Azofeifa, Carlos Enrique. *Mejor aproximación en el espacio dual.*
Tecnología en Marcha. Vol 14; N° 3.

Mejor aproximación en el espacio dual

*Carlos Enrique Azofeifa**

Resumen

Se caracterizarán los elementos de mejor aproximación para subespacios del espacio dual E, siendo E un espacio lineal normado, así como la aplicación en los espacios* $L^1(X,\mu)$ *para un conjunto finito de elementos de mejor aproximación, siendo* μ *una medida de Radon.*

1. Introducción

El tema de la mejor aproximación en espacios lineales normados es muy importante dentro del marco de la moderna teoría de la aproximación. Matemáticos de primera línea como: Ivan Singer, Krein, Milman, Borosow, Nicolescu, etc., han contribuido a enriquecer el tema. Sus aplicaciones sobre los espacios $C(X)$ o $L^p(X,\mu)$, ($p>1$ y μ una medida de Radon) en problemas con: métodos de computación de elementos de mejor aproximación, ecuaciones diferenciales, conexiones con programación lineal, ecuaciones integrales, etc., nos ha motivado a la escogencia del tema.

Pioneros en este campo han sido M. Nicolescu, "Sur la meilleure approximation d'une fonction donneè par les fonction d'une famille donneè", Bull Fac. Cernati, 1938. I. Singer "Sur l'extension des fonctionelles lineaires". Rev. Math Pures et Appl, I, 1956.

Con estos trabajos, nuevos métodos hacen posible el desarrollo de la teoría, surgiendo nuevos resultados en espacios concretos por A. L. Garkavi (1963, 1964, 1965) y R. R. Phelps (1960-1963).

En el presente trabajo X será un espacio lineal normado y nuestro problema de mejor aproximación consistirá en encontrar, dados $x \in X$ y $G \subset X$, un $g_0 \in G$ tal que:

$$\|x - g_0\| = \inf_{g \in G} \|x - g\|.$$

Los $g_0 \in G$ que cumplan con esta propiedad se llaman elementos de mejor aproximación de x por elementos de G y denotamos este conjunto de elementos por:

$$L_G(x) = \left\{ g_0 \in G : \|x - g_0\| = \inf_{g \in G} \|x - g\| \right\}.$$

* Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica.

Si $G \subset X$ es un subespacio de X, lo denotaremos por $G \leq X$.

Es posible profundizar en el estudio de existencia y unicidad en las aplicaciones a los espacios $L^P (P \geq 1)$ y por tanto considerar los conjuntos distancia, así como sus caracterizaciones. Por otra parte, si introducimos el concepto de ortogonalidad usual en espacios de *Hilbert*, así como sus extensiones ([6]), se puede introducir una nueva noción de mejor aproximación.

Aplicaciones en los espacios $L'(X, \mu)$ se harán por medio de un conjunto finito de elementos de mejor aproximación, usando para ello la medida de Radon μ. Usamos la medida de *Radon*, pues ella es una directa continuación y generalización de los resultados obtenidos por *Lebesgue*; entre sus principales contribuciones podemos citar:

1. Aditividad de conjuntos de funciones son definidas *a priori* dado un σ–anillo T de conjuntos en un espacio euclidiano n–dimensional.
2. Si $b(E)$ es una función aditiva no negativa definida en T, luego relativo a esta función (llamada una medida), una clase de funciones absolutamente continuas es escogida. En este caso se tiene el siguiente teorema: *Una función aditiva absolutamente continua relativa a* b(E) *es una integral con respecto a la medida* b(E).
3. Funciones sobre un medio rectángulo abierto son consideradas, las cuales poseen la propiedad de aditividad contable: Como un resultado de esto, se tiene que la interrelación entre funciones de rectángulos y funciones conjunto por un lado y funciones de variable real por otro lado, será simple. El lector interesado en más detalles sobre la medida de *Radon* puede consultar [4].

En [2] se demostró que si $x \in E \setminus \overline{G}$ y $g_0 \in G$. Entonces,

$$g_0 \in L_G(x) \Leftrightarrow \exists f \in E^* \text{ tal que} \qquad (1)$$

$$\text{a.) } \|f\| = 1$$
$$\text{b.) } f(g) = 0 \ \forall g \in G,$$
$$\text{c.) } f(x - g_0) = \|x - g_0\|$$

2. Caracterización de elementos de mejor aproximación en el espacio dual

Queremos caracterizar ahora los elementos de mejor aproximación para un subespacio del subespacio dual E^*.

Definición

Sean E un espacio lineal normado y $G \leq E$, definimos:

$$1)\ G^{\perp} := \left\{ f \in E^* \mid f(g) = 0 \ \forall g \in G \right\}$$
$$2)\ \text{Si } \Gamma \leq E^* \ \ \Gamma_{\perp} := \left\{ x \in E \mid \gamma(x) = 0 \ \forall \gamma \in \Gamma \right\}$$
$$3)\ \|x\|_{\Gamma} := \sup_{\substack{\|\gamma\| \leq 1 \\ \gamma \in \Gamma}} |\gamma(x)|, \ x \in E$$

Además $\forall\, \Gamma \leq E^*$ se cumple $\|x\|_\Gamma \leq \|x\|$, $x \in E$ pues:

$$\|x\|_{\Gamma} = \sup_{\substack{\|\gamma\| \leq 1 \\ \gamma \in \Gamma}} |\gamma(x)| \leq \sup_{\substack{\|\gamma\| \leq 1 \\ \gamma \in \Gamma}} \|\gamma\| \, \|x\| \leq \|x\|$$

Teorema 1

i.) Sean E un espacio normado, $G \leq E$, $x \in E \setminus \overline{G}$ y $g_0 \in G$. Entonces,

$$g_0 \in L_G(x) \Leftrightarrow \|x - g_0\|_{G^{\perp}} = \|x - g_0\|.$$

ii.) Sea $\Gamma \leq E^*$, $\sigma(E^*, E)$ cerrado y sea $f \in E^* \setminus \Gamma = E^* \setminus \overline{\Gamma}$, $\gamma_0 \in \Gamma$. Entonces,

$$\gamma_0 \in L_{\Gamma}(f) \Leftrightarrow \|(f - \gamma_0)|_{\Gamma_{\perp}}\| = \|f - \gamma_0\|$$

Demostración

i.) Supongamos que $g_0 \in L_G(x)$. Por (1) $\exists f \in E^*$ tal que $\|f\|=1$, $f(g)=0$ $\forall g \in G$ y $f(x-g_0)=\|x-g_0\|$.

Por tanto:

$$\|x-g_0\|_{G^\perp} = \sup_{\substack{f' \in G^\perp \\ \|f'\| \le 1}} |f'(x-g_0)| \ge |f(x-g_0)|$$

$\forall f \in G^\perp$.

$$|f(x-g_0)| = \|x-g_0\|$$
$$\Rightarrow \|x-g_0\|_{G^\perp} \ge \|x-g_0\|$$

tomando en cuenta que:

$\|x-g_0\|_{G^\perp} \le \|x-g_0\|$, se tiene entonces

$$\|x-g_0\|_{G^\perp} = \|x-g_0\|.$$

Supongamos que $\|x-g_0\|_{G^\perp} = \|x-g_0\|$.

Como $\|x-g_0\|_{G^\perp} = \|x-g\|_{G^\perp} \le \|x-g\|$

con $g \in G$, entonces:

$$\|x-g_0\| \le \|x-g\| \Rightarrow g_0 \in L_G(x).$$

ii.) Sea $\gamma_0 \in L_\Gamma(f)$. Como Γ es $\sigma(E^*, E)$–cerrado luego para todo número c tal que $0<c<\|f-\gamma_0\|$; por el teorema de S. Banach $\exists x'_c \in \Gamma_\perp$ tal que $\|x'_c\| \le (1/c)$ y $f(x'_c)=1$, como $x_c=(x'_c/\|x'_c\|)$ cumple $\|x_c\|=1$,

$$f(x_c) = \frac{1}{\|x'_c\|}$$

y como c es arbitrario con la propiedad $0<c<\|f-\gamma_0\|$

$$\|(f-\gamma_0) \mid \Gamma_\perp\| = \sup_{\substack{x \in \Gamma_\perp \\ \|x\| \le 1}} |(f-\gamma_0)(x)| = \sup_{\substack{x \in \Gamma_\perp \\ \|x\| \le 1}} |f(x)|$$
$$\ge |f(x_c)| \ge \|f-\gamma_0\|,$$

claramente:

$$\|f-\gamma_0\| \le \|(f-\gamma_0) \mid \Gamma_\perp\|$$
$$\Rightarrow \|(f-\gamma_0) \mid \Gamma_\perp\| = \|f-\gamma_0\|$$

supongamos que se cumple

$\|(f-\gamma_0) \mid \Gamma_\perp\| = \|f-\gamma_0\|$. Como

$$\|(f-\gamma_0) \mid \Gamma_\perp\| \le \|(f-\gamma_0)\|_{\Gamma_\perp}$$
$$\le \|f-\gamma_0\|$$

O sea

$$\|(f-\gamma_0)\|_{\Gamma_\perp} = \|f-\gamma_0\|$$
$$\Rightarrow \gamma_0 \in L_\Gamma(f) \text{ por (i.)}$$

3. Aplicaciones en los espacios $L'(X,\mu)$

En [2], Teorema 3, se probó que si X es un espacio polaco compacto, $G \le C(X)$, $x \in C(X) \setminus \overline{G}$ y $g_0 \in G$.

Entonces, $g_0 \in L_G(x) \Leftrightarrow$ existe una medida de Radon μ en X y $\exists h \in C(X)$, $|\mu| - c.p.d.$ en X tales que:

$$|\mu|(X)=1$$
$$\mu(g)=0 \quad \forall g \in G$$
$$\mu = h\,|\,\mu\,|$$

$$x(q)-g_0(q) = [Sgn\, h(q)]\,\|x-g_0\|,\ q \in Sop(\mu)$$

donde $C(X)=\{f: X \to C(R) \mid f \text{ es continua}\}$ y $Sop(\mu)$ se llama el soporte de la medida μ.

Además, en [2], Teorema 5 se caracterizó de manera general los elementos de mejor aproximación en el espacio $L'(X,\mu):=\{f : X \to \overline{R} \mid f$ es una función μ – integrable$\}$, con μ una medida sobre X.

Queremos ahora considerar el caso de un conjunto finito de elementos de mejor aproximación; para ello veamos el siguiente resultado.

Teorema 2

Sean $E=L'(X,\mu)$ con μ una medida positiva sobre X, X un espacio polaco tal que $L'(X,\mu)|\cong L^\infty(X,\mu)$, $G\leq E$, $x\in E\setminus\overline{G}$ y $g_0\in L_G(x)$.

Luego $\exists U_{g_0}\subset X$, μ–medible con $\mu(U_{g_0})>0$ y $\exists\beta\in L^\infty(X,\mu)$ tal que $\|\beta\|_\infty=1$, $\mu(g\beta)=0$ $\forall g\in G$ y $|\beta(t)|=1$ μ – c.p.d. en U_{g_0} y $g_0(t)=x(t)$, μ – c.p.d. en $X\setminus U_{g_0}$.

Demostración

Como $g_0\in L_G(x)$ y por el Teorema 5 de [2] esto implica (1°⇒6°) que $\exists\beta\in L^\infty(X,\mu)$ que satisface:

$$\|\beta\|_\infty=1$$
$$\mu(g\beta)=0\ \ \forall g\in G \text{ y}$$
$$\beta(t)\left[X(t)-g_0(t)\right]=\left|x(t)-g_0(t)\right|\mu-\text{c.p.d. en } X$$

Tomamos $U_{g_0}=X\setminus Z(x-g_0)$, como

$x\in E\setminus\overline{G}\Rightarrow\mu\left(U_{g_0}\right)>0$ para $t\in X\setminus U_{g_0}$, se tiene $x(t)-g_0(t)=0$, μ–c.p.d. en $X\setminus U_{g_0}$ y por tanto $x(t)=g_0(t)$, μ–c.p.d. en $X\setminus U_{g_0}$.

Puesto que:

$$\beta(t)\left[x(t)-g_0(t)\right]=\left|x(t)-g_0(t)\right|\mu-\text{c.p.d. en } X$$
$$\Rightarrow\beta(t)=\frac{\left|x(t)-g_0(t)\right|}{x(t)-g_0(t)}\text{ es }\mu-\text{c.p.d en } U_{g_0}$$

y por tanto $\left|\dot{\beta}(t)\right|=1\mu-\text{c.p.d. en } U_{g_0}$ //.

Notación: $Z(f)=\left\{t\in X\mid f(t)=0\right\}$.

Ahora bien, si $M\subset G$ es finito, se tiene:

Teorema 3

Sea X un espacio compacto polaco y $E=L'(X,\mu)$ con μ una medida positiva tal que $L'(X,\mu)|\cong L^\infty(X,\mu)$ y sean $G\leq E$, $x\in E\setminus\overline{G}$ y

$$M=\left\{g_0',g_1',\ldots,g_{k+1}'\right\}\subset L_G(x)$$

con $k\in\{0,1,2,\ldots\}$ entonces:

i) $\exists U\subset X$ con U μ–medible y $\mu(U)>0$, $\beta\in L^\infty(X,\mu)$ tal que:

$$\|\beta\|_\infty=1$$
$$\mu(g\beta)=0\ \forall g\in G,$$
$$\left|\beta(t)\right|=1\,\mu-\text{c.p.d. en } U$$
$$g_0'(t)=g_1'(t)=\ldots=g_{k+1}'(t)$$
$$=x(t)\mu-\text{c.p.d. en } X\setminus U$$

ii) Si al menos hay dos elementos en $\{g'_0,g'_1,\ldots,g'_{k+1}\}$ distintos, entonces $\exists U_0\subset U$, U_0 μ–medible con $\mu(U_0)>0$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\left|g_i'(t)-g_0'(t)\right|\neq 0\ \mu-\text{c.p.d. en } U_0$$
$$\beta(t)=\mp Sgn\left[g_i'(t)-g_0'(t)\right]\mu-\text{c.p.d.}$$
$$\text{en } X\setminus Z\left(g_i'-g_0'\right)\text{ con } i=1,\ldots,k+1$$

Demostración

i) $L'(X,\mu)|\cong L^\infty(X,\mu)$ y por el teorema 5 de [2] (1°⇒5°) esto implica que $\exists\beta\in L^\infty(X,\mu)$ tal que $\|\beta\|_\infty=1$

$$\mu(g\beta)=0\ \forall g\in G \text{ y}$$
$$\mu\left(\left(x-g_i'\right)\beta\right)=\mu\left(\left|x-g_i'\right|\right)\qquad(2)$$
$$\forall i=0,1,2,\ldots,k+1.$$

Ponemos:

$$U=X\setminus Z\left(x-\frac{1}{k+2}\sum_{i=0}^{k+1}g_i'\right)$$

y como $x\in E\setminus\overline{G}$ luego $\mu(U)>0$, usando (2) se tiene:

$$\mu\left(\left|x-\frac{1}{k+2}\sum_{i=0}^{k+1}g_i'\right|\right)\leq\frac{1}{k+2}\sum_{i=0}^{k+1}\mu\left(\left|x-g_i'\right|\right)$$
$$=\mu\left(\left|x-\frac{1}{k+2}\sum_{i=0}^{k+1}g_i'\right|\beta\right)$$
$$\leq\mu\left(\left|x-\frac{1}{k+2}\sum_{i=0}^{k+1}g_i'\right|\right)$$

$\Rightarrow$

$$\mu\left(\left|x-\frac{1}{k+2}\sum_{i=0}^{k+1}g_i'\right|\right)=\mu\left(\left|x-\frac{1}{k+2}\sum_{i=0}^{k+1}g_i'\right|\beta\right)$$

$\Rightarrow|\beta(t)|=1$ μ-c.p.d. en U por 6º (Teorema 5 de [2]) y:

$$\left|x(t)-\frac{1}{k+2}\sum_{i=0}^{k+1}g_i'(t)\right|=\frac{1}{k+2}\sum_{i=0}^{k+1}\left|x(t)-g_i'(t)\right|$$

μ-c.p.d. en X.

Como

$$\frac{1}{k+2}\sum_{i=0}^{k+1}\left|x(t)-g_i'(t)\right|=\left|x(t)-\frac{1}{k+2}\sum_{i=0}^{k+1}g_i'(t)\right|=0$$

μ-c.p.d. en $X\setminus U$

$$\Rightarrow g_0'(t)=\ldots=g_{k+1}'=x(t) \text{ en } X\setminus U.$$

ii) Asumamos que hay al menos dos de los elementos $g_0',\ldots,g_{k+1}'$ diferentes y pongamos:

$$U_0=X\setminus\bigcap_{i=0}^{k+1}Z\left(g_i'-g_0'\right)=\bigcup_{i=1}^{k+1}\left(X\setminus Z\left(g_i'-g_0'\right)\right)$$

Luego $\mu(U_0)>0$ por hipótesis.

Como $g_0'=g_1'=\ldots=g_{k+1}'=x$, μ-c.p.d. en $X\setminus U$.

Luego $\left(X\setminus U\right)\subset\left(X\setminus U_0\right)\Rightarrow U_0\subset U$.

Así, por definición de U_0 se tiene:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\left|g_i'(t)-g_0'(t)\right|\neq 0\ \mu-\text{c.p.d. en } U_0 \text{ y}$$

$$g_0'=\ldots=g_{k+1}'\ \mu-\text{c.p.d. en } X\setminus U_0.$$
$$\beta(t)\left[x(t)-g_i'(t)\right]=\left|x(t)-g_i'(t)\right|$$
$$(i=0,1,2,\ldots,k+1)$$

μ-c.p.d. en X. Consecuencia de 5º$\Rightarrow$6º Teorema 5 de [2].

Luego:

$$\beta(t)\left[g_i'(t)-g_0'(t)\right]$$
$$=\beta(t)\left[\left(x(t)-g_0'(t)\right)-\left(x(t)-g_i'(t)\right)\right]$$
$$=\left|x(t)-g_0'(t)\right|-\left|x(t)-g_i'(t)\right|$$

es real con $i=1,2,\ldots,k+1$ μ-c.p.d. en X.

Como $|\beta(t)|=1$ μ-c.p.d. en U, así $U_0\subset U\Rightarrow$ $|\beta(t)|=1$ μ-c.p.d. en U_0, entonces por definición de U_0,

$$|\beta(t)|=1\ \mu-\text{c.p.d. en cada } X\setminus Z(g_i'-g_0')$$

Entonces, por (3) y usando el hecho anterior se cumple:

$$\beta(t)=\mp Sgn\left[g_i'(t)-g_0(t)\right],$$
$$\mu-\text{c.p.d. en } X\setminus Z(g_i'-g_0')$$

con $i=1,2,\ldots,k+1$ //.

Bibliografía

[1] C. Azofeifa. *Optimización en espacios de medidas.* U.C.R. Tesis San José, 1979.

[2] C. Azofeifa. "Elementos de mejor aproximación en espacios lineales normados". *Rev. Ciencia y Tecnología*, Vol. XIV, Nº 1, 1990.

[3] C. Azofeifa. "Mejor aproximación en espacios normados por medios de Puntos Extremos". *Rev. Ciencia y Tecnología*, Vol. XIV, Nº 1, 1990.

[4] J. Dieiudonnè. *Elèments D'Analyse.* Tome II. Gauthier-Villars. Paris, 1968.

[5] P.R. Halmos. *Measure Theory.* D. Van Nostrand. New York. 1950.

[6] I. Singer. *Best Aproximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces.* Springer-Verlag. New York. 1970.

[7] F. Treves. *Topological Spaces. Distributions and Kernels.* Academic New York. 1967.