

MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS APLICADO AL FLUJO CON VÓRTICE DE UN HIDROCIKLÓN

Bruno Chiné P.*

Se investiga un movimiento con vórtice, incompresible, estacionario y turbulento en el interior de un hidrociclón, equipo de amplia aplicación industrial. Se usa un algoritmo de falso transiente y un esquema numérico con diferencias finitas para la resolución de las ecuaciones diferenciales con derivadas parciales. El flujo confinado con vórtice se considera axisimétrico y se modela mediante la formulación vorticidad-función de corriente de las ecuaciones de Navier-Stokes. Las ecuaciones de la vorticidad y del momentum angular se resuelven con un algoritmo explícito en el tiempo mientras que la ecuación de la función de corriente con un método SOR. Los resultados obtenidos mediante la aplicación del método de las diferencias finitas se comparan muy bien con datos experimentales y numéricos existentes, pudiéndose deducir que el método se ha implementado satisfactoriamente.

1. Introducción

El principal objetivo en estudiar el flujo en un hidrociclón es de entender su mecanismo y optimizar su rendimiento. El hidrociclón (Bradley [2]) es un dispositivo usado para la clasificación y separación industrial de partículas, constituido generalmente (ver Figura 1) por una sección cilíndrica conexa a una sección cónica, un tubo central de descarga superior (*vortex finder*) y un tubo central de descarga inferior (*ápex*). La alimentación al equipo se realiza tangencialmente en la parte superior de la sección cónica, así produciendo un flujo con vórtice confinado y con recirculación. El esquema de flujo general se compone de un movimiento con vórtice y de dos flujos axiales en

direcciones opuestas, hacia el ápex en las regiones externas cercanas a las paredes del hidrociclón y hacia el vortex finder en las regiones internas cercanas al centro del equipo. Además en los equipos comunicantes con la atmósfera se forma un núcleo de aire a lo largo del eje central del equipo. Aspectos de la operación de los hidrociclones se dan en algunos trabajos recientes (Chakraborti y Miller [3]; Hsieh y Rajamani [7]).

En este trabajo se presentan los resultados numéricos obtenidos a través de la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes mediante el método de las diferencias finitas, considerando flujo turbulento y ausencia de partículas sólidas. Partiremos con el modelo de flujo derivado por Hsieh [6] y Hsieh y Rajamani [7] y que ha sido aplicado anteriormente por Chiné et al. [4]; considerando que el núcleo de aire es cilíndrico y calculando su radio en términos de algunos parámetros geométricos y operacionales (Barrientos et al. [1]; Concha et al. [5]).

2. Modelo numérico

Consideramos que el flujo en un hidrociclón es incompresible newtoniano, es decir:

$$T = -pI + \mu(\nabla v + \nabla v^T) \quad (1)$$

donde T es el tensor esfuerzos, p el campo de presión, μ la viscosidad dinámica, I el tensor identidad y v el campo de velocidad.

En régimen turbulento las ecuaciones de continuidad y de *momentum* son, siendo

* Dep. Computación
I.T.C.R.
Enterprise
Knowledge
Management
Sykes Enterprises,
Inc.

alvaro.delaossa@
corp.sykes.com

** Lab. Matemática
Aplicada y
Simulación
Computacional,
Escuela de
Matemáticas,
U.N.A.

tlascaris@una.ac.cr

ahora p el campo de presión media y v el campo de velocidad media:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + v_e \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{b} \quad (3)$$

donde ρ es la densidad del fluido, v_e la viscosidad efectiva del fluido y \mathbf{b} la fuerza de cuerpo externa. Definiendo con Σ el dominio espacial de frontera Ξ , asumimos condiciones de frontera del tipo Neumann y Dirichlet sobre Ξ . Además, se considera que \mathbf{b} puede despreciarse y que el flujo puede ser considerado axisimétrico. A partir de las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e introduciendo la función de corriente Ψ y la componente azimutal ζ_θ del vector vorticidad, obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales adimensionales con derivadas parciales (ver para detalles Hsieh [6]):

$$\frac{\partial \zeta_\theta}{\partial t} = \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Omega^2}{\partial z} - \frac{\partial(v_r \zeta_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(v_z \zeta_\theta)}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \zeta_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta_\theta}{\partial r} - \frac{\zeta_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \zeta_\theta}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -r \zeta_\theta \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\frac{\partial(v_r \Omega)}{\partial r} - \frac{\partial(v_z \Omega)}{\partial z} - \frac{v_r \Omega}{r} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right) \quad (6)$$

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (7)$$

$$\zeta_\theta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (8)$$

donde Ω , el momentum angular alrededor del eje z por unidad de masa, está dado por:

$$\Omega = v_\theta r \quad (9)$$

siendo $Re = v_i R / v_e$ el número de Reynolds, R el radio del hidrociclón y v_i la velocidad de entrada media. Es importante subrayar que el modelo propuesto busca solo soluciones en estado estable y que la

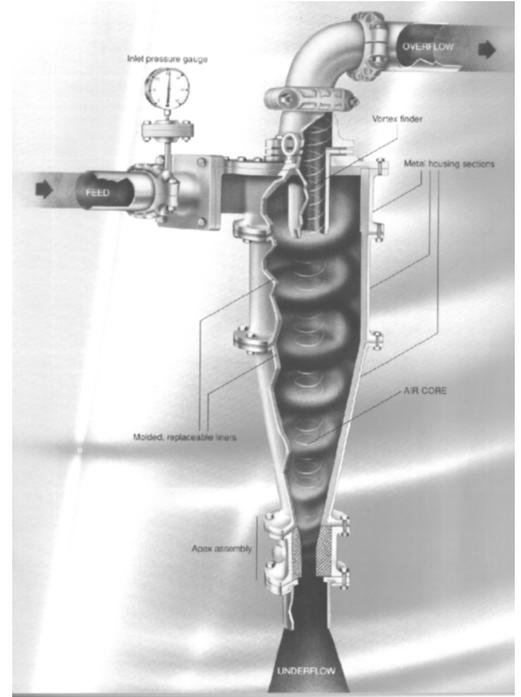


FIGURA 1. Hidrociclón cónico usado en los procesos de clasificación y separación industrial de partículas.

presencia de las derivadas parciales con respecto al tiempo t es para obtener una solución numérica asintóticamente estacionaria. Finalmente, para calcular la viscosidad de remolinos v_e aplicaremos el modelo de Hsieh [6] basado en la hipótesis del modelo de mezcla de Prandtl, donde las ecuaciones que relacionan v_e a los gradientes de velocidad del flujo medio en forma dimensional son las siguientes:

$$v_e = l_m^2 \left(\left| \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right| + \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right| \right) \quad (10)$$

$$l_{m,\theta} = K_2 \left(\frac{R_z}{R} \right)^{1/4} \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2} \quad (11)$$

$$l_{m,z} = K_1 \left(\frac{R_z}{R} \right)^{1/4} \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2}$$

K_1 y K_2 son constantes y R_z es el radio del hidrociclón a la profundidad z.

3. Solución numérica

Para resolver las ecuaciones diferenciales con derivadas parciales 4, 5 y 6 haremos

uso del método de las diferencias finitas. Siendo que las Ecs. 4 y 6 constituyen un problema de valores iniciales y la Ec. 5 un problema de valores de frontera, tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales con derivadas parciales simultáneas, definido como parabólico en el tiempo y elíptico en el espacio. Las Ecs. 4, 5 y 6 se discretizan sobre una malla no-uniforme obtenida usando un paso radial uniforme Δr y un paso axial no-uniforme Δz_i (Chiné et al. [4]). La malla no es uniforme pues en la región cónica se hacen coincidir los puntos periféricos con la pared del hidrociclón. En la dirección r las ecuaciones se discretizan usando diferencias centrales de segundo orden, mientras para la dirección z se deriva, usando expansión en serie de Taylor, la siguiente aproximación para una función u genérica:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{i,j} = -\frac{\Delta z_{i+1}}{\Delta z_i(z_{i+1} - z_{i-1})} u_{i-1,j} + \frac{\Delta z_{i+1} - \Delta z_i}{\Delta z_i \Delta z_{i+1}} u_{i,j} + \frac{\Delta z_i}{\Delta z_{i+1}(z_{i+1} - z_{i-1})} u_{i+1,j} + O(\Delta z_{i+1} \Delta z_i) \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{i,j} = \frac{2}{\Delta z_i(z_{i+1} - z_{i-1})} u_{i-1,j} - \frac{2}{\Delta z_{i+1} \Delta z_i} u_{i,j} + \frac{2}{\Delta z_{i+1}(z_{i+1} - z_{i-1})} u_{i+1,j} + O(\Delta z_{i+1}, \Delta z_i) \quad (13)$$

El algoritmo de solución comienza con la aplicación del método FTCS (*Adelante en Tiempo y Central en Espacio*) con un paso de tiempo Δt para discretizar las Ecs. 4, 5 y 6 y con la imposición de las condiciones de borde. Para cada paso de tiempo, los términos convectivos de la ecuación de vorticidad se linealizan mediante el método upwind de primer orden y sucesivamente se integran a través del método explícito Hopscotch. Después, los nuevos valores de

ζ_θ se sustituyen en la ecuación de la función de corriente, la cual se calcula mediante la siguiente estrategia de pseudo-transiente:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = l\Psi + r\zeta_\theta \quad (14)$$

donde l es el operador elíptico de Poisson y $r\zeta_\theta$ el término fuente. Partiendo con el esquema iterativo de Jacobi se aplica el método SOR a la Ec. 14 obteniendo el nuevo valor de Ψ :

$$\Psi_{i,j}^{n+1} = \Psi_{i,j}^n - \eta \frac{\xi_{i,j}}{[-2(1+\beta)]} \quad (15)$$

donde η es el parámetro de relajación, $\xi_{i,j}$ el vector de los residuos y β está dado por:

$$\beta = \frac{\Delta r^2}{\Delta z_i \Delta z_{i+1}} \quad (16)$$

El parámetro η se optimiza durante el proceso de cálculo mediante la aceleración de Chebyshev. Luego, se recalculan los valores de borde de Ψ y ζ_θ , se calcula la velocidad radial y axial mediante la Ec. 7 y se actualizan sus valores de borde. La Ec. 6 se lineariza ahora con el mismo método upwind de primer orden y se integra usando el método Hopscotch. Conocido el valor de Ω en todos los puntos de malla se calcula la velocidad azimutal mediante la Ec. 9. En fin, el algoritmo se usa para una nueva integración en el tiempo hasta que se encuentre la solución asintótica para ζ_θ , Ψ y Ω .

La dificultad de la formulación *Vorticidad-Función de Corriente* radica en que tenemos condiciones de frontera para las componentes de velocidad y no para ζ_θ y Ψ . Además el núcleo de aire del hidrociclón forma una superficie libre sobre la cual tenemos que aplicar una condición para el movimiento relativo entre las fases líquida y gaseosa. En conclusión, tenemos que especificar condiciones de frontera sobre las paredes sólidas del hidrociclón, sobre la interfaz líquido-gas y sobre las regiones de entrada y salida. Para respetar la hipótesis de axisimetría, el tubo de alimentación del hidrociclón de radio R_i se sustituye por un anillo circular de amplitud

$2R_i$, donde el flujo de entrada no presenta velocidad axial.

El perfil de velocidad radial de entrada se integra tangencialmente sobre el borde para dar Ψ , mientras que los valores de v_θ en la entrada son funciones del caudal de alimentación y de la geometría. Para fijar las condiciones de borde de la vorticidad se usa la Ec. 8 y se evalúan las derivadas mediante los valores de la función de corriente en la entrada. Se considera que las paredes sólidas son líneas de corriente y que el caudal Q a través el tubo de corriente con valores de Ψ a \mathbf{P} y Ψ_o a \mathbf{O} es:

$$Q = 2\pi(\Psi - \Psi_o) \quad (17)$$

La Ec. 17 nos permite calcular la función de corriente Ψ a \mathbf{P} conociendo Q y un valor fijo Ψ_o como valor de referencia a \mathbf{O} . Los valores de Ω y de v_θ justo fuera del borde se aproximan mediante una condición de vórtice libre, mientras que las otras componentes de velocidad son nulas en la pared. Una condición de contorno de primer orden para la vorticidad se deriva a partir de la Ec. 5. La interfaz líquido-gas representa una región de frontera del flujo dentro del hidrociclón que separa el líquido del núcleo de aire. Este último se aproxima con un cilindro de radio R_a . La interfaz es entonces una línea de corriente, cuyo valor se calcula mediante la Ec. 17 y los flujos en la región de descarga superior e inferior. Asumimos que esta interfaz es una superficie libre con vorticidad y velocidad radial nulas, donde la velocidad axial se fija mediante una aproximación del segundo orden y la velocidad tangencial con la condición de vórtice forzado. Para calcular el radio del núcleo de aire haremos uso de un modelo desarrollado por Barrientos et al. [1] y Concha et al. [5]. Indicando con σ la tensión superficial de la interfaz líquido-gas, con Δp_a la caída de presión a través la interfaz líquido-gas y con α el gradiente de velocidad radial del líquido en la interfaz, el valor de R_a está dado por:

$$R_a = \frac{\sigma}{2\mu\alpha - \Delta p_a} \quad (18)$$

Finalmente, las condiciones de contorno para Ψ , ζ_θ y Ω en las regiones de salida superior e inferior deben asegurar la continuidad del flujo.

4. Resultados

Para validar los resultados numéricos se ha considerado (Chiné et al. [4]) un hidrociclón geoméricamente similar a aquello usado por Hsieh [6] en su trabajo experimental. Las condiciones de operación simuladas y los valores de otros parámetros usados en los cálculos se dan en Hsieh [6, series I]. Debido a la diferencia de gradientes, el paso radial de la malla es más fino que el paso axial dando una malla de 82×36 nudos. El algoritmo SOR termina cuando el cambio neto entre dos iteraciones sucesivas es inferior a 1×10^{-4} en todos los puntos de la malla, mientras la convergencia del esquema numérico se alcanzó en 7×10^3 pasos de tiempo y dos horas de tiempo CPU en una estación Sun Spark 10. Los resultados se presentan en las Figuras 2, 3 y 4 en forma de perfiles radiales de las tres componentes de velocidad, en correspondencia de seis valores de profundidad \mathbf{H} , definida como la distancia desde el techo del hidrociclón. Con el propósito de verificar los cálculos se reporta en la Figura 2 la velocidad radial v_r obtenida numéricamente por Hsieh y en las Figuras 3 y 4, respectivamente la velocidad tangencial v_θ y axial v_z medidas por el mismo autor mediante velocimetría láser Doppler. Nuestros cálculos de v_θ y v_z (Figura 3 y Figura 4) se comparan muy bien con los datos experimentales, especialmente en la región central del hidrociclón.

Los valores v_r difieren un poco de los datos de Hsieh y esto se puede atribuir a la aproximación realizada para estimar los datos de los gráficos originales. Es interesante observar que en correspondencia de la pequeña pared horizontal del vortex finder ($\mathbf{H} = 5 \text{ m} \times 10^{-2}$) Hsieh midió valores de v_θ diferentes de cero. Para el mismo valor \mathbf{H} los cómputos de v_z indican un flujo directo hacia abajo en proximidad de la pared externa del vortex finder y directo hacia arriba en el interior del vortex finder.

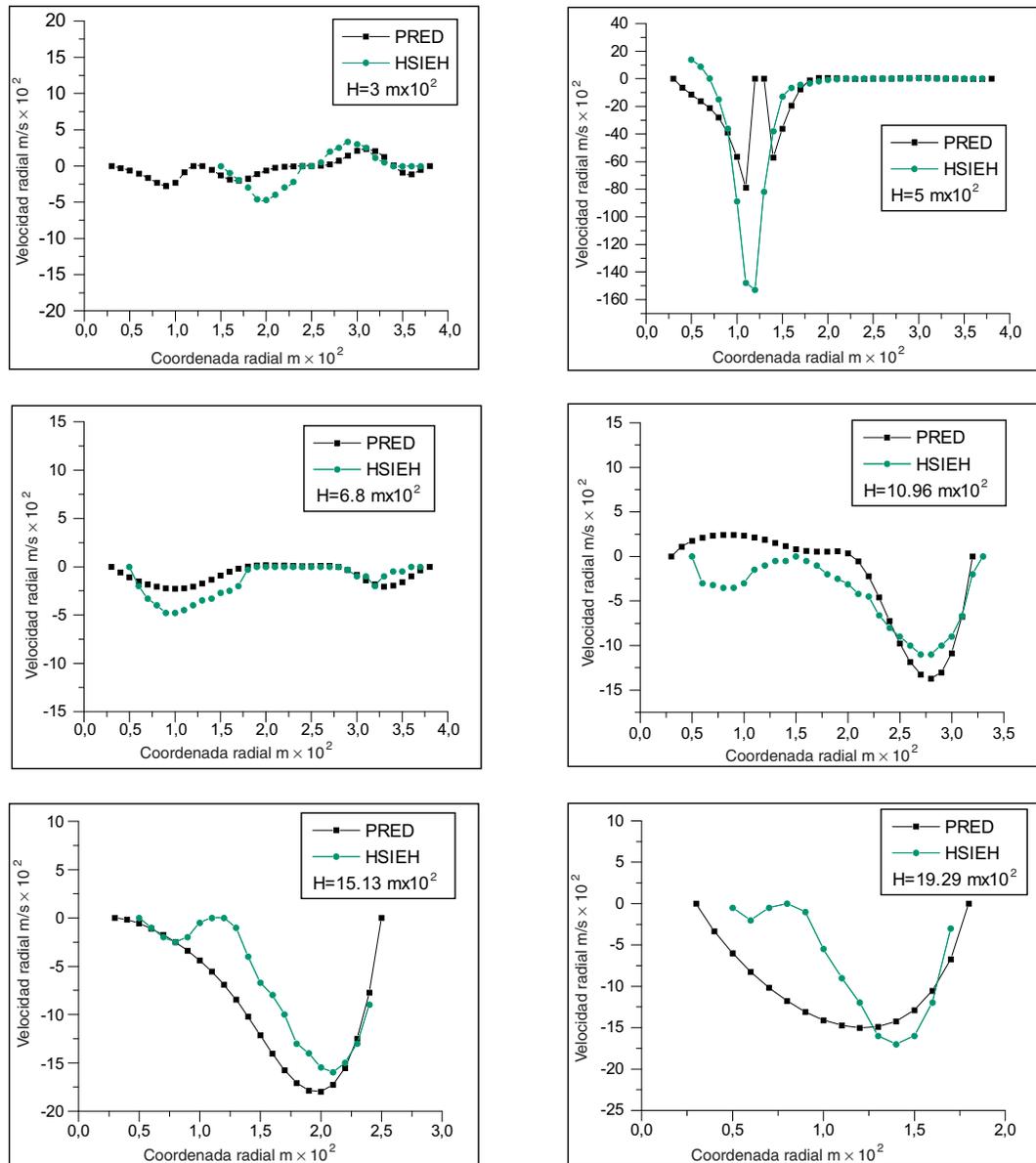


FIGURA 2. Velocidad radial en el hydrociclón para algunos valores de H (PRED: calculados con este modelo; HSIEH: calculados por el modelo de HSIEH; H : profundidad desde el techo del hydrociclón).

Además en este nivel z los resultados numéricos de v_r parecen indicar un flujo radial directo hacia la entrada del vortex finder. Cerca del núcleo de aire la simulación de la velocidad axial es mejor que la de la velocidad tangencial. Se demuestra así que las condiciones de borde en la interfaz del núcleo de aire han sido elegidas propiamente para el movimiento del fluido en un plano vertical y que el

movimiento en dirección θ es diferente de un puro vórtice forzado.

5. Conclusiones

Los resultados satisfactorios obtenidos con la aplicación del método numérico de diferencia finitas al flujo con vórtice en un hydrociclón, brindan una herramienta de cálculo importante para la simulación de flujos industriales. El conocimiento del

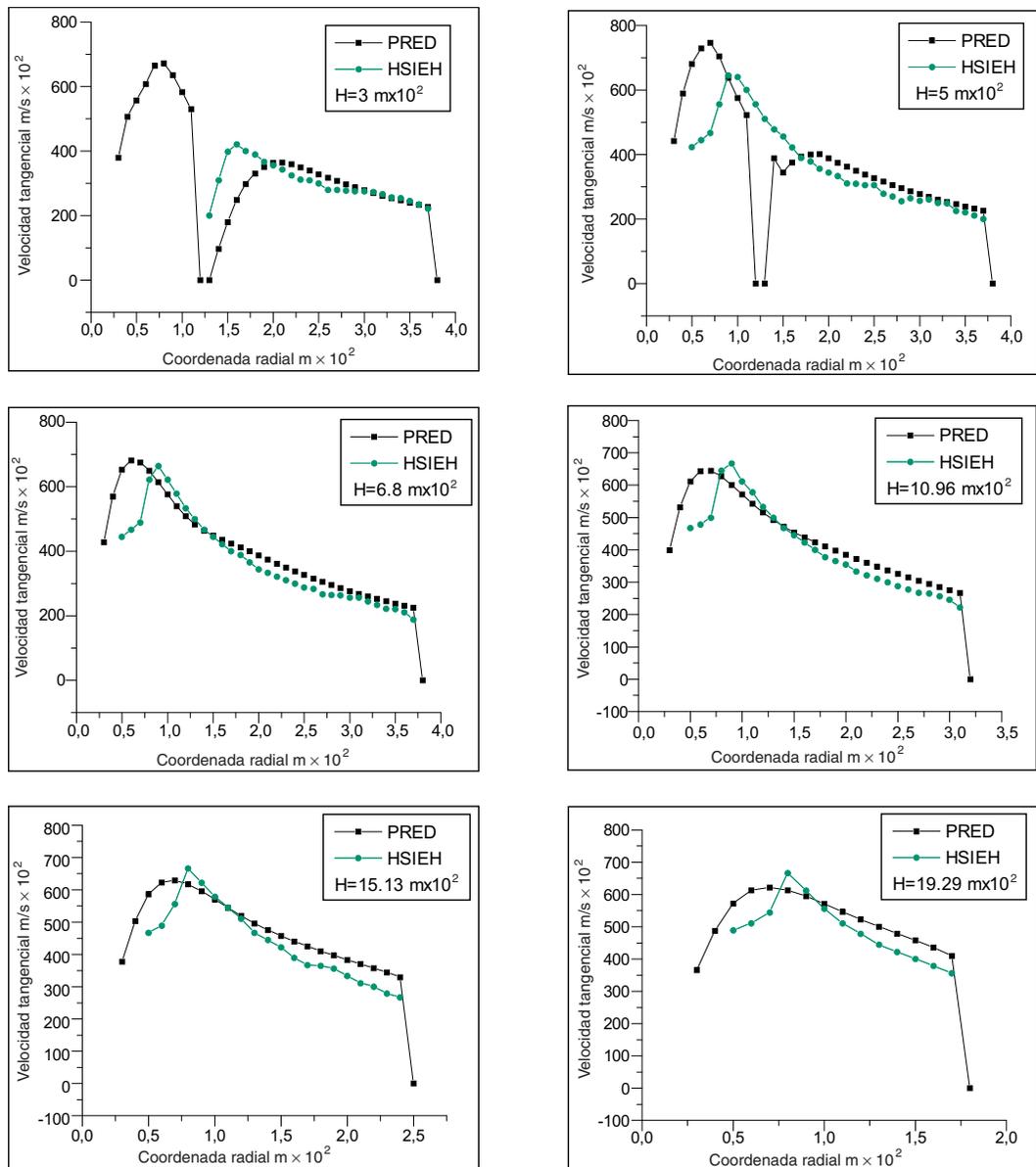


Fig. 3 Velocidad tangencial en el hidrociclón para algunos valores de H (PRED: calculados por este modelo; Hsieh: mediciones experimentales de Hsieh; H : profundidad desde el techo del hidrociclón)

patrón de flujo es importante en actividades industriales que se relacionan con aplicaciones diarias de la física como son la mecánica de fluidos y transferencia de calor y masa. Entre tantas recordamos los problemas asociados con resistencia al movimiento y sustentamiento de aviones, mejoramiento del perfil aerodinámico de vehículos terrestres y marítimos, combustión de gases en motores y fabricación de nuevos materiales. Aplicaciones importantes y más

cercanas a la realidad cotidiana de nuestros países se pueden encontrar en el diseño y análisis de turbomaquinas como son bombas, turbinas, compresores, etc., en los procesos con flujo de la industria del petróleo y química, en la producción de materiales, en los problemas de ventilación, y finalmente en el estudio, control y posterior reducción de la contaminación de aire atmosférico y de efluentes.

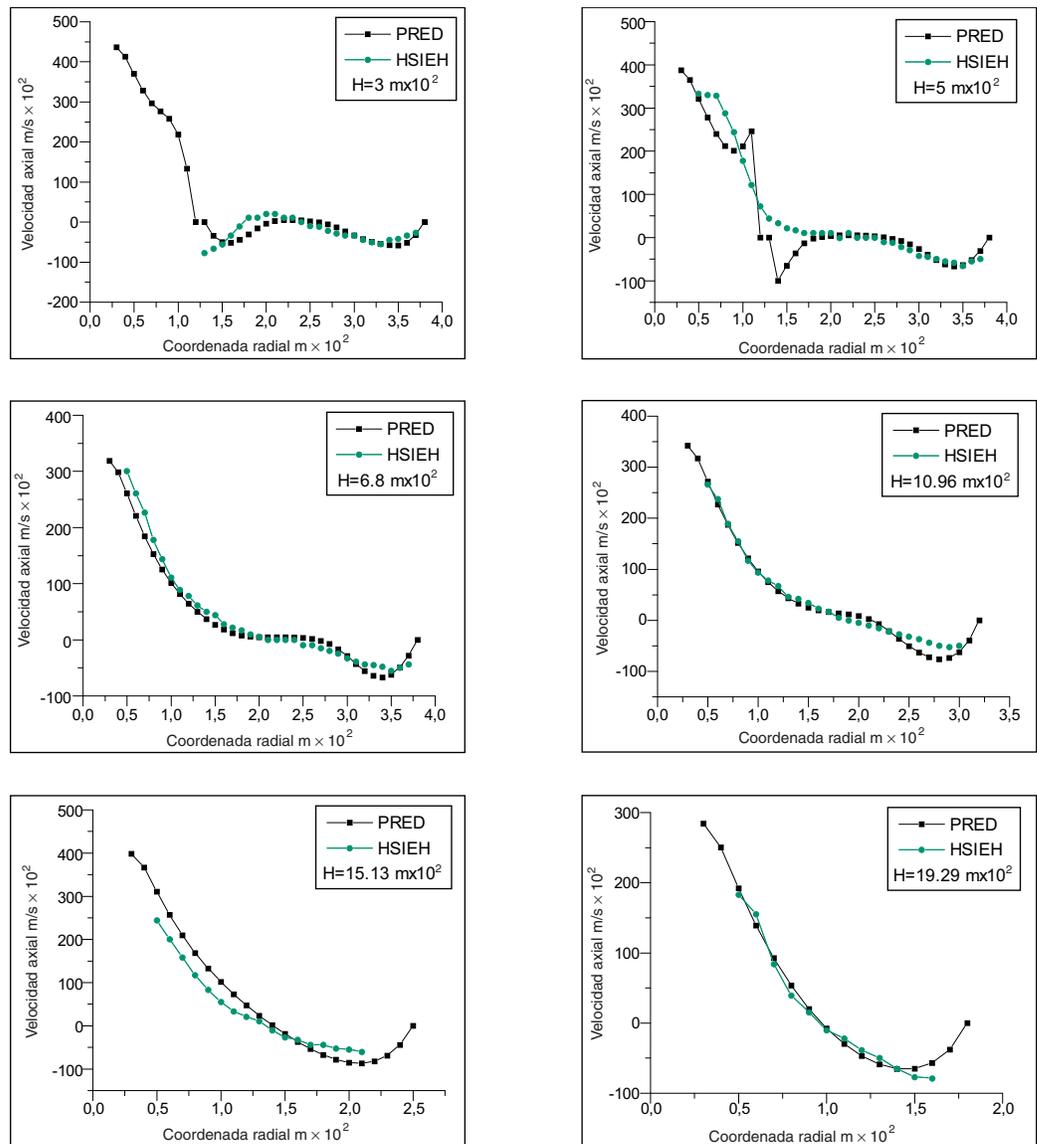


FIGURA 4. Velocidad axial en el hydrociclón para algunos valores de H (PRED: calculados por este modelo; HSIEH: mediciones experimentales de HSIEH; H : profundidad desde el techo del hidrociclón).

Bibliografía

- [1] A. Barrientos, R. Sampaio and F. Concha, Effect of the Air Core on the Performance of a Hydrocyclone, Proceedings of the XVIII International Mineral Processing Congress, 1993, Sidney, 267-270.
- [2] D. Bradley, The Hydrocyclone, 1965, Pergamon, London.
- [3] N. Chakraborti and J.D. Miller, Fluid Flow in Hydrocyclones: A Critical Review, Mineral Processing and Extractive Metallurgy Review, 11, 1992, 211-244.
- [4] B. Chiné, F. Concha y A. Barrientos, A Finite Difference Solution of the Swirling Flow in a Hydrocyclone, Proceedings of the International Conference on Finite Elements in Fluids, 1995, Venezia, vol. 1, 581-592.
- [5] F. Concha, A. Barrientos, J. Montero and R. Sampaio, Air Core and Roping in Hydrocyclones, Symposium on Comminution, 1994, Stockholm, 814-823.

- [6] K.T. Hsieh, Phenomenological Model of the Hydrocyclone, Ph.D. Thesis, University of Utah, December 1988.
- [7] K.T. Hsieh and R.K. Rajamani, Mathematical Model of the Hydrocyclone Based on Physics of Fluid Flow, AIChE Journal 37(5), 1991, 735-746.