Azofeifa, Carlos E. *Aplicación numérica del Teorema de Brouwer.*
Tecnología en Marcha. Vol. 12, no. 4.

APLICACION NUMERICA DEL TEOREMA DE BROUWER

Carlos E. Azofeifa

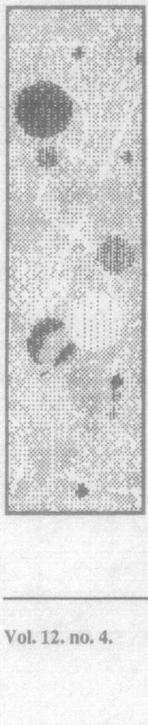
Resumen

En este artículo se presenta una aplicación numérica de las técnicas computacionales de la Teoría Matemática de Punto Fijo . Se expondrá el método por desarrollar en el algoritmo así como los conceptos necesarios. Posteriormente, para obtener la solución del problema, se aplicará el Teorema de Brouwer.

1 Introducción

La teoría de punto fijo no se ha limitado solamente a jugar un papel importante en muchas ramas de la matemática, sino que se ha convertido en herramienta básica en otras disciplinas como por ejemplo : Teoría Ergódica, Teoría de juegos, Optimización, Economía y aplicaciones a ciertos modelos biomatemáticos en ecuaciones diferenciales no lineales, como se puede observar en [5],[6],[10],[24],[26] de la referencia. En todas estas aplicaciones el común denominador son los teoremas de punto fijo, los cuales en particular juegan un papel central en la teoría del equilibrio económico.

En [3] se discutió un procedimiento computacional para aproximar puntos fijos de funciones continuas. Observamos además que en ese tipo de argumentos realmente hay pocos indicadores de cuando el algoritmo puede ser usado en un problema numérico específico , sin embargo esto no debe ser motivo de sorpresa pues ello es característico de este tipo de algoritmos.



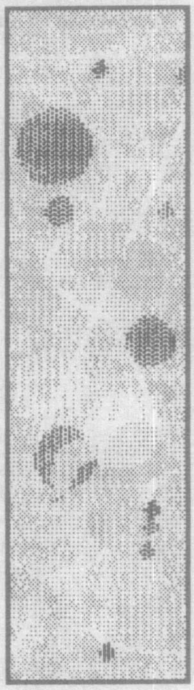
Aplicaremos el método desarrollado por *Scarf* en el equilibrio de precios de un modelo general económico de intercambio. Recordemos además que este método aplicado a ejemplos de una medida moderada involucra un número bastante grande de vectores $x^{n+1}, \cdots, x^k$ en el simplex y por lo tanto de igual manera el número de conjuntos primitivos se hace también excesivamente grande. La idea ahora es hacer una adecuada escogencia de los vectores en el conjunto primitivo para que el conjunto de vectores en la lista anterior no sea demasiado grande.

2 Selección de vectores en el conjunto primitivo

Este problema básico de seleccionar los vectores en el conjunto primitivo se puede simplificar si se escoge el conjunto primitivo de la forma :

$$(\frac{k_1}{D}, \cdots, \frac{k_n}{D}) \text{ donde } k_i \in \mathbb{Z}^+ \ \forall\, i = 1, \cdots, n$$

$$\text{tales que } \sum_{i=1}^{n} k_i = D$$ [1]



Si ponemos $A_k = \{x^1, \cdots, x^n, \cdots, x^k\}$, entonces x^j puede ser

$$x_i^j = a_i + \frac{1}{D} \quad , i \neq i^*$$

$$x_{i^*}^j = 1 - \sum_{i \neq i^*} (a_i + \frac{1}{D})$$

$$\text{o bien } x^j \in \{x^1, \cdots, x^n\},$$

donde los a_i se calculan examinando todos los vectores en A_k que cumplen

$$x_i^j > a_i \quad , i \neq i^*$$

luego el vector $a = (a_i)$ seleccionado es aquel con el valor más grande de $x_{i^*}^j$. Sin embargo se nos presenta una dificultad: es posible que el conjunto A_k obtenido de esta manera no satisfaga la asunción de no degeneración. El método dado por *Scarf* [2] para esta particular aplicación y salvar esta dificultad es la siguiente: se construye en cada etapa del algoritmo la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & M_2 & M_3 & \cdots & M_n & x_1^{j_1} & \cdots & x_1^{j_m} \\ M_1 & 0 & M_3 & \cdots & M_n & x_2^{j_1} & \cdots & x_2^{j_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_1 & M_2 & M_3 & \cdots & 0 & x_n^{j_1} & \cdots & x_n^{j_m} \end{pmatrix}$$

---

[1] Se nos presenta en esta malla regular una seria dificultad: vamos a tener en la lista muchos vectores con idénticas i -ésimas coordenadas y por tanto la asunción de no degeneración no podrá ser satisfecha, para ello será necesario desarrollar un procedimiento lexicográfico, el cual nos ayudará a resolver este problema.

[2] Esta regla particular de "breaking ties" dada por *Scarf* en este caso, es en realidad, una regla preliminar a la regla lexicográfica ; con la ventaja que ella nos permite mostrar el ejemplo numérico con un mínimo de análisis preliminar.

y se adopta la convención de que si en la matriz hay dos columnas con sus i -ésimas coordenadas idénticas, entonces se supone que la primera columna tiene esa coordenada más grande, además, si en la matriz tenemos un vector que tiene una entrada en la fila i-ésima idéntica a la de un vector que no está en la matriz, entonces se supone que el último vector tiene la entrada más grande.[3]

En [3] vimos que el algoritmo no puede ser cíclico y por tanto debe terminar. Una de las ventajas que tenemos ahora es que la operación de reemplazo no necesita buscar a través de todos los vectores $x^1, \cdots, x^k$, sino que se reduce a buscar sobre todos los vectores los cuales han sido usados en las etapas previas y el resto de los vectores de A_k se encuentran por cálculo.

El algoritmo termina cuando hallamos obtenido un conjunto primitivo con todos sus miembros etiquetados de manera distinta. Por tanto, para la aproximación de un punto fijo de f cualquier punto de el subsimplex de el conjunto primitivo obtenido puede ser tomado como aproximación del punto fijo.

3 Aplicación a un modelo de intercambio puro

Consideremos el vector $x = (x_1, \cdots, x_n)$,donde sus componentes representan los precios de bienes o comodidades $\forall\, i = 1, \cdots, n$, y las funciones continuas $d_1(x), \cdots, d_n(x)$ llamadas **funciones demanda de mercado** (las cuales se obtienen por las sumas de las funciones de demanda individuales) en el simplex S.

Si definimos $g_i(x) = d_i(x) - x_i$ como las **funciones exceso de demanda de mercado** se obtiene la Ley de *Walras* en la siguiente forma :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x) = o \tag{1}$$

El vector x^* se llama un **vector equilibrio de precios** si

$$g_i(x^*) \leq 0$$
$$\forall\, i = 1, \cdots, n$$

Una función sobre S cuyos puntos fijos son vectores equilibrio de precios es dada por

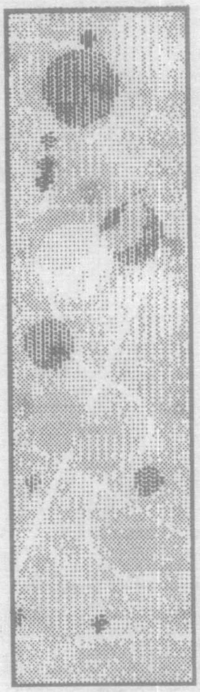
$$f_i(x) = \frac{x_i + max[0, g_i(x)]}{1 + \sum_{l=1}^{n} max[0, g_l(x)]} \tag{2}$$

[3]Este ligamiento entre cualquier columna de esta matriz y un vector que no aparece en la matriz, el cual se rompe en favor de este último, hace que a la regla se le llame : **regla "Tie-Breaking"**

La forma de estas funciones es así pues de esta manera se obtienen funciones continuas de el simplex S en sí mismo. Por otra parte queremos etiquetar el conjunto $\{x^{n+1}, \cdots, x^k\}$ y para ello un vector arbitrario de la lista es etiquetado con la correspondiente coordenada que no es decreciente bajo la función en el punto, es decir $f_i(x) \geq x_i$ o de acuerdo a (2):

$$x_i + max[0, g_i(x)] \geq x_i \left[1 + \sum_{j=1}^{n} max[0, g_j(x)] \right]$$

Por tanto la etiqueta va a ser aquel índice i para el cual $\frac{g_i(x)}{x_i}$ es maximal ; desde luego aquí también los vectores $x^1, \cdots, x^n$ tendrán como etiquetas a $1, \cdots, n$ respectivamente.



Consideremos el vector $w = (w_1, \cdots, w_{12})$ el cual describe el medio total de dotación de la economía anterior a el consumo. En la aplicación se tendrán 12 comodidades y 6 consumidores , cada uno con un conjunto de comodidades $w = (w_1, \cdots, w_{12})$ y una **función de utilidad** [4]:

$$u(y) = \sum_{i=1}^{12} a_i^{\frac{1}{b}} y_i^{1-\frac{1}{b}}$$

Para obtener las demandas de un consumidor para todo vector de precios x , maximizamos la función $u(y)$ con la condición de su presupuesto restringido a

$$\sum_{i=1}^{12} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{12} x_i w_i$$

en este caso las **funciones exceso de demanda de mercado** se pueden escribir explícitamente de la siguiente manera :

$$y_i = \frac{a_i \sum_{k=1}^{12} x_k w_k}{x_i^b \sum_{k=1}^{12} x_k^{1-b} a_k} - w_i \qquad \forall\, i = 1, \cdots, 12$$

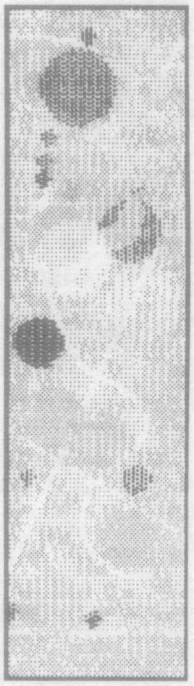
Para obtener las funciones exceso demanda de mercado correspondientes, se suman los doce conjuntos diferentes de las funciones individuales de exceso de demanda, en unión con los parámetros a_i, w_i y b los cuales aparecen en cada conjunto .

El parámetro a_i nos da la información de la intensidad de la preferencia para cada comodidad, es decir, si el valor de a_i es alto entonces el respectivo bien va a tener más demanda; mientras que el parámetro b simboliza el grado de reemplazo

[4]Para el consumo final

entre bienes o comodidades y por tanto en el caso en que b esté cercano a cero, entonces, el consumidor demandará un paquete de comodidades cercano en su proporción a $(a_1, \cdots, a_{12})$ independientemente de los precios relativos ; si $b > 1$ entonces existirá la sustitución adecuada dependiendo de los precios relativos y si $b = 1$ la fracción de ingreso agotado en cada comodidad será proporcional a este vector.

En las siguientes tablas los números fueron seleccionados al azar y no poseen ningún significado de tipo económico, solamente con el fin de mostrar una aplicación del algoritmo.



Reservas iniciales de bienes

consumidor												
1	.8	20	.5	.5	17	.8	12	.3	.4	16	.2	.3
2	.6	24	.4	.1	12	13	15	14	13	12	11	.1
3	11	2	3	4	8	.8	.7	.6	.5	5	7	17
4	.1	.2	5	9	.8	.9	17	16	13	12	11	.2
5	.2	.3	9	33	13	5	5	.6	.5	16	15	.8
6	8	12	7	.8	.9	22	20	.8	.8	19	18	17

Tabla 1

Utilidad de los parámetros a_i

consumidor												
1	.7	1	.9	2	2.1	2.3	4	.6	8.8	5	5.5	.9
2	.3	2	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	10
3	9.9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	.2	.9	10	1	1.1	7.2	8	7	.6	.5	.4	.3
5	8	7	.1	7	3.4	6.6	8.1	9	8	7	6	5
6	1.1	2	2.2	7	2.3	5.1	2.3	1.1	5	.2	3.3	1

Tabla 2

Datos del parámetro b

consumidor	
1	.5
2	.4
3	3
4	1.2
5	4
6	1.1

Tabla 3

En esta aplicación usaremos una malla de precios en el simplex S formada por todos los vectores de la forma $(m_1/316, \cdots, m_{12}/316)$ donde $m_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall\, i = 1, \cdots, 12$ y

$$\sum_{i=1}^{12} m_i = 316$$

De acuerdo al teorema 4.3 de [3] el algoritmo debe comenzar con un conjunto primitivo que contiene los lados $x^2, \cdots, x^{12}$ y un vector adicional. Después de 400 iteraciones aproximadamente[5], el algoritmo termina con el siguiente conjunto primitivo de vectores:

$$\begin{pmatrix}
50 & 50 & 52 & 41 & 45 & 48 & 49 & 53 & 44 & 56 & 49 & 52 \\
29 & 29 & 30 & 30 & 30 & 30 & 29 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 \\
26 & 26 & 27 & 27 & 26 & 27 & 27 & 27 & 27 & 27 & 27 & 26 \\
12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 \\
28 & 28 & 29 & 28 & 29 & 29 & 29 & 29 & 28 & 29 & 29 & 29 \\
21 & 22 & 22 & 21 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 21 & 22 & 22 \\
31 & 31 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 29 & 30 & 30 & 30 \\
28 & 28 & 27 & 27 & 27 & 27 & 27 & 28 & 27 & 27 & 27 & 27 \\
26 & 27 & 26 & 26 & 26 & 27 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
25 & 25 & 26 & 25 & 26 & 25 & 25 & 25 & 25 & 26 & 25 & 26 \\
22 & 23 & 23 & 23 & 22 & 23 & 23 & 23 & 23 & 22 & 23 & 23 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 16 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 16
\end{pmatrix}$$

Tabla 4

además la columna i-ésima posee la etiqueta i. Luego tenemos el vector de costo normalizado[6]:

$$x = (.155, .094, .084, .041, .090, .068, .095, .086, .082, .080, .071, .047)$$

Como podemos observar además, el algoritmo se puede aplicar con toda confianza en problemas de rasonable medida. Además los modelos del equilibrio general han sido tradicionalmente usados y continuan usándose para analizar los efectos de cambio en política económica, pues una de las mayores virtudes del modelo

[5] En el apéndice se muestran los diferentes programas que generan el algoritmo, en particular el algoritmo para el intercambio de vectores

[6] El vector se normaliza para que pertenezca al simplex

general de equilibrio es la habilidad para trazar las consecuencias de grandes cambios en un sector particular de la economía.
Se ha notado un surgimiento en la última década de métodos finos aplicados, los cuales nos dan la posibilidad de estudiar y hacer investigaciones propias aplicadas a modelos nacionales. En este sentido han surgido aplicaciones a economías de países latinoaméricanos, particularmente podemos mencionar a *J. Serra-Puche*, quien ha estudiado un modelo general de equilibrio aplicado a la economía mexicana.

Referencias

[1] T.Apostol.**Calculus**.Vol II. Editorial Reverté S.A. España. 1965.

[2] C.Azofeifa. **Algunas definiciones de funciones contractivas.**Ciencia y Tecnología, 14(1-2);69-80.San José.1990.

[3] C.Azofeifa. **Aplicaciones de la teoría de punto fijo**. Tesis de maestría. U.C.R. San Pedro. 1993.

[4] E.L.Allgower.**Application of a fixed point search algorithms to nonlinear problems having several solutions.**S.Karamardian.Academic Press.

[5] Balinski-Cotle.**Complementary and fixed point problems.** North-Holland P.C. 1978.

[6] Kim Border.**Fixed point theorems with applications to economics and game theory.** Cambrige University Press. 1985.

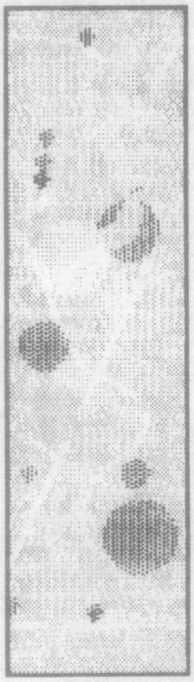
[7] B.P.Demidovich-I.A.Maron. **Cálculo numérico fundamental**. Paraninfo. Madrid. 1977.

[8] M.Edelstein. **An extension of Banach's contraction principle.** Proc.Amer Math Soc.12(1961) 7-10 Mr 22 N 11375.

[9] E.Fadell - G.Fournier. **Fixed point theory.** Lectures Notes in Mathematics N^o 886. Springer Verlag. New York. 1981.

[10] J.Franklin.**Methods of mathematical economics linear and nonlinear programing, fixed point theorems.**Springer Verlag.New York. 1980.

[11] J. Freidenfelds. **Fixed point algorithms and almost complentary sets.** TR 71-77. Operations research house. Stanford University. 1971 .



[12] C.Garcia ,C.E.Lemke and Lueti. **Simplicial aproximation of an equilibrium point for non-cooperative n-persons games.** Math prog. Ed:T.C Hu and S.M.Robinson .Academis Press. New York. 1973.

[13] Hodgkin-Huxley. **A quantitative description of membrane current and its applications to conduction and excitation in nerve.** J. Physiol. 117 (1952).500-544.

[14] V.Istratèscu, **Fixed point theory. An introduction.** D.Reidel Publishing Company.Boston.1981.

[15] M.M.Jeppson. **A search for the fixed points of a continuos mapping.** Mathematical topics in economic theory and computation :Ed:R.H Day and S.M.Robinson.

[16] A.N.Kolmogorov-S.V.Fomín. **Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.** Editorial Mir .Moscú. 1972.

[17] W.A.Kirk. **Fixed point theory : A brief survey.** Universidad de los Andes. Venezuela. 1990.

[18] Lieberstein .**On the Hodgkin-Huxley partial differential equation.** Math Biosciences. 1(1967) 45-69.

[19] E.Rakotch. **A note on contractive mappings.** Proc Amer Math Soc 13(1962).459-465 ,MR 26 N 5555.

[20] B.E.Rhoades. **A comparison of various definitions of contractive mappings.** Trans of Amer. Mat Soc.Vol 226.1977.

[21] H.Scarf. **The computation of economic equilibria .** Yale University Press.1973.

[22] V.M.Sehgal. **On fixed and periodic points for a class of mappings.** J.London. Math Soc(2) 5(1972).571-576 MR 47 N 772.

[23] D.R.Smart. **Fixed point theorems.** Cambridge Tracts in Mathematics. Great Britain .1974.

[24] S.Swaminathan. **Fixed point theory and its applications .** Academis Press. New York .1976.

[25] Kiang Tsai-han. **The theory of fixed point classes.** Springer Verlag. New York .1980.

[26] M.Todd. **The computation of fixed points and applications.** Springer Verlag. Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems. New York. 1980.

[27] R.J.Wilmuth. **The computation of fixed points.** Department of operations research. Stanford University. P.H.D. Thesis (1973).