

DOS ALGORITMOS NUMÉRICOS PARA LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE SAINT VENANT

Yoel Martínez González* y David E. Marón Domínguez**

Se desarrollan y comparan dos esquemas para la solución de las ecuaciones de flujo impermanente unidimensional en conducciones libres, tomando en cuenta la existencia de aportes laterales y la correspondiente variabilidad espacial de la rugosidad, así como de la pendiente del fondo de la conducción. Debido a que ambos esquemas presentan parámetros de peso que influyen sobre la estabilidad, en los casos estudio mostrados se introdujeron ciertos valores para que ésta se garantice, permitiendo identificar sus limitaciones y bondades.

Introducción

Los métodos numéricos son frecuentemente utilizados para la resolución de las ecuaciones del flujo impermanente unidimensional (o ecuaciones de Saint Venant), que para una conducción con aporte lateral toman la forma:

- Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} T = -q^* \quad (1.a)$$

- Ecuación de la cantidad de movimiento

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} + gA(1 - NF^2) \frac{\partial h}{\partial x} + gA \left[\frac{n^2 Q |Q|}{R^{4/3} A^2} - S_0 \right] \quad (1.b)$$

donde: t = tiempo; x = distancia longitudinal; Q(x,t) = gasto o caudal; h(x,t) = tirante o profundidad de circulación; A(x,t) = área mojada; R(x,t) = radio hidráulico; T(x,t) = ancho superficial; n(x) = coeficiente de rugosidad;

NF(x,t) = número de Froude;
So(x) = pendiente de la rasante de fondo y
q*(x,t) = aporte neto lateral, que es igual a la suma de los aportes distribuidos (q_tT) y puntuales (q_δ).

Según Chow et al [1] éstos pueden ser clasificados como *métodos directos* y *métodos de las características*. En los primeros se formulan sistemas de ecuaciones en diferencias finitas, utilizando las ecuaciones diferenciales parciales de continuidad y cantidad de movimiento, obteniéndose soluciones para tiempos y distancias incrementales. Aquí se incluyen los métodos de diferencias finitas (MDF) y elementos finitos (MEF), así como cualquiera de sus variantes.

En los *métodos de las características*, las ecuaciones en derivadas parciales son transformadas primeramente a ecuaciones en derivadas totales y luego se resuelven analíticamente o usando una representación en diferencias finitas. En la década de los años sesenta comenzaron a ser desplazados por los *métodos directos*, que resultaron ser más ventajosos. Por esta misma razón, en el presente trabajo se plantea utilizar una variante propuesta por R. Szymkiewicz ([8],[9]) obtenida de una modificación del procedimiento de integración de Galerkin [2] y el esquema en diferencias finitas de A. Preissmann [5] para la solución de las ecuaciones de Saint Venant. Cabe señalar que tales ecuaciones son usualmente resueltas por el MDF, sin embargo el MEF también puede ser empleado, pero en su forma estándar no asegura resultados satisfactorios. La razón de éstas recae en la estrategia empleada para la aproximación de

* Centro de Investigaciones Hidráulicas (CIH). Instituto Superior Politécnico José Antonio Chavarría (ISPJAE). Ciudad de la Habana, Cuba.

ymartinez@cih.ispjae.edu.cu

** Dpto. de Matemática, Facultad de Ingeniería Civil, ISPJAE, Cuba.

dmaron@civil.ispjae.edu.cu

los términos no lineales de las ecuaciones de Saint Venant. Es por ello que diferentes aproximaciones han sido propuestas, destacándose la de Katopodes [4] que usó una formulación disipativa del procedimiento de integración de Galerkin, basada en el empleo de funciones de peso discontinuas, que introducen disipación en el esquema numérico. La variante de Szymkiewicz acude al teorema del valor medio ponderado de una función en el elemento, resultando una solución sin oscilaciones y prácticamente con las mismas propiedades del esquema de Preissmann, que ha de utilizar un método ponderado de cuatro puntos entre niveles de tiempo, siendo incondicionalmente estable para determinados valores de los coeficientes de ponderación utilizados. Además, una comparación de la eficiencia del MEF y el esquema de Preissmann fue llevada a cabo por Granatowicz y Szymkiewicz [8] donde se demuestra que los métodos son prácticamente equivalentes y brindan resultados casi idénticos, señalando las diferencias de los esquemas; para el MEF una malla de *seis puntos* mientras que para el esquema de Preissmann, *cuatro puntos* lo que influye en la rapidez de los cálculos. En los casos resueltos por estos investigadores, el MEF satisfizo mejor la ecuación de continuidad.

En el presente trabajo se desarrollan y comparan ambos esquemas, tomando en cuenta la existencia de aportes laterales, ya sean puntuales y/o distribuidos en el espacio, así como continuos y/o instantáneos en el tiempo, siendo válido destacar que en su propuesta original, Szymkiewicz no toma en cuenta este término [9]. Otras consideraciones son: la variabilidad espacial de la resistencia al flujo, caracterizada por el coeficiente de rugosidad y de la rasante de fondo en el dominio de solución, o sea, del tramo de conducción considerado.

El método de los elementos finitos (MEF). Variante de Szymkiewicz

Será considerada una conducción de longitud L , la cual será dividida por $N+1$ nodos en N elementos, cada uno de

magnitud Δx_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Las integrales que aparecen al aplicar el procedimiento de Galerkin al sistema (1) dependen de las incógnitas por lo que es necesario analizar el tratamiento que se le dará a dichos coeficientes. Existen dos variantes en el MEF estándar para dicho análisis:

- Aproximar dichos coeficientes por un *valor promedio*, utilizando el teorema del valor medio en el elemento.
- Utilizar una *combinación lineal* de los términos de los coeficientes.

Como fue mencionado con anterioridad, es utilizada una modificación de la primera variante, propuesta por Szymkiewicz, que emplea un cierto valor ponderado de dichos coeficientes en el elemento. Ahora bien, como las funciones bases $N_i(x)$ se tomarán lineales, existirán consecuentemente dos tipos de integrales y son las siguientes:

$$I_i = \int_{Re} f(x,t) N_i(x) dx$$

$$= f_c(t) \int_{Re} N_i(x) dx = f_c(t) \frac{\Delta x_i}{2} \quad (2.a)$$

$$I_{i+1} = \int_{Re} f(x,t) N_{i+1}(x) dx$$

$$= f_c(t) \int_{Re} N_{i+1}(x) dx = f_c(t) \frac{\Delta x_i}{2} \quad (2.b)$$

El promedio ponderado $f_c(t)$ se define, en un elemento, por las fórmulas:

- Para el nodo i :

$$f_c(t) = w f_i(t) + (1-w) f_{i+1}(t) \quad (3.a)$$

- Para el nodo $i+1$:

$$f_c(t) = (1-w) f_i(t) + w f_{i+1}(t) \quad (3.b)$$

donde w = parámetro de peso que varía entre 0 y 1. Por lo tanto, acorde con (3), las expresiones en (2) podrán ser escritas como:

- Para el nodo i :

$$I_i = [w f_i(t) + (1-w) f_{i+1}(t)] \frac{\Delta x_i}{2} \quad (4.a)$$

- Para el nodo $i+1$:

$$I_{i+1} = [(1-w) f_i(t) + w f_{i+1}(t)] \frac{\Delta x_i}{2} \quad (4.b)$$

Nótese que de ser adoptado $w = 2/3$ en las expresiones anteriores es obtenido el MEF estándar. La aplicación del MEF en el espacio en (1) origina un sistema de

ecuaciones diferenciales ordinarias el cual puede ser escrito en notación matricial de la forma:

$$[W] \frac{d\{F\}}{dt} + \{E\} = \{0\} \quad (5)$$

siendo W una matriz de bandas, simétrica y constante, F el vector de las incógnitas y E es un vector que depende de las incógnitas Q y h. Para aproximar este último, se utilizará una ponderación con un parámetro θ , que varía entre 0 y 1, obteniéndose el esquema en diferencias siguiente:

$$\frac{1}{\Delta t} [W] \{F^k - F^{k-1}\} + \theta \{E^k\} + (1-\theta) \{E^{k-1}\} = \{0\} \quad (6)$$

Realizando algunas transformaciones:

$$[W] \{F^k\} + \theta \Delta t \{E^k\} - [W] \{F^{k-1}\} + (1-\theta) \Delta t \{E^{k-1}\} = \{0\} \quad (7)$$

Para $\theta = 1$ se obtiene el esquema implícito de Euler; con $\theta = 2/3$ el esquema de Galerkin y si $\theta = 1/2$ un esquema equivalente al de Crank-Nicolson. De coincidir $\theta = 1$ y $w = 1$ resulta el esquema de Vasiliev, que según Szymkiewicz [9] resulta inadecuado para la solución de las ecuaciones de Saint Venant. El sistema (7) es no lineal y presenta $2(N+1)$ ecuaciones con $2N$ incógnitas. Aunque puede ser linealizado usando los primeros términos de una expansión en serie de Taylor en torno a los valores obtenidos en el paso de tiempo anterior, en el presente trabajo se hace uso de un método de solución de sistemas de ecuaciones no lineales, o sea, una variante del método de Gauss-Newton para la solución de este tipo de sistemas, conocido como método de Levenberg-Marquardt, el cual es descrito en detalle por Gill et al [3].

Análisis de precisión y estabilidad

Para la evaluación de la precisión y la estabilidad es utilizado el análisis de Fourier y las ecuaciones de Saint Venant son simplificadas y linealizadas como sigue:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (8.a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h_0 \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (8.b)$$

Aquí $U = Q/A$; $h_0 =$ profundidad constante; $h =$ profundidad de flujo. Este sistema escrito en notación vectorial

$$\frac{\partial \{F\}}{\partial t} + [K_0] \frac{\partial \{F\}}{\partial x} = \{0\} \quad (9)$$

siendo F = vector de las incógnitas y $K_0 =$ matriz de coeficientes. La discretización de este sistema con Δx y Δt constantes vendrá dada por

$$\begin{aligned} \{0\} = & \frac{1-w}{\Delta t} \{F_{i+1}^{k+1} - F_{i+1}^k\} \\ & + \frac{2w}{\Delta t} \{F_i^{k+1} - F_i^k\} \\ & + \frac{1-w}{\Delta t} \{F_{i-1}^{k+1} - F_{i-1}^k\} \\ & + \frac{\theta}{\Delta x} [K_0] \{F_{i+1}^{k+1} - F_{i-1}^{k+1}\} \\ & + \frac{1-\theta}{\Delta x} [K_0] \{F_{i+1}^k - F_{i-1}^k\} \end{aligned} \quad (10)$$

Cuando es aplicado el análisis de Fourier en (10) resulta un factor de amplificación G que es un número complejo, cuyo módulo es:

$$|G| = \sqrt{1 + \frac{1-2\theta}{\theta^2 + \frac{1}{4r^2}}} \quad \text{donde} \quad r = C_r \frac{\text{tg}\left(\frac{\lambda \Delta x}{2}\right)}{1 + (2w-1)\text{tg}^2\left(\frac{\lambda \Delta x}{2}\right)} \quad (11)$$

con $\lambda =$ índice de la componente de Fourier; $C_r = (g h_0)^{1/2} (\Delta t / \Delta x)$, el número de Courant.

El esquema numérico es absolutamente estable si $|G| \leq 1$ y esto sólo se satisface cuando $w \geq 1/2$ y $\theta \geq 1/2$. Para $\theta = 1/2$, $|G| = 1$ resultando un esquema no disipativo, o sea que se propagan los errores; con $\theta < 1/2$, $|G| > 1$ que da lugar a un esquema inestable y si $\theta > 1/2$, $|G| < 1$ entonces el esquema es disipativo.

La intensidad de la disipación vendrá dada por el coeficiente de difusión numérica v_n el cual puede ser estimado acorde con la ecuación:

$$v_n = g (\theta - 0,5) \Delta t h_o \quad (12)$$

Nótese que la difusión sólo desaparece cuando $\theta = 1/2$, lo cual indica que la aproximación del método es de segundo orden en el tiempo. Para $\theta > 1/2$, el esquema produce difusión numérica que se incrementa cuando θ y Δt son incrementados. Para estimar el error de fase, haciendo uso del factor de amplificación, se define la celeridad de la fase de la componente de Fourier, definida por el ángulo ϕ_k

$$\text{tg}\phi_k = \frac{2r}{4r^2\theta(\theta-1)+1} \quad (13)$$

Para la variante de Szymkiewicz, el error de dispersión está ausente solamente si $w = 1/2$, $\theta = 1/2$ y $Cr=1$. Con estos valores la celeridad de la fase de la componente de Fourier es constante y al introducir $w = 1/2$ en (11) se obtiene

$$r = C_r \text{tg}(0,5 \lambda \Delta x) \quad (14)$$

El análisis de Fourier desarrollado por Szymkiewicz para estimar la precisión y estabilidad del esquema, aplicado a la versión linealizada del sistema (1) no es definitivo, pues bien es conocido que no se dispone de métodos exactos para el estudio de la convergencia y estabilidad de esquemas no lineales. Es por ello que la experimentación numérica constituye la única herramienta para la verificación final con el objetivo de garantizar una mejor simulación de condiciones de flujo reales.

El método de las diferencias finitas (MDF). Esquema de Preissmann

En el método de Preissmann, cualquier función continua y derivable respecto a las variables independientes x y t , se sustituye por las siguientes fórmulas:

$$f_{m_i}^k = \theta \{ w f_{i+1}^k + (1-w) f_i^k \} + (1-\theta) \{ w f_{i+1}^{k-1} + (1-w) f_i^{k-1} \} \quad (15.a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t_k} w (f_{i+1}^k - f_{i+1}^{k-1}) + \frac{1}{\Delta t_k} (1-w) (f_i^k - f_i^{k-1}) \quad (15.b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x_i} \theta (f_{i+1}^k - f_i^k) + \frac{1}{\Delta x_i} (1-\theta) (f_{i+1}^{k-1} - f_i^{k-1}) \quad (15.c)$$

siendo Δx_i y Δt_k los intervalos variables de distancia y tiempo respectivamente que proporcionan el tamaño de la malla; w y θ parámetros de peso que pueden variar entre 0 y 1. Tales parámetros pueden afectar significativamente la estabilidad del esquema; una condición estándar puede obtenerse para $w = 1/2$ lo que implica una precisión de segundo orden en el espacio según Lyn y Goodwin [5]. Acorde con (15), las ecuaciones de Saint Venant son discretizadas y se obtiene un sistema algebraico con $2N$ ecuaciones y $2N$ incógnitas ($i = 1, \dots, N+1$)

$$0 = \theta \frac{Q_{i+1}^k - Q_i^k}{\Delta x_i} + (1-\theta) \frac{Q_{i+1}^{k-1} - Q_i^{k-1}}{\Delta x_i} + T_{m_i}^k w \frac{h_{i+1}^k - h_{i+1}^{k-1}}{\Delta t_k} + T_{m_i}^k (1-w) \frac{h_i^k - h_i^{k-1}}{\Delta t_k} + q^{*k} \quad (16.a)$$

$$0 = w \frac{Q_{i+1}^k - Q_{i+1}^{k-1}}{\Delta t_k} + (1-w) \frac{Q_i^k - Q_i^{k-1}}{\Delta t_k} + \frac{2\theta Q_{m_i}^k}{A_{m_i}^k} \frac{Q_{i+1}^k - Q_i^k}{\Delta x_i} + \frac{2(1-\theta) Q_{m_i}^k}{A_{m_i}^k} \frac{Q_{i+1}^{k-1} - Q_i^{k-1}}{\Delta x_i} + g A_{m_i}^k (1 - NF_{m_i}^2)^k \theta \frac{h_{i+1}^k - h_i^k}{\Delta x_i} \quad (16.b)$$

siendo $A_{m_i}^k = A(h_{m_i}^k)$; $T_{m_i}^k = T(h_{m_i}^k)$; $(NF^2)_{m_i}^k = NF^2(Q_{m_i}^k, h_{m_i}^k)$.

$$Sf_{m_i}^k = \frac{n_i^2 Q_{m_i}^k |Q_{m_i}^k|}{(R_{m_i}^k)^{4/3} (A_{m_i}^k)^2}$$

$$h_{m_i}^k = \theta \{ w h_{i+1}^k + (1-w) h_i^k \}$$

$$Q_{m_i}^k = \theta \{ w Q_{i+1}^k + (1-w) Q_i^k \}$$

Para resolver (16), que constituye un sistema de ecuaciones no lineales es utilizado también el método de Levenberg-Marquardt.

Análisis de estabilidad

La técnica utilizada para dicho análisis es la de von Neuman. Es válido recalcar que la misma está rigurosamente justificada para ecuaciones diferenciales lineales, y en virtud de tal restricción, se procede a la linealización de las ecuaciones que gobiernan el régimen impermanente unidimensional, lo que implica la aplicación de este esquema al sistema (8):

$$\begin{aligned} \{0\} = & w \{ F_{i+1}^k - F_{i+1}^{k-1} \} + (1-w) \{ F_i^k - F_i^{k-1} \} \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} [K_o] \theta \{ F_{i+1}^k - F_i^k \} \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} [K_o] (1-\theta) \{ F_{i+1}^{k-1} - F_i^{k-1} \} \end{aligned} \quad (17)$$

La condición de von Neuman para la estabilidad numérica impone la siguiente restricción:

$$\frac{w - \frac{1}{2}}{Cr_i} + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \geq 0 \quad (18)$$

siendo Cr_i = número de Courant para la i -ésima onda característica. Para $Cr > 0$, la estabilidad depende de los valores de w y θ :

- Para $0 \leq w \leq 1/2$
 - Si $0 \leq \theta \leq 1/2$, el esquema es *incondicionalmente estable*
 - Si $1/2 < \theta \leq 1$, el esquema es *condicionalmente estable*
- Para $1/2 < w \leq 1$
 - Si $0 \leq \theta \leq 1/2$, el esquema es *condicionalmente estable*
 - Si $1/2 < \theta \leq 1$, el esquema es *incondicionalmente estable*.

Nótese que para $w \geq 1/2$ y $\theta \geq 1/2$ la estabilidad es incondicional, como en la variante de Szymkiewicz. Lyn y Goodwin

[5] demuestran que el criterio de von Neuman es una condición necesaria y suficiente para la estabilidad del presente esquema, así como también que a pesar de que el esquema sea estable, su convergencia puede ser mala, siendo esto corroborado por López y Saavedra [7] con sus experimentaciones numéricas con casos simples del flujo en conducciones libres, llegando a la conclusión de que para $w = 1/2$ el mejor balance de oscilaciones y de difusión numérica se obtiene si $\theta = 0,6$, pues éstas se reducen al mínimo; sin embargo cuando la fricción es significativa, $\theta = 1/2$ ofrece mayor precisión y rapidez.

Resultados

Dos casos serán resueltos por los esquemas de Preissmann y Szymkiewicz. La geometría de la conducción permanecerá invariable, correspondiente a un canal de sección rectangular con 6,1 metros de ancho; la rasante de fondo es constante e igual a 0,0005; un coeficiente de rugosidad $n = 0,02$ y la longitud de dicha conducción, 6 km. Los parámetros de peso w y θ serán tomados de $1/2$ y $2/3$ respectivamente, de manera que de acuerdo con la literatura consultada se garantice la estabilidad numérica de ambos esquemas.

Caso 1

Una forma simple de las ondas de gravedad, conocida como onda solitaria, será modelada a continuación tomando en cuenta los efectos de la pendiente y la fricción, que reducirá gradualmente la altura de la onda. La condición inicial del flujo corresponde a un régimen de circulación uniforme, caracterizado por una profundidad de circulación de 1,8 m y un caudal $Q_n = 13,3335 \text{ m}^3/\text{seg}$. En el extremo aguas arriba y con un periodo $P_e = 400 \text{ seg}$ se impone un hidrograma senosoidal en la forma:

$$Q_o(t) = Q_n + 0,5 \Delta q (1 - \cos \omega t); \quad \text{para } 0 \leq t \leq P_e$$

$$Q_o(t) = Q_n; \quad \text{para } t > P_e$$

siendo $\omega = 2\pi / P_e$; $\Delta q = 8,889 \text{ m}^3/\text{seg}$.

La longitud será dividida en intervalos de longitud constante donde $\Delta x = 300\text{m}$ lo que implica la existencia de 20 subintervalos y el tiempo de simulación de 1200 seg, necesarios para que no ocurra la reflexión de dicha onda en la frontera aguas abajo, será dividido por 12 subintervalos cuya magnitud $\Delta t = 100\text{ seg}$. En efecto, tal y como se muestra en las figuras 1.a y 1.b se detecta una onda que se traslada aguas abajo amortiguándose por efecto de la fricción y según el hidrograma impuesto, para $t \geq 1/2 P_e$ existe una tendencia a la condición inicial. En los primeros instantes en que es posible apreciar el perfil de la onda en su plenitud, no se detecta simetría por efecto de la rasante de fondo. En los experimentos numéricos realizados por Mozayeny y Song [6], al aplicar el método de las características fueron detectadas oscilaciones en la recesión del hidrograma

para diferentes secciones del tramo de conducción y según dichos autores existían dos posibles causas:

- a) Gradientes adversos de presión en la rama de la recesión del hidrograma
- b) Oscilaciones numéricas

Añadiendo además que de ser ésta última la causa, entonces el hecho de que las ondas se amortiguasen rápidamente es un indicador de la estabilidad numérica del método y consecuentemente pueden ser ignoradas debido a su pequeña amplitud. En los esquemas presentados no se produjeron tales oscilaciones y los resultados fueron prácticamente idénticos, aunque en la frontera aguas abajo, la variante de Szymkiewicz experimentó menos variación que la de Preissmann. Los tiempos de cálculo resultaron: esquema de Preissmann,

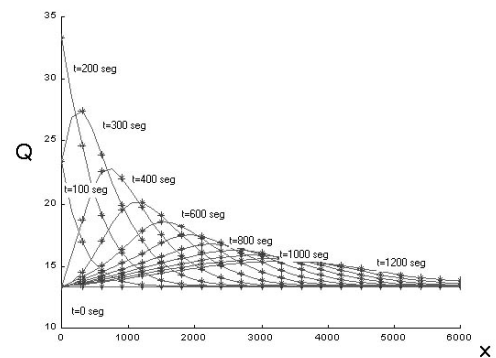
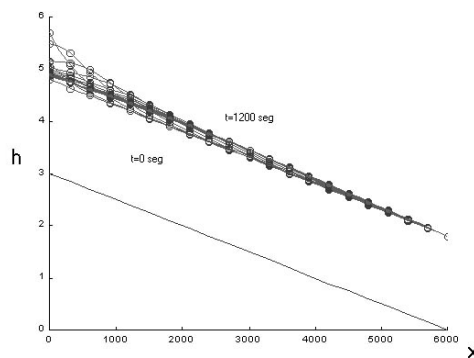


FIGURA 1.a Resultados según el esquema de Preissmann con un hidrograma senoidal completo aguas arriba de la conducción.

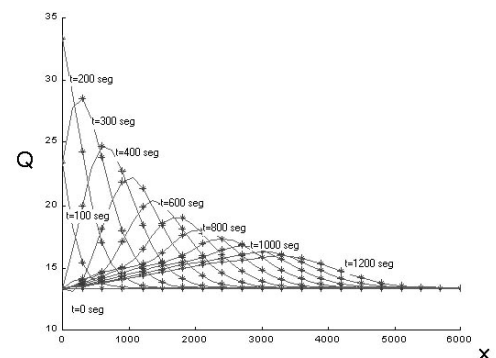
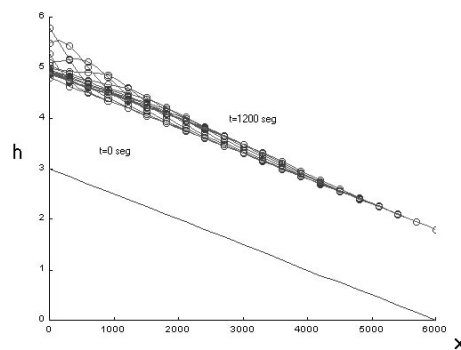


FIGURA 1.b. Resultados según la variante de Szymkiewicz con un hidrograma senoidal completo aguas arriba de la conducción.

170,43 seg; esquema de Szymkiewicz, 1573,1 seg.

Caso 2

Ahora se introduce, para la misma condición inicial, un aporte distribuido en dos elementos (décimo y oncenno) que barren una longitud de 600 m, y la magnitud de tal aporte es $3,512 \text{ m}^3/\text{seg}/\text{m}^2$ en todo el tiempo de simulación que es de 500 segundos, con un incremento temporal de 50 segundos, sin ser afectadas las condiciones de frontera aguas arriba y aguas abajo respectivamente. Los resultados de cada esquema se muestran en las figuras 2.a y 2.b.

El esquema de Preissmann y la variante de Szymkiewicz brindan como resultado una onda creciente que ha de comprender

los elementos donde tiene lugar el aporte. Como esto produce cambios en la condición inicial, aguas arriba de dicha entrada comienza una disminución gradual del gasto y aguas abajo, un incremento en el sentido del flujo. Los resultados no se diferencian prácticamente y las oscilaciones detectadas son despreciables; no obstante, la variante de Szymkiewicz satisfizo mejor la condición de frontera aguas abajo (ver figura 2.b) y los tiempos de cálculo resultaron, para el esquema de Preissmann: 270,01 seg y para el esquema de Szymkiewicz: 1193,4 seg.

Conclusiones

En los esquemas presentados fueron introducidos los términos correspondientes a los aportes laterales, ya sean puntuales o

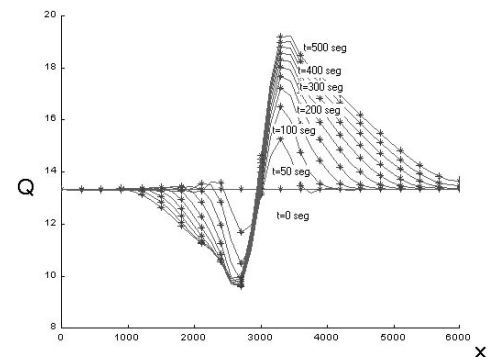
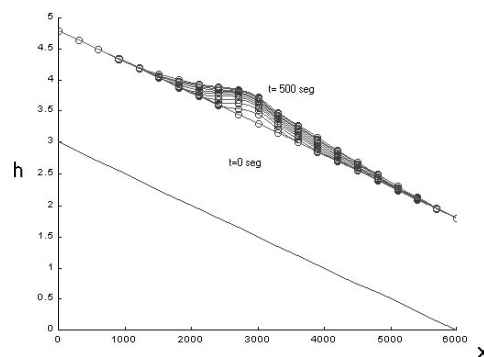


FIGURA 2.a. Resultados según el esquema de Preissmann con gasto distribuido en el espacio y continuo en el tiempo.

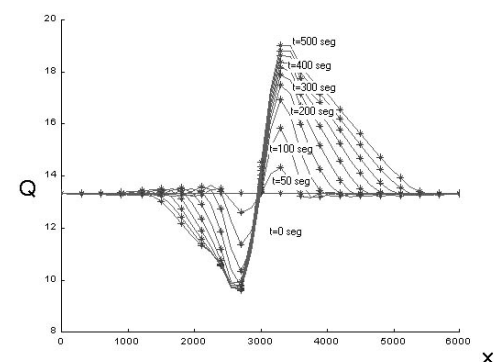
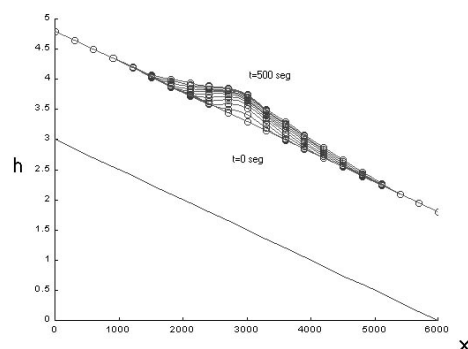


FIGURA 2.b. Resultados según la variante de Szymkiewicz para gasto distribuido en el espacio y continuo en el tiempo.

distribuidos, además de la variabilidad espacial del coeficiente de rugosidad y de la rasante de fondo. Para las condiciones de simulación establecidas, se brindaron resultados casi idénticos, pero la diferencia fundamental radica en el tiempo necesario para efectuar los cálculos. El esquema de Preissmann es más rápido que el de Szymkiewicz pues el número de ecuaciones resulta menor, o dicho de otra forma, su malla genérica es de cuatro puntos mientras que la de Szymkiewicz es de seis puntos. Esto da lugar a una interrogante en la decisión del tipo de esquema a emplear para la modelación del flujo impermanente en conducciones libres, pues en sentido general están demostradas las ventajas del MEF sobre el MDF, ya que es más preciso. Por tanto, el peso de la rapidez vs precisión depende en gran medida de los objetivos perseguidos en la modelación matemática del problema que se plantee, así como la toma de decisiones en el menor tiempo posible.

Bibliografía

- [1] Chow, V.T; Maidment, D.R; Mays, L.W: "Hidrología aplicada", Impreso en Colombia, 1988.
- [2] Desai, C.S; Abel, J.F: "Introduction to the finite element method: a numerical method for engineering analysis", Lintton Educational Publishing, Inc, 1972.
- [3] Gill, P.E; Murray, W.; Wright, M.H: "Practical optimization", London, Academic Press, 1981.
- [4] Katopodes, N.D: "A dissipative Galerkin scheme for open channel flow", J.Hydr. Engrg., Vol 110, No4, pp 450-466, 1984.
- [5] Lyn, D.A; Goodwin, P: "Stability of a general Preissmann scheme", J.Hydr. Engrg. Vol 113, No1, 1987.
- [6] Mozayeny, B; Song, C.S: "Propagation of flood waves in open channels", J. Hydr. Div, Vol 95, No3, 1969.
- [7] Saavedra, I; López, J.L.: "Comparación de dos esquemas en diferencias finitas para la solución de ecuaciones de flujo no permanente en canales abiertos." XVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Guayaquil, Ecuador, 1996.
- [8] Szymkiewicz, R.: "Finite element method for the solution of the Saint Venant equations in an open channel network", J.Hydro, Vol 122, pp 275-287, 1991.
- [9] Szymkiewicz, R.: "Method to solve 1D unsteady transport and flow equations", J. Hydr. Engrg., Vol 121, No 5, pp 396-403, 1995.