

Simulación de un *proceso de Poisson* no estacionario usando la metodología *thinning*: el caso de arribo de clientes durante una semana típica a una sucursal bancaria

Fecha de recepción: 27/10/2009

Fecha de aceptación: 27/10/2009

Marcos Moya Navarro¹

Palabras Clave

Ingeniería, Industria, Investigación de Operaciones, Ciencias de la computación, Programación Matemática.

Key Words

Engineering, Industry, Operations Research, Computer Sciences, Mathematical Programming

Resumen

El siguiente artículo presenta el desarrollo de un modelo de simulación cuyo objetivo es estudiar el desempeño de una sucursal de servicios bancarios, a la que los clientes arriban de acuerdo con un proceso de *Poisson* no estacionario. Se presenta una variación de las tasas de entrada de clientes por periodos de treinta minutos durante ocho horas de trabajo al día, que resultan en una semana típica de trabajo. El modelo de simulación desarrollado incorpora dos

procedimientos: uno de control de los periodos de tiempo conforme éstos van transcurriendo, el cual permite controlar la lógica del modelo de simulación; y otro de filtrado de los datos de arribo, que sigue la metodología de cálculo de la probabilidad de aceptación sugerida en el Algoritmo de Thinning. El artículo muestra el tratamiento de los datos de entrada al modelo de simulación, el procedimiento de filtrado de éstos y los resultados obtenidos. El modelo de simulación fue desarrollado mediante el Programa de Simulación Arena® y consta de seis sub-modelos (uno de control de lógica, uno de creación de arribos de clientes y cuatro de operación de ventanillas de servicio).

Abstract

This paper presents the development of a simulation model to study the performance behavior of banking branch facilities, to which customers arrive following a Non-Stationary Poisson Process. The arrival

1. Escuela de Ingeniería en Producción Industrial. Instituto Tecnológico de Costa Rica. Correo electrónico: mmoya@itcr.ac.cr.

rates show variations in periods of thirty minutes during eight hours of work per day for a typical week. The simulation model incorporates two procedures: The first one has the main objective of controlling the group of periods of time as they pass and the second one the filtering of arrivals following the methodology suggested by the Thinning Algorithm. The article shows the input data processing, the filtering process thereof, and the results obtained. The model was developed by using the Arena® Simulator software, and consists of six sub-models, one for the simulation's logic control, one for customer arrivals building, and four for the bank tellers' operation.

Introducción

Los procesos de arribo no estacionarios de clientes se caracterizan por tener un patrón de llegadas en el que las tasas de arribo varían conforme el tiempo va transcurriendo. Este proceso típico de arribos es muy común en sistemas o facilidades de servicio, tales como bancos, restaurantes de comidas rápidas o tráfico de vehículos en carreteras, y requiere un tratamiento diferente al que regularmente se les da a los procesos estacionarios. Los patrones de llegada se modelan en muchos sistemas como procesos de *Poisson* estacionarios, en los cuales los arribos ocurren uno a la vez, son independientes unos de otros y ocurren a una tasa promedio de arribos constante en el tiempo. Esto quiere decir que el tiempo entre llegadas es aproximadamente exponencial, con una tasa promedio de llegadas igual a λ . Sin embargo, en los sistemas reales, los patrones de arribo de clientes son, en general, no estacionarios (Ross).

Cuando el patrón de llegadas a una facilidad es un proceso de *Poisson* no estacionario, pero se modela como un proceso de *Poisson* estacionario, hay un alto riesgo de producir resultados inválidos en el modelo de simulación. Véase el siguiente

ejemplo: los datos de tasas de arribo a la sucursal bancaria indican que para el periodo número ocho de 30 minutos (clientes que llegan entre las 12 y las 12:30 del día), los clientes llegan a la sucursal bancaria a una tasa promedio de 0,16 clientes por minuto, lo cual equivale a un promedio de 5 clientes cada media hora. En el siguiente periodo de 30 minutos (clientes que llegan entre las 12:30 y las 13:00 horas) la tasa promedio de arribos es de 1,68 clientes por minuto, lo cual equivale a un promedio de 50 clientes cada media hora. Supóngase que un cliente llegó al minuto 28 del octavo intervalo y se genera el próximo tiempo entre arribos de manera exponencial con tasa promedio de 5 clientes cada media hora. Un resultado obtenido con esta tasa promedio para el tiempo entre llegadas es de 34,06 minutos, lo cual significaría que durante el noveno periodo de 30 minutos no llegó ningún cliente a la sucursal bancaria. Sin embargo, como se indicó anteriormente, la tasa promedio es de 50 clientes para ese intervalo específico de media hora.

Esta es la razón por la que se justifica dar un tratamiento especial a los patrones de llegada que siguen los procesos de Poisson no estacionarios. En estos procesos, si la tasa de arribo $\lambda(t)$ cambia con el tiempo, entonces los tiempos entre arribos t_1, t_2, \dots no están idénticamente distribuidos, por lo que no es apropiado ajustar una sola distribución de probabilidad para los t_i , como, por ejemplo, la distribución exponencial con tasa de arribos λ constante en el tiempo (Kelton, Sadowski y Sadowski, 2002).

El proceso estocástico $\{ N(t), t \geq 0 \}$ se dice que es un *proceso de Poisson no estacionario* si cumple las siguientes dos propiedades:

- los clientes arriban uno a la vez,
- el número de clientes que llega en el periodo $t + s$ es independiente de los que llegan en el periodo t , esto es

$\{N(t + s) - N(t)\}$ es independiente de $\{N(u), 0 \leq u \leq t\}$

en donde $N(t)$ es el número de eventos que ocurre hasta el tiempo t . La tasa de arribos $\lambda(t)$ es ahora una función del tiempo.

En consecuencia, si $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de *Poisson* no estacionario, entonces:

$$P[N(t+s) - N(t) = k] = \frac{e^{-\lambda(t,s)} [\lambda(t,s)^k]}{k!} \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots \text{ y } t, s \geq 0$$

donde $\lambda(t,s) = E[N(t+s)] - E[N(t)]$.

Varios autores han propuesto procedimientos para la estimación de la función de tasa de arribos dependientes del tiempo $\lambda(t)$, con el fin de permitir una función de la forma polinomial por tramos. Entre estos autores se incluyen a Kao y Chang (1988), Lewis y Shedler (1976), y Klein y Roberts (1984).

Estimación de la función de tasa de arribos $\lambda(t)$

El procedimiento que se usó para la estimación de la función $\lambda(t)$ en el modelo de simulación desarrollado para la sucursal bancaria, es una generalización de los procedimientos expuestos por los autores antes mencionados. Se recolectaron tiempos de arribo entre las 8:30 a.m. y las 3:30 p.m. en cinco días diferentes de una semana típica de trabajo de la sucursal. Se determinó que el patrón general del tiempo entre llegadas de los clientes es aproximadamente exponencial con un error cuadrático igual a 0,00139, lo cual es equivalente a decir que el patrón de llegadas es un proceso de *Poisson*. La Figura 1 muestra la distribución de probabilidad de los tiempos entre llegadas. Además, mediante la observación de las características de los arribos de los clientes durante el día y de una prueba estadística de análisis de varianza, se determinó que la tasa de arribos durante el día de trabajo

varía significativamente y que, por tanto, las dos propiedades de los procesos de *Poisson* no estacionarios se aplican.

Procedimiento para obtener la función $\lambda(t)$

Para obtener la estimación de la función de arribos $\lambda(t)$ se siguió el siguiente procedimiento:

Paso 1. Se dividió el intervalo de 7 horas de trabajo en 14 sub-intervalos de 30 minutos cada uno de la siguiente manera:

[8:30 A 9:00), [9:00 A 9:30), [9:30 A 10:00), , [2:30 A 3:00), [3:00 A 3:30)

Paso 2. Se determinó el número de arribos en cada sub-intervalo para cada día de trabajo seleccionado. Los datos obtenidos se muestran en el Cuadro 1.

Paso 3. Se determinó el número promedio de arribos en cada sub-intervalo, al promediar los arribos de los cinco días de trabajo seleccionados. Los datos obtenidos se muestran en el Cuadro 2.

Una prueba de análisis de varianza tradicional, usando Minitab®, indica que hay suficiente evidencia, con un 95% de confianza, para pensar que las variaciones entre las tasas promedio de llegadas son significativas. Véase la Figura 2. Una prueba de análisis de varianza no paramétrica sugiere el mismo resultado.

Paso 4. Para obtener un estimado de la tasa de arribos en cada sub-intervalo, se dividió el número promedio de arribos de cada sub-intervalo entre la longitud del intervalo de 30 minutos. Los datos obtenidos se muestran en el Cuadro 3.

El tamaño apropiado del intervalo de tiempo, que en este caso es de 30 minutos, se seleccionó de manera subjetiva, al examinar, por experiencia, las variaciones de los datos de las llegadas de clientes. Una regla que podría usarse para calcular el número de intervalos es la regla de

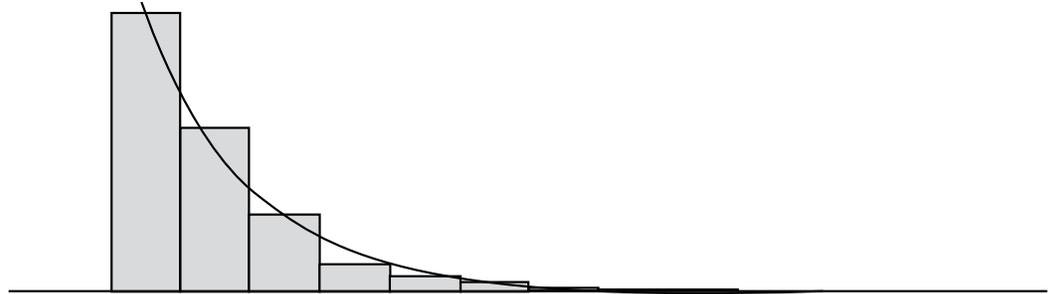


Figura 1. Distribución de probabilidad de los tiempos entre llegadas de los clientes a la sucursal bancaria.

Cuadro 1. Número de arribos de clientes a la sucursal bancaria

Día	8:30 - 9:00	9:00 - 9:30	9:30 - 10:00	10:00 - 10:30	10:30 - 11:00	11:00 - 11:30	11:30 - 12:00
21/11/2005	42	63	69	72	66	51	48
22/11/2005	99	111	93	93	75	63	39
23/11/2005	75	72	51	60	63	78	42
24/11/2005	93	57	27	48	45	66	57
25/11/2005	81	69	51	69	72	60	42

Día	12:00 - 12:30	12:30 - 13:00	13:00 - 13:30	13:30 - 14:00	14:00 - 14:30	14:30 - 15:00	15:00 - 15:30
21/11/2005	6	36	42	78	69	69	75
22/11/2005	3	72	51	75	66	42	48
23/11/2005	3	42	33	72	45	30	72
24/11/2005	3	51	33	72	57	69	81
25/11/2005	9	51	75	75	81	111	90

Cuadro 2. Número promedio de arribos de clientes a la sucursal bancaria

Día	8:30 - 9:00	9:00 - 9:30	9:30 - 10:00	10:00 - 10:30	10:30 - 11:00	11:00 - 11:30	11:30 - 12:00
Promedio	78	74	58	68	64	64	46

Día	12:00 - 12:30	12:30 - 13:00	13:00 - 13:30	13:30 - 14:00	14:00 - 14:30	14:30 - 15:00	15:00 - 15:30
Promedio	5	50	47	74	64	64	73

ANALYSIS OF VARIANCE ON Clientes			
SOURCE	DF	SS	MS
Periodo	13	22807	1754
ERROR	56	16063	287
TOTAL	69	38870	

F 6.12 P 0.000

LEVEL	N	MEAN	STDEV
1	5	78.00	22.25
2	5	74.40	21.26
3	5	58.20	24.52
4	5	68.40	16.62
5	5	64.20	11.73
6	5	63.60	9.81
7	5	45.60	7.16
8	5	4.80	2.68
9	5	50.40	13.65
10	5	46.80	17.44
11	5	74.40	2.51
12	5	63.60	13.48
13	5	64.20	31.22
14	5	73.20	15.67

POOLED STDEV = 16.94

INDIVIDUAL 95% CI'S FOR MEAN
BASED ON POOLED STDEV

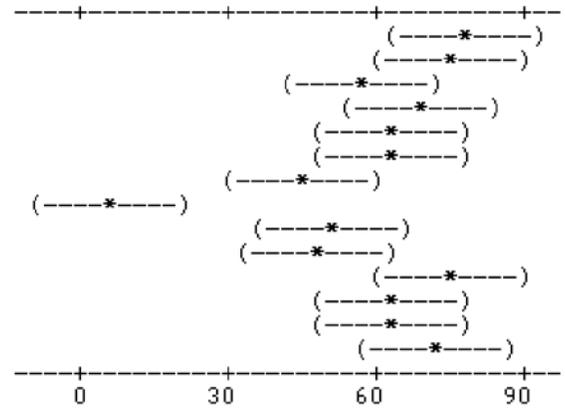


Figura 2. Análisis de varianza de los tiempos entre llegadas de los clientes a la sucursal bancaria, por periodos de treinta minutos.

Cuadro 3. Estimación de la función $\lambda(t)$ en clientes por minutos para la sucursal bancaria

Sub-Intervalo	8:30 - 9:00	9:00 - 9:30	9:30 - 10:00	10:00 - 10:30	10:30 - 11:00	11:00 - 11:30	11:30 - 12:00
$\lambda(t)$	2,600	2,480	1,940	2,280	2,140	2,120	1,520
Sub-Intervalo	12:00 - 12:30	12:30 - 13:00	13:00 - 13:30	DÍA	13:30 - 14:00	14:00 - 14:30	14:30 - 15:00
$\lambda(t)$	0,160	1,680	1,560	2,480	2,120	2,140	2,440

Sturges (1926), que también se utiliza para calcular el número apropiado de intervalos de una distribución de frecuencias. Puede consultarse este procedimiento en Moya, 1995.

La Figura 3 muestra, de manera gráfica, la función de arribos $\lambda(t)$ estimada en clientes por minuto. Esta figura muestra la tendencia de variación de las tasas de llegada durante los diferentes periodos en que la sucursal bancaria está abierta, lo cual evidencia que hay alta variabilidad de las tasas de llegada entre un intervalo de tiempo y otro. Esta variabilidad hace

que sea conveniente estudiar este tipo de sistemas de servicio por medio de procesos de *Poisson* no estacionarios.

Procedimiento de construcción del modelo

Definición del problema

Los clientes llegan a la sucursal bancaria siguiendo un Proceso de *Poisson* no Estacionario, cuyas tasas de llegada, indicadas por la función $\lambda(t)$, se muestran en la Figura 3. Una vez que los clientes arriban, deciden a cuál tipo de caja deben

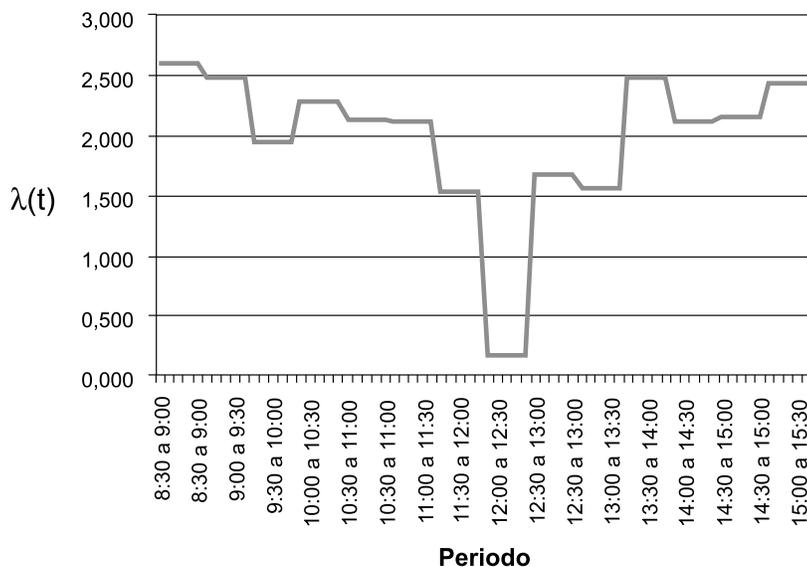


Figura 3. Gráfico de la función $\lambda(t)$, expresada en clientes por minuto para el proceso de arribo de clientes a la sucursal bancaria.

dirigirse. Los datos recogidos indican que el 9,61% de lo clientes van a la caja de menudo, el 58,52% se dirige a las cajas normales, el 8,95% se dirige a la caja preferencial y, finalmente, el 22,93% se dirige a la caja rápida. Los clientes que van a la caja de menudo, preferencial o rápida pueden encontrarla cerrada, de acuerdo con del momento en que lleguen, pues podría ocurrir que el cajero o cajera esté en su periodo de comida de una hora, o bien en su periodo de descanso de quince minutos en la mañana o en la tarde. Cuando esto ocurre, los clientes que encuentran cerrada la caja de menudo se dirigen a las cajas normales, si la caja cerrada es la preferencial se dirigen a la caja rápida y, por último aquellos que buscan las cajas van a las cajas normales.

Todos los cajeros de la sucursal bancaria trabajan ocho horas al día con un periodo de 15 minutos de descanso en la mañana, otro periodo de 15 minutos en la tarde y una hora de comida. La Figura 4 indica los horarios de descanso y almuerzo correspondientes de los cajeros o cajeras.

Estimación de los tiempos de servicio de los cajeros

La sucursal bancaria cuenta con cuatro tipos de cajas: de menudo, normales, preferenciales y rápidas. Generalmente se cuenta con una caja de menudo, una caja preferencial, una caja rápida y cinco cajas normales. Con respecto a las cajas normales, una prueba de análisis de varianza indica, con un 95% de confianza, que no hay diferencias significativas entre los tiempos promedio de servicio de los cinco cajeros, por lo que se considera, para efectos de este modelo de simulación, que los cinco cajeros o cajeras son idénticos. El Cuadro 4 resume las ecuaciones de generación de las variables aleatorias de los tiempos de servicio para los cuatro tipos de cajas.

El Cuadro 4 indica que, en general, los tiempos de servicio en las diferentes ventanillas sigue un patrón de probabilidad logarítmico normal, lo cual tiende a darse en procesos de tipo multiplicativo, así como la distribución normal se da en procesos aditivos (Pritsker, O'Reilli y Laval, 1997). Este patrón de probabilidad es apropiado en las transacciones bancarias en donde el valor observado de una variable es una proporción aleatoria del valor anterior observado, tal y como ocurre en los depósitos bancarios, por ejemplo.

Desarrollo del modelo de simulación

El modelo de simulación está dividido en seis segmentos, los cuales se enumeran a continuación:

- Creación del sub-modelo de control de lógica.
- Creación del sub-modelo de arribos.
- Creación del sub-modelo de caja de menudo.
- Creación del sub-modelo de cajas normales.

Cajero	Periodos de 15 Minutos														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Menudo						■						■	■	■	■
Normal 2							■						■	■	■
Normal 3								■						■	■
Normal 5									■						■
Normal 6										■					
Normal 8											■				
Rápida								■						■	■
Preferencial							■					■	■	■	■

Cajero	Periodos de 15 Minutos														
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Menudo							■								
Normal 2	■							■							
Normal 3	■	■							■						
Normal 5	■	■	■							■					
Normal 6	■	■	■	■							■				
Normal 8		■	■	■	■							■			
Rápida	■	■							■						
Preferencial								■							

Figura 4. Horarios de Descanso y Almuerzo de los Cajeros de la Sucursal Bancaria.

Cuadro 4. Tiempos de servicio para los cuatro tipos de cajas de la sucursal bancaria

Tipo de caja	Generador de tiempo de servicio	Error estándar
Menudo	LOGN(4,14; 6,9)	0,000766
Normal	-0,001 + LOGN(4,56; 5,48)	0,000476
Preferencial	LOGN(2,23; 2,03)	0,001485
Rápida	23 * BETA(0,368; 3,56)	0,007753

- Creación del sub-modelo de caja preferencial.
- Creación del sub-modelo de caja rápida.

En la Figura 5 se muestra el modelo de simulación con los seis sub-modelos desarrollados.

Se comentarán en este artículo únicamente los sub-modelos de control de lógica y creación de arribos de clientes a la sucursal bancaria. Para los demás sub-modelos solo se hará una descripción general.

Creación del sub-modelo de control de lógica

El objetivo del sub-modelo de control de lógica es indicarle al modelo de simulación en cuál periodo de treinta minutos se encuentra el sistema. Cada periodo de tiempo está numerado del 1 al 14. Con este dato, el modelo de simulación podrá controlar, mediante el sub-modelo de creación de arribos, la tasa de arribo para ese periodo, y permitirá determinar si el tiempo entre llegadas generado para ese periodo es válido, o debe descartarse, con el fin de evitar los problemas indicados en la sección de introducción de este artículo.

La lógica de este sub-modelo se muestra en la Figura 6.

Sub-modelo de creación de arribos

El sub-modelo de creación de arribos de clientes a la sucursal bancaria controla que los arribos ocurran de acuerdo con un proceso de llegadas *Poisson* de tasa variable.

El sub-modelo de arribos crea las entidades (clientes que llegan al banco) según el programa de arribos denominado “Llegadas”, el cual hace que las entidades se generen con tiempos entre llegadas exponencialmente distribuidas, de acuerdo con el número de llegadas, expresado por la función $\lambda(t)$ obtenida anteriormente (ver Hillier y Lieberman, p. 778).

Como indican Law y Kelton (2000), se debe tener mucho cuidado con la generación de procesos de *Poisson* no estacionarios de manera válida. Para el modelo de simulación desarrollado en este trabajo se usó un método general y sencillo propuesto por Lewis y Shelter (1979), conocido como Algoritmo de Thinning. Para su implementación, se generó un proceso de *Poisson* no estacionario con tasa variable $\lambda(t)$ y tiempos entre arribos

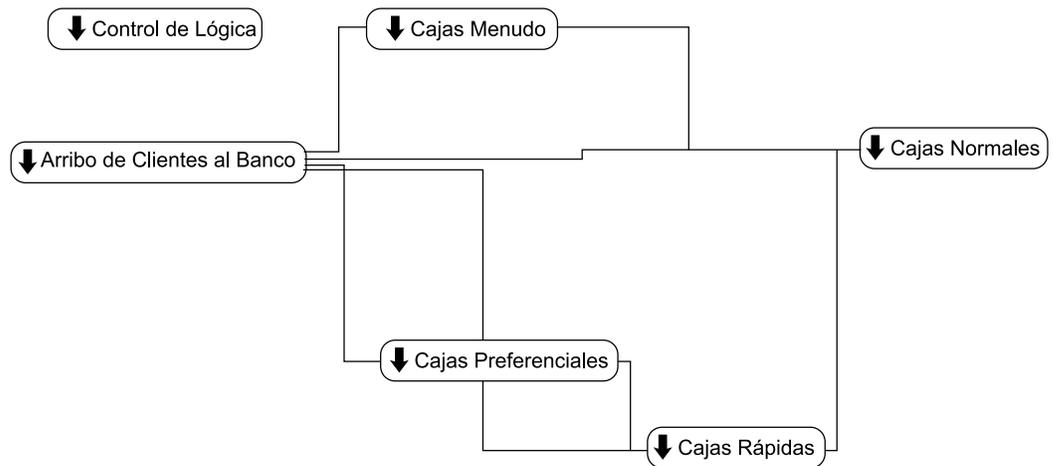


Figura 5. Modelo de primer nivel para la simulación de la sucursal bancaria.

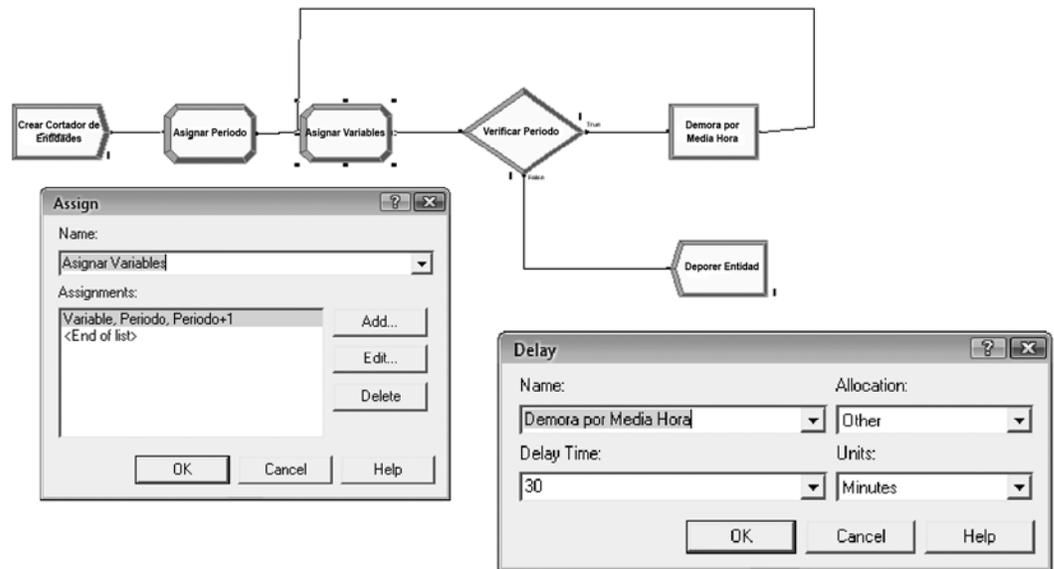


Figura 6. Sub-modelo de control de lógica para la simulación de la sucursal bancaria.

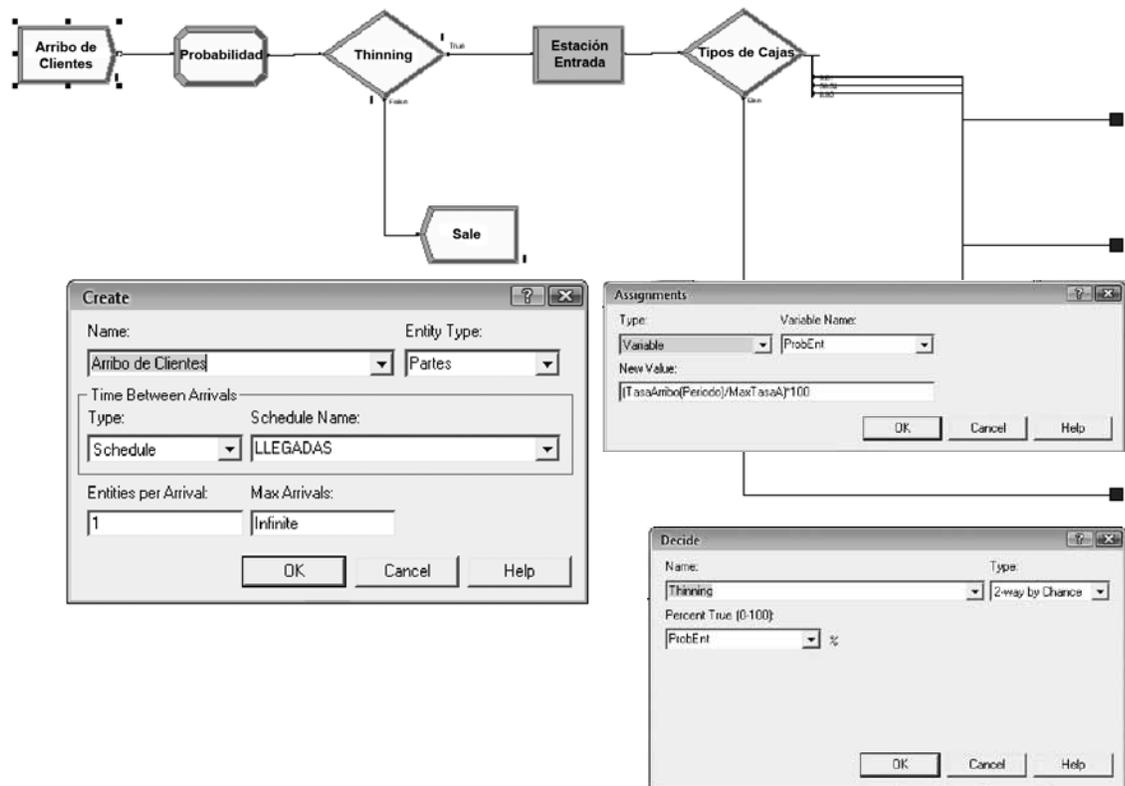


Figura 7. Sub-modelo de creación de arribos con la implementación del Algoritmo de Thinning.

t_i . Los tiempos entre arribos se generaron mediante el programa denominado “LLEGADAS”, implementado en el módulo de creación de entidades. Luego, si los valores generados del tiempo entre llegadas t_i no son apropiados, se rechazan con probabilidad $1 - \lambda(t) / \lambda^*$, en cuyo caso, $\lambda^* = \max\{\lambda(t)\}$.

La Figura 7 muestra el procedimiento de generación de arribos.

Creación de los sub-modelos de cajas

La lógica básica seguida para la construcción de los sub-modelos de cajas es similar para todos los tipos de cajas. Los pasos son los siguientes:

1. el cliente llega al banco, si está abierto entra, si no, abandona la sucursal;
2. el cliente se dirige a la ventanilla que le corresponde; en las ventanillas de cajas normales:
 - el cliente se junta a la fila de espera,
 - demora el tiempo de servicio cuando le toca el turno de ser atendido, y
 - abandona la sucursal bancaria.

Con respecto a las otras ventanillas, si están abiertas se sigue el mismo procedimiento, pero, si la ventanilla está cerrada, el cliente

se dirige a otra ventanilla, tal y como se indica en la figura 5 y sigue el mismo procedimiento.

Resultados y conclusiones

Para efectos de la sucursal bancaria, hay dos medidas de desempeño que son muy importantes desde el punto de vista de servicio al cliente. Estas medidas están relacionadas con el tiempo de ciclo de los clientes, entendido como el tiempo total que le toma a un cliente, desde que entra al banco hasta que lo abandona, así como con el tamaño de la fila en las cajas. La Figura 8 muestra, como ejemplo, el comportamiento del tiempo de ciclo de los clientes en general para la réplica 10 de la simulación.

La Figura 9 indica que hay suficiente evidencia, con un 95% de confianza, para creer que el tiempo de ciclo promedio combinado de los clientes en general es un valor que varía entre 20,84 y 23,22 minutos. Sobre la base de 100 réplicas, el valor promedio es de 22,03 minutos. La figura 9 también muestra los tiempos de ciclo promedio para cada una de las cajas correspondientes.

La Figura 10 muestra, a manera de ejemplo, el comportamiento del tamaño de la fila en las cajas normales, para la réplica 10.

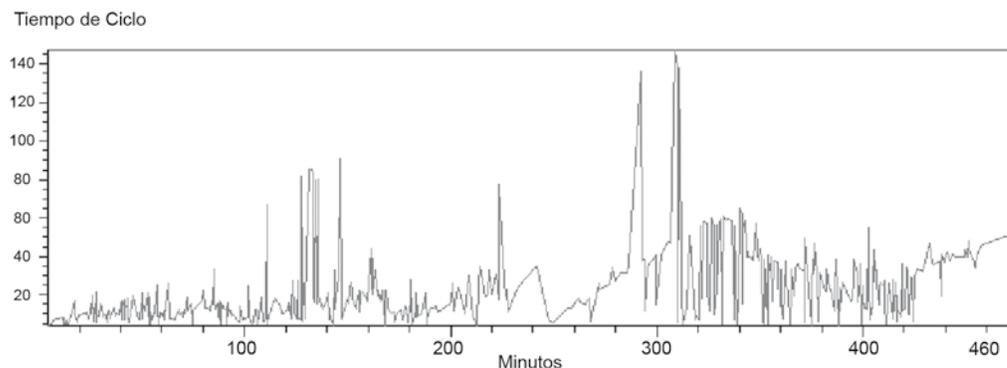


Figura 8. Gráfico del comportamiento del tiempo de ciclo general, en la réplica 10, de los clientes de la sucursal bancaria.

Interval	Average	HalfWidth	Minimun Average	Maximun Average
Tiempo de Ciclo	22.0342	1,19	12.5786	47.4220
Tpo Ciclo Caja Menudo	16.1243	2,02	5.0651	55.5110
Tpo Ciclo Caja Pref	5.3796	0,20	3.8816	10.2092
Tpo Ciclo Caja Rapida	15.0060	1,13	5.1938	29.9614

None	Average	HalfWidth	Minimun Average	Maximun Average
Tpo Ciclo Caja Norm 2	23.6915	1,91	9.4874	68.1008
Tpo Ciclo Caja Norm 3	25.0596	1,75	12.2502	60.4992
Tpo Ciclo Caja Norm 5	23.1720	1,80	10.2249	57.9666
Tpo Ciclo Caja Norm 6	24.7309	1,76	11.8540	62.7421
Tpo Ciclo Caja Norm 8	23.5233	1,99	8.9601	68.7075

Figura 9. Comportamiento del tiempo de ciclo general de los clientes de la sucursal bancaria.

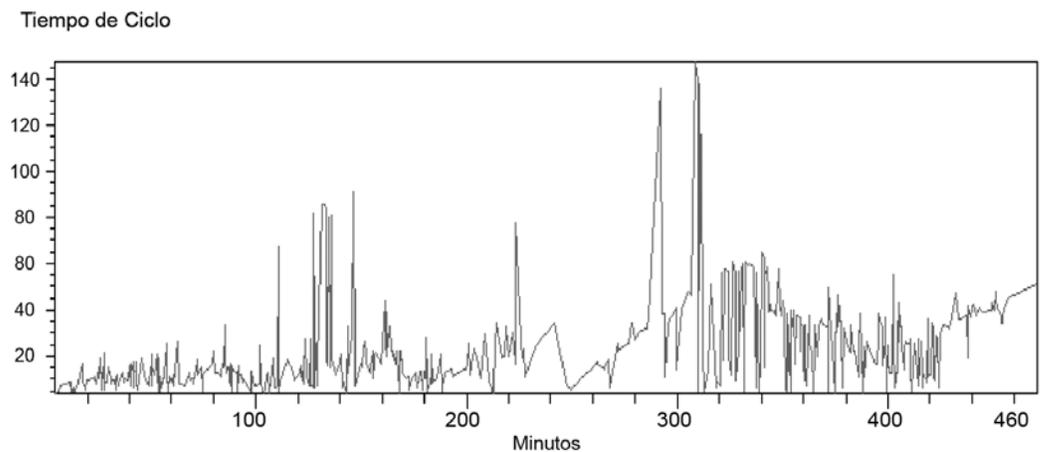


Figura 10. Comportamiento del tamaño de la fila en las cajas normales para la réplica 10.

La Figura 11 indica que las cajas normales forman los cuellos de botella de la sucursal. El tamaño promedio de la fila para estas cajas, sobre la base de 100 réplicas, se estima en 13,66 clientes, por lo que hay suficiente evidencia para creer, con un 95% de confianza, que el tamaño promedio de

fila, en general, tiene un valor estimado de entre 12,17 y 15,15 clientes.

La Figura 11 también indica que el tiempo promedio de espera en fila para las cajas normales se estima en un promedio de 17,37 minutos. En consecuencia, hay evidencia suficiente para creer que el

Waiting Time	Average	HalfWidth	Minimun Average	Maximun Average
Cajas Menudo Queue	9.9486	1,88	0.5022	47.2371
Cajas Normales Queue	17.3731	1,78	4.4515	56.5615
Cajas Preferenciales Queue	1.1188	0,16	0.1313	4.9582
Cajas Rapida Queue	10.7588	1,09	1.5215	25.4907

Number Waiting	Average	HalfWidth	Minimun Average	Maximun Average
Cajas Menudo Queue	0.9628	0,18	0.03557485	4.1362
Cajas Normales Queue	13.6576	1,49	3.1903	46.3237
Cajas Preferenciales Queue	0.1116	0,02	0.01066464	0.5681
Cajas Rapida Queue	2.8145	0,31	0.3392	7.3817

Figura 11. Comportamiento del tamaño de la fila y el tiempo de espera en las cajas normales.

tiempo promedio gastado en la fila tiene un rango que va de 15,59 a 19,15 minutos.

Los resultados finales de la simulación indican que se atendieron, en promedio, 834 clientes, resultado obtenido sobre la base de las 100 réplicas obtenidas con el modelo.

Optimización del tiempo de ciclo

La Figura 12 muestra los resultados obtenidos del proceso de optimización del

tiempo de ciclo, mediante la herramienta OptQuest®.

Los resultados indican que el tiempo mínimo de ciclo alcanzado, después de hacer 31 simulaciones de 5 réplicas cada una, fue de 19,48 minutos, que se puede alcanzar con cuatro cajeros normales y los restantes tres cajeros de las cajas de menudo, preferencial y rápida. La tabla también indica que, conforme disminuye

Best Solutions											
Act	Simulation	Objective Value	Status	Cajero Norm 2	Cajero Norm 3	Cajero Norm 5	Cajero Norm 6	Cajero Norm 8	CajeroMen	CajeroPref	CajeroRap
	13	19,48800	Feasible	1	1	0	1	1	1	1	1
	1	20,000128	Feasible	1	1	1	1	1	1	1	1
	12	20,007636	Feasible	1	1	1	0	1	1	1	1
	10	20,475651	Feasible	1	0	1	1	1	1	1	1
	11	20,602633	Feasible	1	1	1	1	0	1	1	1
	14	20,894817	Feasible	0	1	1	1	1	1	1	1
	8	27,207608	Feasible	1	0	1	1	0	1	1	1
	31	27,643133	Feasible	0	0	1	0	1	1	1	1
	9	27,885907	Feasible	1	0	0	1	1	1	1	1
	25	28,054705	Feasible	0	0	1	1	0	1	1	1
	24	28,061447	Feasible	0	0	0	1	1	1	1	1
	6	28,243167	Feasible	1	0	1	0	1	1	1	1
	15	28,455169	Feasible	0	1	0	1	1	1	1	1
	7	28,850054	Feasible	0	0	1	1	1	1	1	1
	16	28,948454	Feasible	0	1	1	1	0	1	1	1
	18	29,053790	Feasible	0	1	1	0	1	1	1	1
	28	30,676513	Feasible	0	1	1	0	0	1	1	1
	5	30,676513	Feasible	0	1	0	0	1	1	1	1
	4	30,945607	Feasible	0	1	0	1	0	1	1	1
	30	31,918794	Feasible	1	1	0	1	0	1	1	1

Figura 12. Optimización del tiempo de ciclo de los clientes por medio de OptQuest®.

el número de cajeros normales, el tiempo de ciclo se aumenta considerablemente.

Se concluye que con el patrón de llegadas *Poisson* no estacionario actual, el tiempo mínimo de ciclo que se puede alcanzar es de 19,48 minutos y sólo se requieren cuatro cajas normales operando. Debe resaltarse la importancia de estudiar correctamente los procesos de servicio que se comportan como modelos de *Poisson* no estacionarios, para evitar invalidar los resultados obtenidos de los modelos de simulación.

Agradecimiento

Un agradecimiento especial a los ingenieros Manuel Yong Aguilar y Roberto Marín Artavia por haber proporcionado los datos para llevar a cabo este estudio. Ambos también estudian los sistemas de filas por medio de simulación.

Bibliografía

Hillier, F. y Lieberman, G. (2006). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. México: Mc Graw Hill.

Kao, P. y Chang, S. (1988). Modeling Time-Dependent Arrivals to Service Systems: A Case in Using a Piecewise-Polynomial Rate Function in a Nonhomogeneous Poisson Process. *Management Science*, Vol, 34, No. 11.

Kelton, W., Sadowski, R. & Sadowski, D. (2002). *Simulation with ARENA*. New York: Mc Graw Hill.

Klein, R. & Roberts, S. (1986). A time-varying Poisson arrival process generator. *Simulation* 43:193.

Law, A. & Kelton, W. (2006). *Simulation Modeling and Analysis*. New York: Mc Graw Hill.

Lewis, P. & Shedler, G. (1979). Simulation of nonhomogeneous poisson processes by thinning, *Naval Logistics Quarterly*, 26.

Moya, M. (1995). *Probabilidad y Estadística: Un Enfoque Teórico y Práctico*. Cartago: Editorial Tecnológica.

Pritsker, A., O'Reilly, J. & LaVal, D. (1997). *Simulation with visual SLAM and AweSim*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Ross, S. (1978). Average Delay in Queues with Non-stationary Poisson Arrivals. *Journal of Applied Probability* 15, 602-609.

Sturges, H. (1926). The choice of a class-interval. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 21, 65-66.