Azofeifa, Carlos Enrique. *Aplicación de las técnicas de punto fijo.*
Tecnología en Marcha. Vol 14; Nº 3.

Aplicación de las técnicas de punto fijo

*Carlos Enrique Azofeifa**

Resumen

Se desarrollará un procedimiento computacional para aproximar puntos fijos de funciones continuas de un simplex en sí mismo utilizando el Teorema de Brouwer, mostrando además las diversas aplicaciones de la Teoría de Punto Fijo en el campo económico.

1. Introducción

De entre las múltiples aplicaciones de los teoremas de punto fijo mencionadas en [3], queremos resaltar especialmente sus aplicaciones en el campo económico.

Ahora bien, ¿cómo surgen estos problemas para que los teoremas de punto fijo se hayan convertido en sus herramientas básicas? En efecto, puesto que los costos en una economía de mercado se determinan por la oferta y la demanda, se trata de obtener un *estado de equilibrio*; es decir, determinar costos donde la oferta de la mercadería sea igual a la demanda. En esta dirección los matemáticos redujeron el problema a demostrar la existencia de la solución de un conjunto de ecuaciones.

Karl Menzer en 1930 hace los primeros esfuerzos y, como fruto de este período, se obtienen importantes aportes por medio de von Newman en 1937 y se comienzan a usar estas herramientas matemáticas en diferentes modelos económicos, como por ejemplo el modelo walrasiano o el modelo de Arrow-Debrev.

En el caso del modelo walrasiano, la literatura es más vasta, en particular podemos mencionar dos textos básicos: Debreu 1959, *Theory of Value*, New York, Wiley y Arrow-Hahn 1971, *General Competitive Analysis*, Holden-Day, San Francisco. Más recientemente se tiene a McKenzie 1971, "The Classical Theorem on Existence of Competitive Equilibrium", *Econometrica*, 49, 819-841 y Debreu 1982, "Existence of Competitive Equilibrium", *Handbook of Mathematical Economics*, vol II. North-Holland.

Con Kim Border (1985) [6] encontramos una obra excelente en la cual se pueden

* Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica.

estudiar los teoremas de punto fijo aplicados a la economía pura y a la teoría de juegos; particularmente las aplicaciones del equilibrio de juegos de Nash y economías abstractas con sus relaciones en el equilibrio walrasian de una economía. Así pues, las técnicas abstractas de la matemática han servido para la resolución de un problema central en la teoría económica, a saber: *la prueba de la existencia de una solución para el modelo neoclásico del equilibrio económico*.

Podemos entonces ver la implicación de la matemática en el campo económico por la formulación matemática del modelo general de equilibrio en donde se llega a obtener un sistema complejo de ecuaciones y desigualdades simultáneas precisamente al intentar determinar los costos y niveles de producción en la economía. La solución de este sistema solamente se puede garantizar por los teoremas de punto fijo en lugar de otras técnicas, este procedimiento conlleva a otro problema como una conse-cuencia de la aplicación de los teoremas de punto fijo: el análisis del equilibrio general se aleja de su propósito final como un método para evaluar la política económica y en su lugar permanecer en un nivel de abstracción y teorización matemática.

Por lo tanto, el objetivo principal será tratar de remediar la dificultad anterior proporcionando un método general para hacer explícita la solución numérica del modelo. Se quiere mostrar que este método no solamente sea atractivo a los economistas, sino también a los matemáticos aplicados cuyos campos de trabajo requieren de soluciones con sistemas de ecuaciones altamente no lineales.

2. Como computar equilibrio de costos

Cuando se estudian las soluciones de estos sistemas de ecuaciones tan generales como los que surgen en el modelo competitivo, ha sido necesario hacer uso de la topología combinatoria y tomar de ella una serie de conceptos y teoremas sofisticados. Uno de estos teoremas fue enunciado y demostrado en 1910 por Brouwer (Teorema de Brouwer).

2.1 El teorema de Brouwer

Como campos de acción de este teorema podemos citar:

i) en la demostración de la existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones.

ii) en economía, donde se usó primeramente por von Newman en la demostración del teorema de Minimax (1928) y posteriormente en el análisis de un economía en expansión (1937).

iii) La conexión del teorema de Brouwer con el problema de existencia para el modelo competitivo, donde varios autores la realizan de una manera más o menos simultánea: [Arrow-Debreu (1954), Gale (1955), Kuhn (1956), McKenzie (1954, 1959), Nash (1950), Nikaido (1956)], se llegó incluso a garantizar la existencia de al menos un vector de costo el cual equilibra las decisiones dependientes de las unidades de producción y consumo en la economía.

En nuestro caso el objetivo central de este artículo es la descripción de un algoritmo eficiente para la aproximación de un punto fijo de una función continua usando el teorema de Brouwer. Este algoritmo se fundamentará en el importante concepto de conjunto primitivo introducido en 1965 por Scarf; sin embargo, no podemos dejar de mencionar el importante aporte dado por Hansen en 1965 en la aplicación del algoritmo, pues él descubrió una clase de matrices similares a los conjuntos primitivos de Scarf.

Esta clase de matrices reducía de manera considerable el almacenamiento en la computadora al realizar los cálculos del algoritmo; poco tiempo después, Kuhn sugiere sustituir los conjuntos primitivos en el algoritmo para el uso del teorema de Brouwer por el concepto en topología combinatoria de *subdivisiones simpliciales*.

Como áreas de aplicación de estos algoritmos dentro de la teoría económica tenemos: *comercio internacional, políticas de tributación, mercado de casas y rentas de mantenimiento*.

3. Algoritmo para la determinación de puntos fijos de funciones continuas

Desarrollaremos un procedimiento computacional para aproximar puntos fijos de funciones continuas de un simplex en sí mismo mediante el teorema de Brouwer, para este propósito estudiaremos los siguientes subconjuntos del simplex:

Definición 1

Sea S un simplex, decimos que un subsimplex de S tiene la misma orientación de S si el subsimplex es definido por un sistema de inecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq b_1 \\ x_2 &\geq b_2 \\ &\vdots \\ x_n &\geq b_n \end{aligned}$$

donde $b_i \geq 0\ \forall i$ y $\sum_{i=1}^{n} b_i < 1$, para algunos $b_1, \ldots, b_n$.

Observamos en esta definición que los subsimples que tienen la misma orientación de S, son aquellos cuyos lados son paralelos a los de S.

El algoritmo se fundamentará en el estudio de subconjuntos formados por n vectores, para ello primeramente seleccionaremos una lista grande de vectores $x^{n+1}, \ldots, x^k$ *los cuales estarán localizados arbitrariamente en el simplex S*. El iniciar con el vector x^{n+1} en lugar de x^1 se debe solamente a razones de conveniencia. La escogencia de estos vectores se hará de acuerdo con la siguiente asunción no degenerativa:

Asunción

Vectores que tengan componentes nulas no pueden estar en la lista; asimismo, dos vectores en la lista no pueden tener idénticas su i–ésima componente $\forall i$.

Ahora bien, una vez que tenemos la lista de vectores ¿cómo sabemos que dado un subconjunto de estos vectores forman un subsimplex con la misma orientación de S? Para ello examinamos el siguiente resultado.

Teorema 1

Consideremos la lista de vectores $x^{n+1}, \ldots, x^k$ con la asunción anterior y un subconjunto suyo de vectores $x^{j_1}, \ldots, x^{j_n}$; para que estos vectores formen un subsimplex con la misma orientación de S y que cada lado pase a través de uno y solo uno de estos vectores es necesario y suficiente que en la matriz A los elementos más pequeños de cada fila se localicen en columnas diferentes. La matriz A es la matriz $n \times n$ cuyas columnas son los componentes de los vectores $x^{j1}, \ldots, x^{jn}$.

Demostración

Ver [3].

Podemos, sin embargo, observar que el subsimplex formado por el conjunto de vectores $x=(x_1, \ldots, x_n)$ con $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$ y satisfaciendo $x_i \geq min\left[x_i^{j_1}, \ldots, x_i^{j_n}\right]\ \forall i=1, 2, \ldots, n$ nos da la condición suficiente.

Por ejemplo, en la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,6 \end{pmatrix}$$

se cumplen las condiciones del teorema 1 y por tanto el subsimplex se puede definir por

$$x_1 \geq 0,1$$
$$x_2 \geq 0,1$$
$$x_3 \geq 0,2$$

La siguiente definición se debe a Scarf y fue propuesta en 1967.

Definición 2

Los vectores $x^{j_1},\ldots,x^{j_n}$ definen un conjunto primitivo de vectores si:

1. Es posible obtener un subsimplex que satisfaga el teorema 1, y
2. Ningún vector en la lista $x^{n+1},\ldots,x^k$ es interior a este subsimplex.

Observemos que con esta definición cualquier subsimplex de S, es interior a S. Por lo tanto, si queremos incorporar los lados del simplex S a formar parte de los subsimplex será necesario extender la definición anterior, en efecto:

Extensión de la definición

Si consideramos los $n-m$ vectores $x^{j_1},\ldots,x^{j_{n-m}}$ junto con los m lados $S^{i_1},\ldots,S^{i_m}$ entonces estos n vectores forman un *conjunto primitivo de vectores* si ningún vector en la lista $x^{n+1},\ldots,x^k$ es interior al simplex definido por:

$$x_{i_1} \geq 0,\ldots,x_{i_m} \geq 0$$

$$x_i \geq \min\left[x_i^{j_1},\ldots,x_i^{j_{n-m}}\right],\ \text{con } i \neq i_1,\ldots,i_m$$

Para efectos computacionales, usaremos la siguiente convención:

S^1 se representa por $x^1 = (0, A_1, A_1,\ldots,A_1)$

S^2 se representa por $x^2 = (A_2, 0, A_2,\ldots,A_2)$

$\vdots$

S^n se representa por $x^n = (A_n,\ldots,A_n,0)$

es decir, para S^j el cero estará en el lugar j–ésimo para $j \in \mathbb{N}$, $A_i > 1$ y $A_i \neq A_j$ para $i \neq j$.

Con esta convención podemos resumir así el criterio para encontrar conjuntos primitivos:

$\{x^{j_1},\ldots,x^{j_n}\}$ forma un conjunto primitivo de vectores $\Leftrightarrow$ en la lista de vectores $x^{n+1},\ldots,x^k$ no existen vectores interiores al subsimplex:

$$x_1 \geq \min\left[x_1^{j_1},\ldots,x_1^{j_n}\right]$$
$$\vdots$$
$$x_n \geq \min\left[x_n^{j_1},\ldots,x_n^{j_n}\right]$$

Antes de presentar el algoritmo, observamos que si el conjunto $x^{j_1},\ldots,x^{j_n}$ es primitivo y si los vectores $x^{n+1},\ldots,x^k$ están distribuídos más o menos de manera uniforme en el simplex, entonces los vectores $x^{j_1},\ldots,x^{j_n}$ van a estar cerca uno del otro y si el lado S^i pertenece a este conjunto entonces los vectores tendrán su i–ésima coordenada cerca de cero. Este hecho es de suma importancia en el algoritmo para usar el teorema de Brouwer.

Teorema 2

Sea $A = \{x^{j_1},\ldots,x^{j_n}\}$ un conjunto primitivo. Si eliminamos un vector de A, existe una manera de reemplazarlo y de producir a la vez un nuevo conjunto primitivo, salvo el caso en que el resto de $n-1$ vectores son todos lados del simplex S y un vector adicional que se trata de remover.

Demostración

Ver [3].

La operación o regla de reemplazo proporcionada por el teorema 2 se puede resumir así:

Regla de reemplazo

Consideramos el conjunto primitivo $A=\{x^{j_1},\ldots,x^{j_n}\}$ cuyo simplex asociado está dado por

$$x_i \geq a_i = \min\left[x_i^{j_1},\ldots,x_i^{j_n}\right], i=1,\ldots,n.$$

Para reemplazar un vector escogido de A, primeramente localizamos la cara del sub-simplex que contiene tal vector, teniendo este vector su coordenada i^* constante seguidamente encontramos el vector x^{j_α} con la segunda más pequeña i^*–ésima coordenada. Por tanto, si x^{j_α} estaba en la cara cuya coordenada i era constante, entonces el reemplazamiento satisface

$$\begin{aligned} & x_i > a_i \\ & x_{i^*} > x_{i^*}^{j_\alpha}, \ \forall i \neq i^* \end{aligned} \qquad (1)$$

Además, el vector x^{j^*} debe tener la siguiente característica especial sobre todos los elementos $x^1,\ldots,x^k$ que satisfacen las ecuaciones (1): posee la más grande i–ésima coordenada.

Se nota que la regla de reemplazo examina todos los vectores en la lista que satisfacen (1) y que si n es grande puede haber dificultades; sin embargo, si seleccionamos con suficiente regularidad los vectores en la lista, la operación se puede convertir en una operación computacional simple. Por otra parte, no hemos mencionado que la regla de reemplazo posee un único reemplazo; este hecho no será demostrado aquí; el lector interesado puede consultar [13] donde precisamente la demostración se basa en mostrar que el único reemplazo permitido es el dado por la regla de reemplazo.

Otra importante observación a la regla de reemplazo es que esta se puede emplear repetidamente y por tanto necesitamos un indicador que nos diga cuando debemos parar la producción de conjuntos primitivos, para tal efecto tenemos el siguiente teorema debido a Scarf.

Teorema 3

Consideremos la lista de vectores $x^1,\ldots,x^{n+1},\ldots,x^k$ y cada uno etiquetado con uno de los primeros n enteros, donde x^i, $(i=1,\ldots,n)$ estará etiquetado con i. Existe entonces un conjunto primitivo cuyos vectores tienen etiquetas diferentes.

Demostración

Consideremos el conjunto primitivo $x^2,\ldots,x^n$ con el vector adicional x^j de la lista $x^{n+1},\ldots,x^k$ con la primera coordenada más grande. En el caso en que la etiqueta de x^j sea 1 el problema está terminado; en caso contrario, su etiqueta asociada estará en el conjunto $\{2,\ldots,n\}$.

Seguidamente, se remueve en el conjunto primitivo el vector que tiene la misma etiqueta que el vector x^j, para obtener un nuevo vector x^{j^1}, luego si la etiqueta de x^{j^1} es 1 habremos terminado; en caso contrario, nuestro siguiente paso es localizar en el conjunto primitivo el vector que tiene la misma etiqueta que el vector x^{j^1} y luego tratar de reemplazarlo.

Propiedades del algoritmo en cada iteración con un conjunto primitivo: $x^{j_1},\ldots,x^{j_n}$

1. Ninguno de los vectores posee etiqueta 1.
2. Todos los vectores tienen etiquetas diferentes, salvo dos de ellos los cuales tienen etiquetas iguales.
3. Uno de los vectores que forma el par de vectores con la misma etiqueta es aportado al conjunto primitivo.

Observamos que el algoritmo procede al eliminar del conjunto primitivo aquel vector en el par con la misma etiqueta y que no ha sido aportado en el conjunto primitivo; posteriormente se encuentra su reemplazo. Si este nuevo vector tiene etiqueta 1, el algoritmo termina; de lo contrario, proceden los pasos anteriores.

Por otra parte, sabemos que el algoritmo termina cuando obtengamos un conjunto primitivo cuyos vectores tengan todos etiquetas diferentes. Sin embargo, queremos estar seguros de que esto se consigue en un número finito de pasos, pues a pesar de que podemos escoger inicialmente un número finito de conjuntos primitivos de la lista $x^1,\ldots,x^k$, el algoritmo podría ser infinito.

Dichosamente, el algoritmo no es cíclico y termina en un número finito de iteraciones, el argumento realmente es ingenioso y fue primeramente introducido por Lemke y Howson en un algoritmo elaborado inicialmente para calcular un punto de equilibrio de Nash, su demostración es realmente sencilla y se puede consultar en [13] o en[1].

Por tanto, el algoritmo nunca retorna a la misma posición y debe, por lo tanto, terminar con un nuevo conjunto primitivo o bien alcanzar una posición en la cual el reemplazo requerido no se pueda llevar a cabo. Podemos decir todavía algo más: hay un número par de conjuntos primitivos con etiquetas todas diferentes y se concluye la demostración del teorema.

4. Aplicación del teorema de Brouwer

Anteriormente, mencionamos que la idea central era la de aplicar el teorema de Brouwer en la aproximación de un punto fijo de una función continua del simplex en sí mismo. En efecto nos damos las coordenadas de la función $f(x_1,\ldots,x_n)=(y_1,\ldots,y_n)$ por

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1\left(x_1,\ldots,x_n\right) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n\left(x_1,\ldots,x_n\right) \end{aligned}$$

donde $f_i\colon S \Rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f_i(x)\geq 0$ $\forall\, i=1,\ldots,n$ y

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)=1$$

Selecionando la lista de vectores $x^{n+1},\ldots,x^k$ en el simplex S junto con los vectores $x^1,\ldots,x^k$ queremos determinar la etiqueta asociada a x^j (ya sabemos que $x_1,\ldots,x_n$ tienen etiquetas $1,2,\ldots,n$ respectivamente). Para ello examinamos las coordenadas del vector

$$f\left(x^i\right)-x^i$$

y como $\sum_{j=1}^{n} f_j\left(x^j\right)-x_j^i=0$

entonces alguno de estos términos es no negativo y supongamos que este término es el i–ésimo. Por lo tanto, al vector x^j le asociamos la etiqueta i, en el caso de que haya más de un término no negativo seleccionamos el más pequeño índice j para el cual $f_j(x^i)-x_j^i$ es no negativo y este j será la etiqueta correspondiente para el vector x^j.

Aplicando el teorema 3 se obtiene un conjunto primitivo cuyos vectores tienen etiquetas diferentes y el subsimplex asociado con este conjunto primitivo cumple que podemos conseguir al menos un vector tal que

$$f_i(x)-x_i\geq 0 \;\; \forall i=1,\ldots,n.$$

1 Lemke-Howson, 1964. "Equilibrium points of bi-matriz games". *SIAM. Journal of Applied Mathematics* 12: 778-80.

Corolario: Teorema de punto fijo de Brouwer

Toda función continua $f: S \to S$ tiene al menos un punto fijo.

Demostración

Escogemos una sucesión más fina de conjuntos primitivos $A_k (k < \infty)$ tales que en el límite es siempre denso en el simplex S; es decir, el diámetro máximo del simplex asociado a A_k tiende a cero y, por lo tanto, se puede encontrar una subsucesión que converge en el límite a un único vector x^*.

Como la función es continua se tiene que para el vector x^* se cumple $f_i(x^*) \geq x_i^* \quad \forall i$ y por tanto $x^* = f(x^*)$ pues

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^*) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* .$$

Usando la continuidad de la función se puede encontrar una cota para $|f(x)-x|$ la cual en la práctica es bastante débil y por tanto la diferencia del vector del simplex y su imagen bajo f es demasiado pequeña.

El grado de aproximación se puede obtener por técnicas corrientes del análisis numérico; por tanto como hemos observado, para la aproximación de un punto fijo de f cualquier vector del subsimplex asociado al conjunto primitivo se puede tomar como una aproximación. Sin embargo, también se pueden obtener ciertos estimados de cotas de error para aproximar puntos fijos principalmente con Ch. Bowman - S. Karamardian, 1976.

Quiero indicar también que existe una generalización del concepto de conjunto primitivo en la cual el concepto mismo y la regla de reemplazo no requieren que los vectores $x^{n+1}, \ldots, x^k$ pertenezcan al simplex S, el lector interesado puede consultar [13].

Bibliografía

[1] T. Apostol. *Calculus.* Vol II. Editorial Reverté S. A. España. 1965.

[2] C. Azofeifa. "Algunas definiciones de funciones contractivas." *Ciencia y Tecnología,* 14(1-2);69-80,1990. San José.

[3] C. Azofeifa. *Aplicaciones de la teoría de punto fijo.* Tesis. U.C.R. San Pedro. 1993.

[4] E. L. Allgower. *Application of a fixed point search algorithms to nonlinear problems having several solutions.* S. Karamardian. Academic Press.

[5] Balinski-Cotle. *Complementary and fixed point problems.* North-Holland P. C. 1978.

[6] Kim Border. *Fixed point theorems with applications to economics and game theory.* Cambridge University Press. 1985.

[7] E. Fadell-G. Fournier. *Fixed point theory.* Lectures Notes in Mathematics. Springer-Verlag. New York. 1981.

[8] J. Franklin. *Methods of mathematical economics linear and nonlinear programing, fixed point theorems.* Springer-Verlag. New York. 1980.

[9] J. Freidenfelds. *Fixed point algorithms and almost complentary sets.* TR 71-77. Operations research house. Stanford University. 1971.

[10] C. García, C. E. Lemke and Lueti. *Simplicial aproximation of an equilibrium point for non-cooperative n-persons games.* Math prog. Ed:T. C Hu and S. M. Robinson. Academis Press. New York. 1973.

[11] V. Istratèscu. *Fixed point theory. An introduction.* D. Reidel Publishing Company. Boston. 1981.

[12] M. M. Jeppson. *A search for the fixed points of a continuos mapping.* Mathematical topics in economic theory and computation: Ed: R. H Day and S. M. Robinson.

[13] H. Scarf. *The computation of economic equilibria.* Yale University Press. 1973.

[14] D. R. Smart. *Fixed point theorems.* Cambridge Tracts in Mathematics. Great Britain. 1974.

[15] S. Swaminathan. *Fixed point theory and its applications.* Academis Press. New York. 1976.

[16] M. Todd. *The computation of fixed points and applications.* Springer-Verlag. Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems. New York. 1980.

[17] R. J. Wilmuth. *The computation of fixed points.* Department of operations research. Stanford University. P. H. D. Thesis (1973).