INTRODUCIENDO FRACCIONES Y ALGUNAS SUCESIONES Y SERIES

Lorena Salazar Solórzano*

En este artículo se presentan algunas ideas intuitivas que podrían ser usadas para introducir el tema de fracciones y de series en un ambiente educativo. Se utilizan ideas geométricas basadas en modelos visuales sencillos que envuelven al estudiante en el descubrimiento de la convergencia o divergencia de algunas series clásicas, logrando así que el estudiante descubra por si mismo los resultados de una manera más concreta y por lo tanto de una manera mas convincente.

Introducción

Todo profesor busca ideas matemáticas que puedan interesar a sus estudiantes. Estas ideas deben ser tales que se logre despertar en el estudiante un interés por descubrir y no solo por aceptar algunos resultados matemáticos. Es por esto que me ha interesado mucho el buscar ideas intuitivas de cómo convencer al estudiante de la convergencia o divergencia de algunas series, usando modelos visuales no muy complicados, que me han dado muy buenos resultados.

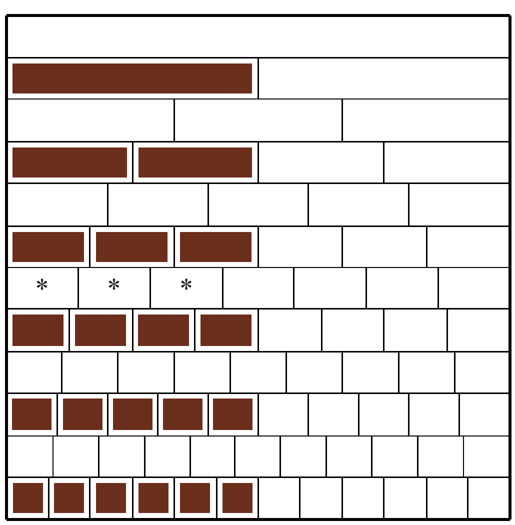

FIGURA 1. Uso de la torre de barras para visualizar la igualdad de fracciones.

La torre de barras

La torre de barras es un modelo muy rico para ilustrar algunos resultados de series y de algunas sucesiones. A su vez también se podría aprovechar para introducción operaciones con fracciones, a un nivel más elemental. Este modelo visual consiste en un rectángulo dividido en barras (ver Figura 1), donde la barra superior representa la unidad y las siguientes barras representan mitades, tercios, cuartos, etc., para lo cual éstas se han dividido usando líneas verticales para representar las diferentes fracciones.

Así por ejemplo se podría usar esta torre de barras para que el estudiante señale 3/7 o cualquier otra fracción, poniendo tres estrellas en la barra de los sétimos. Nótese también que cada dos barras, tiene una línea exactamente a la mitad de la anterior, así se podría indicar las siguientes igualdades de fracciones:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\cdots=\frac{n}{2n} \qquad (1)$$

Observaciones similares se pueden hacer para cada tres, cuatro, etc. barras, para establecer las igualdades

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\cdots=\frac{n}{3n}$$

Algunas sucesiones

* Escuela de Matemáticas, Universidad de Costa Rica.

Podríamos usar también ésta torre de barras para señalar la convergencia de algunas sucesiones elementales.

Por ejemplo, para ilustrar que,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

se podría sombrear un cuadrito de cada barra (vea Figura 2). Así se logra deducir que

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\cdots>\frac{1}{n}$$

notándose que a medida que los denominadores crecen, las partes sombreadas se hacen cada vez mas pequeñas, por lo que el estudiante llegara a la conclusión de que las fracciones tienden a cero. Similarmente, viendo ahora las partes blancas de la Figura 2, se podría ver que

notándose que estas fracciones se van acercando mucho a la unidad, es decir que

lo cual es efectivamente cierto.

Algunas series

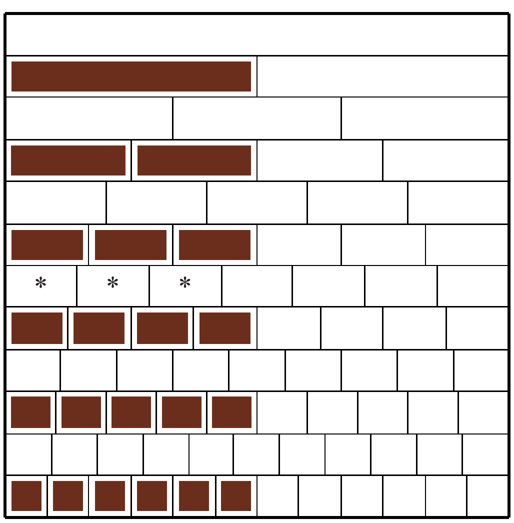

FIGURA 1. Uso de la torre de barras para visualizar la igualdad de fracciones.

Una serie divergente

Agrupando fracciones se puede lograr que el estudiante se convenza de que la serie

diverge, a pesar de que la sucesión de {1/n } tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Para ver esto sumemos las primeras 12 fracciones sombreadas en Figura 2, es decir

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{12}$$

En la Figura 3 se pueden ver estas fracciones reordenadas para aproximar esta suma de fracciones. Las dos primeras barras suman 1 1/2 , las siguientes barras (1/3 y 1/4) es mayor que 1/2. Similarmente las siguientes cuatro barras (1/5, 1/6, 1/7 y 1/8) juntas forman un área que es mayor que la mitad de una barra completa, o sea mayor que 1/2 otra vez, así

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$>1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$$

Continuando con estas agrupaciones en una torre de barras mayor, es decir con más fracciones, se puede ver que estas sumas crecen y crecen indefinidamente, lográndose la divergencia que se quiere deducir.

La serie telescópica

Otra serie que se puede deducir aquí es la serie telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1 \qquad (2)$$

Para ver este resultado intuitivamente, representemos estas diferencias de fracciones consecutivas por regiones sombreadas tal como se muestra en la Figura 4.

Así por ejemplo (1-1/2) es representado por la región a, (1/2 - 1/3) es representado por la región b, y así sucesivamente. Sumando todas estas fracciones, lo que es lo mismo que unir todas las regiones sombreadas, vemos que efectivamente estas sumas se aproximan a la unidad. Por otro lado, aprovechando la simetría vertical que se deduce de (1), se puede ver que en general

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1} \quad (3)$$

Efectivamente note que la parte sombreada b es igual a la región blanca que está al otro lado del eje de simetría (b' en Figura 4). Así

$$b=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=b'$$

de igual forma

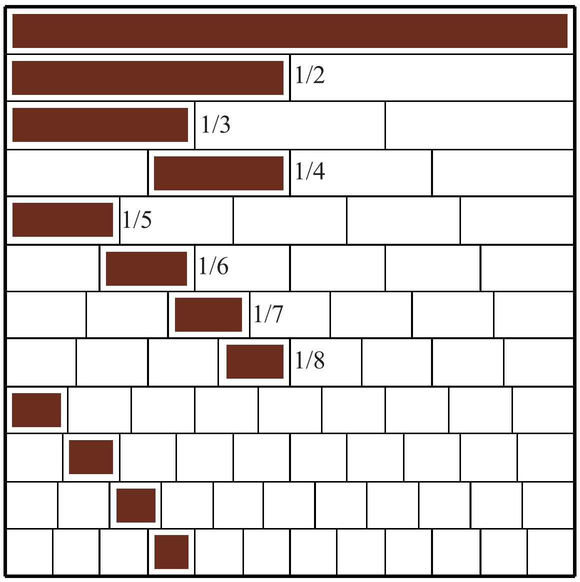

FIGURA 3. Uso de la torre de barras para ilustrar la divergencia de la serie ∑ 1/n

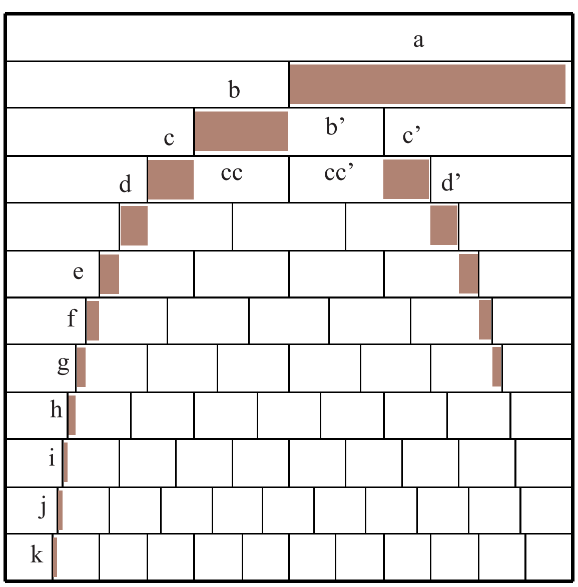

FIGURA 4. Uso de la torre de barras para ilustrar la convergencia de la serie telescópica.

$$c=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=c'$$

$$d=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=d'$$

y así sucesivamente, se puede inferir la formula (3). Por lo tanto se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}\right)=1$$

debido a la convergencia de la serie en (2).

La serie geométrica

Esta es una de las series más conocidas y quizás una de las primeras que se enseña en cualquier curso que contenga series. A saber

Una prueba geométrica muy conocida de este resultado, considera un triángulo rectángulo ABC con < 2/4 B = 90º , el cateto AB de longitud 1, y BC/AC= a, donde 0 < a < 1 (vea Figura 5). Llamemos por

$$b=\sqrt{(1-a^2)}$$

Trazando una perpendicular desde la hipotenusa AC y pasando por el vértice B (llamemos con D el punto de intersección con AC), se forma otro triángulo rectángulo en D el cual es semejante al primer triángulo. Por lo tanto

$$\frac{B}{1}=\frac{DA}{CB}=\frac{1}{CA}\Rightarrow DB=\frac{CB}{CA}=a$$

lo cual nos dice que la hipotenusa del nuevo triángulo tiene medida a. Trazando otra perpendicular, esta vez sobre CB y pasando por D (llamemos con B' el punto de intersección con CB), se forma un tercer triángulo semejante a los dos anteriores donde otra vez debido a la semejanza se obtiene que

$$\frac{DB'}{a}=\frac{B'B}{b}=\frac{a}{1}\Rightarrow\begin{cases}DB'=a^2\\ B'B=ab\end{cases}$$

Continuando con este proceso, se forma una sucesión infinita de triángulos semejantes con hipotenusas de medidas y cuyas bases tienen medidas respectivamente. Ahora nuevamente por la condición de semejanza de los dos primeros triángulos se tiene que

$$\frac{AC+BC}{AB}=\frac{AB+BD}{AD}$$

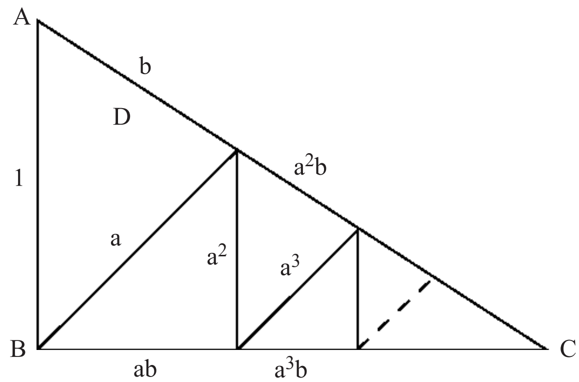

FIGURA 5. Uso de triángulos para ilustrar la convergencia de la serie geométrica.

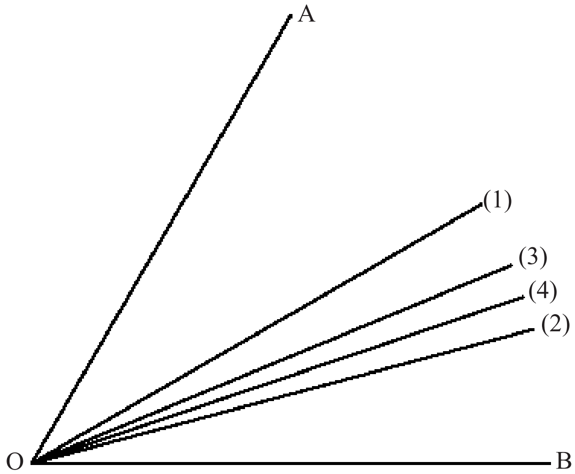

FIGURA 6. Ilustrando la trisección del ángulo.

lo cual implica que

$$b\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1+a}{b} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1+a}{b^2} = \frac{1}{1-a}$$

obteniéndose el resultado para $0 < a < 1$. Por otro lado sabemos que

$$\frac{AC-BC}{AB} = \frac{AB-BD}{AD}$$

lo cual implica que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-a)^n = \frac{1}{1+a}$$

obteniéndose así el resultado para $-1 < a < 0$.

La trisección de un ángulo

Como caso particular de la serie geométrica, en esta sección se intenta ilustrar la serie que comúnmente se conoce como la trisección de un ángulo, a saber

$$q\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^n} = \frac{q}{3}$$

donde θ representa una constante que puede tomarse como la medida de un ángulo. De ahí que la idea para ilustrar este resultado es usar un ángulo θ = <AOB y trata de aproximar la tercera parte de este vía bisecciones, como se muestra en la Figura 6.

Primero biseque el ángulo <AOB con una línea (1); luego biseque la mitad inferior con una línea (2), después biseque la mitad superior del ultimo ángulo bisecado con una línea (3), y continúe así sucesivamente, bisecando alternadamente arriba y abajo. El caso es que a medida que estas líneas (n) tienden a infinito, (n) se aproxima al trisector del ángulo <AOB, como puede ver intuitivamente el estudiante. Para ver que efectivamente esta serie converge a θ / 3, veamos una prueba un poquito más formal. Sabemos que después de la primera bisección, tenemos un ángulo de θ/2. De este sustraemos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{q}{2}\right)$$

luego sumamos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{q}{2}\right)\right)$$

y así sucesivamente. Después de n bisecciones, tenemos

$$a_n = q\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \cdots \pm \frac{1}{2^n}\right)$$

la cual es una serie geométrica con argumento 1/2 iniciando en n=1, la cual converge efectivamente a θ /3.

Conclusión

Se han presentado en este artículo varias formas de ilustrar algunas sucesiones y series conocidas, usando la intuición, vía algunos modelos gráficos sencillos que pueden servir para iniciar un tema como éste, antes de usar símbolos y reglas. Esto ayuda a motivar al estudiante a iniciar el tema de una manera mas convincente..

Literatura consultada

1. C. S Ogilvy. *The Mathematical Gazette*. Hamilton College, Clinton, New York, U.S.A. Pag 404.

2. Bennett. “Fraction patterns-Visual and numerical”. *Mathematics Teacher*. Abril. 1989.