Azofeifa, Carlos Enrique. *Teoría del punto fijo y el equilibrio económico.*
Tecnología en Marcha. Vol 14; Nº 3.

Teoría del punto fijo y el equilibrio económico

*Carlos Enrique Azofeifa**

Resumen

Presentaremos un bosquejo de las aplicaciones de la Teoría de Punto Fijo en la economía, como también los hechos que convirtieron los teoremas de punto fijo en fundamento de la teoría del equilibrio económico. Además, se incursionará en el desarrollo histórico de la teoría, así como el papel actual que cumple en el modelo general del equilibrio económico proporcionando la bibliografía adecuada en cada caso; adicionalmente, mencionaremos aplicaciones del importante teorema de Brouwer a la economía.

1. Introducción

Es conocido el vasto campo de aplicaciones de la teoría de punto fijo en el campo de la matemática, a saber: Análisis funcional no lineal, Topología, Topología algebraica, Ecuaciones diferenciales, Teoría de conjuntos, etc.; como referencia se pueden consultar las siguientes obras: [1], [2], [4], [7], [9], [10], [11], [12], [16], [18], [23], [28], [30], [34].

Así, también sus aplicaciones en otras disciplinas como por ejemplo: Teoría ergódica, Teoría de juegos, Optimización, Economía y aplicaciones a ciertos modelos biomatemáticos en ecuaciones diferenciales no lineales ([6], [8], [13], [15], [22], [26], [32]).

Fijaremos nuestro interés en el campo económico, particularmente en las aplicaciones de la teoría de punto fijo al equilibrio económico. Estudiaremos cómo esta teoría llegó a ser fundamental en la economía, así como su desarrollo hasta nuestros días y posteriormente el papel que juega en la actualidad en las políticas económicas mostrando aplicaciones recientes.

2. Importancia de la teoría de punto fijo en la economía

¿Cómo surgieron estos problemas para que los teoremas de punto fijo se hayan convertido en sus herramientas básicas? En efecto, puesto que los costos en una economía de mercado se determinan por la

* Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica.

oferta y la demanda, se trata de obtener un *estado de equilibrio*; es decir, determinar costos donde la oferta de la mercadería sea igual a la demanda. En esta dirección los matemáticos redujeron el problema a demostrar la existencia de la solución de un conjunto de ecuaciones.

Precisamente uno de los logros más importantes de la economía matemática durante las décadas de los 40 y 50 ha sido la *demostración de la existencia de una solución para el modelo neoclásico del equilibrio económico usando los teoremas de punto fijo*.

Podemos ver entonces la implicación de la matemática en el campo económico por la formulación matemática del modelo general de equilibrio, en donde se llega a obtener un sistema complejo de ecuaciones y desigualdades simultáneas precisamente al intentar determinar los costos y niveles de producción en la economía. La solución de este sistema solamente se puede garantizar por los teoremas de punto fijo en lugar de otras técnicas. Es necesario resaltar este hecho, pues posteriormente estos teoremas no solamente garantizarán la solución del sistema, sino que ellos proporcionarán métodos para hacer explícita una aproximación de la solución ([25], [26], [32]).

3. Desarrollo de la teoría

Sus raíces se pueden encontrar en las descripciones de Adam Smith de capitalistas motivado por consideraciones de aprovechamiento en la selección de actividades económicas. Sin embargo, una de las escuelas neoclásicas más representativas sobre el tema es el modelo de equilibrio elaborado por Leon Walras en 1874, quien proporciona una descripción general del funcionamiento de un sistema económico complejo basado en la interacción de un número de unidades económicamente independientes. La formulación del modelo general de equilibrio brindado por Walras fue el mejor elaborado matemáticamente en su tiempo; no obstante, se debe esperar hasta Wald 1935 para obtener por primera vez un moderno estudio de teoremas de existencia.

Para facilitar su análisis Wald introduce restricciones sobre las funciones de demanda individuales; además, él asume que la demanda individual para cualquier mercadería específica crecería si el costo de cualquier otra mercancía también crecía. Por supuesto hoy día sabemos que esta afirmación es bastante superflua, a pesar de ello Wald logra demostrar usando esta asunción la existencia y unicidad de un vector de costos.

Karl Menzer en 1930 hace los primeros esfuerzos y como fruto de este período se obtienen importantes aportes por medio de von Newman en 1937 y se comienzan a usar estas herramientas matemáticas en diferentes modelos económicos, como, por ejemplo, el modelo walrasiano o el modelo de Arrow-Debrev.

Durante muchas décadas se usaron los métodos del cálculo diferencial; sin embargo, fueron cambiados por consideraciones de convexidad en la década de los 40, propiciados por desarrollos en la *teoría de juegos*, *análisis del modelo de producción y de programación lineal*. Lo importante es que estos cambios hacen posible discutir una gran variedad de problemas de economía matemática desde un punto de vista global más que local.

Se supone en estos modelos que todas las distintas mercaderías y servicios se pueden clasificar en un número finito, los cuales están disponibles en unidades infinitamente divisibles: $\mathbb{R}^n$ es el espacio mercancía y por tanto $x \in \mathbb{R}^n$ especifica una lista de cantidades de cada mercadería.

También es posible considerar economías con un número infinito de distintas mercaderías, pero aquí las herramientas matemáticas usadas son más sofisticadas y precisamente en este caso el espacio de mercancías es un espacio de dimensión infinita; por tanto, todo vector de costo pertenece al espacio dual de mercancía. Ejemplos de este tipo de economías se pueden hallar en Mas-Colell (1975)[1] Bewley (1972)[2], o Aliprantis-Brow (1983)[3].

El problema de existencia para el modelo general de equilibrio fue finalmente resuelto en la década de 1940 a 1950, basado en los trabajos de Arrow, Debreu, Kuhn, Nikaido y otros, el modelo se formalizó con un alto grado de generalidad y los argumentos de punto fijo originalmente introducidos por von Newmann fueron usados para demostrar la existencia de un vector de costos, el cual igualaba simultáneamente la oferta y demanda de todos los bienes.

Ahora bien, en el caso del modelo Walrasiano, la literatura es más vasta, en particular podemos mencionar dos textos básicos: Debreu 1959, *Theory of Value*, New York, Wiley y Arrow-Hahn 1971, *General Competitive Analysis*, Holden-Day, San Francisco. Más recientemente se tiene a McKenzie 1971, "The Classical Theorem on Existence of Competitive Equilibrium", *Econométrica*, 49, 819-841 y Debreu 1982, "Existence of Competitive Equilibrium", *Handbook of Mathematical Economics*, vol II. North-Holland.

Se observa que las técnicas usadas en la demostración de la existencia de equilibrio fueron realmente argumentos matemáticos fundamentalmente no constructivos; es decir, esos argumentos no indicaban la manera en la cual los precios podían ser computados y utilizados como herramienta práctica para obtener un vector de costos de equilibrio. Realmente, podemos decir que hasta la aparición de los métodos algorítmicos para obtener vectores de equilibrio tenemos una primera etapa en el desarrollo de la teoría (1970), y a partir de aquí una nueva etapa que podemos llamar algorítmica o etapa moderna.

4. Aplicaciones de la teoría actualmente

Es importante reconocer que hasta la década de los 60, la importancia central de la teoría no había sido reorganizada; y es a partir de aquí cuando se hace necesario hacer explícitas las soluciones, que la teoría va adquiriendo cuerpo junto con las técnicas computacionales para las soluciones numéricas. El crecimiento de los dos campos realmente ha sido estimulado por sus interrelaciones con áreas aplicadas y, por tanto, más problemas son posibles de resolver, nuevas aplicaciones demandan investigaciones de nuevos modelos y algoritmos; en este sentido [5], [6] y [13] son algunas obras en donde se puede encontrar una gran variedad de aplicaciones con métodos algorítmicos.

Con Kim Border (1985) [5] encontramos una obra excelente en la cual se pueden estudiar los teoremas de punto fijo aplicados a la economía pura y a la teoría de juegos; particularmente, las aplicaciones del equilibrio de juegos de Nash y economías abstractas con sus relaciones en el equilibrio Walrasiano de una economía.

Cuando se estudian las soluciones de estos sistemas de ecuaciones tan generales

---

1 "A model of equilibrium with Differentiated Commodities", *Journal of Mathematical Economics* 2:263-295.

2 "Existence of Equilibria in Economies with Infinitely Many Commodities", *Journal of Economic Theory*, 4: 414-540.

3 "Equilibria in Markets with a Riesz Space of Commodities", *Journal of Mathematical Economics*, 11:189-207.

como los que surgen en el modelo competitivo, ha sido necesario hacer uso de la topología combinatoria y tomar de ella una serie de conceptos y teoremas sofisticados. Uno de estos teoremas fue enunciado y demostrado en 1910 por Brouwer (teorema de Brouwer)

4.1 El Teorema de Brouwer

En el plano topológico el *teorema de Brouwer* es considerado uno de los más importantes resultados de la matemática moderna, teorema fácil de mencionar, pero difícil de probar. En efecto:

Teorema de Brouwer

Cualquier conjunto compacto convexo M en un espacio de Banach de dimensión finita tiene la propiedad de punto fijo; es decir, cualquier aplicación continua $f : M \rightarrow M$ tiene al menos un punto fijo.

Es importante notar que aunque Brouwer publicó este teorema en 1910, este era conocido desde 1886 por H. Poincaré en una forma equivalente; esta equivalencia se puede observar en [18].

Existen muchas demostraciones distintas del teorema de Brouwer. Por ejemplo, Istratescu [18] nos proporciona algunas de ellas: unas son cortas, pero basadas en topología algebraica, otras analíticas, y para aquellos lectores que prefieren una prueba elemental usando solamente propiedades básicas de polinomios y funciones diferenciales, se puede consultar en la sección 4.5 de [18].

Otras demostraciones simples y fáciles de entender sobre este teorema se pueden encontrar en *Methods of Mathematical* por J. Franklin [13]; para entender estas demostraciones no es necesario conocer de Topología o Análisis Funcional, tales demostraciones se deben a Adriano García (si usted entiende la matemática para ingeniería, entonces entiende esta demostración) y a John Mihnor, quien en 1978 da una prueba realmente sencilla: todo lo que usted necesita saber es cálculo.

4.2 Aplicaciones del teorema de Brouwer

En la literatura sobre este tema la cantidad de aplicaciones importantes de este teorema es muy amplia. Podemos encontrar así en Istratescu [18] dos bonitas aplicaciones: una dedicada a la demostración del Teorema Fundamental del Algebra[4] y la otra aplicación relativa a puntos de equilibrio de una economía.

En economía se tiene una relación bastante estrecha entre el teorema de Brouwer y el problema de existencia para el modelo competitivo. Así, por ejemplo, encontramos en Tood *The computation of fixed points and applications* [32], una aplicación del Teorema de Brouwer a un modelo económico de intercambio y se estudian algunas extensiones de este teorema.

Existen algoritmos que utilizan el teorema de Brouwer; en este sentido, H. Scarf [25] presenta por primera vez un método general para una solución numérica explícita del modelo neoclásico del equilibrio económico, siendo este modelo uno de los temas centrales en el análisis económico.

Otras aplicaciones del teorema de Brouwer que podemos citar son: la teoría de juegos y la Optimización, en particular se utilizan los teoremas de Kakutani y Nash; este último ofrece la famosa aplicación a la economía: *El Teorema del equilibrio de Nash para juegos de n-personas*. Como

[4] B. H. Arnold, 1949.

complemento a estas aplicaciones, se recomienda la monografía *Fixed Point Theory* [12], fuente de muchas aplicaciones de la teoría de punto fijo; así también como el libro *Complementary and fixed point problems* [6], el cual implementa algunos algoritmos para el cálculo de puntos fijos.

Otros campos de acción de este teorema que podemos citar:

i. En la demostración de la existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones.

ii. En economía, donde se usó primeramente por von Newman en la demostración del Teorema de Minimax (1928) y posteriormente en el análisis de una economía en expansión (1937).

iii. La conexión del teorema de Brouwer con el problema de existencia para el modelo competitivo donde varios autores la realizan de una manera más o menos simultánea: [Arrow-Debreu (1954), Gale (1955), Kuhn (1956), McKenzie (1954, 1959), Nash (1950), Nikaido (1956)], se llegó incluso a garantizar la existencia de al menos un vector de costo el cual equilibra las decisiones dependientes de las unidades de producción y consumo en la economía.

Pero todo este avance trajo consigo un nuevo problema a los economistas, pues al necesitar de sofisticado material matemático como, por ejemplo, la topología combinatoria, la cual no era de su dominio, estos argumentos le eran inaccesibles. Como consecuencia de esto se llegó a argumentos matemáticos intrínsecos, pero carentes de la intuición económica, pues obviamente el campo económico no era del dominio de los matemáticos. Una forma de ir poco a poco eliminando esta brecha puede ser la producción continua de publicaciones relacionadas con el tema, por ejemplo nuevos modelos económicos o métodos algorítmicos.

Como hemos podido observar, cada vez nos encontramos con una teoría más elaborada de punto fijo, no solamente en el campo matemático, sino también en el campo del equilibrio económico, teoría de juegos, etc. En particular, la teoría del equilibrio económico ha tenido un crecimiento acelerado en las últimas cuatro décadas, principalmente se nota este crecimiento en la formulación de modelos matemáticos; esto se debe a que los temas fundamentales de los modelos generales de equilibrio son extremadamente simples y pertenecen al corazón de la teoría económica.

Al principio, las técnicas usadas en la demostración de la existencia de equilibrio utilizaban argumentos matemáticos, principalmente no constructivos, y por lo tanto esos argumentos no indicaban la manera de cómo computar equilibrio de precios y de utilizar las herramientas de este tipo. Por tanto, se debe dar testimonio de la bondad de las técnicas algorítmicas con soluciones numéricas de grandes modelos del equilibrio general.

Así, los modelos del equilibrio general han sido tradicionalmente usados y continúan usándose para analizar los efectos de cambios en política económica, pues una de las mayores virtudes del modelo general de equilibrio es la habilidad para trazar las consecuencias de grandes cambios en un sector particular de la economía.

Como áreas de aplicación de estos algoritmos dentro de la teoría económica tenemos: *comercio internacional*, *políticas de tributación*, *mercado de casas*, *colección de datos*, *especificación paramétrica* y *rentas de mantenimiento*, entre otras.

4.3 Imperfecciones del modelo general de equilibrio

Debemos reconocer algunas imperfecciones del modelo general de equilibrio en las descripciones de la realidad económica.

De hecho, el modelo es inadecuado en tratamientos monetarios, y por tanto con instituciones financieras, su gran dificultad es permitir recursos inadecuados y no ser capaz de competir en empresas industriales en gran escala, las cuales son capaces de propiciar una influencia significativa en los precios. Si el modelo es formulado en términos estáticos, entonces las inversiones y los métodos indirectos de producción son pobremente tratados, y cualquier intento de rectificación por un modelo dinámico debe de encontrar un reemplazo para la asunción no real de futuros mercados perfectos.

Pero no hay todavía formulaciones competitivas que eviten esos cortos y doten de una flexibilidad y riqueza conceptual al modelo general de equilibrio. Sin embargo, este métdoto, a pesar de sus imperfecciones, este es un método de análisis, el cual conservará su utilidad hasta que la teoría económica sea capaz de dotar de formulaciones alternativas altamente precisas.

4.4 Aplicaciones actuales del método general de equilibrio

No obstante las imperfecciones citadas anteriormente, la última década ha experimentado un surgimiento de métodos finos aplicados; para ello presentamos a continuación una serie de estos trabajos al respecto, los cuales nos darán la posibilidad de estudiar y hacer investigaciones propias aplicadas a modelos nacionales. Particularmente, queremos mencionar la aplicación a la economía mexicana por Jaime Serra- Puche, donde el autor expone un modelo general de equilibrio.

1. H. Scarf. *The computation of equilibrium prices.*
2. M. Todd. *Efficient methods of computing economic equilibria.*
3. A. Mansur and J. Whalley. *Numerical specification of applied general equilibrium.*
4. A. Feltenstein. *Money and bonds in a disaggregated open economy.*
5. S. Robinson and L. Tyson. *Modeling structural adjustment: micro and macro elements in a general equilibrium framework.*
6. L. Kimbell and G. Harrison. *General equilibrium analysis of regional fiscal incidence.*
7. A. Borges and L. Goulder. *Decomposing the impact of higher energy prices on long-term growth.*
8. D. Fullerton, Y. Henderson and J. Shoven. *A comparison of methodologies in empirical general equilibrium model of taxation.*
9. V. Ginsburgh and J. Waelbroeck. *Planning models and general equilibrium activity analysis.*
10. J. Serra-Puche. *A general equilibrium model for the Mexican economy.*
11. P. Dixon, B. Parmenter and R. Rimmer. *Extending the ORANI model of the Australian economy: adding foreign investment to a miniature version.*

Estos trabajos fueron presentados en The Conference on Applied General Equilibrium Analysis, la cual tuvo lugar en San Diego en agosto de 1981 y fueron editados por H. Scarf - J. Shoven en el libro *Applied general equilibrium analysis*. Cambridge University Press. 1984 [26][5]. Podemos notar en los títulos anteriores como se ha ido ampliando cada vez más el campo de acción de la teoría; por tanto, vale la pena rescatar de sus aplicaciones en el campo económico aquellas que nos puedan servir en la elaboración de nuestros propios modelos.

---

5 A pesar de que existen aplicaciones más recientes, se escogieron estas por la gran variedad de temas expuestos.

Bibliografía

[1] Aksoy-Khamsi. *Nonstandard Methods in Fixed Point Theory*. Springer-Verlag. New York. 1990.

[2] T. Apostol. *Calculus*. Vol II. Editorial Reverté S. A. España. 1965.

[3] C. Azofeifa. *Algunas definiciones de funciones contractivas*. Ciencia y Tecnología, 14(1-2);69-80. San José. 1990.

[4] C. Azofeifa. *Aplicaciones de la teoría de punto fijo*. Tesis de maestría. U. C. R. San Pedro. 1993.

[5] E.L. Allgower. *Application of a fixed point search algorithms to nonlinear problems having several solutions*. S. Karamardian. Academic Press.

[6] Balinski-Cotle. *Complementary and fixed point problems*. North-Holland P.C. 1978.

[7] L.P. Belluce - W.A. Kirk. *Fixed-point theorems for certain classes of nonexpansive mappings*. New York. 1967.

[8] Kim Border. *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*. Cambrige University Press. 1985.

[9] T. Büber - W.A. Kirk. *Constructive aspects of fixed point theory for nonexpansive mappings*. Math Subjet Classif: 47H10, 54H25. 1991.

[10] B.P. Demidovich - I.A. Maron. *Cálculo numérico fundamental*. Paraninfo. Madrid. 1977.

[11] M. Edelstein. *An extension of Banach's contraction principle*. Proc. Amer Math Soc. 12(1961) 7-10 Mr 22 N 11375.

[12] E. Fadell - G. Fournier. *Fixed point theory*. Lectures Notes in Mathematics Nº 886. Springer-Verlag. New York. 1981.

[13] J. Franklin. *Methods of mathematical economics linear and nonlinear programing, fixed point theorems*. Springer-Verlag. New York. 1980.

[14] J. Freidenfelds. *Fixed point algorithms and almost complentary sets*. TR 71-77. Operations research house. Stanford University. 1971.

[15] C. García, C.E. Lemke and Lueti. *Simplicial aproximation of an equilibrium point for non-cooperative n-persons games*. Math prog. Ed: T. C. Hu and S. M. Robinson. Academis Press. New York. 1973.

[16] K. Goebel - W.A. Kirk. *Topics in Metric Fixed Point Theory*. Cambridge Univ. Press. 1990.

[17] Hodgkin - Huxley. *A quantitative description of membrane current and its applications to conduction and excitation in nerve*. J. Physiol. 117 (1952). 500-544.

[18] V. Istratèscu. *Fixed point theory. An introduction*. D. Reidel Publishing Company. Boston. 1981.

[19] M.M. Jeppson. *A search for the fixed points of a continuos mapping. Mathematical topics in economic theory and computation*. Ed: R. H. Day and S. M. Robinson.

[20] A.N. Kolmogorov - S.V. Fomín. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Editorial Mir. Moscú. 1972.

[21] W.A. Kirk. *Fixed point theory: A brief survey*. Universidad de los Andes. Venezuela. 1990.

[22] Lieberstein. *On the Hodgkin - Huxley partial differential equation*. Math Biosciences. 1(1967) 45-69.

[23] E. Rakotch. *A note on contractive mappings*. Proc Amer Math Soc 13(1962). 459-465, MR 26 N 5555.

[24] B.E. Rhoades. *A comparison of various definitions of contractive mappings*. Trans of Amer. Mat Soc. Vol 226. 1977.

[25] H. Scarf. *The computation of economic equilibria*. Yale University Press. 1973.

[26] H. Scarf - J. Shoven. *Applied general equilibrium analysis*. Cambridge University Press. 1989.

[27] V.M. Sehgal. *On fixed and periodic points for a class of mappings*. J. London. Math Soc(2) 5(1972). 571-576 MR 47 N 772.

[28] B. Sims. *Geometric conditions sufficient for the weak and weak* fixed point property. Fixed Point Theory and Applications*. World Scientific Publ. Co. Singapore. 1992.

[29] D.R. Smart. *Fixed point theorems*. Cambridge Tracts in Mathematics. Great Britain. 1974.

[30] S. Swaminathan. *Fixed point theory and its applications*. Academis Press. New York. 1976.

[31] Kiang Tsai-han. *The theory of fixed point classes*. Springer-Verlag. New York.1980.

[32] M. Todd. *The computation of fixed points and applications*. Springer-Verlag. Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems. New York. 1980.

[33] R.J. Wilmuth. *The computation of fixed points*. Department of operations research. Stanford University. Ph.D. Thesis (1973).

[34] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed Point Theorems*. Springer-Verlag. New York. 1986.