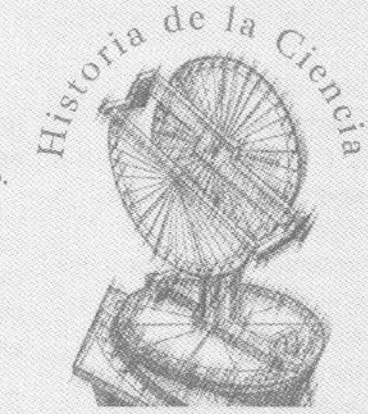
Mayorga, Alejandro. Planck, Einstein, Bose (1900-1924): *el nacimiento de la estadística cuántica* **Tecnología en Marcha**. Vol. 3 no. 7. (Sección Historia de la ciencia)




# Planck, Einstein, Bose (1900-1924) El nacimiento de la estadística cuántica

*Alejandro Mayorga**

*En 1900 PLANCK postuló una nueva constante, h, según la cual la energía radiada por el cuerpo negro no era continua como se aceptaba de acuerdo con la teoría electromagnética, sino que era una propiedad discreta. La ley de distribución de energía que contenía dicha constante representaba los datos experimentales en una forma sorprendente.*

*En 1905 EINSTEIN postuló el cuanto de luz mediante el uso de la analogía entre la radiación monocromática de baja densidad y un gas ideal. Sin embargo, durante las dos primeras décadas del siglo XX ambas derivaciones se mantenían sin fundamentar. En 1922 COMPTON logró detectar el momentum y la energía del cuanto de luz propuesto por EINSTEIN. El trabajo de BOSE, realizado en 1924, fue decisivo para la labor de fundamentación. A partir de los cuantos de luz, BOSE creó, junto con EINSTEIN, una nueva estadística que fue capaz de interpretar ambas derivaciones. El presente artículo se propone trazar el camino que condujo a este importante descubrimiento.*

## *1. Introducción*

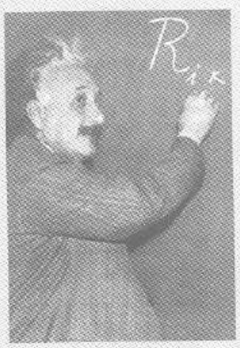
La conquista del dominio cuántico estuvo precedida de varias incursiones preliminares que marcaron las rutas que condujeron en 1925-1926 a la mecánica cuántica. La primera de estas incursiones fue llevada a cabo por **MAX PLANCK** (1858-1947) el 14 de diciembre de 1900, día en el cual presentó ante la *Academia Prusiana de Ciencias* una derivación de la ley de distribución de la energía para el cuerpo negro (propuesta por él en octubre de ese mismo año), a partir de la teoría electromagnética, la mecánica estadística y la termodinámica y que contenía una nueva constante de la naturaleza ($h$), que denominó *cuanto de acción.* Su resultado principal era que la energía radiada por el cuerpo negro debía emitirse en cantidades discretas. Esto implicaba un cambio radical respecto de la concepción electromagnética clásica de la energía, que la concebía como una cantidad continua.

La ecuación de PLANCK lograba fijar los datos experimentales en una forma extraordinaria, por lo que no podía ser fortuita. Sin embargo, era teóricamente

* *Asesor en aseguramiento de Calidad para el área de Química y egresado de Filosofía. Ha realizado, además, estudios de Matemáticas.*

inconsistente: por un lado, al reunir los resultados de la teoría electromagnética de JAMES CLERCK MAXWELL (1831- 1879) para la interacción materia-energía con la ley de equipartición de la energía de la mecánica estadística clásica, se obtenían resultados que contradecían datos experimentales aceptados; por otro lado, la ley había sido derivada a partir de argumentos probabilísticos inválidos dentro del contexto clásico. Durante las dos primeras décadas del siglo XX el significado físico de la nueva constante había quedado en suspenso, hasta que fuera posible construir un nuevo marco teórico consistente.

*Albert Einstein*



ALBERT EINSTEIN (1879-1955) intentó llegar a la nueva constante (h) abriendo nuevos senderos. Producto de esta labor, en 1905 postuló que la luz consistía de partículas (*cuantos de luz*). Más tarde se demostró que estas partículas no poseían masa ni tampoco carga eléctrica, pero poseían una energía definida, inversamente proporcional a la longitud de onda de la luz. La derivación de los cuantos de luz estaba basada en una analogía entre la radiación electromagnética de muy baja densidad y un gas ideal o una solución muy diluida, por lo que EINSTEIN utilizó el *Principio de BOLTZMANN* sin aportar ningún argumento sólido acerca de la validez de su aplicación a la radiación.

En 1924 SATYENDHRA NATH BOSE (1894-1974) mostró que la teoría de PLANCK podía deducirse a partir de la teoría einsteiniana de los cuantos de luz mediante la utilización de un innovador método estadístico, aunque Bose no se percató de ello.

El esfuerzo combinado de estos dos últimos científicos condujo a la ***estadística cuántica***, a partir de la cual se logró demostrar, además, que en el régimen de WIEN

$$\left(\frac{h\nu}{kT}>>1\right)$$

era válido el *Principio de BOLTZMANN*.

Estas tres incursiones tienen en común haber hecho uso explícito de la mecánica estadística.

El presente artículo intenta recorrer los senderos abiertos por estos tres científicos, con el fin de exponer sus aportes a la construcción de la ciencia contemporánea en el campo de la física cuántica.

## *2. Planck: 19 de octubre de 1900. Una intuición afortunada*

En junio de 1896 WILHELM WIEN (1864-1928) propuso la ecuación exponencial

$$\varphi_\lambda = C\lambda^{-5} e^{\frac{-c}{\lambda T}}$$

o, en otra expresión equivalente,

$$\rho\ (\nu, T) = \alpha\nu^3 e^{\frac{-\beta\nu}{T}}$$

para la distribución de energía radiante del cuerpo negro. Esta ecuación representaba el punto más alto alcanzado por la termodinámica y la teoría electromagnética en la búsqueda de una solución para el problema de la radiación del cuerpo negro (dependencia respecto de la temperatura y de la frecuencia de la radiación).

FRIEDRICH PASCHEN (1865-1947) sometió esta ley a control experimental y en enero de 1897 publicó los resultados. De acuerdo con PASCHEN, parecía muy difícil hallar otra función que lograra representar los datos con tan pocas constantes. Por un corto período se pensó que esta ley era la respuesta definitiva al problema que GUSTAV KIRCHHOFF (1824-1887) había propuesto en 1859.

En 1899, PLANCK intentó demostrar que la ley de WIEN era generalmente válida. Sin embargo, hacia 1900 dos grupos de investigadores del *Physikalisch Technische Reichsanstalt*, quizás el laboratorio de física mejor equipado de la época, estaban realizando experimentos sobre la radiación del cuerpo negro. En febrero de 1900 **Otto Lummer** (1860-1925) y **Ernst Pringsheim** (1859-1917) y poco después, en octubre de ese mismo año, **Heinrich Rubens** (1865-1922) y **Ferdinand Kurlbaum** (1857-1927) publicaron sus resultados: la ley de distribución de Wien no era generalmente válida y, a lo sumo, tenía el carácter de un caso límite, restringido a longitudes de onda corta y bajas temperaturas. Estos resultados fueron comunicados a Planck por Rubens el 7 de octubre de 1900, día en el cual Planck halló la nueva ecuación.

El artículo de Planck ***Acerca de una mejora de la ecuación de Wien para el espectro*** fue leído ante los miembros de la *Prussische Akademie der Wissenschaften* el 19 de octubre de 1900.

Planck supuso que la entropía (*S*) de un resonador lineal que interactuaba con la radiación era una función de su energía vibracional (*U*) y evaluó el aumento infinitesimal de entropía de un sistema de n resonadores idénticos en un campo de radiación estacionario (que no varía con el tiempo). De sus investigaciones realizadas en 1899, Planck sabía que la ley del aumento de entropía no era suficiente para determinar completamente esa función y que era necesario conocer el valor de U.

Mediante la utilización de un enfoque termodinámico, Planck propuso un conjunto de ecuaciones *completamente arbitrarias* que (Planck. 1900) "satisfacían todos los requisitos de la termodinámica y de la teoría electromagnética". Planck se sintió especialmente atraído por una ecuación que para valores de $\beta >> U$ era equivalente a la ley de Wien:

$$\frac{d^2S}{dU^2} = \frac{\alpha}{U(\beta+U)} \cong \frac{\alpha}{\beta}U^{-1} \quad \rightarrow \text{Ley de Wien}$$

$\downarrow$

Expresión más general que intentaba asimilar los nuevos datos experimentales de 1900

donde:

$\frac{d^2S}{dU^2}$ := Cambio en el aumento de entropía del sistema

S := Entropía de un resonador lineal que interactúa con la radiación

U := Energía vibracional del resonador.

De acuerdo con Planck (1900), esta era la expresión más sencilla que conducía a S como una función logarítmica de U y que, para pequeños valores de U, conducía a la expresión de Wien, la cual satisfacía todos los requisitos exigidos por la termodinámica y la teoría electromagnética. El hecho de proponer una ecuación que expresara el cambio en el aumento de entropía

$$\left(\frac{d^2S}{dU^2}\right)$$

y no una para la entropía (S), se debió a que Planck consideraba que solo el aumento de entropía de un sistema poseía sentido físico: como una medida de la irreversibilidad de un proceso. La entropía misma, según él, no poseía sentido físico.

Planck utilizó la ecuación anterior para hallar una expresión para $\frac{dS}{dU}$ :

$$\frac{dS}{dU} = \frac{\alpha}{\beta}\ln\left(\frac{U}{\beta+U}\right)$$

Al combinar esta expresión con

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$$

Planck halló para la energía del resonador en equilibrio con la radiación:

$$U = \frac{\beta}{e^{-\left(\frac{\beta}{\alpha T}\right)}-1} \qquad (1)$$

En 1899, Planck había derivado a partir de la teoría electromagnética la expresión para la radiación de energía del campo en cualquier dirección:

$$K=2\int K^{*}dv = \int E\lambda$$

$$\rightarrow \quad E_\lambda = \frac{2c}{\lambda^2} K^* \quad (2)$$

donde:

$K^*$ := intensidad por frecuencia unitaria de la radiación monocromática polarizada en una dirección

E := intensidad por longitud de onda unitaria de la radiación moncromática polarizada en una dirección

$\nu = \frac{c}{\lambda}$ con ν := frecuencia

c := velocidad de la luz en el vacío

λ := longitud de onda

En el estado estacionario $K^*$ está conectado con la energía U de un resonador mediante la ecuación:

$$K^* = (\frac{\nu^2}{c^2})U = \frac{U}{\lambda^2} \quad (3)$$

Por otro lado,

$$\frac{dS}{dU} = \frac{\alpha}{\beta} \ln(\frac{U}{U+\beta}) \Rightarrow dS = \alpha \ln(\frac{\frac{U}{\beta}}{\frac{U}{\beta}+1}) d(\frac{U}{\beta}) \Rightarrow S = \alpha f_1(\frac{U}{\beta})$$

y, según las investigaciones realizadas por Planck en 1899,

$$S = f(\frac{U}{\nu})$$

conducen a:

$$S = f(\frac{U}{\nu}) = \alpha f_1(\frac{U}{\beta}) \Rightarrow \beta \approx \nu = \frac{c}{\lambda} \quad (4)$$

Entonces de 2,3,1 y 4 se tiene:

$$E_\lambda = \frac{2c}{\lambda^4} U = \frac{2c}{\lambda^4} \frac{\beta}{e^{-(\frac{\beta}{\alpha T})} - 1} \approx \frac{2c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{-(\frac{c}{\alpha \lambda T})} - 1}$$

$$E_\lambda = \frac{2ac^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{-(\frac{c}{\alpha \lambda T})} - 1}$$

Haciendo

$$k_1 = 2ac^2 \quad \text{y} \quad k_2 = -(\frac{c}{\alpha})$$

obtenemos:

$$E_\lambda = k_1 \lambda^{-5} \frac{1}{e^{\frac{k_2}{\lambda T}} - 1}$$

la cual es la ley para la distribución de la energía del cuerpo negro.

De acuerdo con Planck, aunque esta fórmula concordaba con los datos experimentales disponibles, según los informes que los físicos experimentales le habían suministrado, poseía solo un valor limitado ya que era una "*intuición afortunada*" en una fórmula de interpolación, carente de sentido físico (Planck 1900). No contento con esta circunstancia, intentó justificar la ley partiendo de primeros principios. Esto le condujo en diciembre de 1900 a considerar la relación entre entropía y probabilidad, según el camino trazado por **Ludwig Boltzmann** (1844-1906).

Según este último, la entropía era una medida de la probabilidad física y la esencia del segundo principio de la termodinámica era que al ocurrir con mayor frecuencia una condición en la naturaleza, entonces esto implicaba que era más probable. Podemos definir un valor absoluto para la entropía y, por ende, para la probabilidad física, si la constante aditiva se fija en una manera tal que la entropía y la energía se anulen simultáneamente.

Sobre esa base Planck utilizó un método combinatorial para calcular la probabilidad física de una cierta distribución de energía en un sistema de resonadores. Este método condujo a la misma expresión para el cambio de la entropía que había obtenido en octubre de 1900, pero con la introducción de una nueva suposición: la *hipótesis cuántica*. Según esta hipótesis meramente probabilística, la energía se compone de idénticos elementos finitos, cuyo valor se obtiene al combinar una nueva expresión para la entropía,

$$S = f\left(\frac{U}{\varepsilon}\right),$$

deducida a partir de consideraciones probabilísticas, con la expresión obtenida a partir de la termodinámica,

$$S = f\left(\frac{U}{\nu}\right)$$

lo cual conduce a $\varepsilon \approx \nu$.

Por esa época el nuevo postulado tenía un único propósito: derivar (si es que se puede llamar así al procedimiento utilizado por PLANCK) la ley de distribución de la energía. Para las aplicaciones numéricas del método probabilístico se requerían dos constantes universales: *h* y *k*, por lo que la ley de octubre pasaba a expresarse en la forma:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

donde:

ρ(ν,T) := Densidad de energía por unidad de volumen por frecuencia

h := Cuanto de acción

*k* := Constante de BOLTZMANN

La primera constante, *k*, poseía una relativa naturaleza formal, pues dependía de la definición de temperatura, y es denominada con frecuencia *constante de BOLTZMANN*. La interpretación de la segunda constante, *h*, la cual relacionaba los elementos finitos de energía, ε, con la frecuencia de la energía radiante, ν, mediante $\varepsilon = h\nu$, era ambigua. PLANCK la denominó *cuanto de acción*, pues era el producto de la energía por el tiempo, y se entregó de inmediato a la tarea de incorporarlo en el entramado de la física clásica, pero todos sus intentos resultaron infructuosos: aunque esta constante era indispensable para obtener la expresión correcta para la entropía, su significado físico quedaba en suspenso. Así, todas las consecuencias empíricas de la teoría de la radiación se presentaban como ilusorias.

No solo PLANCK, sino también otros físicos se hallaban perdidos respecto del significado del cuanto de acción. Según PAIS (1988), este es un ejemplo en la historia de la ciencia de que no es lo mismo *hacer un descubrimiento* que *comprender un descubrimiento*: PLANCK creía que su análisis de 1900 era completamente clásico y consideró la discontinuidad cuántica contenida en su ley como un subproducto de la incorrecta aplicación del método de BOLTZMANN a la radiación (NORTON 1987).

## 3. Einstein: marzo de 1905. Un insospechado salto de simplicidad

El 14 de diciembre de 1900, como punto de partida para su fundamentación teórica de la ley postulada en octubre de ese año, PLANCK supuso un sistema compuesto por un número finito pero grande de resonadores lineales, los cuales podían vibrar monocromáticamente y se hallaban propiamente separados y encerrados en un medio diatérmico (que permite el paso de la energía) con velocidad de la luz, c, y acotados por paredes completamente reflejantes. Dicho sistema contenía una cantidad fija de energía, la cual estaba presente parcialmente en el medio como radiación y parcialmente en los resonadores como energía vibracional. Para la condición de equilibrio dinámico radiación-resonadores PLANCK propuso la ecuación:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\, U(\nu, T)$$

(la cual representaba el equilibrio materia-radiación para un resonador lineal que interactuaba con un campo eléctrico, periódico y monocromático, en la dirección de su movimiento) Esta ecuación había sido derivada a partir de la teoría electromagnética de MAXWELL, por lo que parecía racional aceptar su validez.

En marzo de 1905, al investigar el significado de la derivación de PLANCK de la ley de radiación del cuerpo negro, EINSTEIN encontró que al combinar esta ecuación con las consecuencias de la ley de equipartición de la energía (según la cual todas las partículas contribuyen de la misma forma a la energía de un sistema), y que había estudiado con detalle hacia 1902, se obtenía la ecuación:

$$\rho\ (\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\left(\frac{R}{N}\right)T$$

comúnmente conocida como *ley de RAYLEIGH-JEANS*. Esta ecuación tenía la catastrófica consecuencia de que a = ∞ para la constante de STEFAN-BOLTZMANN.

El sistema que EINSTEIN utilizó consistía en una cavidad que contenía partículas de gas, electrones libres (que podían experimentar colisiones) y electrones ligados armónicamente a ciertos puntos de la cavidad (los cuales podían experimentar colisiones y emitir y/o absorber radiación electromagnética de una frecuencia definida y a los que EINSTEIN llamó *osciladores)*. EINSTEIN adjudicó a estos últimos el papel que PLANCK había adjudicado a los resonadores.

La condición de equilibrio dinámico entre las partículas de gas y los osciladores exigía, según el principio de equipartición de la mecánica estadística, que la energía media de cada oscilador fuera

$$\langle E \rangle = \frac{R}{N}T\ ;$$

por su parte, la condición de equilibrio dinámico entre los osciladores y la radiación exigía que la energía media, para un oscilador con frecuencia , fuera

$$\langle E_\nu \rangle = \frac{c^3}{8\pi\nu^2}\rho(\nu, T)$$

(la cual PLANCK derivó en diciembre de 1900). La *ley de RAYLEIGH-JEANS* se obtenía al igualar la ecuación para el equilibrio dinámico partículas de gas-osciladores con la del equilibrio dinámico radiación-osciladores.

La conjunción de mecánica estadística y teoría electromagnética conducía a la *catástrofe ultravioleta*, por lo que se hacía necesario abrir nuevas rutas de investigación que evitaran los resultados anteriores.

En la búsqueda de alternativas EINSTEIN recurrió a la mecánica estadística, en la cual halló los elementos necesarios para la configuración de un programa de investigación que, en un primer paso, debía proponer los constituyentes elementales de la radiación, para luego describir su comportamiento físico y proporcionar las relaciones entre magnitudes físicas macroscópicas que describieran la radiación del cuerpo negro.

El primer paso de avance de este programa lo dio EINSTEIN cuando propuso la *hipótesis del cuanto de luz* en su artículo ***Acerca de un punto de vista heurístico sobre la emisión y la transformación de la luz***, publicado en los *Annalen der Physik* en marzo de 1905. El segundo no fue posible sino hasta 1916.

En este trabajo EINSTEIN invirtió el procedimiento habitual de la mecánica estadística y partió de un resultado macroscópico aceptado para calcular la entropía del sistema, y después obtener información sobre los constituyentes elementales.

Es significativo que EINSTEIN no partiera de la *ley de PLANCK*, la cual concordaba ampliamente con las observaciones, sino de la *ley de WIEN*, pues esta última tenía un menor rango de aplicación que la primera (solo para valores grandes de $\frac{\nu}{T}$), aunque tenía a su favor un mayor apoyo teórico. Parece ser que las inconsistencias teóricas tuvieron un mayor peso específico que el apoyo empírico en el momento de seleccionar la *ley de* WIEN como punto de partida para la derivación del cuanto de luz. Cabe recordar que el punto de partida que PLANCK utilizó en octubre de 1900 en la búsqueda de una ley más general que concordara con las observaciones, fue, también, la *ley de* WIEN, la cual consideraba *necesariamente verdadera*, aunque restringida a longitudes de onda corta y bajas temperaturas.

EINSTEIN comenzó por mostrar que las dos constantes postuladas por PLANCK en diciembre de 1900, *h* y *k*, eran hasta cierto punto independientes de su teoría para la radiación del cuerpo negro.

De seguido, procedió a establecer el argumento que conduce al *cuanto de luz*. Este consiste en cuatro etapas:

## *1. Obtención de una expresión para el cambio de entropía de una radiación monocromática de muy baja densidad a partir de la ley de Wien y la termodinámica*

EINSTEIN estableció la dependencia de la entropía (S) y la energía (E) de un sistema respecto de su volumen y obtuvo una expresión para la radiación del cuerpo negro en términos de la densidad de radiación ($\rho_v$) y la densidad de entropía ($\phi_v$):

$$\frac{d\phi_v}{d\rho_v} = \frac{1}{T}$$

EINSTEIN reescribió la *ley exponencial de* WIEN, de manera tal que se pudiera comparar con la ecuación anterior:

$$\rho_v = \alpha v^3 e^{-\frac{\beta v}{T}} \Leftrightarrow \frac{1}{T} = -\frac{1}{\beta v}\ln\left(\frac{\rho}{\alpha v^3}\right)$$

Al comparar ambas ecuaciones, y resolviendo para $\phi_v$ obtuvo:

$$\frac{\partial\phi_v}{\partial\rho_v} = -\frac{1}{\beta v}\ln\left(\frac{\rho_v}{\alpha v^3}\right) \Rightarrow \phi_v = -\frac{\rho_v}{\beta v}\left[\ln\left(\frac{\rho_v}{\alpha v^3}\right) - 1\right]$$

Como $S = \upsilon\phi_v$ y $E = \upsilon\rho_v$ donde $\upsilon$ es el volumen, entonces:

$$S_v = -\frac{E_v}{\beta v}\left[\ln\left(\frac{E_v}{\alpha\upsilon v^3}\right) - 1\right]$$

de donde el cambio en entropía (S-Sv), debido a un cambio en volumen desde $_0$ hasta $(\upsilon_0 > \upsilon)$ de la cavidad y a energía constante (E), viene dado por:

$$S - S_v = \frac{E}{\beta v}\ln\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)$$

En este punto EINSTEIN hace la gran observación de que "la entropía de una radiación monocromática, de densidad suficientemente baja, varía con el volumen en la misma manera que un gas ideal o una solución diluida" (EINSTEIN 1905), razón por la que puede utilizar el aparato de la mecánica estadística en el análisis del problema. Esta es la clave que le condujo al *cuanto de luz*.

## *2. Principio de Boltzmann*

Entre 1900 y 1904 EINSTEIN se había dedicado a estudiar la mecánica estadística, y publicó varios artículos sobre sus fundamentos.

EINSTEIN afirma que es razonable hablar de la probabilidad del estado instantáneo de un sistema (W) y si todo aumento de entropía puede entenderse como una transición a un estado de mayor probabilidad, entonces el aumento de entropía del sistema sería una función de esa probabilidad, $S = \phi(W)$.

Si el sistema consiste en n subsistemas con entropías $S_1, S_2, \ldots, S_n$, que no interactúan y con $S_i = \phi_i(W_i)$, entonces $S = \sum S_i = \sum \phi_i(W_i) = \phi(W)$ y $W = \prod W_i$. De estas ecuaciones se deduce que $\phi(W) = \phi(W_1 \cdot W_2 \cdot \ldots \cdot W_n) = \phi_1(W_1) + \phi_2(W_2) + \ldots + \phi_n(W_n)$ y que $\phi_i(W_i) = C \ln(W_i) + \text{const.}$, de donde $\phi(W) = C \ln(W) + \text{const.}$ C denota una constante universal dada por la teoría cinética de los gases y cuyo valor es:

$$\frac{R}{N}$$

Ludwig Boltzmann

(esta es la *constante de* BOLTZMANN, *k*, que aparece por vez primera en el artículo de diciembre escrito por PLANCK).

Así, el cambio de entropía de un sistema desde un estado inicial, con entropía $S_0$, hasta un estado con entropía S y probabilidad W, puede expresarse por la relación:

$$S - S_0 = \frac{R}{N}\ln W$$

a la que EINSTEIN denominó *Principio de* BOLTZMANN.

## 3. *Obtención de una expresión para el cambio de entropía para un gas ideal o una solución diluida*

Sea un sistema compuesto por un número (n), muy pequeño, de partículas, con el fin de evitar colisiones entre ellas, confinadas en un volumen $\upsilon_0$, el cual se somete a un cambio reversible de volumen a energía constante hasta el volumen $\upsilon$.

Este sistema puede considerarse compuesto de n subsistemas independientes, por lo que se puede aplicar el *Principio de* BOLTZMANN.

La probabilidad de que en un determinado instante todas las n partículas se hallen por azar en el volumen está dada por:

$$W = \left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)^n$$

Sea $S_0$ la entropía del estado inicial (con volumen $\upsilon_0$), y sea S la entropía del estado final (con volumen $\upsilon$), entonces

aplicando el *Principio de* BOLTZMANN:

$$S - S_0 = \frac{R}{N}\ln\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)^n \Leftrightarrow S - S_0 = R\left(\frac{n}{N}\right)\ln\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)$$

## 4. *Aplicación del Principio de* BOLTZMANN *a la expresión para la dependencia respecto del volumen de la radiación monocromática de muy baja densidad*

A partir de la expresión obtenida en **1.** para el cambio de entropía de la radiación monocromática de muy baja densidad:

$$S - S_\nu = \frac{E}{\beta\nu}\ln\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)$$

y debido a que se comporta de manera similar a una solución diluida o un gas ideal, podemos aplicar el *Principio de* BOLTZMANN obteniéndose:

$$S - S_0 = \frac{E}{\beta\nu}\ln\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right) \Leftrightarrow S - S_0 = \frac{R}{N}\ln\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)^{\frac{N}{R}\left(\frac{E}{\beta\nu}\right)}$$

Al comparar este resultado con el obtenido en **3**, se obtiene:

$$n = \frac{N}{R}\left(\frac{E}{\beta\nu}\right) \Leftrightarrow \frac{E}{n} = \frac{R\beta\nu}{N}$$

de donde, "la radiación monocromática de muy baja densidad (dentro del rango de validez de la fórmula de WIEN) se comporta termodinámicamente como si consistiera enun número independiente de cuantos de energía de magnitud:

$\frac{R\beta\nu}{N}$ ." (EINSTEIN 1905).

Esto sugería investigar si "las leyes de la emisión y la transformación de la luz eran de una naturaleza tal que pudieran interpretarse o explicarse considerando que la luz consiste en cuantos de energía" (EINSTEIN 1905).

Este acercamiento resultaba iluminador: en 1905 EINSTEIN estableció el fracaso de cualquier análisis estrictamente clásico del problema del cuerpo negro y concluyó que la electrodinámica clásica solo podía ser válida para los promedios temporales de las cantidades (NORTON 1987).

En 1906 EINSTEIN relacionó el cuanto de luz

$$\left( \frac{E}{n} = \frac{R\beta\nu}{N} \right)$$

con el cuanto de energía planckiano ($\varepsilon = h\nu$). Sin embargo, el concepto de cuanto de luz había surgido al aplicar un argumento clásico (la estadística de BOLTZMANN) a una ley cuántica (la ley de distribución de la energía que PLANCK postulara en diciembre de 1900, aunque restringida al dominio de aplicación de la ley de WIEN). Esto introducía un rasgo de imperfección en la derivación de los cuantos de luz, similar al de la derivación por PLANCK de los cuantos de energía. Aunque con una diferencia radical entre ambas derivaciones: EINSTEIN sugería que la energía del campo electromagnético estaba cuantizada, mientras que PLANCK solo se remitía a sugerir que la energía de los resonadores materiales estaba cuantizada, sin que eso implicara necesariamente que la energía del campo electromagnético libre lo estuviera.

PLANCK había utilizado una relación entre $\rho(\upsilon,T)$ y $U(\nu,T)$ que fue derivada de la mecánica y la electrodinámica clásica e introdujo una cuantización relacionada con U. Si se aceptaba que la cuantización relacionada con U era inconsistente con la teoría clásica, entonces no había razón para aceptar esa relación. EINSTEIN había introducido una cuantización relacionada con $\rho$ y no utilizó la relación entre $\rho$ y U, por lo que surgía la cuestión de si se podía establecer una conexión entre la cuantización relacionada con U (PLANCK) y la cuantización relacionada con $\rho$ (EINSTEIN). La respuesta einsteiniana fue afirmativa al precio de introducir una nueva suposición: la relación entre $\rho$ y U es también válida en la teoría cuántica a pesar de que su fundamentación fuera un misterio cuando los efectos cuánticos se volvían importantes. EINSTEIN concluyó que la base de la teoría de la radiación propuesta por PLANCK residía en que la energía de un resonador planckiano podía tomar solo aquellos valores que correspondían a múltiplos enteros de $h\nu$: en la emisión y la absorción la energía de un resonador cambiaba por saltos que eran múltiplos enteros de $h\nu$.

El trabajo de EINSTEIN sobre los calores específicos de los sólidos (1906) dejó claro que los conceptos cuánticos tenían una aplicación más general que el cuanto de PLANCK, el cual había jugado un papel importante solo en el problema del cuerpo negro.

En 1909 EINSTEIN se refirió a los cuantos de luz como partículas y afirmó que "la siguiente fase en el desarrollo de la física teórica nos brindará una teoría de la luz que pueda interpretarse como un tipo de fusión de la teoría de emisión [partículas] y la teoría ondulatoria [ondas]..." (NAVARRO 1990, PAIS 1983). Esto fue una consecuencia de su investigación sobre las fluctuaciones de energía aplicadas a la radiación del cuerpo negro y que estaba basada en la mecánica estadística. EINSTEIN dedujo que:

$$\langle \varepsilon^2(\nu,T) \rangle = \left( h\nu\rho + \frac{c^3}{8\pi\nu^2}\rho^2 \right) \nu d\nu$$

donde:

$\langle \varepsilon^2(\nu,T) \rangle :=$ Fluctuación cuadrática media de la energía

$h\nu\rho :=$ Término correspondiente al rango de aplicación de la *ley de WIEN* ( $\frac{h\nu}{kT} >> 1$ ). Si este término no es nulo, entonces resultaría en fluctuaciones si la radiación consistiera en cuantos similares a partículas en movimiento con energía $h\nu$.

$\frac{c^3}{8\pi\nu^2}\rho^2 :=$ Término correspondiente al rango de aplicación de la *ley de RAYLEIGH-JEANS* ( $\frac{h\nu}{kT} >> 1$ ). Solo la teoría electromagnética podría aportar este término, al que

EINSTEIN se refirió como *término ondulatorio.* Si solo este término estuviera presente, resultaría en fluctuaciones si la radiación consistiera en ondas electromagnéticas.

Así, hacia 1909 EINSTEIN había concluido que para valores de

$$\frac{h\nu}{kT} >> 1$$

la luz se comportaría como si consistiera en partículas, mientras que para valores de

$$\frac{h\nu}{kT} << 1$$

la luz se comportaría como si consistiera en ondas.

La sugerencia del cuanto de luz causó una confusión que se extendió por varios años, basada en que los físicos eran enfrentados a interpretar la radiación electromagnética libre (un fenómeno muy bien estudiado y que se consideraba bien comprendido utilizando el enfoque de ondas) en una nueva perspectiva que implicaba que, bajo ciertas circunstancias, esta se comportaba como si consistiera en partículas, introduciendo el desorden en la física clásica. Esta fue la primera manifestación de la dualidad onda-partícula en el campo de la radiación.

En diciembre de 1900, PLANCK introdujo el cuanto de energía con el fin de describir las propiedades espectrales de la radiación pura mediante un procedimiento de cuantización aplicado a la materia (resonadores materiales). PLANCK no estaba sugiriendo una revisión de la teoría clásica del campo electromagnético, sino que proponía una modificación de la interacción entre materia y radiación. Este último problema había sido muy poco investigado por esta época. En contraste, la propuesta einsteiniana exigía modificar la teoría clásica del campo electromagnético. Hacia 1910 la mayoría de los principales físicos teóricos rechazaban esta última cuantización, aunque aceptaban la posible cuantización de la interacción materia-energía. Esto tenía su raíz en el apoyo empírico que estas hipótesis poseían: la *ley de PLANCK* estaba fuera de toda duda en cuanto a representar fielmente los resultados experimentales, pero EINSTEIN no poseía curvas ni números precisos para mostrar en apoyo de la cuantización de la energía libre.

Cuando EINSTEIN propuso en 1905 el *cuanto de luz* este no podía aún considerarse una partícula, sino solo una parcela de energía E relacionada con la frecuencia. Solo hasta 1916-1917, cuando EINSTEIN logra derivar el *momentum* del *cuanto de luz*, junto con los procesos elementales de absorción (procesos inducidos) y emisión espontánea, y hasta 1922 cuando **ARTHUR COMPTON** (1892-1962) logra detectar experimentalmente el momentum y la energía del cuanto de luz (para el caso de los rayos X), se puede hablar del nacimiento de una nueva partícula, dotada de una energía y un *momentum* bien definidos. En 1923, al reportar sus resultados a la *American Physical Society*, COMPTON concluyó que "el apoyo experimental ... indica muy convincentemente que un cuanto de radiación arrastra consigo un momentum dirigido así como energía" (BARLETT 1964, COMPTON 1961). Entre 1923-1925 COMPTON y **PETER DEBYE** (1884-1966), mediante una serie de experimentos, mostraron que el *scattering* de un *cuanto de luz* sobre un electrón en reposo obedecía las leyes conservativas. Esta fecha relativamente tardía explica por qué tomó tanto tiempo (1905 a 1925) para que el *cuanto de luz* recibiera la investidura de partícula cuando **GILBERTH LEWIS** (1875-1946), en 1926, lo denominara *fotón.*

En 1924, al referirse al experimento de COMPTON, EINSTEIN afirmó que "el resultado positivo ... prueba que la radiación se comporta como si consistiera en proyectiles discretos de energía, no solo en lo que se refiere a la transferencia de energía sino, también, respecto de la transferencia de momentum" (NAVARRO 1990).

Sin embargo, tanto el *cuanto de energía radiante* (PLANCK) como el *cuanto de luz* (EINSTEIN) no poseían un fundamento teórico consistente. Para vencer la dificultad fue necesario crear una nueva estadística: la *estadística cuántica*. Esto fue llevado a cabo por BOSE y por EINSTEIN hacia 1924. Mediante esa nueva estadística se pudo derivar la ley de distribución de energía de PLANCK y comprender que la dificultad en la derivación del *cuanto de luz* residía en que para

$$\frac{h\nu}{kT} >> 1$$

(régimen de WIEN) las consecuencias físicas de la estadística de BOSE-EINSTEIN y la de BOLTZMANN coinciden.

Como un destello en la oscuridad, EINSTEIN dio un insospechado salto de simplicidad y pudo entrever en 1905 lo que la estadística de BOSE-EINSTEIN veinte años más tarde demostraría con tanta

## *4. Bose: julio de 1924. Un cometa fugaz*

En 1923, SATYENDRA NATH BOSE envió un artículo a la revista inglesa *Philosophical Magazine* con el título "***La ley de Planck y la hipótesis del cuanto de luz***", escrito originalmente en inglés. Sin embargo, el artículo fue rechazado. El 2 de junio de 1924 BOSE envió una copia del artículo a EINSTEIN, junto con una nota en la cual expresaba su ansiedad por conocer la opinión de EINSTEIN acerca de ese trabajo, en el cual deducía el coeficiente

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$$

presente en la ley de PLANCK (1900), de una manera independiente de la electrodinámica clásica al suponer que la última región elemental del espacio fase poseía el contenido $h^3$.

EINSTEIN tradujo el artículo de BOSE al alemán y el 2 de julio de 1924 lo remitió a la revista alemana *Zeitschrift für Physik* con el siguiente comentario: "En mi opinión, la derivación por BOSE de la fórmula de PLANCK significa un importante avance. El método utilizado también da la teoría cuántica del gas ideal, como la estableceré con detalle en otro lugar."

En diciembre de 1900 PLANCK había derivado el coeficiente

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$$

a partir de la electrodinámica clásica, al investigar el equilibrio materia-radiación. En el apartado anterior se observó que la ecuación propuesta por PLANCK para ese equilibrio conducía a la catástrofe ultravioleta cuando se combinaba con los resultados derivados del principio de equipartición de la energía, por lo que su ley de distribución de energía quedaba en un limbo respecto de sus fundamentos.

De acuerdo con BOSE (1924), "desde su publicación ... se habían sugerido muchos tipos de derivación de esta ley. Es sabido que los supuestos fundamentales de la teoría cuántica son inconsistentes con las leyes de la electrodinámica clásica. Todas las derivaciones existentes utilizan ... la relación entre la densidad de radiación [ρ] y la energía media de un oscilador [U] y hacen suposiciones que se refieren al número de grados de libertad del éter

$$[\frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu] ...$$

Sin embargo, este factor solo puede deducirse a partir de la teoría clásica. Este es el punto insatisfactorio en todas las derivaciones y no es sorprendente que una y otra vez se hagan esfuerzos que intenten dar con una derivación libre de esta deficiencia lógica".

Una de esas derivaciones había sido propuesta por EINSTEIN en 1916, en la cual intentó derivar la fórmula siguiendo una ruta independiente de la teoría clásica, partiendo de la interacción entre radiación y materia. EINSTEIN llegó a derivar la fórmula

$$\rho_v = \frac{\alpha_{mn}}{e^{\frac{(E_m - E_n)}{kT}} - 1}$$

de donde, apelando a la universalidad de ρ y a la *ley de WIEN*, estableció que $\alpha_{mn}$ y $E_m$-$E_n$ (la diferencia entre los niveles de energía de una molécula) eran proporcionales, respectivamente, a la tercera y a la primera potencia de ν. De donde, $E_m$-$E_n$ = hν, estableciéndose un puente entre la radiación del cuerpo negro y la teoría de **NIELS BÖHR** (1885-1962) acerca de los espectros atómicos.

Según BOSE (1924), "con el fin de hacer que esta fórmula concordara con la de PLANCK, [EINSTEIN] utilizó la ley de desplazamiento de WIEN y el principio de correspondencia de BOHR. La ley de WIEN se basa en la teoría clásica; el principio de correspondencia supone que la teoría cuántica concuerda con la teoría clásica en ciertos casos límites ... En todos los casos me parece que las derivaciones tienen una fundamentación lógica insuficiente."

Así, propone un nuevo método para la derivación de la *ley de PLANCK*, "combinando la hipótesis de los cuantos de luz con la mecánica estadística en la forma ajustada por PLANCK a las necesidades de la teoría cuántica ... en forma independiente de cualquier teoría clásica." (BOSE 1924)

El método introducido por BOSE representa uno de los pasos revolucionarios de la física cuántica. Sus argumentos libraron a la ley de distribución de PLANCK de todos los elementos relacionados con la teoría electromagnética, al precio de introducir otros nuevos: los cuantos son considerados partículas sin masa, las cuales poseen dos estados de polarización (grados de libertad internos), para las que no se conserva su número y que obedecen una estadística diferente a la propuesta por BOLTZMANN. Los conceptos de una partícula (*cuanto*) con dos grados de polarización y la no conservación de su número en los procesos en los que participaban eran realmente novedosos, aunque BOSE no se refirió explícitamente a la no conservación. EINSTEIN tampoco se percató de ello. Parece ser que el primero en hacerlo fue **RALPH FOWLER** (1889-1944) en 1926.

El método introducido por BOLTZMANN en 1877 consistía en distribuir N partículas idénticas (sin estructura) e independientes, cuyas energías solo podían tomar los valores discretos $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, ... . Para un gas ideal clásico este modelo implicaba

$$N = \sum_k n_k \quad y \quad E = \sum_k \varepsilon_k n_k$$

donde $n_k$ es el número de partículas con energía $\varepsilon_k$ y E es la energía total. El número de formas, W, en las que se pueden distribuir las partículas respecto de sus energías $\varepsilon_k$ y debido a que son estadísticamente independientes (no interactúan entre sí) e idénticas, viene dado por

$$W = \frac{N!}{\prod_k n_k!}$$

W representa, además, el número de microestados y es la probabilidad para la partición $\{n_k\}$. El rasgo sobresaliente en el método de BOLTZMANN es que N y E son fijos, se conservan, y que las partículas son *distinguibles*.

En diciembre de 1900 y con el propósito de hallar una derivación teórica de su ley de octubre de ese mismo año, PLANCK utilizó una variante del método de BOLTZMANN. PLANCK supuso que los elementos de los que se componía la energía de los resonadores materiales eran *indistinguibles*, y en lugar de utilizar la expresión que BOLTZMAN había derivado para W, utilizó otra expresión (R) para representar las formas de distribuir P elementos de energía $\varepsilon$ entre N resonadores. Supuso, además, que la energía total (U) era igual al producto del número de resonadores (N) por la energía promedio de cada resonador (Uk): U=NUk =P$\varepsilon$, y que la probabilidad (W) era proporcional a

$$R = \frac{(N+P)^{N+P}}{N^N P^P},$$

por lo que la entropía del sistema estaba dada por S = lnR+C. Este método le condujo a $\varepsilon = h\nu$, pero era completamente artificial: no poseía ningún fundamento dentro del contexto clásico.

Por su parte, BOSE consideró la radiación en la cavidad como un gas ideal compuesto de cuantos de luz, cada uno con energía h y momentum hν/c. La distribución de frecuencias de la radiación a una temperatura T se deduce mediante el hallazgo de la distribución en el espacio fase que maximiza la entropía del sistema. En contraste con las partículas de gas de BOLTZMANN, los *cuantos* se diferenciaban por ser no masivos, su número no se conservaba, y debían ser tratados como *indistinguibles* (tal y como PLANCK supuso en diciembre de 1900).

BOSE comenzó por considerar la radiación de energía total (E) encerrada en un volumen (V) compuesta por $N^s$ cuantos de energía ($h\nu^s$), s = 0, 1, 2, ...

La energía total se puede expresar entonces como

$$E = \sum_s N^s h\nu^s \quad = \quad V\int \rho_\nu \, d\nu$$

Para BOSE el problema residía en encontrar el conjunto de números $N^s$, "los cuales determinan ρν" tal que su probabilidad sea máxima, es decir, en hallar una probabilidad para cada distribución posible de *cuantos*. BOSE asoció a cada *cuanto* un punto del espacio de fases de seis dimensiones (tres dimensiones espaciales y tres momentos asociados a cada dimensión). Como a todo *cuanto* está asociado un momento

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

(EINSTEIN 1916), entonces se satisfacía la restricción

$$p = \frac{h\nu}{c} \Rightarrow p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{h^2\nu^2}{c^2}$$

Al subdividir el volumen del espacio fase en celdas de volumen $h^3$, BOSE halló que el número de celdas correspondiente al intervalo de frecuencias era

$$\frac{4\pi V\nu^2 d\nu}{c^2}$$

aunque no dio ninguna justificación para esta subdivisión y agregó que "para tener en cuenta la polarización, parece obligado multiplicar este número por el factor 2, de modo que el número de celdas correspondientes a un intervalo dν resulta

$$8\pi V\left(\frac{\nu^2}{c^3}\right)d\nu$$

(BOSE 1924). Esta última expresión contenía el factor que PLANCK había derivado a partir de la teoría electromagnética.

BOSE procedió a calcular la probabilidad termodinámica de un estado definido macroscópicamente. Su problema consistió en hallar el número de formas diferentes en que podían distribuirse los cuantos entre las celdas disponibles e hizo varios supuestos. Si se define:

$A^s$ := número fijo de celdas que pertenecen a un intervalo de frecuencia $d\nu^s$

$N^s$ := número de cuantos que pertenecen al intervalo $d\nu^s$. Denota una especie de cuantos con energía $h\nu^s$ y la distribución de estos para las distintas frecuencias, de tal manera que

$$A^s = \frac{8\pi V {\nu^s}^2}{c^3} d\nu^s \text{ y } N^s = \sum_r r p_r^s$$

donde

$p_r^s$ := número de celdas con r cuantos con energía $h\nu^s$ en su interior, s= 0, 1, ... Estos se definían preguntando cuántas partículas hay en una celda, por lo que implicaba que los cuantos eran *indistinguibles*, no así las celdas.

BOSE definió

$W^s$ := número de distribuciones diferentes

W := Probabilidad del estado determinado por todos los $p_r^s$(donde s caracteriza la frecuencia $\nu^s$ y el subíndice **r** la celda que contiene **r** cuantos de energía $h\nu^s$), considerando el grado de ocupación para cada frecuencia,

de tal manera que

$$W^s = \frac{A^s!}{\prod_r p_r^s!} \qquad A^s = \sum_r p_r^s = \frac{8\pi V {\nu^s}^2}{c^3} d\nu^s \qquad W = \prod_s \frac{A^s!}{\prod_r p_r^s!}$$

donde W implica la independencia estadística de las celdas.

Al maximizar log W, BOSE halló que

$$p_r^s = B^s e^{\frac{-rh\nu^s}{\beta}}$$

donde

$\beta$ := multiplicador por determinar

$$B^s = A^s[1 - e^{\frac{-h\nu^s}{\beta}}]$$

La distribución de *cuantos* para las distintas frecuencias viene dada por:

$$N^s = \frac{A^s e^{\frac{-h\nu^s}{\beta}}}{1-e^{\frac{-h\nu^s}{\beta}}} = A^s \frac{1}{e^{\frac{h\nu^s}{\beta}}-1}$$

y como la energía (E) se conserva:

$$E = \sum_s N^s h\nu^s = \sum_s A^s \frac{h\nu^s}{e^{\frac{h\nu^s}{\beta}}-1} = \sum_s \frac{8\pi h {\nu^s}^3}{c^3} V \frac{1}{e^{\frac{h\nu^s}{\beta}}-1} d\nu^s$$

BOSE procedió a calcular la entropía y halló que $\beta = k\,T$, por lo que:

$$E = \sum_s \frac{8\pi h {\nu^s}^3}{c^3} V \frac{1}{e^{\frac{h\nu^s}{kT}}-1} d\nu^s$$

la cual es equivalente a la ley de distribución de la energía que PLANCK propuso en diciembre de 1900.

Aunque, como se señaló anteriormente, BOSE incluyó en su tratamiento del problema algunos supuestos y características sobre los *cuantos* que resultaron esenciales para alcanzar su objetivo de derivar la ley de distribución de PLANCK sin recurrir a la teoría electromagnética clásica, a la vez que representaban novedosos logros para la física de 1924, su formalismo estaba plagado de imprecisiones. La presentación misma del artículo era descuidada y había una escasa justificación del formalismo empleado, pues no se desarrollaba dentro del lenguaje estricto de la teoría de colectividades de la mecánica estadística. Una justificación precisa del formalismo no fue posible sino hasta una vez instaurada la mecánica cuántica.

El método estadístico de 1924 fue la única contribución significativa que BOSE hizo a la ciencia del siglo XX y después de este aporte "no me volví a dedicar de verdad a la ciencia. Fui como un cometa que apareció una vez y nunca más volvió." (NAVARRO 1990).

## 5. *Epílogo*

BOSE aplicó la estadística de BOLTZMANN no a los *cuantos de luz* sino a las celdas llenas con un número variable de estos y se preguntó por el número de cuantos encerrados en una celda. Su intuición residió en suponer la independencia estadística de las celdas, aunque no se refirió en forma explícita a ello.

Lo que en el método de conteo de BOLTZMANN eran partículas, en el de BOSE eran celdas. El número de estas debía estar prefijado, no así el número de cuantos que las ocupaban, por lo que no se supone su conservación. Para lograr el resultado deseado BOSE tenía solo que suponer que la energía (E) se conservaba, mientras que en BOLTZMANN tanto la energía como el número de partículas (N) se conservaban. Por otro lado, mientras en BOLTZMANN las partículas eran *distinguibles*, en BOSE lo eran las celdas y la única característica que manejaba de los cuantos era su grado de ocupación de las celdas, por lo que, aunque no se indique expresamente, se asume su *indistinguibilidad* . Esta indistinguibilidad de los *cuantos* asociada con la independencia estadística de las celdas, condujo necesariamente a la conclusión de que los cuantos obedecían una nueva estadística en la cual los individuos son indistinguibles a todos los efectos y cuya independencia estadística no parece garantizada *a priori* . BOSE, empero, no parece haberse percatado de esto en 1924.

Fue EINSTEIN quien se percató de la importancia para la teoría cuántica del método creado por BOSE y quien llevó sus implicaciones aún más lejos, al generalizar sus resultados para partículas masivas, aunque consideraba que la derivación de la ley de PLANCK llevada a cabo por BOSE era una "obra maestra confusa": su razonamiento era correcto, pero impreciso.

Después de la publicación del artículo de BOSE sobrevino una avalancha de desarrollos: la extensión de su método a partículas masivas y con potencial no nulo, entre 1924-1925, por EINSTEIN; la estadística para electrones, en 1926, por **ENRICO FERMI** (1901-1954) y **PAUL DIRAC** (1902-1984); la cuantización del campo electromagnético, en 1925, por **WERNER HEISENBERG** (1901-1976) y **WOLFGANG PAULI** (1900-1958) y la electrodinámica cuántica, en 1927, por DIRAC, quien extendió las reglas cuánticas para sistemas mecánicos al campo electromagnético.

El 10 de julio de 1924, una semana después de enviar el artículo de BOSE para su publicación, EINSTEIN presentó una comunicación a la *Academia Prusiana de Ciencias* donde aplicaba el método de BOSE al estudio del comportamiento de los gases ideales monoatómicos (no relativísticos) compuestos de partículas masivas y donde presenta, por vez primera, una expresión para la indistinguibilidad de los *cuantos* . Posteriormente, al estudiar la aproximación

$$\frac{h\nu}{kT} >> 1$$

EINSTEIN se percató que esta implicaba la pérdida del efecto de la indistinguibilidad pero no el de la estructura discreta de la radiación, postulado en 1905, lo cual justificaba que operando *a lo BOLTZMANN* se derivaran los *cuantos*.

El método de BOSE ofrecía, además, la oportunidad de considerar los *cuantos* como partículas ordinarias, con la salvedad de ser no masivos y poseer dos valores posibles de polarización, lo cual podía interpretarse como un apoyo independiente para la hipótesis einsteiniana acerca de la direccionalidad de los procesos elementales (1916). Además, permitía construir una teoría cuántica de los gases ideales sobre la base de la analogía entre gases materiales y gases de *cuantos*.

La indistinguibilidad de los *cuantos*, presupuesta en el artículo de BOSE, constituyó la base para la síntesis entre las propiedades ondulatorias y corpusculares de los *cuantos*. El 8 de enero de 1925, al estudiar las fluctuaciones de energía cerca del equilibrio de un gas de cuantos, Einstein se vió conducido a asociar ondas con partículas de gas mediante un argumento diferente al que había utilizado Louis de Broglie (1892-1987) en 1923. Estas investigaciones influenciarían posteriormente el surgimiento de la mecánica ondulatoria, en 1925-1926, mediante los trabajos de Erwin Schrödinger (1887-1961).

A partir de 1926 es un lugar común el hecho de que los procedimientos de conteo de la mecánica estadística clásica requieren modificarse cuando se consideran efectos cuánticos. La estadística Bose-Einstein, junto con la de Fermi-Dirac, son requeridas en la mecánica cuántica.

## *Bibliografía*


1. Barford, N. C. 1976. ***Derivation of classical and quantum statistical distributions.*** Am. J. Phys. 44(10): 940-43.
2. Barlett, A. 1964. ***Compton Effect: Historical Background***. Am. J. Phys. 32(2): 120-127.
3. Blanpied, W. A. 1972. ***Satyendranath Bose: Co-Founder of Quantum Statistics***. Am. J. Phys. 40: 1212-1220.
4. Bose, S. 1924. ***Planck´s law and the light quantum hypothesis***. En Theimer & Ram. 1976. Am. J. Phys. 44 (11): 1056-57.
5. Compton, A. 1961. ***The Scattering of X Rays as Particles***. Am. J. Phys. 29: 817-20.
6. Einstein, A. 1905. ***Concerning an heuristic point of view toward the emission and transformation of light***. En Arons & Peppard. 1965. Am. J. Phys. 33(5): 367-74.
7. Gribbin, J. 1986. ***En busca del gato de Schrödinger***. Salvat Editores. Barcelona. Edición inglesa: 1984.
8. Haar, D. ter 1967. ***The Old Quantum Theory***. Pergamon Press. London
9. Navarro, L. 1990. ***Einstein, profeta y hereje***. Tusquets Editores. Barcelona.
10. Norton, J. 1987. ***The logical inconsistency of the old quantum theory of blackbody radiation***. Philosophy of Science. 54(3): 327-350
11. Pais, A. 1982. ***Subtle is the Lord. The Science and the Life of Albert Einstein.*** Oxford University Press.
12. Pais, A. 1988. ***Inward Bound. Of matter and forces in the physical world.*** Oxford University Press. New York.
13. Planck, M. 1900. ***On an improvement of Wien´s equation for the spectrum***. En Haar (1967): 79-81.
14. Planck, M. 1900. ***On the Theory of the Energy Distribution Law of the Normal Spectrum.*** En Haar (1967): 82-90.
15. Planck, M. 1960. ***A Survey of Physical Theory***. Dover. New York.
16. Sklar, L. 1993. ***Physics and Chance. Philosophical Issues in the Foundations of Statistical Mechanics.*** Cambridge University Press.
17. Sudarshan, E. C. 1975. ***A world of Bose particles.*** Am. J. Phys. 43 (1): 69-72.
18. Weinberg, S. 1992. ***Dreams of a Final Theory. The Search for the Fundamental Laws of Nature***. Pantheon Books. New York.
19. Zukav, G. 1986. ***The dancing Wu Li Masters***. Bantam Books. New York. Primera Edición: 1979.