Negrín Hernández Luis y Franco Rodríguez Rosendo. Estudio de las curvas epicicloide y envolvente para formar el perfil de los engranajes que operan con distancia entre centros variable. **Tecnología en Marcha**. Vol 14 especial.

ESTUDIO DE LAS CURVAS EPICICLOIDE Y EVOLVENTE PARA FORMAR EL PERFIL DE LOS ENGRANAJES QUE OPERAN CON DISTANCIA ENTRE CENTROS VARIABLE

Dr. Luis I. Negrín Hernández*, Dr. Rosendo Franco Rodríguez**

En este trabajo se realiza un estudio de las curvas epiciloidales y evolventes de círculo en sus formas generales, con el objetivo de formar el perfil de trabajo de los dientes de los engranajes que operan con distancia entre centros variable. Se parte de las expresiones generales de estas curvas y se desarrollan las fórmulas para determinar algunas propiedades de las mismas, como el radio de curvatura, la evoluta, etc. Aquí se realiza también la demostración de que la evolvente de círculo es un caso particular de la epicicloide, demostración que no aparece en la literatura especializada. Con posterioridad se hace una comparación teniendo en cuenta las propiedades cinemáticas de los engranajes formados por las diferentes curvas. Como conclusiones del trabajo se plantea que la evolvente de círculo común tiene las mejores propiedades para engranajes que trabajan con una variación de la distancia entre centros menor que el 5 %, mientras que la epicicloide alargada garantiza un mejor funcionamiento para engranajes que trabajen con una variación entre el 5 y el 10 %.

Introducción

Los dientes de las transmisiones que trabajan con distancia entre centros variable deben ser mas largos que los de las transmisiones comunes [6]. En la bibliografía especializada consultada solamente se tratan las curvas epicicloidales y evolventes “comunes”, en cuyos casos el aumento del radio exterior está limitado por el espesor de la punta del diente; y la disminución del radio interior no repercute en la zona de trabajo, una vez que su valor es inferior al radio de la circunferencia básica. Sin embargo, este último aspecto cambia si se consideran las expresiones generales de estas curvas en su formulación “alargada”, lo cual no ha sido estudiado por los autores consultados. Esta formulación general tiene la ventaja de que incluye también la posibilidad de estudiar las curvas “comunes” como se verá en el desarrollo del trabajo.

Antes de pasar a analizar estas curvas como perfil de los dientes de engranajes resulta necesario determinar algunas de sus propiedades como entidades geométricas. Dentro de estas propiedades tienen vital importancia su forma geométrica, los radios de curvatura en los diferentes puntos y los centros de los círculos osculadores.

1. Curvas epicicloidales

La ecuación general de estas curvas, expresada en su forma paramétrica según [9], puede escribirse de la siguiente forma (ver Figura 1):

$$x=(r_o+r_g)\cos\varphi-(r_g+d)\cos\left(\frac{r_o+r_g}{r_g}\varphi\right)$$
$$y=(r_o+r_g)\,\mathrm{sen}\,\varphi-(r_g+d)\,\mathrm{sen}\left(\frac{r_o+r_g}{r_g}\varphi\right) \quad (1)$$

donde:

- r_o Radio de la circunferencia básica (directriz).
- r_g Radio de la circunferencia generatriz.
- φ Angulo que forma la línea que une el centro de coordenadas con el punto en contacto de las dos circunferencias respecto al eje horizontal (parámetro de la ecuación).

* Departamento de Mecánica Aplicada y Dibujo, Facultad de Ing. Mecánica.
** Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, Santa Clara, Cuba.

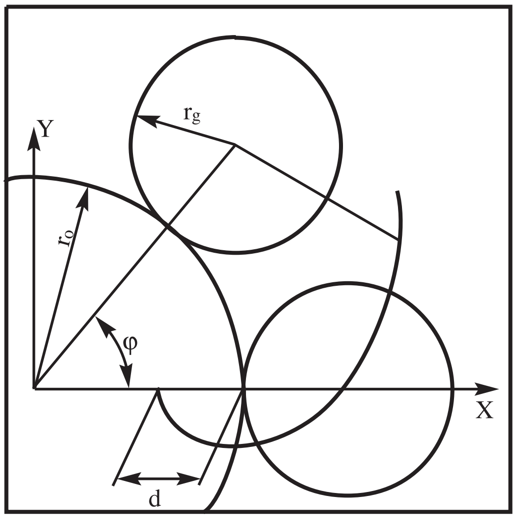

FIGURA 1. Curva epicicloidal.

d Distancia del punto que describe la curva, medida a partir del borde de la circunferencia generatriz.

Atendiendo a los valores de "d" pueden darse los siguientes casos:

a) $d = 0 \Rightarrow$ epicicloide común.

b) $d > 0 \Rightarrow$ epicicloide alargada (caso que se muestra en la Fig. 1)

c) $d < 0 \Rightarrow$ epicicloide acortada.

En [9] solamente se enuncian las expresiones generales (1) y se clasifican, pero no se determina ninguno de los parámetros mencionados anteriormente. En el resto de los textos consultados, incluyendo los de Geometría Analítica, no se hace mención siquiera a la existencia de estas expresiones generales. No obstante, estos parámetros pueden calcularse aplicando las ecuaciones deducidas para cualquier curva plana.

El radio de curvatura de una curva plana, dada en ecuaciones paramétricas, se determina por la siguiente expresión [7, 9, 10, 11, 12]:

$$r = \frac{\left[\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)\cdot\left(\frac{d^2y}{d\varphi^2}\right) - \left(\frac{d^2x}{d\varphi^2}\right)\cdot\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)\right|} \tag{2}$$

donde:

$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right), \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)$ Primera derivada de las coordenadas con respecto al parámetro de la ecuación.

$\left(\frac{d^2x}{d\varphi^2}\right), \left(\frac{d^2y}{d\varphi^2}\right)$ Segunda derivada de las coordenadas con respecto al parámetro de la ecuación.

En el caso de las curvas epicicloidales (1), sería:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= -\left(r_o + r_g\right)\operatorname{sen}\varphi + \frac{(r_g + d)(r_o + r_g)}{r_g}\operatorname{sen}\left(\frac{r_o + r_g}{r_g}\varphi\right) \\ \frac{dy}{d\varphi} &= \left(r_o + r_g\right)\cos\varphi - \frac{(r_g + d)(r_o + r_g)}{r_g}\cos\left(\frac{r_o + r_g}{r_g}\varphi\right) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\varphi^2} &= -\left(r_o + r_g\right)\cos\varphi + \frac{(r_g + d)(r_o + r_g)^2}{r_g^2}\cos\left(\frac{r_o + r_g}{r_g}\varphi\right) \\ \frac{d^2y}{d\varphi^2} &= -\left(r_o + r_g\right)\operatorname{sen}\varphi - \frac{(r_g + d)(r_o + r_g)^2}{r_g^2}\operatorname{sen}\left(\frac{r_o + r_g}{r_g}\varphi\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2) y agrupando términos semejantes, obtenemos la siguiente ecuación (5):

$$r = \frac{\left\{(r_o + r_g)^2 \cdot \left[1 + \frac{(r_g + d)^2}{r_g^2} - 2\cdot\frac{r_g + d}{r_g}\cdot\cos\left(\frac{r_o}{r_g}\varphi\right)\right]\right\}^{3/2}}{\left|(r_o + r_g)^2\left[1 + \frac{(r_g + d)^2(r_o + r_g)}{r_g^3} - \frac{(r_g + d)(r_o + 2r_g)}{r_g^2}\cos\left(\frac{r_o}{r_g}\varphi\right)\right]\right|}$$

Las coordenadas (m, n) del centro del círculo osculador de una curva plana pueden calcularse de la siguiente forma [7, 9, 10, 11, 12]:

$$m = x - \frac{dy}{d\varphi}\frac{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)\left(\frac{d^2y}{d\varphi^2}\right) - \left(\frac{d^2x}{d\varphi^2}\right)\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)} \tag{6}$$

$$n = y - \frac{dx}{d\varphi}\frac{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)\left(\frac{d^2y}{d\varphi^2}\right) - \left(\frac{d^2x}{d\varphi^2}\right)\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)} \tag{7}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1), (3) y (4) en (6) y (7) respectivamente se obtiene:

$$\begin{aligned} m = {} & (r_o + r_g)\left(1 - \frac{A}{B}\right)\cos\varphi \\ & -(r_g + d)\left[1 - \frac{(r_o + r_g)\cdot A}{r_g \cdot B}\right]\cos\left(\frac{r_o + r_g}{r_g}\varphi\right) \end{aligned} \tag{8}$$

$$n=(r_o+r_g)\left(1-\frac{A}{B}\right)\operatorname{sen}\varphi$$
$$-(r_g+d)\left[1-\frac{(r_o+r_g)\cdot A}{r_g\cdot B}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{r_o+r_g}{r_g}\varphi\right) \qquad (9)$$

donde:

$$A=(r_o+r_g)^2\cdot\left[1+\frac{(r_g+d)^2}{r_g{}^2}-2\frac{r_g+d}{r_g}\cdot\cos\left(\frac{r_o}{r_g}\varphi\right)\right] \qquad (10)$$

$$B=(r_o+r_g)^2\left[1+\frac{(r_g+d)^2(r_o+r_g)}{r_g{}^3}\right.$$
$$\left.-\frac{(r_g+d)(r_o+2r_g)}{r_g{}^2}\cos\left(\frac{r_o}{r_g}\varphi\right)\right] \qquad (11)$$

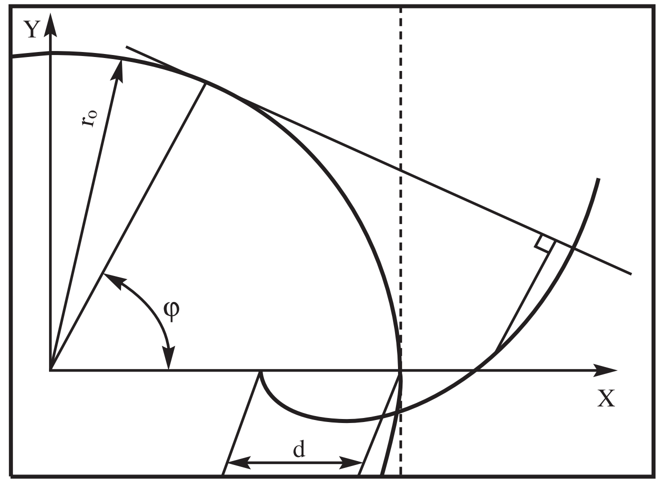

FIGURA 2. Curva evolvente de círculo

2. Curvas evolventes de círculo

Si el círculo rodante (circunferencia generatriz) se convierte en una recta, entonces la curva epicicloidal da origen a la evolvente de círculo. Esta afirmación, por simple inspección, parece lógica, pero en ninguno de los textos consultados se demuestra; menos aún teniendo en cuenta su formulación general. Para que se tenga una idea más clara de la relación o parentesco de estas curvas, a continuación se presentará esta demostración.

Para que la circunferencia generatriz se convierta en una recta tendría que ser su radio de longitud infinita, por lo que las ecuaciones de la evolvente deberán obtenerse aplicando este límite a la expresión general de la epicicloide (1); esto es:

$$x=\lim_{r_g\to\infty}\left[(r_o+r_g)\cdot\cos\varphi-(r_g+d)\cdot\cos\left(\frac{r_o+r_g}{r_g}\varphi\right)\right]$$

A la ecuación de la coordenada y se le aplica el mismo procedimiento y como resultado se obtienen las ecuaciones:

$$x=(r_o-d)\cos\varphi+r_o\cdot\varphi\cdot\operatorname{sen}\varphi$$
$$y=(r_o-d)\operatorname{sen}\varphi-r_o\cdot\varphi\cdot\cos\varphi \qquad (12)$$

Las ecuaciones (12) coinciden con las planteadas en [9] como ecuaciones paramétricas generales de la evolvente de círculo, lo cual puede verificarse con la ayuda de la Figura 2. La evolvente de círculo, de acuerdo con el valor de la distancia d, se clasifica, al igual que la epicicloide, en: común, alargada y acortada. La demostración realizada permite afirmar que las curvas evolventes de círculo son un caso especial de las curvas epicicloidales, cuando el radio generatriz toma valor infinito.

La evolvente de círculo, en su formulación general, tampoco es tratada en la bibliografía referida, por lo que resulta necesario establecer las expresiones que determinan su radio de curvatura y el centro del círculo osculador. Esto se hace de forma análoga a las curvas epicicloidales, partiendo de (2), (6) y (7).

Para la evolvente de círculo dada por (12), se obtiene:

$$r=\frac{\left(d^2+r_o{}^2\cdot\varphi^2\right)^{3/2}}{\left|d^2+r_o{}^2\cdot\varphi+d\cdot r_o\right|} \qquad (13)$$

$$m=\left[r_o-d\cdot(1-A)\right]\cdot\cos\varphi+r_o\cdot\varphi\cdot(1-A)\cdot\operatorname{sen}\varphi \qquad (14)$$

$$n=\left[r_o-d\cdot(1-A)\right]\cdot\operatorname{sen}\varphi+r_o\cdot\varphi\cdot(1-A)\cdot\cos\varphi \qquad (15)$$

donde:

$$A=\frac{d^2+r_o{}^2\cdot\varphi^2}{d^2+r_0{}^2\cdot\varphi^2+d\cdot r_o} \qquad (16)$$

3. Comparación entre las curvas epicicloidales y evolventes de círculo

En las Figuras de la 3 a la 6 se puede observar una comparación entre los diferentes tipos de curvas analizadas anteriormente, de manera que pueda tenerse una idea más clara de su posible empleo en los perfiles de los dientes.

Además de la comparación desde el punto de vista gráfico, también se compararon a partir de las propiedades que le confieren a los engranajes formados

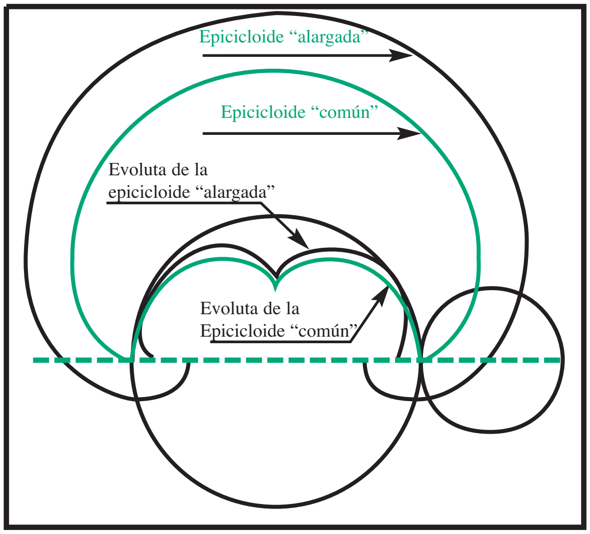

FIGURA 3. Comparación entre las epicicloides.

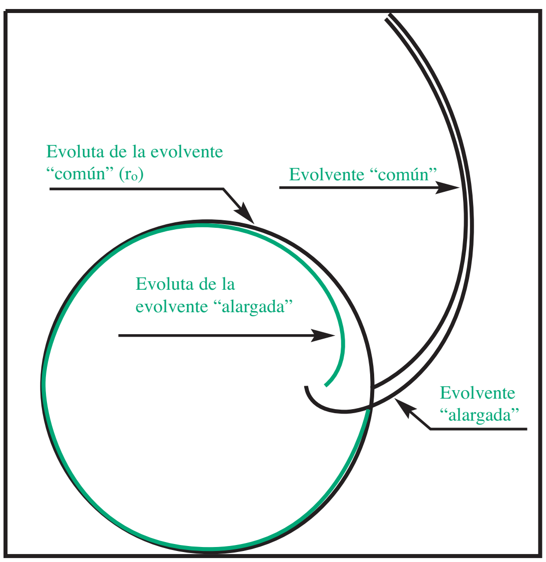

FIGURA 4. Comparación entre las evolventes.

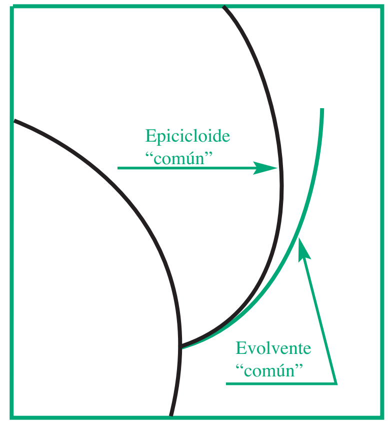

FIGURA 5. Comparación entre la epicicloide y evolvente comunes.

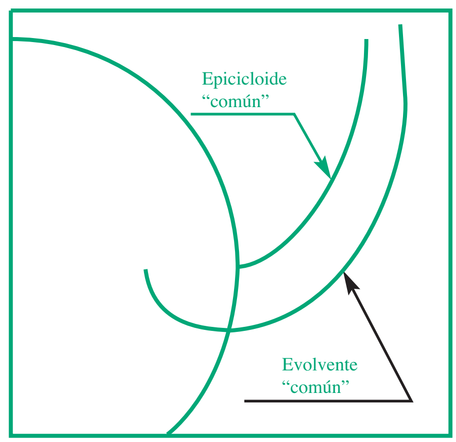

FIGURA 5. Comparación entre la epicicloide y evolvente comunes.

por ellas, que se pueden observar en las figuras de la 7 a la 10.

4. Conclusiones

- El estudio realizado permite afirmar que las curvas evolventes de círculo pertenecen a la familia de las curvas epicicloidales, pues se obtienen a partir de éstas cuando el radio generatriz alcanza valor infinito. A tal efecto se desarrolló una demostración matemática, que no aparece en la bibliografía consultada.
- Las comparaciones realizadas entre las diferentes curvas, atendiendo a su forma geométrica, no permiten tomar una decisión en cuanto a qué curva será mejor para el perfil de trabajo en engranajes que operan con distancia entre centros variable. Por un lado, unas permiten utilizar un mayor radio exterior y por otro lado, otras permiten prolongar la zona de trabajo de los dientes por dentro del radio básico.
- Los perfiles de los dientes formados por la curva evolvente "común" pueden ser empleados en engranajes que requieran una variación de la distancia entre centros igual o inferior al 5% de la distancia mínima aproximadamente, para relación de transmisión igual a 1 o ligeramente superior. En este

rango es aconsejable su uso debido a las ventajas que presenta este perfil.

- Los perfiles formados por la curva epicicloidal "alargada" permiten hasta un 10% de variación de la distancia entre centros, sin provocar la pérdida del contacto entre las ruedas (e > 1) y sin introducir grandes irregularidades en el funcionamiento de la trasmisión. No obstante, su empleo se realizará cuando el perfil evolvente común no permita alcanzar la variación de la distancia entre centros necesaria y preferiblemente en transmisiones que trabajen a bajas revoluciones para disminuir los efectos dinámicos.

Bibliografía

[1] Baránov G. G. Curso de la teoría de mecanismos y máquinas. Editorial MIR. Moscú. 1988.

[2] Broesma I. Design of gears. Editorial Industrial Press. Inc. New York. 1975.

[3] Buckingham E. Manual of gear design. Sesction two. Editorial Industrial Press Inc. New York. 1971

[4] Frolov K. B., Popov C. Teoría de Mecanismos y Máquinas. Editorial de la Escuela Superior de Moscú. (En Ruso).1987.

[5] Henriot. G. Manual práctico de engranajes. / G. Henriot. 1. ed. (Barcelona. Marcombo) S. A. Ediciones Técnicas. 1967; 161 p.

[6] Kent W. Mechanical engineers´ handboock. Edición Revolucionaria. La Habana. 1966.

[7] Lehmann C. Geometría Analítica. Instituto cubano del libro. La Habana. 1974.

[8] Loyarte Cc. F. Cinemática de los engranajes. Ediciones G. Gilí S. A. Buenos Aires. Argentina. 1980.

[9] Rektorys, K. Prehled uzite Matematiky. SNTL. Praha. 1968.

[10] Rey J. Geometría Analítica. Editorial Revolucionaria. La Habana. 1966.

[11] Thomas G. Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica. Editora Revolucionaria. La Habana. 1968.

[12] Woods F. Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal. Editora Hispano Americana. México. 1963.