

# Cálculo de las funciones de distribución Weibull utilizando una calculadora programable

Por: Ing. Juan Tuk M.S.\*

## RESUMEN

Se presenta una breve explicación de la función de distribución de Weibull. Se incluye un procedimiento sencillo para la obtención de los tres parámetros involucrados en las funciones de probabilidad y distribución a partir de los datos experimentales. Se presenta un programa desarrollado para evaluar dichas funciones con una calculadora Texas Instruments TI-59 e impresor PC-100. Se muestra la aplicación en el trazo de una curva de distribución. Finalmente se incluye un programa que genera números aleatorios según una distribución de Weibull.

## 1. INTRODUCCION

El análisis de datos para obtener estimados de la resistencia de diseño en materiales de construcción se ha basado en la suposición de que la función de distribución es normal.

Con base en observaciones empíricas, realizadas en el estudio de las propiedades mecánicas de la madera, se notó que existe una gran diferencia entre las distribuciones de frecuencia observadas y la normal. La Figura No. 1 muestra un histograma de distribución del módulo de ruptura en madera de Botarramas (*Vochysia ferruginea*) en condición seca al 12 % de contenido de humedad.

Similares distribuciones se obtienen en componentes electrónicos tales como circuitos integrados y aún sistemas completos tales como calculadoras, etc. Estos productos presentan altos porcentajes de falla durante las primeras horas, y a medida que transcurre el tiempo de operación la probabilidad de falla va disminuyendo rápidamente.

La función de distribución que se presenta en este trabajo fue desarrollada en 1939 por el físico sueco Waloddi Weibull, con el objeto de describir el comportamiento de falla mecánica de los materiales. Sin embargo, se ha aplicado con éxito en otros campos del conocimiento como finanzas, hidrología, ingeniería y administración.

En general, la ventaja de la función Weibull es la flexibilidad para ajustarse a distribuciones de frecuencia distintas a la normal. Esta característica permite un mejor ajuste de los datos a muchas condiciones experimentales.

Las funciones de tres parámetros de Weibull tienen la siguiente forma:

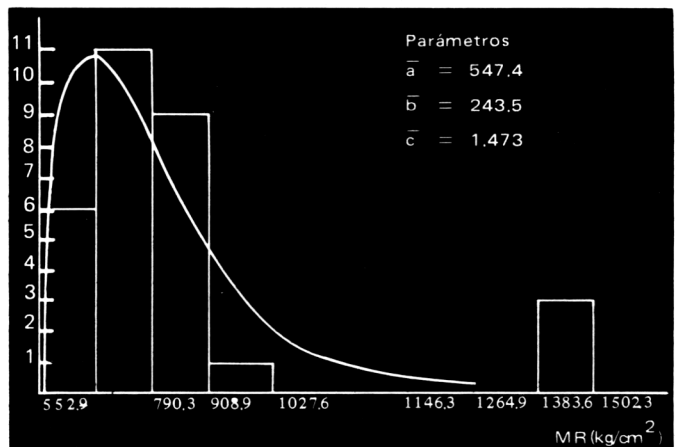


FIGURA No. 1: Histograma de distribución del módulo de ruptura en madera de Botarramas 12 % C.H. y curva de ajuste por función de tres parámetros de Weibull.

\* Ingeniero Civil y Máster en el área de Tecnología de Maderas, Director del Centro de Investigación de Ingeniería en Maderas del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

$$f(x) = \frac{a}{b} \left( \frac{x-a}{b} \right)^{c-1} \cdot \exp \left( - \frac{x-a}{b} \right)^c \quad (1)$$

$$x \geq a, b > 0, c > 0$$

$$F(x) = 1 - \exp \left( - \frac{x-a}{b} \right)^c \quad (2)$$

$$x \geq a, b > 0, c > 0$$

$$X_p = a + b (-\ln(1-p))^{1/c} \quad (2.a)$$

Donde:

- f(x) : función de distribución
- F(x) : función acumulativa
- Xp : valor de x correspondiente a una probabilidad p.
- a : parámetro de localización, también conocido como valor mínimo, origen o punto de arranque
- b : parámetro de escala
- c : parámetro de forma
- p : probabilidad de ocurrencia del valor X

Existen numerosos trabajos con el propósito de estimar los parámetros que fijan la distribución: Dell y Price (1), Dubey S. (2), Bailey R. (3), Bailey y Dell (4), Zanakis (7), entre otros.

La mimetización de la función de distribución a una distribución de una muestra dada es excelente siempre y cuando se utilicen los valores más convenientes a, b y c.

S. Zanakis (7) realizó un estudio comparativo de 17 procedimientos para estimar los tres parámetros. En este trabajo se concluye que los estimados de orden más precisos y simples fueron los siguientes:

$$\bar{a} = (y_1 y_n - y_2^2) / (y_1 + y_n - 2 y_2) \quad (3)$$

$$\bar{b} = -\bar{a} + y (.63n) \quad (4)$$

$$c = \frac{\ln \ln(1-P_k) / \ln(1-P_i)}{\ln(y_{nPk} - \bar{a}) / (Y_{nPi} - \bar{a})} \quad (5)$$

$$\div \ln(y_{nPk} - \bar{a}) / (Y_{nPi} - \bar{a}) \quad (5)$$

Ya que estos estimados son de orden, se requiere ordenar los datos de menor a mayor, asignando al primero la denominación  $y_1$ , y al máximo valor experimental observado  $y_n$ .

La simbología (.63n) significa que este valor deberá fijarse según sea el tamaño de la muestra. Por ejemplo, si n es de 20 observaciones, el valor de  $y_{(.63n)}$  será el décimo tercer valor ya que el número 12.6 se debe redondear hacia arriba.

Los valores de  $p_i$  y  $p_k$  se han fijado en 0.16731 y 0.97366 respectivamente.

Las fórmulas 3, 4 y 5 demostraron ser estimadores más precisos que aquellos de máxima verosimilitud para todos los parámetros. En especial cuando el tamaño de la muestra n es pequeño y  $c < 2$ . Esto cubre las funciones con sesgo positivo, (cola larga hacia la derecha).

## 2. PROGRAMA PARA EVALUACION DE LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCION, ACUMULATIVA Y PORCENTAJE DE PROBABILIDAD

Con el objeto de agilizar el análisis de resultados experimentales, se escribió un programa para calculadora Texas Instruments TI-59 provista con un impresor PC-100C.

La fórmula con las instrucciones para operar el programa aparece en el apéndice I.

El programa requiere 228 pasos. Una vez introducidos pueden grabarse en una tarjeta magnética usando los bancos 1 y 2. Los datos de entrada y los valores calculados son impresos con sus respectivos rótulos en el margen derecho. Debe observarse que los valores correspondientes a la función acumulativa aparecen como F(x) y los correspondientes a la función de distribución como f(x).

## 3. APLICACION DEL PROGRAMA PARA EL CALCULO DE F(x) y f(x)

Se utilizará el método de estimación de los tres parámetros según ecuaciones: 3, 4 y 5.

Los datos a emplear serán los obtenidos en un programa de pruebas a flexión de madera de Botarramas. (*Vochysia ferruginea*) en condición seca a 12 % de contenido de humedad. Los datos se listan en el cuadro No. 1 ordenados de menor a mayor.

Los valores más importantes necesarios para calcular los estimados a, b y c son:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= 552.96 & y_n &= 1502.32 \\
 y_2 &= 620.0 & y_{npk} &= 1443.54 \\
 y_{(.63n)} &= 790.99 & y_{npi} &= 665.35
 \end{aligned}$$

Luego:

$$\bar{a} = \frac{(552.96 \times 1502 - 32 - (620.01)^2)}{(552 - 96 + 1502.32 - 2 \times 620.01)}$$

$$\bar{a} = 547.44$$

$$\bar{b} = 547.44 + 790.99 = 243.5$$

$$\bar{b} = 243.5$$

$$\bar{c} = \ln \left[ \frac{\ln(1 - 0.97366)}{\ln(1 - 0.16731)} \right] \div \ln \left[ \frac{(1443.54 - 547.44)}{(665.35 - 547.44)} \right]$$

$$\bar{c} = 1.47368$$

El valor de resistencia que es mayor que un 5 0/o de la población es:

$$y_{5\ 0/o} = 579.88$$

Los valores de esta función de distribución aparecen en forma gráfica en la Figura No. 1.

Es interesante observar el valor de 5 0/o de exclusión obtenido si se asume que la función de distribución es normal. En este caso  $y_{5\ 0/o} = 441.8$ , en cuyo caso es un estimado conservador.

#### 4. SIMULACION DE LA FUNCION DE WEIBULL

Una vez desarrollada la función de distribución según se describió en los apartados anteriores a una población específica, es posible generar nuevos valores que sigan la función de distribución ajustada.

Aplicando el método de la transformada inversa a la función (2) se obtienen valores aleatorios que siguen la función de distribución de Weibull. Los detalles pueden consultarse en (5).

Luego la ecuación para generar nuevos valores viene dada por:

$$x = a + b (- \ln(1 - r))^{1/c} \quad \text{donde:}$$

$$x = \text{valor generado}$$

a, b, c = parámetros Weibull calculados según ecuaciones (3), (4), (5).

r = valor uniformemente distribuido tal que  $0 < r < 1$ .

Para utilizar la calculadora TI-59 en la generación de números Weibull se requiere utilizar el Programa No. 15 de la biblioteca maestra. Este programa genera números aleatorios hasta cinco cifras significativas. También puede emplearse el método para computadora que presenta Naylor (6).

CUADRO No. 1

Valores observados del módulo de ruptura en flexión en madera de botarramas 12 0/o C.H. ASTM-143

VALOR	ORDEN
552.96	1
620.01	2
638.47	3
656.2	4
665.35	5
667.22	6
678.44	7
682.28	8
697.99	9
702.68	10
703.27	11
718.53	12
738.32	13
745.48	14
745.74	15
748.99	16
751.12	17
778.14	18
790.99	19
812.12	20
815.61	21
831.18	22
873.3	23
875.69	24
879.83	25
903.56	26
930.08	27
1434.48	28
1443.53	29
1502.32	30

El listado de la corrida del programa aparece en la Figura No.2.

El Cuadro No. 2 corresponde a 30 valores obtenidos mediante el programa de simulación. Estos se muestran gráficamente en la Figura No. 3 donde se superpone el histograma de la función original.

**CUADRO No. 2**

**Treinta valores generados aleatoriamente según distribución Weibull de ejemplo (1).**

No. DEL VALOR	ORDEN
1	579.1
2	599.2
3	697.
4	608.2
5	608.5
6	619.1
7	628.8
8	639.9
9	640.
10	646.
11	660.91
12	664.6
13	687.3
14	707.8
15	707.8
16	717.2
17	725.3
18	760.
19	782.5
20	784.8
21	804.9
22	805.6
23	824.02
24	827.5
25	828.4
26	857.8
27	863.5
28	951.8
29	954.1
30	973.6

**FUN. WEIBULL**

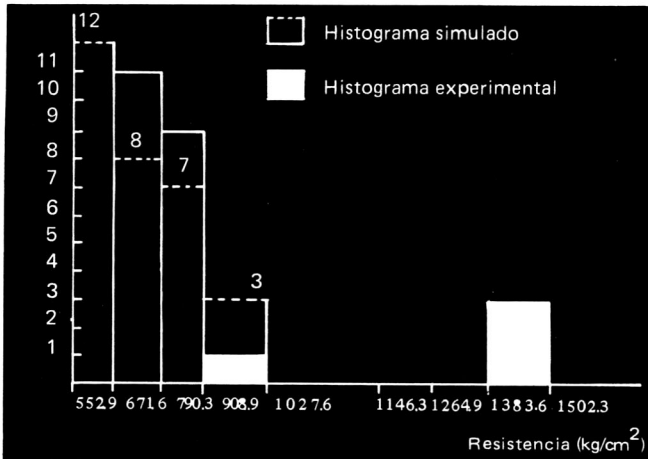
ABC	
547.44	A
243.5	B
1.4736	C
50.	P
737.320995	XP
737.320995	X
.0026896364	F ( X)
0.5	FFX
671.6	X
.0030365448	F (X)
.3097042258	FFX
552.9	X
.0009980612	F ( X)
.0037048997	FFX
671.6	X
.0030365448	F (X)
.3097042258	FFX
790.3	X
.0022321629	F (X)
.6306938465	FFX
737.3	X
.0026897993	F (X)
.4999435293	FFX
908.9	X
.0012184764	F (X)
.8330120759	FFX
1027.6	X
.0005499482	F (X)
.9341155899	FFX
1146.3	X
.0002144209	F (X)
.9768638475	FFX
1264.9	X
.0000740305	F (X)
.9926671942	FFX
5.	P
579.8838899	XP

(1) Número semilla = 5404

Los valores de A, B, C, recalculados para este grupo de datos son:

- A = 577.9
- B = 204.5
- C = 1.1903

**FIGURA No. 2** Corrida típica del programa en el cálculo del ejemplo.



**FIGURA No. 3:** Histograma de frecuencia relativa experimental y simulado para 30 datos.

## 5. CONCLUSIONES

Se presenta un método estadístico que permite adaptar una función de distribución teórica y continua a un histograma de frecuencia obtenido empíricamente.

La principal dificultad para obtener los parámetros que caracterizan una distribución dada es subsanada con el método cuyo resultado son las ecuaciones (3), (4), (5).

Debido a que los cálculos necesarios para ejecutar las ecuaciones son engorrosos y la probabilidad de errar es grande, ya que la mayor parte de los lectores no disponen de un centro de cómputo, se escribió un programa para usar una calculadora de bolsillo: Texas Instruments modelo 59 y un impresor PC-100C.

Una función de generación de números aleatorios que sigue una distribución dada de Weibull simula nuevos valores. El resultado es excelente pues en una generación pequeña de 30 datos, los nuevos reestimados de A, B, C son prácticamente invariantes como puede verse en el Cuadro No. 2, ya que el histograma simulado es similar al experimental.

El resultado se mejora al correr 100 datos, es decir, al aumentar el número de valores generados.

## LITERATURA CONSULTADA

1. Bailey, R., "Announcement: Computer programs for quantifying with the Weibull

function." *Forest Science*. 20 (3): 229, 1974.

2. Bailey, R. y Dell, T.R. "Quantifying diameter distributions with the Weibull Function". *Forest Science*. 19 (2): 97 - 104, 1973.
3. Dell, T. y Price, E., *Thoughts on using the Weibull Function to Describe Wood Properties Distribution as a Result of Drying Treatments*. Reunión F.P.R.S., Boston, 1980.
4. Dubey, Staya D., "Normal and Weibull distributions". U.S. Office of Naval Research, Naval Research Logistics Quarterly. 14: 69 - 79, 1967.
5. Hines y Montgomery. *Probability and Statistics in Engineering and Management Science*.
6. Naylor, y otros. *Técnicas de simulación en computadora*. México: Limusa, 1977.
7. Zanakis, S.H. "A Simulation Study of Some Sample Estimators for the Three - Parameter Weibull Distribution". *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 0:101-110, 1979.

## APENDICE

A continuación se presenta el procedimiento de entrada de datos y los pasos para programar la calculadora TI-59.

- I Evaluación de la función de distribución y acumulativa. Cálculo de porcentajes de probabilidad.
- II Generación de números aleatorios distribuidos según una función dada.



**I Evaluación de la función de distribución y acumulativa. Cálculo de porcentajes de probabilidad.**

000	76	LBL	060	01	1	120	53	(	180	00	0
001	16	A <sup>1</sup>	061	01	1	121	43	RCL	181	76	LBL
002	02	2	062	03	3	122	03	3	182	15	E
003	01	1	063	09	9	123	75	—	183	42	STO
004	04	4	064	04	4	124	01	1	184	06	6
005	01	1	065	43	RCL	125	54	)	185	03	3
006	03	3	066	01	1	126	95	=	186	03	3
007	01	1	067	69	OP	127	65	x	187	69	OP
008	04	4	068	06	6	128	43	RCL	188	04	4
009	00	0	069	92	INV SBR	129	03	3	189	43	RCL
010	69	OP	070	76	LBL	130	55	÷	190	06	6
011	01	1	071	12	B	131	43	RCL	191	69	OP
012	04	4	072	42	STO	132	02	2	192	06	6
013	03	3	073	02	2	133	95	=	193	55	÷
014	01	1	074	01	1	134	42	STO	194	01	1
015	07	7	075	04	4	135	07	7	195	00	0
016	02	2	076	69	OP	136	43	RCL	196	00	0
017	04	4	077	04	4	137	04	4	197	95	=
018	01	1	078	43	RCL	138	45	y <sup>x</sup>	198	94	+/-
019	04	4	079	02	2	139	43	RCL	199	85	+
020	04	4	080	69	OP	140	03	3	200	01	1
021	01	1	081	06	6	141	95	=	201	95	=
022	69	OP	082	92	INV SBR	142	94	+/-	202	23	Ln x
023	02	2	083	76	LBL	143	22	INV	203	94	+/-
024	02	2	084	13	C	144	23	LN	204	45	y <sup>x</sup>
025	07	7	085	42	STO	145	42	STO	205	43	RCL
026	02	2	086	03	3	146	05	5	206	03	3
027	07	7	087	01	1	147	49	Prd	207	35	1/x
028	00	0	088	65	X	148	07	7	208	95	=
029	00	0	089	69	OP	149	02	2	209	65	x
030	00	0	090	04	4	150	01	1	210	43	RCL
031	00	0	091	43	RCL	151	05	5	211	02	2
032	00	0	092	03	3	152	05	5	212	85	+
033	00	0	093	69	OP	153	04	4	213	43	RCL
034	69	OP	094	06	6	154	04	4	214	01	1
035	03	3	095	92	INV SBR	155	05	5	215	95	=
036	69	OP	096	00	0	156	06	6	216	42	STO
037	05	5	097	76	LBL	157	69	OP	217	08	8
038	69	OP	098	14	D	158	04	4	218	04	4
039	00	0	099	42	STO	159	43	RCL	219	04	4
040	06	6	100	00	0	160	07	7	220	03	3
041	00	0	101	04	4	161	69	OP	221	03	3
042	00	0	102	04	4	162	06	6	222	69	OP
043	00	0	103	69	OP	163	02	2	223	04	4
044	01	1	104	04	4	164	01	1	224	43	RCL
045	03	3	105	43	RCL	165	02	2	225	68	NOP
046	01	1	106	00	0	166	01	1	226	69	OP
047	04	4	107	69	OP	167	04	4	227	06	6
048	01	1	108	06	6	168	04	4	228	92	INV SUB
049	05	5	109	75	—	169	69	OP	229	00	0
050	69	OP	110	43	RCL	170	04	4	230	00	0
051	03	3	111	01	1	171	43	RCL	231	00	0
052	69	OP	112	95	=	172	05	5			
053	05	5	113	55	÷	173	94	+/-			
054	25	CLR	114	43	RCL	174	85	+			
055	91	R/S	115	02	2	175	01	1			
056	92	INV SUB	116	95	=	176	95	=			
057	76	LBL	117	42	STO	177	69	OP			
058	11	A	118	04	4	178	06	6			
059	42	STO	119	45	y <sup>x</sup>	179	92	INV SBR			



II Codificación del programa para generación de números aleatorios distribuidos según función Weibull

000	76	LBL	020	65	x	040	00	0	060	92	RTN
001	15	E	021	43	RCL	041	76	LBL	061	00	0
002	00	0	022	11	11	042	11	A	062	00	0
003	42	STO	023	85	+	043	42	STO	063	76	LBL
004	19	19	024	43	RCL	044	10	10	064	14	D
005	76	LBL	025	10	10	045	92	RTN	065	99	PRT
006	35	1/x	026	95	=	046	00	0	066	32	XIT
007	36	PGM	027	99	PRT	047	00	0	067	92	RTN
008	15	15	028	01	1	048	76	LBL	068	00	0
009	71	SBR	029	44	SUM	049	12	B	069	76	LBL
010	88	DMS	030	19	19	050	42	STO	070	16	A
011	94	+/-	031	43	RCL	051	11	11	071	36	PGM
012	85	+	032	19	19	052	92	RTN	072	15	15
013	01	1	033	77	GE	053	00	0	073	15	E
014	95	=	034	24	CE	054	00	0	074	92	RTN
015	23	LNx	035	61	GTO	055	76	LBL	075	00	0
016	94	+/-	036	35	1/x	056	13	C	076	00	0
017	45	y <sup>x</sup>	037	76	LBL	057	35	1/x	077	00	0
018	43	RCL	038	24	CE	058	42	STO	078	00	0
019	12	12	039	92	RTN	059	12	12			

**AUSA** AGENCIAS UNIDAS, S. A.

22 AÑOS DE EXPERIENCIA EN LA  
DISTRIBUCION DE LAS MEJORES  
CALIDADES DE

PAPEL, CARTULINA Y TINTAS  
PARA IMPRENTA Y LITOGRAFIA

Central Telefónica

23 76 66

Despacho de Papel

22 99 81

Bodegas

23 34 93

Establecida en 1933  
Apartado 10112 – San José, Costa Rica – Télex: 2128

**AUSA** AGENCIAS UNIDAS, S. A.

AGENTES DE VAPORES EN:

PUERTO LIMON                      SAN JOSE                      PUNTARENAS

JOHNSON / EFFDA  
C. N. LLOYD BRASILEIRO  
JUGOLINIYA LINE  
MITSUI O. S. K. LINES LTD.  
WESTFAL LARSEN LINE  
CIA. TRASATLANTICO ESPAÑOLA

45 Años de experiencia al servicio de los  
Importadores y Exportadores Costarricenses  
con servicios directos a los principales puertos  
de los 5 continentes

DEPARTAMENTO DE SEGUROS Y RECLAMOS

Agentes de: "The Institute of London Underwriters"

CENTRAL TELEFONICA

23 76 66

LIMON

58 03 38

PUNTARENAS

61 00 98



Establecida en 1933  
Apartado: 10112  
San José, Costa Rica  
Télex: 2128