionados entre sí por la ley de Hooke $[\sigma] = [H][\epsilon]$ con:

$$H = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} = \text{Tensor de elasticidad} \quad (3)$$

Analizando el estado de equilibrio de las fuerzas sobre un elemento de volumen, se obtiene la ecuación diferencial del movimiento:

$$(\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div}[u]) + \mu \Delta^2[x] - \rho \frac{\partial [u]}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

dado que las condiciones límites son independientes del tiempo, el campo de los desplazamientos se escribe:

$$[u(x, t)] = [u_0(x)] \cos(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

Sustituyendo 5 en 4 obtenemos:

$$(\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div}[u_0]) + \mu \Delta^2[u_0] + \rho \omega^2 [u_0] = 0$$

se buscan las soluciones del sistema

$$(\omega^2, [u_0(x)]) \quad (6)$$

2. METODOS DE APROXIMACIONES:

Las soluciones analíticas correspondientes a las formulaciones precedentes se obtienen únicamente para sistemas de forma muy simple. Se necesita utilizar muchas veces soluciones aproximadas, empleando:

- Sea una adaptación de las ecuaciones diferentes o integrales.
- Sea una adaptación previa del sistema: matrices de transferencia, métodos de los elementos finitos.

El método de los elementos finitos suele considerarse como un caso particular de los métodos

de aproximación que buscan las soluciones de la forma: $\sum_{i=1}^n q_i \cdot [\phi_i]$ donde, $[\phi_i]$ funciones

de espacio linealmente independientes y q_i son parámetros a determinar. Con el fin de determinar en forma aproximada las soluciones dinámicas propias del sistema considerado, es necesario la adaptación siguiente:

- El sistema se reduce a un número finito de parámetros independientes, llamados grados de libertad que definen la deformación dinámica del sistema.

Entre todos los métodos de aproximaciones existentes, el método de Rayleigh-Ritz facilita el camino hacia los elementos finitos.

- Este consiste en expresar el movimiento u de un punto cualquiera del sistema como una combinación lineal de N funciones espaciales $\phi_i(x)$ linealmente independiente; o sea:

$$[U(x, t)] = \sum_{i=1}^n [\phi_i(x, t)] q_i(t) \quad (7)$$

Para asegurar la convergencia del método, las funciones espaciales $[\phi_i]$ son escogidas entre las funciones que satisfacen las condiciones de admisibilidad cinemática.

En función de (7), la energía cinética toma la forma siguiente:

$$W_c(t) = \frac{1}{2} \int_V [\dot{U}(x, t)]^T [\dot{U}(x, t)] \rho(x) dv \quad (8)$$

de la misma forma que obtuvimos la relación (7), podemos encontrar una relación que une las deformaciones con las coordenadas generalizadas o sea:

$$[e(x, t)] = \sum_{i=1}^n [\psi_i(x)] q_i(t) \quad (9)$$

Las funciones $[\psi_i(x)]$ son para las deformaciones, funciones espaciales de referencia,

la energía elástica se convierte en:

$$W_e(t) = \frac{1}{2} \int_V [e(x, t)]^T [H] [e(x, t)] dv \quad (10)$$

utilizando las expresiones (7) y (9) obtenemos las energías de la siguiente forma:

$$W_e = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [M] [\dot{q}] \quad (11)$$

$$W_e = \frac{1}{2} [q]^T [K] [q]$$

donde las matrices de masa generalizada $[M]$ y de rigidez generalizada $[K]$ son matrices cuadráticas y simétricas de orden N , es decir:

$$M_{ij} = \int_V [\phi_i(x)]^T [\phi_j(x)] \rho(x) dv \quad (12)$$

$$K_{ij} = \int_V [\psi_i(x)]^T [H] [\psi_j(x)] dv$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange a las expresiones (11), obtenemos la ecuación matricial del movimiento.

$$[M] [\ddot{q}] + [K] [q] = 0 \quad (13)$$

Suponiendo soluciones periódicas de la forma:

$$[q] = [q_0] \cos(\omega t + \varphi)$$

obtenemos el sistema de eigenvalores siguiente:

$$([K] - \omega^2 [M]) [q_0] = 0 \quad (14)$$

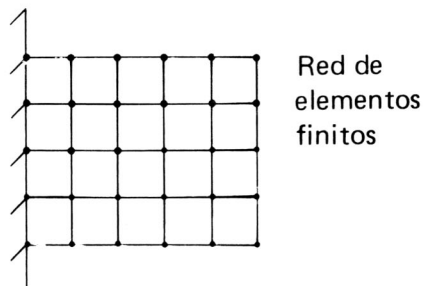
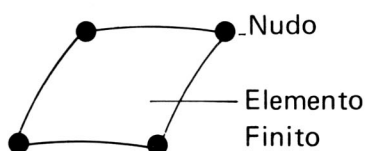
la solución de tal sistema nos da los eigenvectores y eigenvalores deseados para encontrar el campo de las deformaciones.

La precisión del método de Rayleigh Ritz depende:

- Del número de coordenadas generalizadas empleadas.
- De la capacidad de las funciones espaciales ϕ_i para representar las deformaciones dinámicas del sistema sobre cada uno de sus nudos.

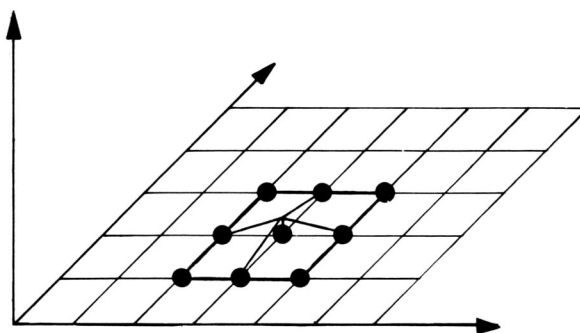
3. METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS:

En general, para un sistema cualquiera, la elección intuitiva de las funciones de referencia debe ceder su lugar a los procedimientos más sistemáticos, por eso, se determinó un cierto número de dominios contiguos llamados elementos finitos, cada uno delimitados por nudos.



El pasaje del método de Ritz al método de los E.F. se hace de la manera siguiente:

- A cada uno de los desplazamientos nudaes, se asocian funciones espaciales ϕ_i continuas en función de las coordenadas que presentan las características siguientes:
 - Con valores nulos para los puntos del sistema exterior a un dominio que agrupan los E.F. atados al nudo.
 - En este dominio, su valor es igual a uno para el nudo común a los elementos y cero sobre los otros nudos del dominio.



Ejemplo de función local ϕ_i que se extiende sobre 4 elementos y que está atada al desplazamiento del nudo común.

Una función ϕ_i determinada sobre un dominio D agrupando un número N_E de elementos puede ser definida partiendo de las funciones ϕ_{ie} afectadas a cada uno de los elementos de D y que poseen las mismas características.

$$\phi_i = \sum_{e=1}^n \phi_{ie}$$

3.1. METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS RELATIVOS A LOS DESPLAZAMIENTOS.

La formulación relativa a los desplazamientos traduce que el campo de los desplazamientos sobre un elemento es una combinación lineal de campos particulares.

Por eso, el vector desplazamiento de un punto cualquiera U , está relacionado al vector de los desplazamientos nudaes U_i del elemento E_i por

$$U = F_i U_i$$

La matriz F_i depende del tipo de elemento escogido y de las coordenadas locales del punto considerado.

Se une el campo de las deformaciones al campo de los desplazamientos por:

$\epsilon = G_i U_i$. La matriz G_i se calcula con: $\frac{\partial}{\partial x_i} F_i$. Las energías de cada elemento se suelen escribir:

$$W_{ci} = \frac{1}{2} \left[\dot{U}_i \right]^T \left[M_i \right] \left[U_i \right]$$

$$W_{ei} = \frac{1}{2} \left[U_i \right]^T \left[K_i \right] \left[U_i \right]$$

donde $\left[M_i \right]$ y $\left[K_i \right]$ designan respectivamente las matrices masa y rigidez del elemento E_i .

$$\left[M_i \right] = \int_V \rho \left[F_i \right]^T \left[F_i \right] dv \quad (18)$$

$$\left[K_i \right] = \int_V \left[G_i \right]^T \left[H \right] \left[G_i \right] dv$$

Las energías globales de la estructura se escriben:

$$W_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_{ci} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[\dot{U}_i \right]^T \left[M_i \right] \left[\dot{U}_i \right] = \frac{1}{2} \left[\dot{U} \right]^T \left[M \right] \left[\dot{U} \right] \quad (19)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_{ei} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[U_i \right]^T \left[K_i \right] \left[U_i \right] = \frac{1}{2} \left[U \right]^T \left[K \right] \left[U \right]$$

con $\left[M \right]$ y $\left[K \right]$ matrices de masa y de rigidez globales, la ecuación dinámica del movimiento es

$$\left[M \right] \left[\ddot{U} \right] + \left[K \right] \left[U \right] = 0 \quad (20)$$

es un problema de eigenvalores.

3.2. CONDICION DE CONVERGENCIA

Las soluciones aproximadas de la ecuación 20 convergen hacia las soluciones exactas 4 cuando las funciones de desplazamientos verifican las condiciones siguientes:

- Todo campo de desplazamiento constante se aproxima correctamente por la expresión (15) cuando los desplazamientos nudaes son compatibles con tal campo.

- El campo de desplazamiento sobre los bordes debe ser continuo, sus derivadas también.

La elección de funciones que averiguan tales condiciones de continuidad no es siempre fácil, y por eso, se utilizan funciones de forma dependiente del elemento.

3.3. PRINCIPALES METODOS DE RESOLUCION DEL PROBLEMA DE EIGENVALORES

Las matrices rigidez y masa generalizadas poseen propiedades particulares, son simétricas y los términos diferentes de cero están agrupadas alrededor de la diagonal principal, si la numeración de los nudos se hizo adecuadamente (generalmente se utiliza un proceso de optimización). Del hecho de las propiedades, para la resolución de las ecuaciones del movimiento, se toma únicamente media matriz pero, transformándola en forma "Faja".

El sistema de ecuaciones

$$\left(\left[K \right] - w^2 \left[M \right] \right) \left[U_o \right] = 0$$

permite obtener las frecuencias de resonancia del cuerpo donde las deformaciones dinámicas son máximas.

Los principales métodos empleados para la resolución del sistema son:

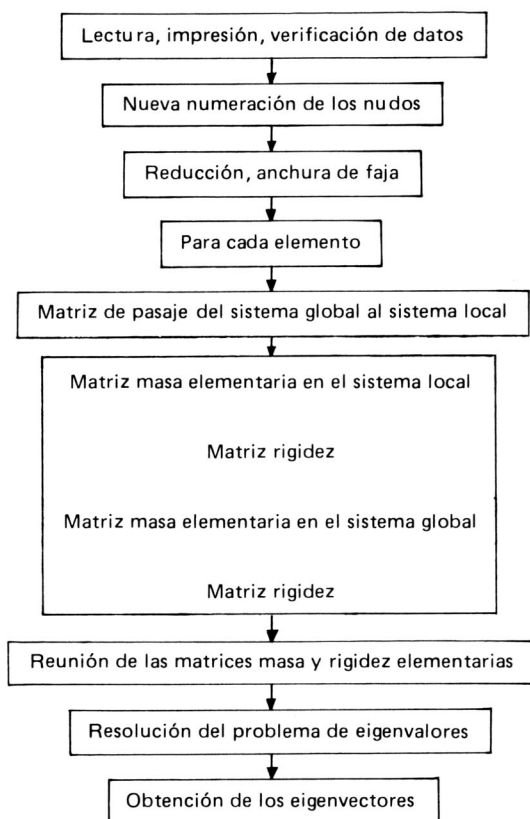
- Las series de STURN
- Método del subespacio dominante
- Método del gradiente.

3.4. PROGRAMA DE CALCULO

Un programa de cálculo sobre computadora por el método de los E.F., está dividido en subpro-

gramas teniendo cada uno una función determinada, la utilidad del programa principal es de llamarlos en orden adecuado. El tiempo de realización del programa es bastante importante, debido a que es necesario un buen conocimiento de la computadora.

ORGANIGRAMA SIMPLIFICADO



LITERATURA CONSULTADA

- PRZEMIENIECKT, J.S. **Theory of matrix structural analysis**. New York: Mc Graw Hill.
- REZETTE, J.P., and LELEUX, F. **Calcul dynamique des structures**. Note Technique No. 7 CETIM.
- ZIENKIEWICZ, O.C. **The finite element method in engineering sciences**. New York: Mc Graw Hill.
- COURBON. **Calcul des structures**. Paris: Dunod.
- JENKINS, W.M. **Matrix and digital computer methods in structural analysis**. New York: Mc.Graw Hill.