Castillo E., William. *Actividades matemáticas para niños (y adultos): mapas y grafos.* **Tecnología en Marcha**. Vol. 12 no. 4.

ACTIVIDADES MATEMATICAS PARA NIÑOS (Y ADULTOS): MAPAS Y GRAFOS

William Castillo E.*

Se describen varias actividades matemáticas que ilustran la enseñanza de conceptos y procedimientos matemáticos considerados esenciales para la formación matemática, desde los primeros niveles de la escuela primaria.

1. INTRODUCCION

El propósito de este artículo es ilustrar, por medio de ejemplos, que es posible exponer a los niños, desde muy temprano, a ideas centrales de la matemática. Esto se puede lograr en el contexto de ambientes dinámicos, motivadores y propicios para la comunicación matemática (verbal y escrita). Subyacen a este propósito las siguientes opiniones del autor:

1. La Escuela Costarricense no estimula la formación del pensamiento matemático.

2. La forma como se enseña y se presenta la matemática es una causa muy importante de la desmotivación estudiantil.

3. Se omiten en el curriculum escolar, tópicos sustantivos para la formación matemática de los estudiantes.

4. Estas fallas explican, en esencia, las dimensiones del fracaso académico estudiantil. Entendido este no solo en términos cuantitativos de promoción estudiantil, sino además, en términos de la calidad de la formación matemática.

5. Una política educativa para la superación de las dificultades en la enseñanza de las matemáticas debe atacar los problemas 1., 2. y 3., desde los primeros niveles de la educación primaria.

En la Sección 2. se especifican más detalladamente estos problemas.

En ruta hacia el objetivo principal, expongo en la sección 3, varios ejemplos y actividades matemáticas dedicadas a los niños, al mismo tiempo que se mencionan los más importantes conceptos matemáticos involucrados.

2. ACERQUEMONOS UN POCO MAS AL PROBLEMA

Los contenidos curriculares y la práctica docente, en todos los niveles del sistema, enfatizan el aprendizaje de procedimientos rutinarios: fórmulas mágicas por doquier, prioridad a los procesos reiterativos y mecánicos, abundancia de problemas y ejemplos artificiales.

Correlativamente, se ignoran las ideas centrales de la matemática y sus usuales procedimientos, los mismos que se

* Profesor. Escuela de Matemática. Universidad de Costa Rica.

La forma como se enseña y se presenta la matemática es una causa importante de la desmotivación estudiantil.

fundamentan en el pensamiento lógico matemático y en la comunicación. No existe una estrategia para abarcar, desde que los niños ingresan a la escuela, temas pertinentes como por ejemplo: combinatoria, probabilidades, estadística, teoría de grafos, modelación, optimización, inducción, deducción, etc.

Lo anterior se constata de la lectura de los programas de matemática de la enseñanza primaria y secundaria, de la lectura de los diversos textos que circulan y de la experiencia cotidiana de los profesores y alumnos.

Más aún, los contenidos matemáticos, por la forma como se presentan, aparecen ante los ojos de los estudiantes como algo extraño a sus vidas, a su cultura, a su entorno; dejando en los estudiantes la falsa idea que la matemática es un conocimiento absolutamente inútil.

Por otra parte, es conocido que el estilo dominante de enseñar matemática en todos los niveles, se caracteriza por ser desmotivador y seudoautoritario. En el salón de clase el profesor expone y los estudiantes sentados y silenciosos, deben limitarse a escuchar la «verdad». No hay dinámica, no hay discusión, no hay comunicación. Niños y jóvenes son presa fácil de la desmotivación.

Este estado de cosas tiene consecuencias sobre –y hasta condiciona–, la enseñanza de las matemáticas universitarias. Por lo general los jóvenes que ingresan a las universidades, por ejemplo, confunden símbolos tales como = y →, y los usan indistintamente como si ellos significaran lo mismo. Están convencidos que todos los problemas en matemática se pueden reducir a una fórmula o a un procedimiento estándar. El pensamiento matemático y la comunicación (escrita y oral) no son valorados como partes sustantivas de la matemática.

En síntesis, pareciera que la enseñanza de esta disciplina se realiza con arreglo a una agenda, no declarada, cuyas consecuencias más visibles son la desmotivación y el fracaso académico estudiantil.

3. MATEMATICAS PARA LA ESCUELA PRIMARIA

Teniendo en cuenta que la motivación es un factor clave en la enseñanza de la matemática, resulta especialmente importante crear escenarios agradables, tanto al interior como al exterior del aula, de modo que los estudiantes perciban la matemática como una actividad divertida, llena de colorido, de historias, de retos interesantes y relacionada con su propio entorno.

La muestra de ejemplos y actividades que se presentan con base en la teoría de mapas y grafos se adecúan, con pequeñas variaciones, a los distintos niveles de la escuela primaria.

Los niños pueden trabajar estos temas sin, por supuesto, conocer las definiciones formales y las notaciones que se usan en los escritos técnicos de las ciencias matemáticas.

Coloreando mapas

Normalmente los niños disfrutan coloreando cualquier cosa en el salón de clase. Entonces, ¿Por qué no aprovechar la oportunidad y lograr que ellos, coloreando, se involucren con las matemáticas?

Materiales para las actividades 1 a 3

Lápices de colores, fichas o cubos de colores, mapas (incluido el mapa político de Costa Rica o de Centroamérica), cuaderno, lápiz y un poco de cuerda.

Actividad No. 1: aprendiendo a colorear mapas

Es sorprendente que los niños cuando manipulan mapas y los colorean están tratando directamente con el concepto de función sin que, desde luego, este término forme parte de su vocabulario. Como si esto fuera poco, se involucran además con el proceso de razonamiento matemático llamado deducción.

¿Qué es un mapa? La idea de mapa es puramente visual y los niños la adquieren mejor por medio de dibujos y ejemplos sencillos. Se espera que conforme se desarrollan las actividades, los niños se van apropiando de este concepto.

¿Qué es colorear un mapa? Usando por ejemplo el mapa de las provincias de Costa Rica se explica que dos provincias vecinas son las que tienen frontera común y colorear un mapa significa asignar un color a cada provincia de modo que dos provincias vecinas siempre son de distinto color. He aquí el concepto de función.

Mapas como los de la Figura M1, pueden ser coloreados por los alumnos individualmente o en pequeños grupos. El mapa 2 de la Figura M1 se puede colorear con dos colores, pero el mapa 1, no. Este se puede colorear con tres colores pero el mapa tres, no.

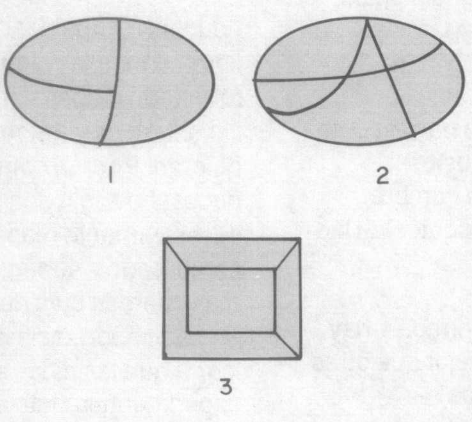

FIGURA M1.

Se puede promover un estudio comparativo de las distintas soluciones obtenidas por los estudiantes y la correspondiente comunicación de las estrategias usadas. Preguntas como

¿Por qué no se puede colorear el mapa 1 con dos colores?

¿Qué es lo que causa que un mapa sencillo no puede ser coloreado con dos o tres colores?, pueden motivar a los estudiantes a construir mapas con ciertas características especiales y tratar de «probar» que no son coloreables con dos o con tres colores. Nótese que estamos a un paso de poder hablar a los niños del famoso problema de la matemática discreta conocido en la literatura especializada con el nombre de «teorema de los cuatro colores» que afirma que cuatro colores son suficientes para colorear cualquier mapa.

Actividad No. 2: Una historia de la TV

Los procesos matemáticos involucrados son: deducción, optimización y modelación.

Después que los niños aprenden a colorear mapas –lo cual logran rápidamente–, se les entusiasma con la idea de usar pocos colores. Es decir, dado un mapa, colorearlo con el mínimo número de colores.

Los niños de menor edad comprenden mejor el problema y la necesidad de usar pocos colores, si se inicia la actividad con el relato de un cuento. A modo de ejemplo consideramos un cuento sobre el problema de la interferencia en los televisores cuando hay solamente una frecuencia [1].

La historieta es así: hace mucho tiempo, en un vecindario del Reino, se le entregó a cada familia un televisor para que las personas pudieran estar informadas de las cosas importantes que ocurrían en el Reino y para que los niños pudieran ver los programas de entretenimiento. Como los televisores eran de una frecuencia (un único canal), la interferencia hacía irreconocible la imagen en los televisores de las familias vecinas -aquellas que vivían una al lado de la otra-. Entonces se decidió resolver el problema fabricando suficientes canales, de modo que dos familias vecinas no tuvieran el mismo canal. Como el material para construir los canales era muy caro, se presenta el problema de satisfacer la demanda con una cantidad mínima de canales.

Distribuya mapas del vecindario como el de la Figura M2 donde cada región representa la casa de una familia. Estimule una competencia entre los estudiantes

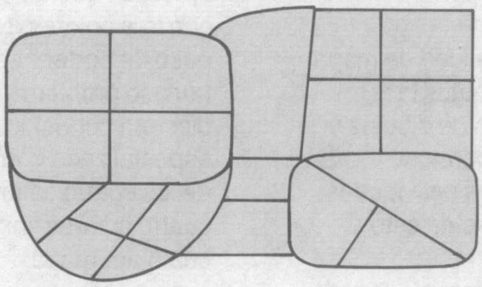

FIGURA M2.

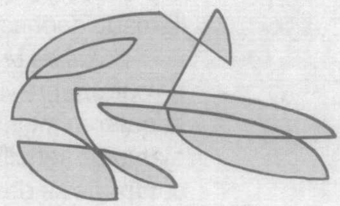

FIGURA M3.

para encontrar formas de asignar los televisores a las familias usando el menor número de frecuencias y de manera tal que no haya interferencia.

Los estudiantes pueden abordar el problema ensayando estrategias solos o en pequeños grupos, que los conduzca hacia su «mejor solución". Recordemos que el objetivo es exponer tempranamente a los niños a procesos elementales de modelización y a la idea de optimización, de extraordinaria riqueza matemática. Por eso las sugerencias de los profesores deben ser sumamente cuidadosas para no terminar diciéndoles lo que deben hacer, perdiendo los estudiantes su originalidad en la búsqueda de estrategias para resolver el problema.

Conforme se encuentran soluciones, exhíbalas e invite a los niños a narrar cómo las obtuvieron. Tome nota de estos procedimientos y póngales un nombre. Solicite a los estudiantes que contesten las siguientes preguntas:

- ¿De las estrategias encontradas, hay algunas que funcionan mejor que otras para un determinado mapa?
- ¿Hay alguna estrategia para determinar si un número dado de colores es suficiente?

Actividad No. 3: Dos colores son suficientes

Hay una forma sencilla de hacer mapas coloreables con dos colores. Partiendo de cualquier punto mueva la tiza por el pizarrón, sin levantarla, y regrese al punto de partida. El resultado es un mapa bicoloreable (ver Figura M3).

Dibujando mapas como este, uno sobre el otro, usted obtendrá mapas bicoloreables «muy complicados».

Distribuya entre los niños mapas de menos a más complicados, empezando con aquellos formados por una sola curva cerrada cada vez «más deformada», luego por dos curvas cerradas superpuestas y así sucesivamente. En ese mismo orden vaya solicitando a los niños que los coloreen con dos colores.

Como trabajo complementario, los alumnos pueden hacer el mismo ejercicio anterior, pero ellos deberán construir los mapas.

Puede resultar muy motivante y educativo, organizar actividades al «aire libre» donde los niños experimenten formando mapas con cuerdas unidas por los extremos y deformándolas tanto como quieran. Podrán comprobar que son necesarios sólo dos colores cuando forman sucesivamente mapas más y más complicados, superponiendo dos, tres y más cuerdas bien deformadas.

La importancia de esta actividad es lograr que los niños se involucren experimentalmente con ideas tan importantes en matemática como la deducción, la inducción y prueba. Si tal país es rojo entonces este otro debe ser verde. Si para mapas formados por dos y más cuerdas superpuestas puedo colorear con dos colores, entonces ¿lo mismo será cierto para cualquier cantidad de cuerdas?

Se enfatiza con esta actividad que la idea de *verdad* es central en matemática, así como los procedimientos (pruebas) que los matemáticos usan para concluir que algo realmente es verdadero o que no lo es.

Pueden surgir preguntas como: ¿por qué no estoy seguro que siempre es posible colorear un mapa de estos, con dos colores? Es decir, ¿por qué no estoy seguro que algo es verdad? ¿qué es lo que da seguridad que siempre es posible, por el método descrito, hacer un mapa coloreable con dos colores, o qué es lo que produce la inseguridad?

El contenido de esta actividad fue tomado de [1]

Grafos accesibles a los niños

A pesar de su relevancia en matemática, en ciencia de la computación y en numerosas aplicaciones, la Teoría de Grafos es un tópico ignorado por el curriculum tradicional, como lo es casi toda la matemática discreta. A través de las actividades que serán descritas, veremos cómo, por medio de los grafos los niños trabajarán con conceptos centrales en matemática y ciencia de la computación: representación de información, algoritmo, optimización, etc.

¿Qué es un grafo?

Como en el caso de los mapas, los niños se familiarizan con el concepto de grafo, permitiéndoles que manipulen muchos ejemplos y diciéndoles que un grafo siempre está formado por varios puntos (o círculos pequeños) unidos por segmentos o arcos. Los puntos se llaman vértices y los segmentos que los unen, aristas (ver Figura G1). Un grafo que al dibujarlo sobre un plano ninguna de sus aristas se cruzan, llámase grafo plano. Así, un grafo de cinco vértices, todos conectados entre sí por aristas, no es plano; pero uno de cuatro o tres vértices siempre lo será.

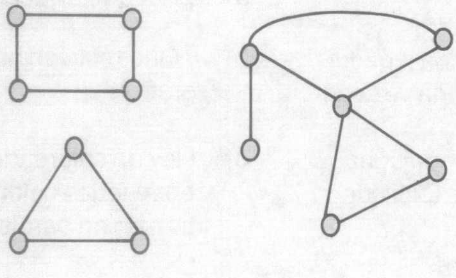

FIGURA G1.

Actividad No. 4: Representación de información por medio de grafos

Partimos de la hipótesis que el aprendizaje se facilita y es más sólido cuando los niños realizan actividades con grafos donde los vértices y las aristas adquieren distintos significados. Surgen, entonces, los primeros elementos para de la modelación matemática.

El objetivo es que los estudiantes enriquezcan el concepto de grafo y lo aprecien como un instrumento válido para representar información.

Consideremos un grafo sencillo como el de la Figura G2 donde los vértices representan jugadores de ajedrez y las aristas que unen dos vértices (jugadores) indican que esos jugadores jugaron entre sí. Además, el sentido de la flecha indica quien ganó la partida. En la Figura G2, por ejemplo, Elías le ganó a María y Alfredo a Elías. María y Alfredo aún no han jugado.

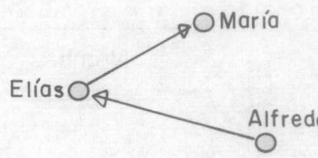

FIGURA G2

Los grafos en los cuales se debe indicar la orientación de la arista, como en este caso, se llaman grafos dirigidos.

Un ejemplo más interesante que aparece en [5] es el grafo de la Figura G3. Este grafo muestra los resultados de las partidas que hasta ahora han jugado seis jugadores en un torneo de ajedrez. En este caso, dada la información representada por medio del grafo, se puede construir una tabla con los resultados actuales del torneo. Puede plantearse el problema inverso: dada la información tabulada, representarla por medio de un grafo.

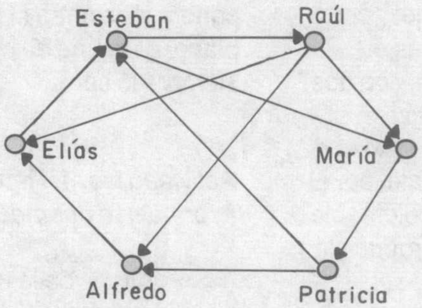

FIGURA G3.

Los estudiantes trabajan solos o en parejas a fin de contestar, por ejemplo, las siguientes preguntas:

1. ¿Quién ganó el juego entre Esteban y Patricia?

2. ¿Con quiénes ha jugado Patricia?

3. ¿A quiénes les ha ganado Raúl?

4. ¿Cuántos juegos se han realizado hasta ahora? Explique cómo obtiene este total.

5. Tabule las posiciones de los jugadores según la cantidad de juegos ganados.

Nombre	Triunfos	Derrotas

6. El torneo finaliza cuando cada jugador haya jugado exactamente una vez con los otros.
¿Cuántos partidos quedan por jugar para que termine el torneo? Explique su respuesta.

Actividad No. 5: El grafo invisible

Los estudiantes formarán y colorearán grafos cuyos vértices son los mismos estudiantes.

En un grafo dos vértices son vecinos si se ubican en los extremos de una misma arista. En la Figura G2 Elías es vecino de María y Alfredo, pero éstos no son vecinos entre sí.

Colorear un grafo es asignar colores a cada vértice de modo tal que dos vértices vecinos sean de distinto color.

Los estudiantes se colocan sentados en forma de círculo y cada uno escoge secretamente dos vecinos. Se juega con dos, tres o cuatro colores y cada jugador se autocolorea colocándose en una posición legal.

Supongamos que se juega con tres colores los cuales se indican así:

- De pie, con los brazos hacia arriba, es rojo.

- De pie, con los brazos hacia abajo, es verde.

- De pie, con los brazos hacia adelante, es azul.

- Sentado es sin color.

Un jugador «pasa» si sus vecinos son de distinto color entre sí y el juego termina cuando ningún jugador cambia de color o cuando se alcanza un tiempo límite de juego, acordado previamente. Luego el grafo resultante coloreado o seudo-coloreado, es dibujado en el pizarrón.

Hay varios puntos de discusión interesantes que pueden ser abordados por los niños:

a) ¿Por qué el juego puede no terminar?

b) ¿Qué relación hay entre un mapa y un grafo?

c) Hay un coloreador para cada vértice y entre todos colorean el grafo (es trabajo en paralelo), pero cada uno

solo puede ver parte del grafo (trabaja localmente). En otras actividades solo hay un coloreador que puede ver todo el grafo (trabaja globalmente) y que colorea primero un vértice (país, región...), luego otro y así. Es trabajo en serie.
Incite a los niños a buscar ejemplos de trabajos que se realizan mejor en serie que en paralelo, o viceversa. Esta actividad es una adaptación de la que aparece en [4]

Actividad No. 6: Ciudad de las Calles Feas

Las matemáticas importantes detrás de esta actividad son el concepto de optimización y la modelización. Asimismo están presentes algunos elementos sustantivos para una adecuada formación matemática tales como el desarrollo de estrategias para resolver problemas, la evaluación de la calidad de las soluciones –que involucra cálculos aritméticos– y la comunicación.

Un grafo como el de la Figura G4 representará la Ciudad de las Calles Feas, en el que los vértices son casas y las aristas, calles. Los números al lado de las aristas representan el «costo» de pavimentación. Parte importante de la actividad es que alguien cuente un cuento como el siguiente, inspirado en el que se encuentra en [2]:

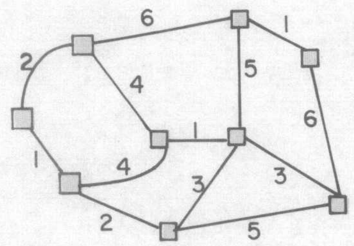

FIGURA G4.

Había una vez una pequeña ciudad donde las calles tenían grandes huecos. Tan grandes eran que los carros al pasar por ellos se volcaban o por querer esquivarlos producían graves accidentes. Como el problema se volvió insoportable, los vecinos acudieron a la municipalidad para solicitarle que pavimentara las calles. Aprovecharon también para recordarle que no había cumplido con la promesa de construir la piscina de la ciudad. El Consejo Municipal acordó resolver el problema en forma económica pavimentando solo algunas calles, bajo las siguientes condiciones:

(1) todas las personas pueden ir desde su casa a cualquier otra, por una ruta pavimentada y,

(2) el costo de pavimentación debe ser *lo más pequeño posible* para que el dinero alcance para construir la piscina.

Este problema se conoce con el nombre técnico *árbol abarcador de peso mínimo*. Los estudiantes trabajan en pequeños grupos y quienes rápidamente comprendan el problema, se lo explican a otros. Conforme los niños encuentran sus soluciones, estas deben ser exhibidas y evaluadas a efecto de provocar la búsqueda de mejores soluciones.

Lo importante no es necesariamente obtener una solución óptima sino que los niños comuniquen y discutan las estrategias usadas y las comparen. Tampoco se pretende que los niños redescubran los algoritmos de Kruskal y de Prim que permiten encontrar soluciones óptimas.

A modo de conclusión

Al presentar las anteriores actividades matemáticas he querido poner en evidencia que existen formas de transmitir conceptos y procedimientos matemáticos sustantivos, creando ambientes motivadores y agradables. También he querido indicar que los niños deben ser expuestos a las formas típicas del razonamiento matemático y de la comunicación como elementos indispensables en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Hay en la literatura, por ejemplo en [3], gran cantidad de bellos y muy interesantes problemas que pueden ser adaptados a los diferentes niveles escolares con el fin de lograr estos objetivos. Por último, debe mencionarse que la riqueza matemática de la muestra de ejemplos presentados, contrasta con el bajísimo costo de implementación dado que los materiales requeridos son relativamente muy baratos: papel y lápiz, lápices de colores, fichas de colores y un poco de cuerda.

BIBLIOGRAFIA

[1] Casey, Nancy y Fellows, Michael. «Stories and activities for mathematical thinking, problem-solving and communication» (por publicar).

[2] Fellows, Michael R. y Koblitz, Neal. «Kid Krypto». Por aparecer en Springer LNCS proceedings.

[3] Garey, Michael R. y Johnson, David S. *Computers and Intractability: a guide to the theory of NP-Completeness.* W.H. Freeman and Company, N.Y., 1979.

[4] Mathmania Newsletter. Issue One: Map Colouring/Graph Colouring; 05/94.

[5] Mathematical Sciences Education Board National Research Council. *Measuring UP: prototypes for mathematics assessment.* National Academy Press, Washington, DC; 1993.