GRAFICOS DE CONTROL PARA VARIABLES MULTIVARIADAS

Federico Picado*

RESUMEN

Se presenta la prueba estadística T^2 de Hotelling como una técnica para el análisis de los procesos productivos cuando es necesario controlar dos o más características de calidad relacionadas simultáneamente. También se desarrolla un ejemplo de aplicación donde se demostró la sensitividad superior de un gráfico de control para variables multivariadas basado en la prueba T^2.

INTRODUCCION

El control estadístico de la calidad (C.E.C.) provee una serie de herramientas para la detección de causas asignables que influencian la calidad de un producto en los procesos productivos. Dentro de estas herramientas, podemos citar los gráficos de control para variables, los cuales son definidos como una técnica estadística, que tiene por objeto dar un aviso de que existen anormalidades en la producción, las que pueden dar origen a producto defectuoso[1]. Los gráficos de control para variables más comunes son:

a) Gráficos $\bar{X}$, R (promedio, intervalo)
b) $\bar{X}$, σ (promedio-desviación estándar)
c) Me, R (mediana, intervalo)
ch) CUSUM (sumas acumuladas)

El primer paso en la construcción de gráficos de control es la selección de la variable o característica de calidad cuyo comportamiento se desea observar en el tiempo y sobre la que se van a elaborar conclusiones. Precisamente, ésta es una de las limitaciones de los gráficos de control para variables: consideran únicamente una variable a la vez. En algunas oportunidades, es necesario controlar dos o más características de calidad de un proceso productivo, relacionadas simultáneamente. Algunos ejemplos son:

a. El diámetro interno X_1 y el diámetro externo X_2 que en conjunto determinan el ajuste de un componente

b. El espesor de un producto (metal, plástico, papel) producido por una operación de enrollado, medido en tres localidades a través del producto tal y como sale del rodillo X_1, X_2 y X_3.

Si se preparan gráficos de control por separado de cada característica, se desestima la relación que existe entre ellos. En los ejemplos anteriormente mencionados podría suceder que:

a. Un diámetro interno mayor X_1, combinado con un diámetro externo menor X_2 pueda dar pobre calidad aún si cada valor X_1, X_2 por sí mismos se encuentran bajo control

b. Si el eje de rodillo se inclina, esto podría reducir X_1 y aumentar X_3, un defecto más serio que si X_1 y X_3 se movieran conjuntamente.

METODO APLICADO

Con el objeto de evaluar problemas con variables multivariadas como los ejemplos anteriores, la estadística ha provisto una metodología para el análisis de dichos casos.

* M.Sc. Profesor en el Departamento de Ingeniería en Maderas y en el Departamento de Producción Industrial. Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Se hace necesario buscar un estadístico que tome en consideración todas las variancias y covariancias de las variables que influyen sobre cierta característica de calidad. Dicho estadístico se define en notación matricial como:

$$D^2 = n(\bar{x} - \mu)\ \Sigma^{-1}\ (\bar{x}-\mu)$$

donde:

Σ = matriz de variancias y covariancias de las k mediciones
n = tamaño de la muestra
$\bar{x}$ = promedio de la muestra
μ = promedio de la población

Si los parámetros μ y Σ son desconocidos, éstos son estimados de datos pasados. Asimismo, Walpole[3] define los siguientes términos: sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad f(x). La media o valor esperado de X es:

$$\mu = E(x) = \Sigma\, x\, f(x),\ x \text{ es discreta y}$$

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx,\ x \text{ es continua}$$

La variancia de una variable aleatoria x está dada por:

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$$

La covariancia de dos variables aleatorias X y Y con medias μ_x y μ_y, respectivamente está dada por:

$$\sigma_{xy} = E(xy) - \mu_x \mu_y$$

Regresando al estadístico D^2, si tuviéramos tres variables X_1, X_2, X_3 entonces

$$D^2 = \left(\frac{\bar{X}_1 - \mu_1{}^2}{\sigma_1/\sqrt{\mu}}\right) + \left(\frac{\bar{X}_2 - \mu_2{}^2}{\sigma_2/\sqrt{\mu}}\right) + \left(\frac{\bar{X}_3 - \mu_3{}^2}{\sigma_3/\sqrt{\mu}}\right)$$

$$D^2 = n(\bar{x}_1 - \mu_1, \bar{x}_2 - \mu_2, \bar{x}_3 - \mu_3) * \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sigma_2^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sigma_3^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \bar{x}_1 - \mu_1 \\ \bar{x}_2 - \mu_2 \\ \bar{x}_3 - \mu_3 \end{bmatrix}$$

donde:

σ_1^2 = variancia (x_1) $\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1}$ = covariancia (x_1, x_2)
σ_2^2 = variancia (x_2) $\sigma_{1,3} = \sigma_{3,1}$ = covariancia (x_1, x_3)
σ_3^2 = variancia (x_3) $\sigma_{2,3} = \sigma_{3,2}$ = covariancia (x_2, x_3)

El estadístico D^2 llega a convertirse en la prueba T^2 de Hotelling, que es un modelo de análisis de variancia de efectos mezclados. Al lector se le sugiere leer Duncan[2] para la demostración matemática de este modelo.

Para la construcción de un gráfico de control para variables multivariadas, es necesario calcular únicamente un "límite superior de control (LSC)". Ya que D^2 o T^2 es grande cuando $\bar{x}$ está distante de μ en cualquier dirección, el LSC de un gráfico T^2 se calcula como:

$$LSC = \chi^2_{\alpha,k}$$

donde:

χ^2 = valor de la distribución ji-cuadrado
α = nivel de confianza (Error tipo I)
k = grados de libertad (número de variables en consideración)

El límite inferior de control (LIC) en este tipo de gráfico siempre será cero. El gráfico T^2 es el método más común para el análisis de variables multivariadas.

Los gráficos para variables multivariadas están siendo utilizados mayormente en equipos de ensayos automatizados y conectados a computadoras.

EJEMPLO DE APLICACION

En un proceso de fabricación de una lámina especial hecha de una resina sintética para la industria electrónica, es necesario controlar el espesor en micras de dicha lámina cuando sale de una operación de enrollado. El espesor de la lámina se mide en tres localizaciones a lo largo de la lámina. Los valores de sus medias, variancias y covariancias de los espesores son conocidos y están dados en forma matricial como:

$$\mu\bar{x} = \begin{bmatrix} 3{,}0 \\ 3{,}5 \\ 2{,}8 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 1{,}40 & 1{,}02 & 1{,}05 \\ 1{,}02 & 1{,}35 & 0{,}98 \\ 1{,}05 & 0{,}98 & 1{,}20 \end{bmatrix}$$

Las medias muestrales para cada característica de calidad o espesor para las 15 muestras de tamaño 10 son mostradas en el Cuadro 1. Se desea que cuando se utilice un gráfico de control para variables multivariadas la probabilidad de que un "punto muestra" (T^2) esté fuera de control cuando el proceso esté en control sea de 0,01. ¿Está el proceso en control estadístico? ¿Están los gráficos de control $\bar{x}$ individuales en control?

CUADRO 1. Promedios muestrales. Espesores de láminas en micras.

Muestra	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$
1	3,1	3,7	3,0
2	3,3	3,9	3,1
3	2,6	3,0	2,4
4	2,8	3,0	2,5
5	3,0	3,5	2,8
6	4,0	4,6	3,5
7	3,8	4,2	3,0
8	3,0	3,3	2,7
9	2,4	3,0	2,2
10	2,0	2,6	1,8
11	3,2	3,9	3,0
12	3,7	4,0	3,0
13	4,1	4,7	3,2
14	3,8	4,0	2,9
15	3,2	3,6	2,8

SOLUCION

La fórmula general $T^2 = n\,(\bar{x} - \mu)^1 \quad \Sigma^{-1}\,(\bar{x} - \mu)$

$$\mu\bar{x} = \begin{bmatrix} 3,0 \\ 3,5 \\ 2,8 \end{bmatrix} \qquad \sum = \begin{bmatrix} 1,40 & 1,02 & 1,05 \\ 1,02 & 1,35 & 0,98 \\ 1,05 & 0,98 & 1,20 \end{bmatrix}$$

$k = 15 \qquad n = 10 \qquad \alpha = 0,01$

Se debe invertir la matriz de variancias y covariancias Σ, donde:

σ_1^2 = variancia (x_1) = 1,40
σ_2^2 = variancia (x_2) = 1,35
σ_3^3 = variancia (x_3) = 1,20

$\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1}$ = covariancia (X_1, X_2) = 1,02
$\sigma_{1,3} = \sigma_{3,1}$ = covariancia (X_1, X_3) = 1,05
$\sigma_{2,3} = \sigma_{3,2}$ = covariancia (X_2, X_3) = 0,98

$$\sum^{-1} = \begin{bmatrix} 2,31 & -0,68 & -1,46 \\ -0,68 & 2,02 & -1,05 \\ -1,46 & -1,05 & 2,97 \end{bmatrix}$$

Como ejemplo se presentará únicamente el valor cálculo de T_1^2 para la muestra No. 1.

$$T_1^2 = 10 * \left[\begin{bmatrix} 3,1 \\ 3,7 \\ 3,0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3,0 \\ 3,5 \\ 2,8 \end{bmatrix}\right] * \begin{bmatrix} 3,1 - 3,0 \\ 3,7 - 3,5 \\ 3,0 - 2,8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2,31 & -0,68 & -1,46 \\ -0,68 & 2,02 & -1,05 \\ -1,46 & -1,05 & 2,97 \end{bmatrix}$$

$$T_1^2 = 10 * \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2,31 & -0,68 & -1,46 \\ -0,68 & 2,02 & -1,05 \\ -1,46 & -1,05 & 2,97 \end{bmatrix}$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,198 \\ 0,125 \\ 0,237 \end{bmatrix}$$

$$T_1^2 = 0,527$$

El Cuadro 2 muestra los valores T^2 para todas las muestras.

Cálculo del límite superior de control (LSC)

LSC = $\chi^2_{(0,99,\ 3)} = 11,34$
LIC = 0

Observando la Figura 1 se puede afirmar que la muestra 13 está fuera de control. Por tanto, el proceso no está en control estadístico.

ANALISIS DE PROMEDIOS INDIVIDUALES

Variable $\bar{X}_1$:

Límite superior de control = $\mu + A\sigma = 3,0 + (0,949)\,(1,183)$
Límite inferior de control = $\mu - A\sigma = 3,0 - (0,949)\,(1,183)$

μ_1 = 3,0
σ_1^2 = 1,40
σ_1 = 1,183 Límite superior de control = LSC = 4,122
A = 0,949 Límite inferior de control = LIC = 1,877
Variable $\bar{X}_1$ está en control

CUADRO 2. Valores T^2 para cada muestra.

Muestra	T^2
1	0, 528
2	1,189
3	1, 880
4	2, 373
5	0, 808
6	10, 396
7	10, 60
8	0, 684
9	3, 08
10	8, 70
11	1, 39
12	6,57
13	20, 80
14	11, 271
15	0, 87

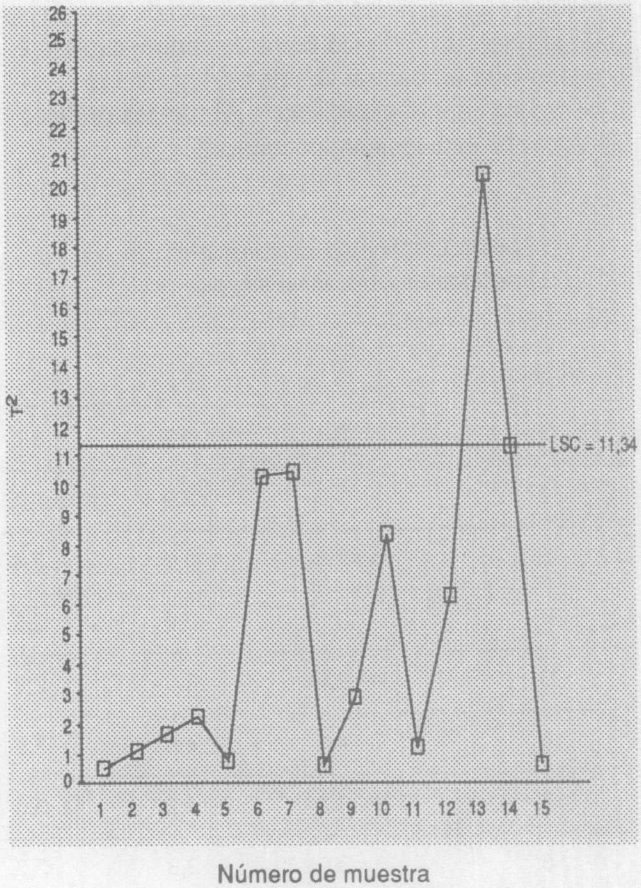
Variable $\overline{X}_2$

μ_2 = 3,5
σ_2^2 = 1,35 LSC = 3,5 + (0,949) (1,1616) = 4,602
σ_2 = 1,161 LIC = 3,5 - (0,949 (1,1616) = 2,397
A = 0,949 Variable $\overline{X}_2$ está fuera de control en la muestra 13.

Variable $\overline{X}_3$

μ_3 = 2,8
σ_3^2 = 1,20 LSC = 2,8 + (0,949) (1,095) = 3,84
σ_3 = 1,095 LIC = 2,8 - (0,949) (1,095) = 1,760
A = 0,949 Variable $\overline{X}_3$ está en control

CONCLUSION: este ejemplo ilustra la sensitividad superior de un gráfico de control para variables multivariadas.



LSC = $\chi^2_{(0,99,\ 3)}$ = 11,34
LIC = 0
Muestra 13 está fuera de control.
Proceso no está en control estadístico.

FIGURA 1. Gráfico de control para variables multivariadas.

LITERATURA CONSULTADA

1. Acuña, J. **Control de calidad.** 1a. edición. Cartago: Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1986.
2. Duncan, A. **Control de calidad y estadística industrial.** 1a. edición. México: Ediciones Alfa Omega, 1989.
3. Walpole, R.E. **Probabilidad y estadística para ingenieros.** 3a. edición. México: Editorial Interamericana, 1986.
4. NOTAS DEL CURSO: IE-530 **Statistical quality control.** Industrial Engineering. Purdue University West Lafayette, Indiana, USA, Fall 1986.