Marón Domínguez Ernesto David . Resolución numérica de la ecuación de la dispersión utilizando diferentes funciones de interpolación. **Tecnología en Marcha**. Vol 14 especial.

Resolución numérica de la ecuación de la dispersión utilizando diferentes funciones de interpolación

MSc. Lic. David Ernesto Marón Domínguez*

Se muestra un algoritmo numérico de la aplicación conjunta del Método de los Elementos Finitos (MEF) en el espacio y del Método de las Diferencias Finitas (MDF) en el tiempo a la ecuación de la dispersión-convección. Se utilizan los elementos lineales, cuadráticos y cúbicos para la aproximación de la concentración dentro del elemento. Se deduce la condición de estabilidad de los algoritmos numéricos utilizando el criterio de Von Neumann. Se hace un análisis adimensional con los parámetros del modelo y una comparación entre los términos advectivo y dispersivo deduciéndose una restricción para el número de Peclet. Con ayuda de soluciones analíticas se hace un análisis de la convergencia para cada uno de los algoritmos numéricos así como también se realiza una comparación entre dichos algoritmos atendiendo al número de elementos de la discretización en el espacio.

1. Introducción

Existen muchas técnicas numéricas que se han empleado en la resolución de la ecuación de la dispersión-convección: el método de las características, el método de colocación, el Método de las Diferencias Finitas (MDF), el Método de los Elementos Finitos (MEF) y otros métodos más recientes como el de la teoría algebraica de Celia [4]. Pero indiscutiblemente el MEF ha sido el más ampliamente aplicado a problemas de flujo y de transporte de contaminante en medios porosos saturados. Entre los primeros trabajos en esta temática aplicado al caso de régimen permanente están los de Zienkiewicz [20] y Taylor [17] y para el caso de régimen impermanente esta el trabajo de Javandel [10]. Cuando la advección predomina sobre la dispersión, número de Peclet grande, se pueden presentar problemas de oscilaciones o dispersiones numéricas [13]. Estas oscilaciones pueden ser eliminadas o disminuidas por hacer uso de funciones de peso y de forma de orden superior [19], de funciones de peso no simétricas [8];[11], de esquemas de integración de orden superior para la derivada con respecto al tiempo [1] o de hacer uso de parámetros de peso en las discretizaciones en el espacio y en el tiempo [16]. Aquí se plantea una solución de la ecuación de la dispersión utilizando la variante clásica de Galerkin y empleando diferentes funciones de interpolación para la aproximación de la concentración en el elemento. Se utiliza un parámetro de peso en la discretización en el tiempo.

2. Planteamiento analítico del problema directo

El modelo matemático empleado tiene en cuenta las siguientes hipótesis o consideraciones:

- flujo lineal, impermanente, saturado y unidimensional.
- fluido isotérmico, incompresible y homogéneo.
- medio poroso, isótropo y heterogéneo.

Se utiliza la ecuación diferencial del transporte de soluto en una dimensión en un medio poroso saturado ([3]; [18]; [5]):

$$\theta U \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \theta R_T \frac{\partial C}{\partial t} + \lambda \theta R_T C = 0 \qquad (1)$$

* Dpto. de Matemática, Facultad de Ingeniería Civil, ISPJAE, Cuba.
dmaron@civil.ispjae.edu.cu

donde θ es la porosidad efectiva del medio, U es la velocidad real del fluido, C es la concentración del soluto, R_T es el coeficiente de Retardo, λ es el coeficiente de degradación y D es el coeficiente de dispersión. El coeficiente de dispersión, D, depende de la velocidad del fluido según la expresión

$$D = \alpha_L\, U + D_m\, Tort$$

donde α_L es la dispersividad longitudinal del medio, D_m es la difusividad molecular de la sustancia y *Tort* es la tortuosidad del medio. En la práctica el primer sumando de *D* predomina sobre el segundo sumando debido a los pequeños valores de D_m.

Condición inicial

A la ecuación (1) se le añade una condición inicial que representa el estado inicial de las concentraciones en el medio la cual se puede escribir como

$$C(x,0) = C\hat{I}(x) \quad \text{para} \quad 0 \le x \le L \tag{2}$$

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera se presentan como concentración conocida en la entrada y en la salida, es decir, como condiciones de primera especie o de tipo Dirichlet de la forma:

$$C(0,t) = Ce(t) \quad \text{para} \quad x = 0,\ t > 0 \tag{3}$$

$$C(L,t) = Cs(t) \quad \text{para} \quad x = L,\ t > 0 \tag{4}$$

La condición de frontera de flujo de soluto conocido se representa con una condición de tercera especie o de tipo Cauchy de la forma:

$$\frac{Q_e}{\rho} C(0,t) + \frac{D}{\theta\rho}\frac{\partial C}{\partial x}(0,t) = Q_{ce} \quad \text{para} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ t = 0 \end{matrix} \tag{5}$$

$$\frac{Q_s}{\rho} C(L,t) - \frac{D}{\theta\rho}\frac{\partial C}{\partial x}(L,t) = Q_{cs} \quad \text{para} \quad \begin{matrix} x = L \\ t > 0 \end{matrix} \tag{6}$$

donde Q_e y Q_s representan los flujos del fluido en la entrada y en la salida, Q_{ce} y Q_{cs} son los flujos del contaminante en la entrada y en la salida y es la densidad del fluido. En la práctica es muy difícil tener mediciones de los flujos de soluto dados por las condiciones (5) y (6) por lo que en la mayoría de los casos se trabaja con condiciones de fronteras del tipo (3) y (4).

Luego el problema directo consiste en resolver la ecuación diferencial (1) conjuntamente con la condición inicial (2) y las condiciones de frontera (3) ó (5) en la entrada y (4) ó (6) en la salida.

3. Planteamiento numérico del problema directo.

Se utiliza el Método de los Elementos Finitos para la discretización en el espacio según la variante de Galerkin ([9]; [13]). Se utilizan tres tipos de funciones de interpolación para la aproximación de la concentración en el elemento: el elemento lineal, el cuadrático y el cúbico. La discretización en el espacio conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable temporal cuya solución se obtiene aplicando el Método de las Diferencias Finitas. En la discretización en el tiempo se introduce un parámetro de peso, *w*, que se encuentra en el intervalo [0, 1], con lo cual se obtiene un esquema en diferencias finitas más flexible ([15]; [16]). El resultado de la discretización en el espacio y en el tiempo *k* es un sistema de ecuaciones algebraicas lineales de la forma

$$[M]\left\{ C^k \right\} = \{F\} \tag{7}$$

siendo

$$[M] = \sum_{e=1}^{NE} \left(A_1^e \left[M_1^e\right] + A_2^e \left[M_2^e\right] + A_3^e \left[M_3^e\right] \right) - \left[M_4\right]$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{NE} \left(B_1^e \left[M_1^e\right] + B_2^e \left[M_2^e\right] + B_3^e \left[M_3^e\right] \right) \left\{ C^{e(K-1)} \right\} - \left[F_4\right]$$

$$A_1 = w \cdot \theta \cdot U;\ A_2 = w \cdot D;$$

$$A_3 = w(\lambda \cdot \theta \cdot Rt) + \frac{\theta \cdot Rt}{\Delta t}$$

$$B_1 = (w-1) \cdot \theta \cdot U;\ B_2 = (w-1) \cdot D$$

$$B_3 = (w-1)(\lambda \cdot \theta \cdot Rt) + \frac{\theta \cdot Rt}{\Delta t}$$

El parámetro Δt es el tamaño del intervalo de tiempo. Las constantes A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 y B_3 dependen de los valores de los parámetros de la ecuación en cada elemento, es decir, el algoritmo permite trabajar con coeficientes discontinuos por elementos. Los parámetros pueden variar con el tiempo también. Los coeficientes de las matrices $[M_1]$, $[M_2]$ y $[M_3]$ dependen de los distintos tipos de elementos utilizados en el proceso de discretización. La matriz $[M_4]$ y el vector $\{F_4\}$ representan los aportes de los flujos de fluido y de soluto. Toda la implementación computacional del algoritmo numérico del modelo se llevó a cabo con ayuda del asistente matemático MATLAB versión 5.1.

4. Análisis de la estabilidad de los algoritmos numéricos

Cuando los coeficientes del esquema (7) son constantes se puede aplicar el criterio de Von Meumann para obtener la condición de estabilidad del esquema numérico. Si los coeficientes son variables el método solo puede aplicarse localmente ([14]). El sistema de ecuaciones lineales representado en (7) puede escribirse en la forma

$$\sum_{j\in I} a_{ij} C_J^K = \sum_{j\in I} b_{ij} C_J^{K-1} + d_i^K \quad \text{para i=1,...,N} \quad (8)$$

siendo N el número de nodos del sistema de ecuaciones lineales. Los coeficientes del esquema (8) dependen de los valores de las constantes del sistema (7). En dependencia del tipo de elemento finito utilizado se obtiene un esquema tridiagonal, pentadiagonal o heptadiagonal. Si se define Er como el error de la diferencia que se obtiene entre la solución exacta del esquema y la solución que se obtiene de utilizar la computadora u ordenador entonces se puede expresar dicho error, según Von Meumann ([12]; [14]), para cada nodo i y para cada tiempo k por una ley exponencial de la forma

$$Er_{ik} = E^k e^{(i\cdot\Delta x)j} \qquad (9)$$

siendo j la unidad imaginaria compleja y E^k el error de la fase o nivel de tiempo *k*. Sustituyendo (9) en la ecuación (8) sin considerar el término d_i^k se obtiene

$$E^k = f_a E^{k-}$$

donde f_a representa el factor de amplificación de la fase o nivel de tiempo *k*. Para garantizar que los errores de redondeo no se propaguen del nivel de tiempo *k-1* al nivel de tiempo *k* es necesario que el factor de amplificación cumpla con la condición

$$|f_a| \le 1$$

De la desigualdad anterior se obtiene que la condición de estabilidad se reduce a la desigualdad por lo que el parámetro de peso, *W*, se encuentra en el intervalo . Esta condición es la misma para los tres tipos de funciones de interpolación de Lagrange.

5. Análisis adimensional

Para el análisis adimensional se seleccionaron los parámetros velocidad real del fluido U, coeficiente de dispersión D, tamaño del intervalo en el espacio Δx y tamaño del intervalo en el tiempo Δt. Los dos primeros parámetros caracterizan las propiedades físicas del medio y los dos últimos caracterizan la discretización numérica. A partir de aquí se obtienen dos números adimensionales que son el Número de Courant Advectivo (*NCa*) y el Número de Courant Dispersivo (*NCd*) según ([16])

$$NCa = \frac{U\cdot\Delta t}{\Delta x} \qquad NCd = \frac{D\cdot\Delta t}{\Delta x^2} \qquad (10)$$

Estos números adimensionales están asociados con cada uno de los procesos físicos que toman parte en los problemas de transporte de contaminante que son la advección y la dispersión. La advección o convección esta asociada con la velocidad del fluido y con los gradientes de concentraciones lo cual esta representado en el primer término de la ecuación (1) mientras que la dispersión esta asociada con los gradientes de los flujos de soluto lo cual esta representado en el segundo término de la ecuación (1). El coeficiente de dispersión, D, es la suma de la dispersión mecánica y de la dispersión molecular. La dispersión mecánica esta caracterizada por la velocidad del fluido y la dispersión molecular esta caracterizada por la difusión molecular ([2]). En la práctica la dispersión molecular es despreciable con respecto a la dispersión mecánica. Si la advección predomina sobre la dispersión entonces se presentan problemas de dispersión numérica en la resolución del modelo ([6]). Cuando la dispersión predomina sobre la advección no se presentan los problemas anteriores. A partir de (10) se define el Número de Peclet (NPe) como el cociente

$$NPe = \frac{NCa}{NCd} = \frac{U \cdot \Delta x}{D} \qquad (11)$$

Si existe predominio de la dispersión sobre la advección entonces los valores del número de Peclet son pequeños. Aquí se propone una restricción del número de Peclet la cual se deduce de imponerle al término advectivo del sistema (7) formado por la constante A_1 y la matriz $[M_1]$, que sea menor o igual que un factor α del término dispersivo formado por la constante A_2 y la matriz $[M_2]$ obteniéndose la desigualdad

$$NPe \le \frac{2 \cdot \alpha \cdot \left\| [M_2] \right\|}{\theta \cdot \left\| [M_1] \right\|} \qquad (12)$$

Para calcular las normas de las matrices que aparecen en (12) se pueden utilizar cualquiera de las tres posibles normas de matrices ([7]). Si se calculan las normas de las matrices $[M_1]$ y $[M_2]$ que aparecen en (12) para las tres posibles normas de matrices y para los tres tipos de elementos utilizados se obtienen las desigualdades

$$NPe \le \frac{2 \cdot \alpha}{\theta} \quad \text{para el elemento lineal} \qquad (13)$$

$$NPe \le \frac{6{,}9282 \cdot \alpha}{\theta} \quad \text{para el elemento cuadrático} \qquad (14)$$

$$NPe \le \frac{12 \cdot \alpha}{\theta} \quad \text{para el elemento cúbico} \qquad (15)$$

A partir de (13), (14) y (15) y teniendo en cuenta (11) se obtiene una restricción para el tamaño del intervalo en el espacio

$$\Delta x \le \frac{2 \cdot \alpha \cdot D}{\theta\, U} \quad \text{para el elemento lineal} \qquad (16)$$

$$\Delta x \le \frac{6{,}9282 \cdot \alpha \cdot D}{\theta \cdot U} \quad \text{para el elemento cuadrático} \qquad (17)$$

$$\Delta x \le \frac{12 \cdot \alpha \cdot D}{\theta \cdot U} \quad \text{para el elemento cúbico} \qquad (18)$$

Esto quiere decir que el tamaño del intervalo en el espacio debe de satisfacer las desigualdades anteriores para garantizar el predominio de la dispersión sobre la advección. El tamaño del intervalo en el espacio aumenta con el grado del polinomio utilizado para aproximar la función concentración. El factor α depende del tamaño del intervalo Δx y su valor se determina numéricamente.

6. Análisis de la convergencia y comparación entre los algoritmos numéricos

Para mostrar el análisis de la convergencia de los algoritmos numéricos se utiliza una solución analítica de la ecuación (1). Se tomo una solución de tipo cuadrática de la forma

$$C(x,t) = (a_1 x^2 + b_1 x + b_0) e^{-\lambda t} \qquad (19)$$

siendo:

$$b_1 = a_2 - \frac{2 \cdot U \cdot a_1 \cdot t}{Rt}$$

$$b_0 = \frac{2 \cdot D \cdot a_1 \cdot t}{\theta \cdot Rt} + \frac{U^2 \cdot a_1 \cdot t^2}{Rt^2} - \frac{U \cdot a_2 \cdot t}{Rt} + a_3$$

Se tomaron los siguientes valores de las constantes y parámetros del modelo:

- a_1= - 0,01, a_2= 0,01, a_3 = 1000
- Velocidad real del fluido U = 5 m/día
- Coeficiente de dispersión D = 0,25 m^2/día
- Coeficiente de degradación $\lambda = 0$ 1/día
- Coeficiente de retardo $Rt = 1$
- Porosidad $\theta = 0{,}2$
- Parámetro de peso $W = 1$
- Longitud de la región $L = 240$ m
- Tiempo final de simulación $Tf = 20$ días

Como condición inicial y condiciones de fronteras se tomaron los valores de la evaluación directa de la expresión (19). Con respecto a la discretización se tomaron 3 valores de Δx correspondientes a NE = 12, 24 y 48 elementos en el espacio para el elemento lineal, 4 valores de Δx correspondientes a NE = 6, 12, 24 y 48 elementos en el espacio para el elemento cuadrático y 6 valores de Δx correspondientes a NE = 4, 8, 12, 16, 24 y 48 elementos en el espacio para el elemento cúbico. El hecho de haber tomado distinta cantidad de números de intervalos en el espacio para cada uno de los elementos utilizados radica en poder hacer comparaciones entre los tres tipos de

TABLA 1. Resultados utilizando elementos lineales.

		Δx=20 (NE=12)	Δx=10 (NE=24)	Δx=5 (NE=48)
Δt=2 (NT=10)	Coef. Reg	0,9991	0,9991	0,9991
	ErrAbs.	18,8774	18,7454	18,0465
	ErrRel. (%)	2,2536	2,2046	2,2035
Δt=1 (NT=20)	Coef. Reg	0,9998	0,9998	0,9998
	ErrAbs.	9,4385	9,3738	9,0241
	ErrRel. (%)	1,1269	1,1024	1,1017
Δt=0,5 (NT=40)	Coef. Reg	0,9999	0,9999	0,9999
	ErrAbs.	4,7180	4,6869	4,5121
	ErrRel. (%)	0,5635	0,5512	0,5507

TABLA 2. Resultados utilizando elementos cuadráticos.

		Δx=40 (NE=6)	Δx=20 (NE=12)	Δx=10 (NE=24)	Δx=5 (NE=48)
Δt=2 (NT=10)	Coef. Reg	0,9993	0,9993	0,9993	0,9993
	ErrAbs.	14,6124	14,5293	14,2118	13,5177
	ErrRel. (%)	1,7657	1,7467	1,7361	1,6651
Δt=1 (NT=20)	Coef. Reg	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
	ErrAbs.	7,3078	7,2656	7,1067	6,7595
	ErrRel. (%)	0,8830	0,8735	0,8681	0,8326
Δt=0,5 (NT=40)	Coef. Reg	1	0,9999	0,9999	0,9999
	ErrAbs.	3,6542	3,6328	3,5533	3,3797
	ErrRel. (%)	0,4465	0,4367	0,4341	0,4163

elementos atendiendo al número de nodos y al número de elementos. Para los 3 tipos de elementos se tomaron 3 valores de Δt correspondientes a NT = 10, 20 y 40 número de subintervalos en el tiempo. Se calculó el máximo error absoluto, ErrAbs, y el máximo error relativo, ErrRel (en %), en todos los nodos y en todos los tiempos entre la solución exacta y la aproximada. Además se calculó el coeficiente de regresión, CoefReg, considerando los valores exactos como valores observados. En las tablas 1, 2 y 3 se muestran los resultados de estos errores para cada uno de los distintos tipos de elementos utilizados.

Tres aspectos importantes con este ejemplo pueden ser discutidos:

a) Con los resultados de cada una de las tablas se puede hacer un primer análisis para cada uno de los 3 algoritmos por separado. Se puede comprobar que existe convergencia de cada uno de los algoritmos cuando el tamaño del paso en la discretización tanto en el tiempo como en el espacio disminuye. Es bueno señalar que la disminución es más significativa con respecto al tiempo que con respecto al espacio.

b) Con los resultados de la tabla 1, los de las columnas 2, 3 y 4 de la tabla 2 y los de las columnas 3, 5 y 6 de la tabla 3 se puede hacer una segunda comparación entre los 3 algoritmos teniendo en cuenta que para estos resultados se tomaron la misma cantidad de elementos que los utilizados en la tabla 1. En este caso el número de nodos aumenta a N=2 NE+1 y N=3 NE+1 según corresponda con el elemento cuadrático o cúbico. Como puede observarse los errores disminuyen cuando el grado del polinomio utilizado es mayor manteniéndose el mismo número de elementos en el espacio en los 3 casos.

c) Con los resultados de la tabla 1, los de las columnas 1, 2 y 3 de la tabla 2 y los de las columnas 1, 2 y 4 de la tabla 3 se puede hacer una tercera comparación entre los 3 algoritmos ya que en este caso se tomó la mitad y la tercera parte del número de elementos utilizados en la tabla 1. El número de nodos es el mismo pero se observa que los errores disminuyen cuando se toma un número menor de elementos cuadráticos (con respecto a los lineales), o de elementos cúbicos (con respecto a los cuadráticos y a los lineales). Esto demuestra que en el caso de elementos cuadráticos u cúbicos se pueden utilizar un número menor de elementos de longitud mayor obteniéndose mejor precisión en los resultados .

TABLA 3. Resultados utilizando elementos cúbicos.

		Δx=60 (NE=4)	Δx=30 (NE=8)	Δx=20 (NE=12)	Δx=15 (NE=16)	Δx=10 (NE=24)	Δx=5 (NE=48)
Δt=2 (NT=10)	Coef. Reg	0,9992	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995
	ErrAbs.	15,6063	11,7758	10,0876	9,5643	9,3057	9,1061
	ErrRel. (%)	1,6668	1,2640	1,1018	1,0053	0,9319	0,9124
Δt=1 (NT=20)	Coef. Reg	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
	ErrAbs.	6,4797	5,8999	5,3884	5,2665	5,0657	4,8727
	ErrRel. (%)	0,6586	0,5903	0,5394	0,5275	0,5071	0,4879
Δt=0,5 (NT=40)	Coef. Reg	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
	ErrAbs.	5,5296	5,2588	4,9823	4,8625	4,5912	4,5460
	ErrRel. (%)	0,7654	0,7533	0,6654	0,6533	0,6099	0,5862

7. Conclusiones y recomendaciones

Se confeccionó un modelo numérico a partir de la aplicación del MEF y del MDF a la ecuación de la dispersión-convección. Se utilizaron tres tipos de elementos para aproximar la función concentración: el elemento lineal, el cuadrático y el cúbico. Se dedujo la condición de estabilidad numérica para los tres algoritmos la cual consiste en una restricción del parámetro de peso de la discretización en el tiempo. Se obtuvo la expresión de una restricción para el número de Peclet con la cual se garantiza que el término advectivo no predomine sobre el término dispersivo. Esta expresión cambia con el elemento utilizado. Se mostraron los resultados de los algoritmos de un análisis de la convergencia utilizando una solución analítica. Se demostró la superioridad de los elementos finitos con polinomios de grado superior sobre los de grado inferior en cuanto a mayor precisión y menor número de elementos utilizados lo cual permite tomar elementos de mayor longitud.

Se recomienda aplicar los algoritmos numéricos a casos reales o de pruebas de trazadores así como incorporarle a estos la implementación del proceso de calibración para la determinación de los parámetros del modelo de transporte para poder simular situaciones reales. Se recomienda verificar o comprobar la restricción propuesta del número de Peclet con el objetivo de encontrar el valor del factor   y así determinar el rango de aplicación de esta restricción en cada situación particular.

8. Bibliografía

[1] Antonopoulos, V. (1988): ¨Solutions of soil water movement and solute transport problems by finite element methods¨, Doctoral Thesis, School of Agriculture, Aristotle University of Thessaloniki

[2] Banks R. B. (1974): ¨ Mecanismos de contaminación de aguas subterráneas¨, Instituto de Ingeniería, UNAM contrato SP-77-C-5.

[3] Bear, J. (1972): ¨Dynamics of fluids in porous media¨, American Elservier.

[4] Celia, M. A.; Herrera, I.; Bouloutas, E. and Kindred, J.S.(1989): ¨A new numerical approach for the advective-diffusive transport equation¨, Journal of Numerical Methods for Partial differential Equations, 5, John Wiley & Sons, Inc.

[5] Custodio, E. y Llamas, M. R., (1976): ¨Hidrología Subterránea¨. Tomo II, Ediciones Omega S.A., Barcelona.

[6] French, Richard , (1985): ¨Open-Channel Hydraulic¨,McGraw-Hill, Book Co. Inc. New York.

[7] Gómez, M. A. y Alvarez, D. L.(1987): ¨ Métodos Numéricos del Algebra Lineal ¨; Editorial Academia, La Habana.

[8] Heinrich, J.C., Huyakorn, P.S., Zienkiewicz, O.C. and Mitchell, A.R., (1977): ¨ An upwind finite element scheme for two-dimensional convective-transport equation¨, Int.J. Numer. Meth. Eng.,11.

[9] Huyakorn, P.S. and Pinder, G.F. (1983): ¨Computational methods in Subsurface flow¨, Academic Press.

[10] Javandel, I., and P. A. Witherspoon (1969): ¨A method of analyzing transient fluid flow in multilayered aquifers¨, Water Resour. Res.,5(4).

[11] Karamouzis, D.(1985): ¨ A streamline diffusion method for the computation of unsteady groundwater contamination¨, Proc. Int. Symp. Stochastic Approach to Subsurface Flow , Fontainebleau.

[12] Martínez, J.B. y Pérez, M. F.(1975): ¨ Introducción al diseño de modelos numéricos (con aplicaciones en Ingeniería Hidráulica) ¨, Tecnología, UH, Serie 10, Ing. Hidráulica, No. 26, 1975.

[13] Pinder, G.F. and Gray, W.G. (1977): ¨Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hydrology¨, Academic Press,Inc.

[14] Remson, I; Hornberger, G. M. and Molz, F. J,(1971): ¨Numerical Methods in Subsurface Hydrology ¨. John Wiley & Sons.

[15] Samarsky, A. A., y Andreiev, V.B.(1979): ¨Métodos en diferencias para las ecuaciones elípticas¨., Mir, Moscú.

[16] Szymkiewicz, R., (1995): ¨Method to Solve 1D Unsteady Transport and Flow Equations¨, J. of Hydraulic Engineering, Vol. 121, No. 5 , A.S.C.E.

[17] Taylor, R.L. and C.B. Brown, (1967): ¨Darcy flow solutions with a free surface¨, J. of Hydraulic Div. ,ASCE., HY2.

[18] Tijonov, A y Samarsky, A. A. (1972): ¨ Ecuaciones de la Física-Matemática ¨, Mir, Moscú.

[19] Van Genuchten, M.T.(1977):¨ On the accuracy and efficiency of several numerical schemes for solving the convective dispersive equation¨, In: W.G. Gray, G.F. Pinder and C.A. Brebbia(Editors), Finite Elements in Water Resources. Pentech, London.

[20] Zienkiewicz, O.; P. Mayer and Y. K. Cheung (1966): ¨Solution of anisotropic