

# Trazado óptimo de redes de distribución en media tensión

*Manuel J. Villarroel M.<sup>1</sup>  
Sergio E. Carter F.<sup>1</sup>  
C. Ivonne Gutiérrez M.<sup>1</sup>*

## Resumen

Se presenta un modelo computacional que resuelve el problema del Trazado Óptimo de Redes de Distribución en Media Tensión.

La formulación matemática considera la minimización del costo de transporte de la red, sujeto a las restricciones de balance de potencia en cada nudo y límite de capacidad de los distintos tramos. El costo de la red es función de la potencia eléctrica transportada y por lo tanto el problema resulta ser no lineal. Sin embargo, por la característica de la función de costos, es posible hacer algunas aproximaciones que permiten “linealizarlo”.

La aproximación lineal tiene una componente fija (costo fijo) y una variable con el flujo de potencia transportado, lo que determina dos formas de solución:

Programación Entera Mixta, si se considera el costo fijo, y Programación Lineal en caso contrario.

Se han desarrollado programas computacionales para ambas formulaciones. De las pruebas realizadas en sistemas ejemplos típicos, así como en redes de distribución existentes, se puede concluir que el modelo lineal es más simple y computacionalmente más robusto y eficiente que el modelo entero-mixto, lo cual permite su aplicación a redes de tamaño real que presentan un alto número de variables.

## Introducción

La planificación de sistemas de distribución es esencial para asegurar que el crecimiento futuro de la demanda de energía eléctrica pueda ser satisfecho, agregando elementos y equipos técnicamente

<sup>1</sup> Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de la Frontera. Fax (56) (45) 252547, e-mail: manuelvi@werken.ufro.cl. Casilla 54-D, Temuco, Chile.

adecuados, económicamente razonables y en el momento oportuno. Aunque se ha realizado un trabajo importante en la aplicación de algún tipo de aproximación sistemática para la planificación de los sistemas de generación y transmisión, no ha ocurrido lo mismo con los de distribución.

Los aspectos involucrados en la planificación de los sistemas de distribución incluyen la proyección de las demandas de los consumidores, la expansión de las subestaciones, la selección de la mejor ubicación y potencia de estas, (cuando se trata de agregar alguna nueva en un sistema existente o cuando se debe diseñar un sistema completo), el trazado de los alimentadores, etc.

En general, se trata de un problema bastante complejo, debido, entre otras razones, a que existe una gran cantidad de variables y restricciones, además de presentarse no linealidades en las funciones de costo. Muchos autores lo han enfrentado separándolo en subproblemas. Por ejemplo, dada la potencia y ubicación de las cargas y de las subestaciones, optimizar la localización y tamaño de los alimentadores<sup>1-5</sup>, que corresponde al diseño de la red. Otros, sin embargo, han desarrollado modelos más completos<sup>3-6-9</sup> donde incluyen la optimización de las subestaciones y planificación de multietapas, introduciendo algún tipo de aproximación que permita simplificarlos.

En cuanto a los tipos de modelos empleados, se utilizan preferentemente las técnicas de programación entera mixta<sup>1-3-6-7-9</sup> para lo cual se programan algoritmos específicos<sup>3-6-7</sup> o bien se utilizan programas comercialmente disponibles<sup>1-9</sup> tales como MPSX, SIMPLEX, etc. Otro autor<sup>8</sup> propone un modelo no lineal, el que resuelve utilizando el código comercial MINOS.

Una característica casi general de los trabajos indicados, es que resuelven problemas de tamaño pequeño o medio, debido a la complejidad de los modelos utilizados. Se puede apreciar también, que los modelos más sencillos<sup>2-5-10</sup> que solo consideran una parte del problema completo, tal como por ejemplo la optimización del trazado de los alimentadores, permiten su aplicación a sistemas reales de mayor tamaño.

De acuerdo con lo anterior, el objetivo de este trabajo es desarrollar metodologías que permiten obtener redes radiales de distribución de costo mínimo. Para ello, se considerarán las formulaciones lineal y entera mixta, suponiendo conocidas la ubicación y tamaño de las subestaciones y cargas.

## Modelos y algoritmos de solución

La situación por considerar corresponde a un problema de transbordo con limitaciones de capacidad. Se trata de alimentar ciertas cargas, cuyas potencias están o pueden ser especificadas, a partir de fuentes de suministro llamadas subestaciones donde la potencia máxima y ubicación se suponen conocidas. La interconexión entre las subestaciones y los consumos se hace por medio de conductores cuyas características físicas determinan su capacidad límite de transporte. Así, entonces, el sistema propuesto forma una red bastante compleja, en la cual muchos de los arcos de interconexión serán eliminados en el proceso de optimización, debido a que la solución debe ser radial.

### Formulación lineal

#### Modelación

Se propone un modelo<sup>11</sup> en el cual se minimice el costo de la red, teniendo

presente que se satisfaga el balance de potencia en cada nudo y que no se sobrepase la capacidad máxima del arco respectivo. Es decir:

$$\min \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij} \quad \text{con } (i,j) \in A \quad \text{Ecuación 1}$$

sujeto a:

$$\sum_i X_{ij} - \sum_k X_{ki} = b_i \quad \forall i \in N, \text{ con } (i,j) \in A \text{ y } (k,i) \in A \quad \text{Ecuación 2}$$

$$0 \leq X_{ij} \leq U_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \quad \text{Ecuación 3}$$

donde

A: Conjunto de arcos dirigidos correspondientes a las variables en la programación lineal

N: Conjunto de nudos, que equivalen a las ecuaciones en la programación lineal

$C_{ij}$ : Costo unitario de transporte entre los nudos i y j

$X_{ij}$ : Cantidad transportada (flujo de potencia) entre los nudos i y j

$U_{ij}$ : Capacidad máxima de transporte del arco (i, j)

$b_i$ : Potencia del nudo i

Como se puede apreciar, el modelo es muy sencillo y desde el punto de vista eléctrico, se supone que todas las corrientes están en fase (factor de potencia uniforme para todas las cargas). Por lo mismo, no se incluyen en forma explícita las restricciones de radialidad y de variación máxima del voltaje en cada nudo.

La radialidad de la solución se fuerza en el proceso de optimización mediante reglas heurísticas, tales como, la eliminación del arco menos cargado o que tenga mayor costo, entre los arcos que concurren a nudos no radiales.

## Cálculos adicionales

Los voltajes en los nudos, así como las pérdidas en los conductores se calculan una vez concluido el proceso de optimización. Para ello se considera que el ángulo de desfase entre los voltajes de dos nudos consecutivos es pequeño y que las cargas son equilibradas. De esta forma, la caída de voltaje  $V_{ij}$  será:

$$\Delta V_{ij} = R_{ij} P_j + X_{ij} Q_j \quad \text{Ecuación 4}$$

donde:

$R_{ij}, X_{ij}$ : Resistencia y Reactancia serie del arco (i, j)

$P_j, Q_j$ : Potencias activa y reactiva del nudo j expresadas en valores en "tanto por unidad"

Como la red obtenida es radial, se tiene que:

$$P_j = P_{ij} \text{ y } Q_j = Q_{ij} - Q_{cj} \quad \text{Ecuación 5}$$

en que  $P_{ij}$  y  $Q_{ij}$  corresponden a los flujos de potencia activa y reactiva en el arco que alimenta el nudo j y  $Q_{cj}$  es la potencia reactiva asociada al condensador que pudiera existir en ese nudo, con fines de regulación de tensión. Así, entonces, el voltaje en el nudo j a partir del que se tiene en el nudo ubicado aguas arriba i, es simplemente:

$$V_j = V_i - \Delta V_{ij} \quad \text{Ecuación 6}$$

Las pérdidas de potencia activa  $P_p$  en los conductores se calculan como:

$$P_p = \frac{R_{ij} S_{ij}^2}{V_n^2} \quad \text{Ecuación 7}$$

en que  $S_{ij}$  es el flujo de potencia aparente trifásico y  $V_n$  el voltaje nominal entre líneas del sistema.

## Algoritmo y programa

## computacional

Para resolver el modelo planteado, se empleó un algoritmo de programación lineal que utiliza una versión modificada del método simplex revisado<sup>4</sup> que incluye almacenamiento disperso y aprovecha las características que presenta la formulación del sistema como una red de transporte. Esto permite gran rapidez y un pequeño requerimiento de memoria, lo cual hace posible resolver problemas de grandes dimensiones.

El programa está en lenguaje FORTRAN y se ha ejecutado en un computador Mainframe donde se han resuelto problemas con alrededor de 6.000 variables con pequeños tiempos de CPU. Como ejemplo, se mostrará la solución obtenida para un sector de la Red de la Empresa de Distribución de Energía Eléctrica, CHILECTRA Metropolitana.

Se ha desarrollado también una versión para computador personal, de manejo muy interactivo, que permite estudiar sistemas de hasta 600 variables<sup>14</sup>.

En el programa se distinguen tres partes principales:

1. Ingreso de datos y cálculos previos: Los datos se pueden ingresar por terminal o pueden ser leídos desde un archivo. A partir de ellos, el programa realiza algunos cálculos previos que, entre otros, le permiten crear 3 nudos adicionales que corresponden al de balance y a los nudos “superfuente” y “supersumidero”, donde se conectan mediante arcos artificiales todas las subestaciones y cargas, respectivamente.
2. Ciclo iterativo: Se aplica el algoritmo de optimización hasta obtener una red radial.
3. Solución final: Una vez obtenida una red radial se realiza el proceso de cálculos adicionales descrito en la página anterior que incluye también la selección de conductores. Finalmente, se entrega un listado de resultados que considera entre otros: Número final de

arcos, tipos de conductores seleccionados, longitud y costo totales de la red, lista de arcos resultantes con todas sus especificaciones, etc.

## Formulación entera mixta

### Modelación

El modelo lineal presentado, solo considera los costos variables; sin embargo, el costo de los conductores que forman la red debería incluir una parte fija (costo fijo) y otra variable (costo variable) relacionada directamente con el flujo de potencia que pasa a través de ellos, tal como se muestra en la Figura 1, para un grupo de cuatro cables de distintas secciones  $S_1, S_2, S_3, S_4$  utilizados en redes de este tipo. En este gráfico,  $C_T$  corresponde al costo total,  $X$  es el flujo de potencia transportado a través del conductor respectivo.

La recta de ajuste tiene la forma:

$$F = K + C X \quad \text{Ecuación 8}$$

donde  $F$ ,  $K$  y  $C$  corresponden a los costos unitarios total, fijo e incremental respectivamente. Así entonces, la formulación queda<sup>11</sup>:

$$\min \sum_i \sum_j (K_{ij} Y_{ij} + C_{ij} X_{ij})$$

con  $(i, j) \in A$   
Ecuación 9

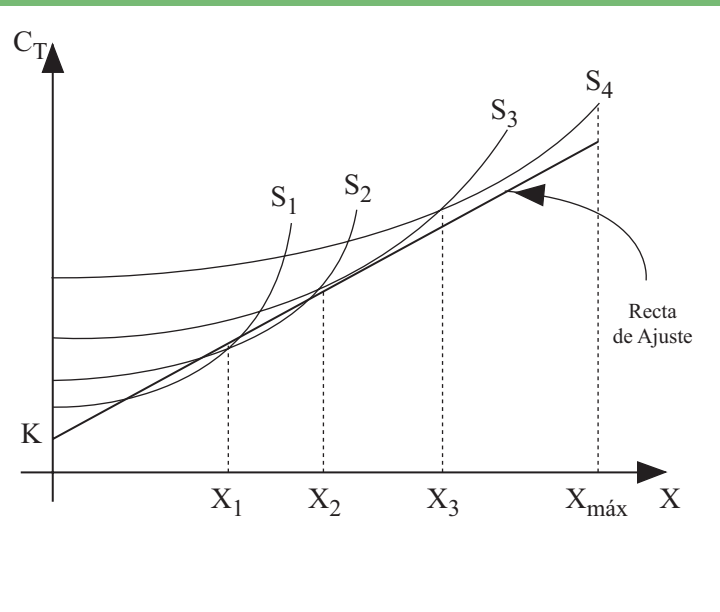
sujeto a:

$$\sum_i X_{ij} - \sum_k X_{ki} = b_i$$

$\forall i \in N$ , con  $(i, j) \in A$  y  $(k, i) \in A$   
Ecuación 10

$$X_{ij} - Y_{ij} U_{ij} \leq 0 \quad \forall (i, j) \in A$$

Ecuación 11



**Figura 1**  
**Funciones de costo para conductores de diferentes secciones**

$$\sum_i Y_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in N, i \neq j$$

Ecuación 12

$$Y_{ij} = 0; 1 \quad \forall (i, j) \in N$$

Ecuación 13

Para el modelo planteado, el valor de  $U_{ij}$  corresponde a la capacidad máxima (flujo máximo de potencia) del conductor de mayor sección considerado ( $X_{máx}$  en la Figura 1). Por otra parte, este modelo permite incluir en forma explícita la restricción de radialidad, tal como se muestra en la Ecuación 12. Sin embargo, al igual que en la formulación lineal, se hace una aproximación importante en la función objetivo. El cálculo de los voltajes en los nudos y de las pérdidas de potencia en los conductores se realiza en la forma descrita en la página 99.

### Algoritmo y programa computacional

Existen muchos programas comercialmente disponibles<sup>12-13</sup>, por medio de los cuales pueden resolverse problemas de tipo entero-mixto. Por lo mismo, se ha preferido utilizar uno de ellos<sup>12</sup>. La forma de utilizar este programa considera los siguientes pasos:

- Crear archivo de entrada con la formulación del problema.
- Aplicar programa de optimización que permite determinar la topología final del sistema, la que debe ser radial.
- Realizar todos los cálculos adicionales con un programa implementado en lenguaje FORTRAN.

## Aplicaciones

### Sistema ejemplo

El programa ha sido aplicado a diversos sistemas típicos presentados en la literatura revisada<sup>1-7-9</sup>, entre los cuales se describe a manera de ejemplo, la Red de Distribución de Energía Eléctrica de 20 kV<sup>9</sup>, que está compuesta por 27 nudos detallados de la siguiente forma:

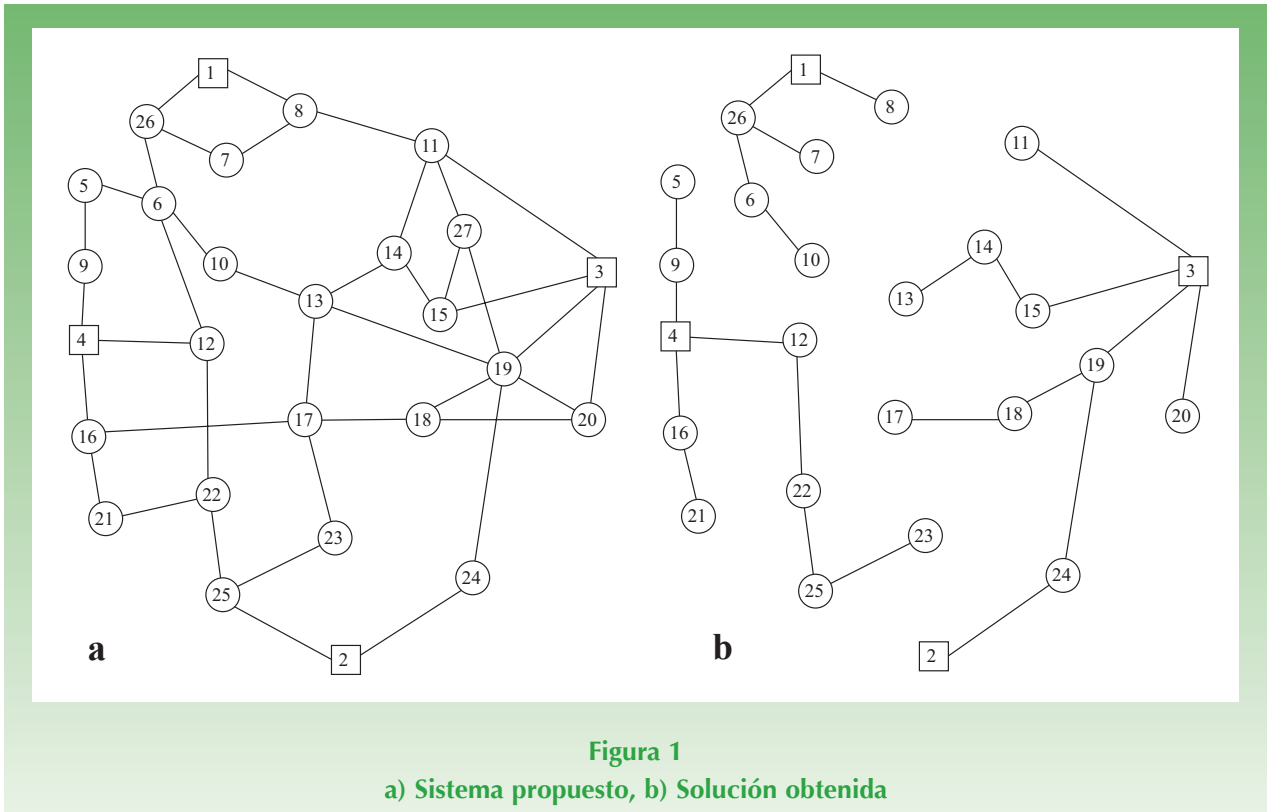
- Nudos fuentes (Subestaciones): 1 al 4, que en este caso incluyen cargas.
- Nudos sumideros (Cargas): 5 al 24
- Nudos de transbordo (sin carga): 25 al 27

La red, que se muestra en la Figura 2 a), incluye 40 arcos (enlaces).

Los datos se indican en los Cuadros 1 y 2.

Los nudos números 25, 26 y 27 no aparecen en el Cuadro 2, ya que como se señaló, son de transbordo y por lo tanto, no tienen carga.

En la referencia citada<sup>9</sup>, el problema se modela considerando planificación de multietapas. La función de costos es linealizada por tramos y el modelo se resuelve usando programación entera-mixta (código MPSX). El sistema consi-



**Cuadro 1**  
**Potencia de la carga en los nudos**

Nudo N°	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Potencia (kVA)	3.160	5.420	1.290	1.210	2.100	1.770	3.980	470	490	1.220
Nudo N°	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Potencia (kVA)	2.400	3.790	1.620	1.810	4.360	2.800	1.350	1.440	2.400	940

derado en este trabajo corresponde al último año de planificación.

Los resultados obtenidos con los modelos presentados en este trabajo, tal como se muestra en la Figura 2b), son absolutamente coincidentes y, en relación con el ya mencionado<sup>9</sup>, solo difieren en la forma de alimentar las cargas de 2 de los 27 nudos, ya que la potencia suministrada por cada una de las

subestaciones es la misma. El Cuadro 4 muestra algunos valores, donde la solución N° 1 corresponde a la obtenida en la referencia citada<sup>9</sup> y la N° 2 a este trabajo, ambos considerando factor de potencia 0,9 inductivo, uniforme para todas las cargas.

El cálculo del costo total se ha hecho considerando que el costo unitario es de la forma:

**Cuadro 2**  
**Distancias entre nudos (Longitud del arco)**

Nudos N°	1-8	1-26	2-24	2-25	3-11	3-15	3-19	3-20	4-9	4-12
Long. (m)	1.030	848	1.152	848	788	727	545	970	848	424
Nudos N°	4-16	5-6	5-9	6-10	6-12	6-26	7-8	7-26	8-11	10-13
Long. (m)	485	667	485	606	1.212	424	545	667	1.091	606
Nudos N°	11-14	11-27	12-22	13-14	13-17	13-19	14-15	15-27	16-17	16-21
Long. (m)	667	485	1.333	606	848	1.515	364	182	1.455	848
Nudos N°	17-18	17-23	18-19	18-20	19-20	19-24	19-27	21-22	22-25	23-25
Long. (m)	788	667	606	960	545	1.091	606	606	788	424

**Cuadro 3**  
**Capacidad y potencia de carga en las Subestaciones**

Nudo N°	1	2	3	4
Capacidad (kVA)	40.000	20.000	30.000	20.000
Carga (kVA)	12.170	20.330	9.000	4.590

**Cuadro 4**  
**Sistema Ejemplo: Algunos resultados a Factor de Potencia 0,9**

Solución N°	Número de arcos		Carga total [kW]	Potencia total perdida [kW]	Potencia total perdida [ % ]	Longitud total de la red [m]	Costo total [UM]
	Inicial	Final					
1	23	23	81.099	523,93	0,65	17.634	547.415,2
2	80	23	81.099	515,92	0,64	16.847	544.075,5

$$F_{ij} = (1,0 + 0,01 P_{ij}) \text{ [UM/m]}$$

Ecuación 14

Sin embargo, conviene establecer que este es el valor empleado en el modelo entero-mixto. En el caso del modelo lineal, se utilizó como costo, la longitud de cada arco y luego de finalizado el proceso de optimización se aplicó la

Ecuación 14, como una manera de poder comparar los resultados. A partir de del Cuadro 4, se puede indicar lo siguiente:

- La cantidad final de arcos es la misma.
- Las pérdidas de potencia obtenidas con los modelos de este trabajo, así como la longitud de la red y el costo total son menores que los obtenidos en el trabajo

mencionado<sup>9</sup>, lo que se explica por el hecho de que son modelos con funciones de costos diferentes.

- Las pérdidas son pequeñas porque se trata de una red de distribución en 20 kV, con poca extensión y fundamentalmente porque no se incluyen aquí las pérdidas de los transformadores.

En este sistema y en otros que se estudiaron<sup>11</sup>, queda claro que los costos fijos no influyen mayormente en el proceso de optimización, lo que permite despreciarlos, consiguiéndose con ello, disponer de un modelo mucho más simple y de más fácil solución. Por otra parte, es importante destacar el hecho que la resolución del modelo entero-mixto ocupó para este ejemplo del orden de 20 veces mas tiempo de CPU que el de tipo lineal<sup>11</sup>, lo que confirma la conveniencia de trabajar con este último.

#### Aplicación a un sistema de tamaño real

De acuerdo con lo planteado en el párrafo anterior, el modelo lineal ha sido aplicado a un sector de la red de la Empresa de Distribución CHILECTRA Metropolitana, de Santiago de Chile, que consta de 16 alimentadores con aproximadamente 5.500 arcos y 2.700

nudos. La función de costos ha considerado como tal, la longitud de los distintos tramos<sup>11</sup> y se han realizado diferentes pruebas, algunas de las cuales se han resumido en el Cuadro 5, para los siguientes casos:

- 1 Sistema radial actual; es decir, en las condiciones en que se encuentra funcionando.
- 2 Solución no radial considerando como capacidades máximas de los arcos, la del conductor de mayor sección.
- 3 Solución radial sin considerar los límites de capacidad máxima en las subestaciones y de flujo máximo en los conductores.
- 4 y 5 Solución radial considerando 7,0 y 9,3 MVA como capacidades máximas de los conductores y luego liberando restricciones, respectivamente.

A partir de estos resultados, se puede establecer a manera de resumen, lo siguiente

- El programa permite resolver un problema de gran tamaño en tiempos de CPU bastante razonables.
- Se pueden incluir en forma explícita muchas de las características de la red (resistencia, reactancia, factor de potencia, etc.).
- Con las aproximaciones realizadas se pueden obtener en forma muy rápida,

**Cuadro 5**  
**Cuadro comparativo de resultados a Factor de Potencia 0,9**

Caso	Número de arcos		Nudos no radicales	Potencia total servida [kW]	Potencia total perdida [%]	Longitud total de la red [decám.]	Costo total de la red [kVA-decám.]	Tiempo total del CPU [segundos]	
Nº	Inicial	Final	Cantidad						
1	2.655	2.655	0	90.914,49	2,40	27.243	33.306.5	11,7	35,06
2	5.532	2.675	9	90.914,49	3,37	27.287	30.742.3	52,7	39,04
3	5.532	2.657	0	90.914,49	3,07	27.184	29.904.1	41,8	41,94
4	5.532	2.669	17	90.914,49	2,59	27.193	31.623.6	78,5	94,82
5	5.532	2.666	9	90.914,49	2,47	27.160	30.571.9	19,7	93,79



las condiciones de operación de una red eléctrica existente, esto es, los voltajes en los nudos, los flujos de potencia en los distintos tramos y las pérdidas de potencia activa y reactiva.

- La cantidad de nudos no radiales obtenida después de la primera iteración es muy pequeña, comparada con el total existente en la red (menos del 1%), lo que confirma lo planteado<sup>5</sup> en el sentido de que las soluciones óptimas tienden a ser radiales.
- Es una herramienta adecuada para ser utilizada en la planificación de sistemas de distribución ya que, como determina en forma muy rápida redes óptimas radiales, permite estudiar la influencia que en el trazado de la red tienen aspectos, tales como la presencia de nuevas subestaciones, la ampliación de potencia de alguna de ellas, la inclusión de nuevos tramos de alimentador, etc.

## Conclusiones

Las metodologías desarrolladas para resolver el problema de diseño de redes de distribución son muy variadas. Desde la formulación de modelos muy simples de tipo lineal, hasta aquellos no lineales más complejos, todos tienen en cuenta el hecho de que se trata de un problema complicado y difícil de enfrentar. La gran cantidad de variables involucradas, los diferentes elementos que lo componen y la no linealidad de las funciones de costos confirman lo dicho.

En este trabajo se ha preferido modelar el problema en forma aproximada, para lo cual ha sido necesario linealizar la función de costos. Sin embargo, los resultados obtenidos al aplicar esta metodología a varios problemas ejemplos fueron muy satisfactorios, confirmando así la importancia que en el diseño de la red tienen el costo asociado a las pérdidas y la longitud de los conductores.

Desde el punto de vista del algoritmo utilizado, la modelación lineal es mucho mejor que la entera-mixta, por lo que, para resolver problemas de gran tamaño es preferible utilizar el modelo lineal. Entre las características del programa para el modelo lineal conviene hacer mención a las siguientes:

- Puede resolver problemas del orden de los miles de variables y ecuaciones de restricción, en tiempos computacionales pequeños, comparados con otros.
- Permite incluir restricciones de límite de potencia en los arcos que en otros modelos lineales<sup>2</sup> no se consideran.
- Se aplican reglas heurísticas de radialización directamente en el programa. Otros trabajos<sup>5</sup> realizan el análisis en forma posterior.
- Puede ser aplicado a redes radiales existentes lográndose a través de él, un muy rápido cálculo de los voltajes en los nudos, de los flujos de potencia en los arcos y de las pérdidas de potencia en cada arco y total de la red, para las condiciones de operación que se tengan.

## Bibliografía

1. Adams, R. N.; Laughton M. A: "Optimal Planning of Networks Using Mixed-Integer Programming". *Proc. IEE* Vol. 121, N° 2, pp 139-148, Feb. 1974.
2. Crowford, Dale M.; Holt, S. B.: "A Mathematical Optimization Technique for Location and Sizing Distribution Substation and Deriving their Optimal Service Areas". *IEEE Trans. on PAS-94*, N° 2. pp 230-235, March-April 1975.
3. Hindi, K. S.; Brameller, A.: "Design of Low Voltage Distribution Networks: A Mathematical Programming Method". *Proc. IEE* Vol. 124, pp 54-58, January 1977.
4. Bradley, G. H.; Brown, G. G.; Graves, G. W.: "Design and Implementation of Large Scale Primal Transshipment Algorithms". *Management Science*, Vol. 24, pp. 1-34,

- 1977.
5. Wall, D. L., Thompson, G. L., Northcote-Green, J. E. D.: "An Optimization Model for Planning Radial Distribution Networks". *IEEE Trans. on PAS-98*, N° 3, pp. 1061-1068, May-June 1979.
  6. Thompson, G.L.; Wall, D.L.: "A Branch and Bound Model for Choosing Optimal Substation Location". *IEEE Trans. on PAS-100*, N° 5, pp. 2683-2687, May 1981.
  7. Fawzi, T. H.; El Sobki, S. M.: "A new Planning Model for Distribution Systems". *IEEE Trans. on PAS-102*, N° 9, pp. 3010-1017, Sept. 1983.
  8. Youssef, K.; Hackman, R.; Abu-El-Magd, M. A.: "Novel Optimization Model for Long Range Distribution Plannig". *IEEE Trans. on PAS-104*, N° 11, pp. 3195-3202, Nov. 1985.
  9. Gonen, T.; Ramírez-Rosado, I. J.: "Review of Distribution System Planning Models: A Model for Optimal Multistage Planning". *Proc. IEE*, Vol. 133, Pt. C, N° 7, pp. 397-408, Nov. 1986.
  10. Pinto de Oliveira, G. P. R.: "Planejamento de Sistemas de Distribuicao de Energia Eletrica". CPFL, Divisao de Planejamento Tecnico, 1987.
  11. Villarroel, M. J.: "Diseño Optimo de Redes de Distribución". *Tesis para optar al Grado de Magister en Ciencias de la Ingeniería*, Pontificia Universidad Católica de Chile, Diciembre de 1989. LINDO: "Linear Interactive, Discrete Optimizer".
  12. LAMPS: "Linear and Mathematical Programs Systems".
  13. Huechapán, J.: "Diseño y Construcción de un Soporte Computacional para el Trazado Óptimo de Redes de Distribución de Energía Eléctrica". *Tesis para optar por el Título de Ingeniero Civil Industrial*, Universidad de la Frontera, 1995.