Brenes Trejos, Gerardo; Corrales Thames, Víctor.
Fractales. **Tecnología en marcha**. Vol 11, no. 1. 1991.
p. 41-51

FRACTALES

Gerardo Brenes Trejos*
Víctor Corrales Thames**

Una forma de modelar muchos objetos de la naturaleza, con características irregulares, fragmentadas y con una variedad infinita de detalle, es logrado utilizando la geometría creada por Benoit B. Mandelbrot, quien la designó con el nombre de ***geometría fractal****. Los fractales son un mundo nuevo para Mandelbrot, que conlleva a una gran clase de objetos que han jugado un papel histórico en el desarrollo de la matemática pura durante el siglo XX.*

Con ayuda de computadoras estas figuras pueden ser graficadas con bastante exactitud y empleadas en ciertas aplicaciones del mundo real.

El objetivo de este trabajo es dar a conocer las generalidades de la geometría fractal, particularizar algunos métodos para generar fractales y analizar posibles áreas de aplicación.

EL CONCEPTO FRACTAL

Fractal (derivado del latín *Fractus*) describe la apariencia al quebrar una roca. Los resultados que se obtienen en este proceso son particiones de roca, donde cada uno de esos segmentos muestran irregularidades en las superficies que fueron separadas. Análogamente todos los objetos (figuras, formas, contornos) que muestran este tipo de fragmentaciones son de interés en los fractales. Sin embargo, existen otros tipos de fractales, totalmente regulares, de utilidad en eventos donde se exigen patrones con cierta clase de regularidad, a menudo caracterizados como simétricos.

Para el resto del artículo, trataremos de utilizar el término fractal para referirnos indistintamente a: contorno fractal, objeto fractal o figura fractal.

UNA NUEVA GEOMETRIA

En la naturaleza existen muchas formas (contornos) que la geometría euclideana (estándar) no está en capacidad de describir tales como montañas, costas, árboles y flores. En general, muchos patrones de la naturaleza son irregulares y fragmentados.

Ante este desafío, Mandelbrot concibió y desarrolló una nueva geometría de la Naturaleza: el estudio matemático de las formas que tienen una dimensión fraccional, e implementó su uso en diversos campos. Así, esta geometría identifica una familia (conjunto) de objetos o figuras que se denominan fractales.

* Profesor Investigador en el Depto de Computación del ITCR.
** Funcionario del Centro de Cómputo del ITCR.

Mandelbrot toma las curvas de Koch para crear sus contornos (figuras) fractales, que son caracterizados como bellezas o criaturas extrañas a las que denomina con el nombre de "Teragons"

Como se mencionó anteriormente, una caracterización de los conjuntos fractales es, precisamente, que poseen una dimensión no entera y más aún, estos objetos están restringidos a que su dimensión (D) esté comprendida entre cero y tres. En lo sucesivo se usará D para indicar la dimensión fractal.

Se nota que esta caracterización no condiciona necesariamente que la dimensión sea fraccionaria, es decir existen fractales para las cuales sus dimensiones corresponden a la dimensión euclideana (D_e). Una propiedad que por definición se cumple -también de interés matemático- es que la dimensión fractal estrictamente excede la dimensión topológica.

Entonces, debe resaltarse el hecho de que para una gran familia de fractales, un aspecto clave es la dimensión. Un entendimiento apropiado de irregularidad o fragmentación no puede ser satisfecho con un concepto de dimensión como un número de coordenadas. Es decir las diferentes dimensiones de objetos fractales están en discordancia con las definiciones propuestas por el matemático Euclides. La diversidad de dimensiones fractales expresan variaciones en aspectos no topológicos de las formas.

"Auto Similar" es un término usado en esta geometría para expresar que una parte de una figura es estructuralmente similar a toda la figura. Lo que en realidad sucede es que ciertos fractales son invariantes dentro de ciertas transformaciones de la escala.

CONSTRUCCION Y MODELACION

Para la construcción de los conjuntos de Mandelbrot se utilizan dos métodos principalmente. Uno consiste - la forma más simple - en generar la figura fractal mediante el uso de una figura inicial (iniciador) también conocido como semilla, aplicando luego un generador, con tanto grado de iteración, como precisión sea deseada en la figura. Normalmente el iniciador y el generador son ciertos tipos de figuras, sin embargo, estos pueden también tomar como valores intervalos de números reales. Algunos autores utilizan el término "Cascada" para denotar el mecanismo de generación.

El otro método para crear objetos fractales se basa en la utilización de funciones del plano complejo. Un conjunto de Mandelbrot es una región del plano complejo, situado entre 2 - 2i y 2 + 2i, ($i = \sqrt{-1}$) la cual contiene un conjunto de números complejos. Más adelante analizaremos en detalle este método así como algunas notaciones del plano complejo. Seguidamente, se retoma de nuevo, el primer método para analizarlo con tres fractales clásicos.

CURVAS DE VON KOCH (K)

Mandelbrot toma las curvas de Koch para crear sus contornos (figuras) fractales, que son caracterizados como bellezas o criaturas extrañas a las que denomina con el nombre de "Teragons". Con estos fractales -y en la mayoría de los casos- podremos tener una idea del grado infinito de detalle que muestran estos objetos, aunque en la práctica este nivel de detalle está limitado tanto por las características el equipo (*hardware*) como por restricciones de tiempo.

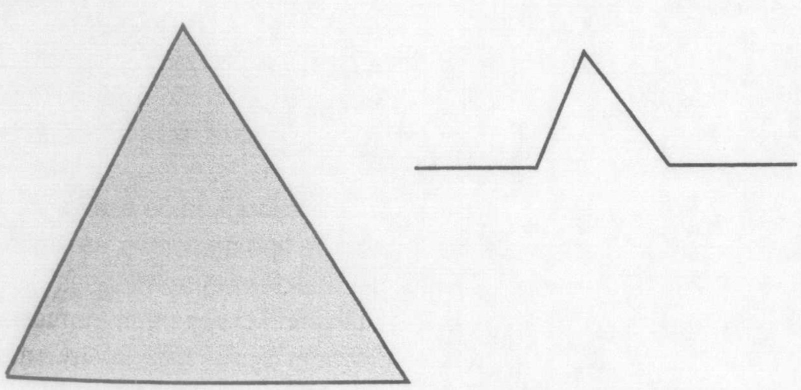
Como se mencionó, los principios básicos de construcción se inician con dos figuras o formas: un iniciador y un generador. A medida que se varíe la forma del iniciador o del generador o de ambos se obtienen figuras diferentes, incluso el grado de recursión afectará también el fractal resultante. ■

Un ejemplo típico de curvas fractales, usados para modelar “costas”, utiliza un triángulo equilátero unitario como la semilla, este se ilustra en la Figura 1a y su generador es mostrado en la Figura1b.

La Figura 1b resulta de tomar un lado del triángulo (longitud = 1), particionar la línea en tres partes (b = 3) y luego dibujar cuatro segmentos (N = 4) de línea de longitud igual a 1/3 (r = 1/3). La curva fractal correspondiente se genera aplicando repetidamente (proceso recursivo) una función de transformación especificada a un punto dentro de la región del espacio.

En la primera iteración (etapa) el triángulo inicial es transformado en el contorno que aparece en la Figura 2a, aquí cada segmento de línea tiene entonces una longitud igual a 1/3. En general podríamos ver esa figura conformada de triángulos regulares de tamaño1/3, consecuentemente esos triángulos han sido escalados a tamaños más pequeños, si aplicamos una nueva iteración, se producen triángulos de tamaño $(1/3)^2$, como se ilustra en la Figura 2b.

El detalle va siendo más evidente conforme se incrementa el número de iteraciones, convergiendo a una figura aproximada a un círculo.



(a) (b)

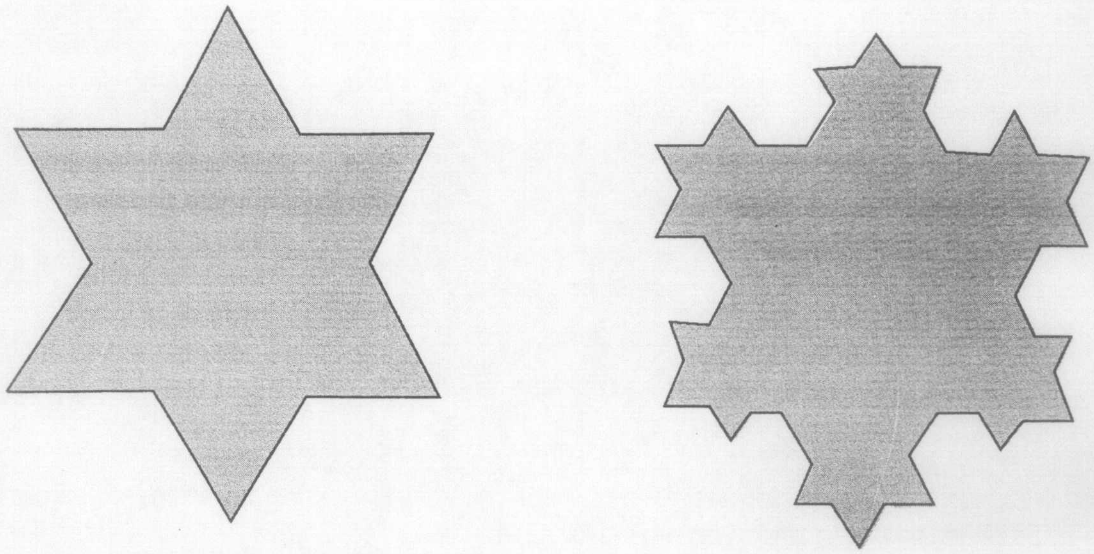
FIGURA 1. a.– Iniciador ; b.– el generador de una curva de Koch.

Un hecho importante que vale la pena resaltar es que a medida que se incursiona en detalles mayores, la longitud de la curva fractal crece cada vez más. En la Figura 3, logramos observar que el número de líneas de la curva se incrementa en un factor de 4 y la longitud de cada nuevo segmento de línea generado es un tercio de la longitud de los segmentos de línea del modelo anterior.

Mandelbrot sugiere que una curva de Koch se aproxima en forma brusca al cotorno de una costa, (o los límites de una isla) y propone un método análogo a la formulación del ejemplo anterior: primero asume que una vista de un segmento de costa dibujado en un mapa, en una escala de 1/1 000 000 es un intervalo recto, de longitud 1 (precisamente un lado de nuestro triángulo regular de la Figura 1a), luego si se desea tener más detalle propone usar un mapa con una escala de 3/1 000 000 para el mismo segmento de costa, e indica que el resultado de esta segunda aproximación es una línea dividida en cuatro intervalos de igual longitud (similar a la Figura 1b) donde en el segundo tercio aparece un promontorio (triángulo equilátero en Figura 2a).

Un nuevo detalle aparece, utilizando una escala de 9/1 000 000 y reemplazando cada uno de los segmentos de línea anteriores por el iniciador, resultando así cinco promontorios más reducidos (como se ilustra en un intervalo recto de longitud 1 en la Figura 2b). Procediendo de igual manera se logra modelar ese segmento de costa con un grado infinito de detalle.

Este modelo de costa es solamente una aproximación sugerida, no tanto por ser ésta irregular, si no más bien, porque en comparación con una costa, las irregularidades reales van más allá de lo sistemático. ■



(a) (b)

FIGURA 2. a- Resultados de la primera iteración; con segmentos de longitud igual a 1/3. b–Resultados de la segunda iteración, con triángulo de tamaño igual a $(1/3)^2$.

Después de intentar explicar una modelación de la naturaleza, resulta interesante conocer la dimensión de la curva fractal dibujada en la Figura 3.

La dimensión fractal para este tipo de familia de fractales es dada por $D = \log(N)/\log(1/r)$. En el caso particular de la Figura 3, tenemos la siguiente información:

$$N = 4$$
$$b = 3$$
$$r = 1/b = 1/3$$

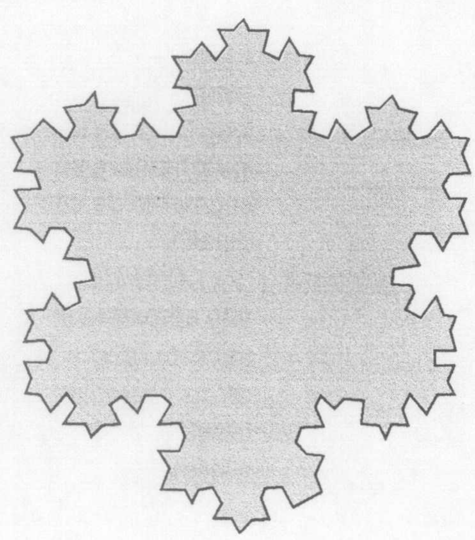


FIGURA 3. Contornos generados aplicando tres iteraciones. Se utilizan las figuras 1.a y 1.b como el iniciador y generador respectivamente.

resultando que $D = \log(4)/\log(3) = 1{,}2618$ ($D \leq = D_e$, ie $1{,}2618 < 2$).

Los fractales cuya dimensión está comprendida entre uno y dos, son figuras representadas en el plano cartesiano, es decir corresponden a las representaciones de las curvas estándares o de Euclides y curiosamente una superficie fractal que se describe en un espacio tridimensional, tiene una dimensión entre uno y tres.

Todas las curvas generadas de manera similar (variando su iniciador o generador) convergen a curvas cuya dimensión está entre 1 y 2, además no se intersectan pues el todo es dividido en partes disjuntas, sin embargo cuando D es próximo a los extremos (1 ó 2) y si el generador no ha sido seleccionado adecuadamente puede suceder que haya traslape de puntos.

En cuanto a la longitud de estos "teragones" o de este tipo de costas, se pueden hacer medidas extraordinarias satisfactorias, utilizando la siguiente fórmula en función del radio de sus lados: $L(r) = r^{(1-D)}$. Consideremos nuevamente el ejemplo anterior, pero con la salvedad de que analizaremos solo un segmento del triángulo ("un segmento de una costa de una isla") regular de longitud 1, la Figura 4a tiene una longitud de uno, $L(1) = 1$, en la Figura 4b, $L(1/3) = (1/3)^{(1-1,2618)} = 1,3333 = 4/3$, y para la Figura 4c, $L(1/9) = 1,7775 = 16/9$.

A pesar de que los fractales poseen una naturaleza infinita, éstos son generados con un número finito de iteraciones, dando cabida al cálculo aproximado de la longitud para muchos de ellos.

En estas curvas se presenta una interesante combinación de simplicidad y complejidad. En el caso de modelos como el anterior, cada una de las partes son similares unas con otras y el radio es parte de una escala estricta de la forma b^{-k} con b entero, como 1/3 , $(1/3)^2$,..., de manera que estos modelos son muy preliminares para describir costas. Otros modelos que tratan de evitar algunos defectos -tales como una escala estricta o distancias idénticas- son los que introducen ingredientes probabilísticos, y producen costas aleatorias con un alto grado de irregularidad.

CURVAS DE PEANO

Existen otros tipos de curvas a las que convergen las curvas fractales. Las curvas de Peano, también conocidas como "*plane-filling*" porque cubren ciertos dominios del plano, son por lo general obtenidas por construcciones recursivas de Koch, y parametrizadas por un escalar t (utilizado en algunas aplicaciones para denotar el tiempo).

Al tender D a 2 se producen cambios significativos de cualidad, resultando curvas que llenan el plano cartesiano, noción similar a un enchape de azulejo.

Estos fractales modelan diversas figuras de la naturaleza incluyendo ríos, vertientes, dragones y ciertos tipos de árboles. El procedimiento general de generación es similar al utilizado para las curvas de Koch (K), sin embargo el iniciador puede ser además un intervalo -por lo general [01]- que es mapeado a diferentes partes del plano (azulejos) dependiendo de los valores que tome el parámetro t. Más general, las nociones de estos fractales generan percentiles en el plano, estableciendo una correspondencia continua entre una línea recta y el plano.

La longitud y el área son intercambiables, especialmente si existe una isometría, es decir si un intervalo de tiempo [t1,t2] es mapeado a un área con el mismo tamaño, denotada con |t1-t2| (distancia), de esta manera, el mapeo sustituye la medida de distancia en el tiempo, por una medida de área.

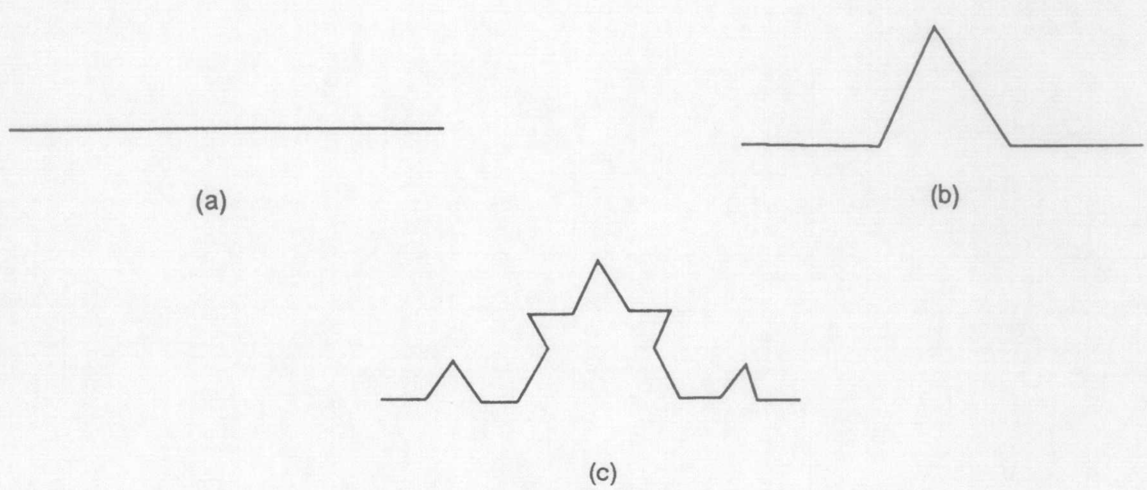


FIGURA 4. Dos elementos básicos se muestran en a y b el iniciador y el generador, en c una etapa del procedimiento.

Una característica que presentan estos fractales es el hecho de que múltiples puntos son inevitables, es decir, es posible que algunos puntos se visiten más de una vez. La noción de esto último es aplicado a intersecciones de ríos donde dos o más puntos coinciden.

CONJUNTOS DE CANTOR

Antes que todo, debe aclararse que cuando se menciona "conjuntos de Cantor" -conocidos como "*Cantor Dust*" y denotado con C- nos referimos a un conjunto topológico con D_t=0.

Estos conjuntos C (formados por intervalos) ayudan a introducir de la forma más simple algunos conceptos centrales de los fractales. La dimensión fractal de éstos, está comprendida entre 0 y 1.

Estos conjuntos C han sido utilizados por Mandelbrot para estudiar errores en líneas de transmisión de datos, los cuales son producidos por ruidos en estos mecanismos. Consecuentemente, estos conjuntos son útiles para la creación de figuras fractales cuyas dimensiones se presentan entre 0 y 1.

Las líneas de transmisión de datos están sujetas a ruidos y, dependiendo de la intensidad de la señal, la comunicación puede ser interrumpida. Además se puede definir una función del ruido que tome dos valores: 0 cuando no hay error en un tiempo t y 1 su complemento. La presencia de periodos durante los cuales no se encuentran errores se denomina *gaps* (huecos), como una forma de describir los objetos fractales.

Lo interesante de estos conjuntos C, es que son apropiados en la modelación -aunque bruscamente- de errores excesivos en un periodo de tiempo (por ejemplo una hora) que también es conocido como explosión de errores. Con el fin de tener una noción intuitiva consideremos un ejemplo simple de una figura fractal -llamado la Barra de Cantor-, con base en los fundamentos anteriores. Luego de efectuar varias etapas de construcción se obtiene el gráfico de la Figura 5 (aunque el número de etapas es infinito, para efectos prácticas se limitará a un número finito).

El iniciador es el intervalo cerrado [0,1], la primera etapa de la construcción consiste en dividir [0,1], en tres partes, y se elimina]1/2, 2/3[(no hay presencia de errores en ese intervalo), luego se elimina cada intervalo abierto de las particiones que se van a realizar en los intervalos [0,1/2] y [2/3,1] ,así sucesivamente. Se introduce en este fractal un valor w, valor que establece el ancho de la barra (w =0,03).

Varias interpretaciones-aparte de la explosión de errores- pueden ser plasmadas sobre este tipo de fractales -eventos fractales- incluyendo, la consideración de que cada barra contiene cierto material que es distribuido uniformemente sobre [0,1]. A partir de sucesivas divisiones en los intervalos restantes, la densidad va gradualmente siendo más alta, hasta ser infinitamente alta.

CONJUNTOS DE MANDELBROT

Muchas curvas fractales son generadas utilizando funciones en el plano complejo. Con esas funciones complejas denotadas con f(z) se trazan puntos en forma repetida de una posición a otra. Los puntos pueden divergir al infinito, o converger a un límite finito o quizá permanecer sobre alguna curva.

Los conjuntos de Mandelbrot son conjuntos de puntos (**a**,**b**) que resultan estar en la frontera de los puntos que tienden al infinito y los que tienden a un límite finito. Estos conjuntos de Mandelbrot

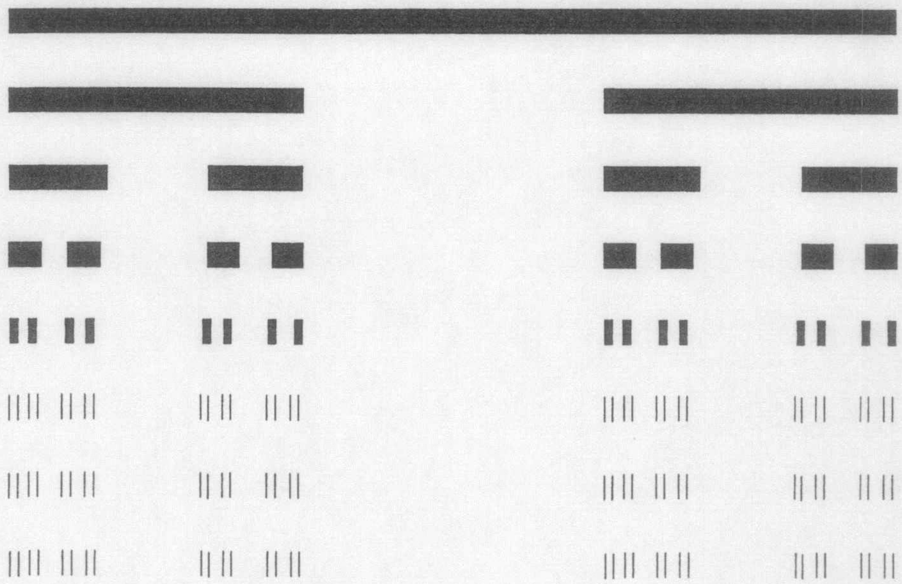


FIGURA 5. Barra de Cantor. Usa como iniciador [0,1] y su generador es ([0,1/3]]1/3,2/3[[2/3,1]) donde N=2, r=1/3, w=0,03 y D=0/6309.

se sitúan en el dominio del plano dimensional complejo. Cada número en el plano complejo es representado en un sistema de coordenadas cartesianas, donde la abscisa de las X es la abscisa real y la etiquetada con Y corresponde a la abscisa imaginaria. Un número complejo tiene la forma *a+ib* donde $i = \sqrt{-1}$, al valor *"a"* se le denomina la parte real, *ib* es la parte imaginaria. El tamaño de un número complejo es la distancia desde el origen (0,0) y se calcula utilizando el Teorema de Pitágoras ($\sqrt{a^2+b^2}$).

El procedimiento para generar curvas fractales, siempre se inicia con un punto inicial (*x0, y0*), luego se procede a aplicar repetidamente una transformación en el plano complejo. Para ilustrar con un ejemplo simple la creación de una curva fractal, consideremos la función $f(z) = z^2+c$, donde c es una constante compleja. Primero, se asigna un valor inicial a z, por ejemplo, se iguala al valor complejo cero, entonces el cuadrado de z será cero y el resultado es justamente c ($f(0) = c$). Luego se sustituye el valor de f(0) en $z^2+ c$ y se obtiene $c^2 + c$. Otra vez se sustituye en z y se obtiene el siguiente resultado $(c^2+ c)^2 + c$, se continúa con este proceso, siempre tomando la salida de la última etapa como la entrada para la próxima. D esta manera el conjunto de Mandelbrot es el conjunto de todos los números complejos c para los cuales el tamaño de $z^2 + c$ es finito aún después de un númerc infinitamente grande de iteraciones.

Otra función que es apropiada para construir curvas fractales es la transforma ción $y=f(z) = ß*z*(1-z)$, con ß un valor com plejo constante, sin embargo el proceso puede consumir mucho tiempo. Una manera más práctica y que reduce el tiempo en la comprobación del comportamiento de los puntos transformados en el plano complejo es la utilización de la función inversa $z= f^{-1}(y)$. Las curvas que modelan estas funciones son contornos similares a las de los nubes, costas u otras.

Las transformaciones de funciones complejas utilizadas para curvas, pueden ser también desarrolladas para producir superficies fractales sólidas tales como montañas y esferas. En estos casos se utilizan representaciones de cuaterniones -los cuales tienen la siguiente estructura $q= q_0 + iq_1 +iq_2 +iq_3$, donde q_i son valores reales- y son transformados en puntos de espacio tridimensional.

Parece que el arte y la ciencia están combinados en los conjuntos de Mandelbrot. La asombrosa complejidad en las imágenes simbolizan un campo en crecimiento de figuras no lineales

Parece que el arte y la ciencia están combinados en los conjuntos de Mandelbrot. La asombrosa complejidad en las imágenes simbolizan un campo en crecimiento de figuras no lineales, y aunque mucha gente no conoce el significado físico real, encuentran una belleza extraña y extraordinaria en la gran diversidad de las imágenes producidas.

Programas de computadora que generan imágenes basadas en los conjuntos de Mandelbrot tomarán un tiempo considerable (cálculo) para lograr imágenes detalladas. Cada uno de los *pixel* (elemento más pequeño de representación en un monitor) corresponde a un punto en la colección de Mandelbrot y cada imagen representa a una parte o a otro conjunto en condiciones diferentes tales como cambios de colores, tonos, iluminación. Al generar fractales de cuatro dimensiones se proyectan porciones tridimensionales sobre la superficie del despliegue de la computadora.

UN PROGRAMA EJEMPLO

Antes de finalizar examinaremos un programa simple y relativamente pequeño, que grafica las curvas de Koch -específicamente costas regulares - mencionadas anteriormente.

El código fuente del programa es Turbo Prolog y se muestra en la Figura 6. Es importante resaltar el hecho de que la meta (*goal*) del programa consiste en producir varias versiones de un mismo fractal, de acuerdo con la variación del nivel de detalle (nivel de iteración). Así, al ejecutar el programa se podrá visualizar la curva fractal generada con un modelo regular (Figura 1), y conforme avanza su ejecución se producirán los contornos fractales presentados en la Figura 2 y algunos otros con mayor detalle.

Se empieza con una curva que contiene los tres segmentos de línea, al cual denominamos el iniciador (triángulo equilátero) (Figura 1a). La meta en este caso es lograr "Costas (15000,0)", como se ilustra en la Figura 6, el valor de 15000 corresponde a unidades internas de la memoria de la computadora, utilizadas para el despliegue de una línea de más o menos seis pulgadas de longitud y es dependiente del tipo de monitor. Para efectos de comprensión, esa cantidad (15000) puede considerarse como un valor de 1 (por ejemplo 1 km, 1 m, 1 cm, etc.)

La figura que va a ser graficada, comienza en la parte inferior izquierda del monitor, cuyo ángulo de orientación es de 180 grados a la derecha, lo cual indica que inicialmente el desplazamiento será realizado en forma horizontal de izquierda a derecha ("PenPos(203844,9384,180)").

Dentro de la cláusula del predicado "Grafique_Costa" se hace la manipulación del ángulo de vista de la Tortuga, para poder conformar el triángulo deseado ("Left(120)"). El predicado "Traze_Línea" es recursivo y se encarga de trazar las líneas de los fractales, cuando el límite de recursión es cero ("Traze_Línea(Longitud_Segmento,0)").

En este modelo, como ya se ha mencionado, la curva original se reduce a un factor de 1/3 y el modelo resultante (reducido) se usa para sustituir los segmentos de línea de la curva original. El objeto fractal resultante es el presentado en la Figura 2a ("Costas(15000,1)"). Después el modelo reducido se pone a escala en un factor de 1/3 y se usa para modificar los segmentos de línea de la curva transformada (Figura 2a) produciendo así otro modelo a escala, el cual corresponde a la Figura 2b ("Costas(15000,2)"). De la misma manera el proceso es continuado y a medida que se requiera más detalle (Nivel de iteración) se incrementarán tanto la longitud de la curva (en un factor de 4/3 en cada etapa) como el número de líneas trazadas (en un factor de 4). Probablemente a partir de un cierto valor asignado a "Nivel_Iteración" y de acuerdo a la resolución del monitor, la curva fractal se convertirá para nuestra vista, en un círculo y el tiempo consumido para lograrlo será bastante grande.

Quizá el punto dentro del programa que merece más atención para lograr lo anteriormente explicado, es "Traze_Línea". Cuando el nivel de detalle crece, éste genera la profundidad de recursión especificada, con las nuevas longitudes de líneas e inclusive moldea la orientación de cada línea. ("Right(60),Left(120),Right(60)"). Al ir saliendo de la recursión, es decir cuando "Nivel_iteración" alcanza el valor de cero, se van graficando los segmentos de línea del modelo anterior ya producido y así se genera la curva resultante.

En el listado del programa que se presenta a continuación, se incluyen comentarios (/* */) para dar la idea general de algunas instrucciones que no fueron explicadas anteriormente y además para efectos de presentación.

Listado del Programa para graficar curvas de Koch "Costas Regulares"

```
/*      Listado del Programa para graficar curvas de Koch "Costas Regulares"

Iniciador    :  Tres segmentos de línea, formando un triángulo equilátero.
Generador  :  Cada uno de los segmentos de línea del triángulo, es divido en tres partes de igual
tamaño. Los segmentos extremos resultantes son trazados con la misma dirección. En la parte central
se trazan dos segmentos de línea con la nueva longitud, de manera que formen un arco conectado con
los dos puntos extremos centrales de los segmentos extremos.

Descripción:  Creación de cierto tipo de Curvas de Koch. Al tender el nivel de iteración a infinito, la
figura tiende a un círculo.

Fecha        :  Junio 1990                    */

Domains
        Número = Integer

Predicates
        Grafique_Costas (Número,Número)
        Costas (Número,Número)
        Traze_Línea (Número, Número)

Goal
        Costas(15000,0),     /* Grafica el iniciador                                  */
        Costas(15000,1),     /* Grafica el fractal con un nivel de iteración          */
        Costas(15000,2),     /* Grafica el fractal con dos niveles de iteración       */
        Costas(15000,3),     /* Grafica el fractal con tres niveles de iteración      */
        Costas(15000,4),     /* Grafica el fractal con cuatro niveles de iteración    */
        Costas(15000,5)      /* Grafica el fractal con cinco niveles de iteración     */

Clauses
        Grafique_Costas(Longitud_Segmento, Nivel) :-
                                Right(90),
                                Traze_Línea(Longitud_Segmento,Nivel),
                                Left(120),
```

Listado del Programa para graficar curvas de Koch (continuación)

```
                    Traze_Línea(Longitud_Segmento,Nivel),
                    Left(120),
                    Traze_Línea(Longitud_Segmento,Nivel).

    Traze_Línea(Longitud_Segmento,0) :-
                    !,
                    Forward(Longitud_Segmento),  /*  Dibuja la línea      */
                    Field_Str(22,30,30,"Oprima cualquier tecla para continuar"),
                    ReadChar(_).  /*  Se detiene hasta que oprima una tecla  */

    Traze_Línea(Longitud_Segmento,Nivel) :-
                    Nueva_Longitud_Segment = Longitud_Segmento Div 3,
                    Nuevo_Nivel_Iteración = Nivel - 1,
                    Traze_Línea(Nueva_Longitud_Segment,Nuevo_Nivel_Iteración),
                    Right(60),          /* Rotación con un ángulo de 60° a la derecha */
                    Traze_Línea(Nueva_Longitud_Segment,Nuevo_Nivel_Iteración),
                    Left(120),          /* Rotación con un ángulo de 120° a la izquierda */
                    Traze_Línea(Nueva_Longitud_Segment,Nuevo_Nivel_Iteración),
                    Right(60),          /* Rotación con un ángulo de 60° a la derecha */
                    Traze_Línea(Nueva_Longitud_Segment,Nuevo_Nivel_Iteración).

Costas (Longitud_Segmento, Nivel) :-
                    PenPos(20384,9384,180),        /* Posición del lápiz de la tortuga */
                    Str_Int(Segmento_Caract,Segmento),
                    Str_Int(Nivel_Caract,Nivel),
                    Concat("Ejemplo con segmento longitud = ",Segmento_Caract,Tira),
                    Concat(Tira," y nivel = ",Tira1),
                    Concat(Tira1,Nivel_Caract,Tira2),
                    Field_Str(0,20,60,Tira2), /* Presenta mensajes en la pantalla */
                    Grafique_Costas(Segmento,Nivel).

    /*                   Fin del código del programa                          */
```

APLICACIONES

Aparte de los maravillosos paisajes e interesantes objetos producidos con la geometría fractal, se han desarrollado algunas aplicaciones principalmente en la rama de botánica. Científicos en Computación se han propuesto como meta, producir vida artificial con computadoras, y ya los frutos de muchos esfuerzos han sido comercializados. Programas que han sido desarrollados permiten el crecimiento y transformación de raíces, árboles y plantas herbáceas. Un paquete de software llamado AMAP, -con un costo aproximado a $ 10 000- para generación de plantas ha sido desarrollado por investigadores de computación. Biólogos, agrónomos y otros científicos utilizan estos programas para probar algunas teorías, además los paleontólogos lo aplican para realizar simulación de paisajes prehistóricos.

A partir de la década de 1980-1990, -principalmente a mediados- se ha observado un gran auge de los fractales aplicados en ciertas ramas. En 1985 el Dr. Przemyslaw Prusinkiewicz desarrolló un programa, para crear plantas muy bellas basado en la naturaleza, luego trabajó en simulaciones de las acciones de las hormonas en el crecimiento de las plantas (principalmente en herbáceas). Cada planta utiliza sus reglas para su crecimiento y a cada regla puede incluírsele una

Ahora los fractales abren nuevos horizontes en la informática sobre todo aplicado a diversas áreas como botánica, matemática, educación y medicina

señal hormonal. Dentro de las señales o indicaciones puede citarse el florecer, el ramificar y otras.

La compañía Iterated System Inc. ha desarrollado aplicaciones comerciales para la modelación de sus sistemas, denominado VRIFS (Vector recurrent iterative function system) para crear fractales. Al parecer los resultados logrados son extraordinarios y el procedimiento se inicia digitalizando varias imágenes de una planta a varias escalas. Luego los cuadros digitalizados son desplegados en diferentes ventanas, y se pueden seleccionar de esas ventanas las regiones de interés, logrando al final un solo modelo consistente, que incluya cualquier cosa que se desea. Además con ese modelo resultante pueden hacerse ciertas relaciones entre las regiones seleccionadas.

Paquetes comerciales de *software* con usos botánicos como los descritos, cuentan con bibliotecas que incluyen muchas variedades de plantas, órganos (flores, frutos, desarrollo, etc.) y colores. Haciendo uso de los parámetros deseados -o en forma aleatoria- puede lograrse infinidad de especies de plantas, y representaciones en dos y en tres dimensiones.

Ahora los fractales abren nuevos horizontes en la informática sobre todo aplicado a diversas áreas como botánica, matemática, educación y medicina, esta última para la simulación de tejidos por medio de fractales (pulmones, por ejemplo).

LITERATURA CONSULTADA

1. Mandelbrot, Benoit B. **The Fractal Geometry of Nature**. W. H. Freeman, 1982.

2. Deweney, A.K. *Computer Recreations: a tour of the Mandelbrot set aboard the Mandelbus.* **Scientific American**. Febr. 1989.

3. Robinson, Fred. *Plotting the mandelbrot set with the BGi.* **Turbo Technix** Mayo/Junio 1988.

4. Robertson, Barbara. *Technology in bloom.* **Computer Graphics World**. Enero 1989.

5. Hearn-Baker. **Gráficas por Computadora. Métodos de geometría Fractal**. Prentice-Hall, 1988.

6. *Dewdney, A.K. Computer Recreations: A computer microscope zooms in for a look at the most complex object in mathematics.* **Scientific American**.