Azofeifa Z., Carlos E.
Una introducción a la teoría del grado topológico.
Tecnología en Marcha. Vol. 16 N° 4.

Una introducción a la teoría del grado topológico[1]

Carlos E. Azofeifa Z. [2]

Palabras clave

Grado topológico, índice punto fijo, función homotópica, espacios de Banach, contracción.

Resumen

Hoy día, el concepto de grado topológico de una función se ha convertido en una herramienta de vital importancia, con aplicaciones principalmente en el establecimiento de teoremas de existencia. En el presente trabajo se presentan las distintas definiciones básicas de grado topológico, así como sus generalizaciones y aplicaciones. Otro concepto importante, muy ligado al de grado topológico, es el de índice punto fijo, el cual en contextos particulares es más efectivo que el de grado topológico, siendo sus propiedades y aplicaciones también analizadas.

Introducción

Las teorías de grado así como las de índice punto fijo, juegan un papel básico en muchos campos del análisis moderno; en realidad estas teorías son muy extensas, por tanto nuestro interés particular es presentar los resultados más relevantes para operadores compactos en espacios de Banach. Aplicaciones importantes se presentan en los siguientes campos:

1. topología diferencial,
2. geometría diferencial,
3. teoría de singularidad,
4. análisis,
5. análisis funcional lineal y no lineal.

Podemos mencionar además algunas aplicaciones particulares ligadas con la existencia de principios para ecuaciones que involucran operadores compactos, como por ejemplo:

1. existencia de soluciones múltiples,
2. funciones analíticas y unicidad de puntos fijos,
3. principio de Leray-Schauder y la existencia de componentes de soluciones no acotadas,
4. resultados globales sobre bifurcación,
5. valores propios,
6. teoremas asimptóticos de punto fijo.

---

1 Este trabajo forma parte del Proyecto No. 114-97-234: "Teoría topológica del punto fijo", inscrito en la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad de Costa Rica.

2 Profesor de la Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. (*cazofeifa@uinteramericana.edu*).

En adición a las aplicaciones mencionadas anteriormente, los físicos han desarrollado un interés especial en estas teorías y sus generalizaciones, principalmente en lo que concierne a las clases de homotopía, y su uso para clasificar las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales no lineales en el contexto de teorías de campo de medida para partículas elementales, y de manera simultánea penetrar profundamente dentro de la estructura topológica de las soluciones.[3]

Entre las diferentes definiciones de grado topológico, se tienen por ejemplo, el grado topológico de Brouwer (1912), Leray-Shauder (1934), Einsenbud (1978), Raoul Bott (1954), etc. La teoría del grado en sentido general, es el estudio del grado de una función para varias clases de funciones continuas cuyos dominios están contenidos en un espacio de Banach X con valores en un espacio de Banach Y. Este estudio consiste en un contador algebraico del número de soluciones de la ecuación $f(x)=y$, donde f se define en la clausura de un subconjunto abierto y, $y \in Y$ pertenece al complemento de la imagen de la frontera de V en Y es decir $y \in f(AV)$.

Así por ejemplo, si tenemos la función continua: $f:B(0,r=1) \to C$, donde C es el campo complejo. Se quiere definir un número deg f, el cual debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. deg f es invariante bajo deformaciones continuas.
2. f puede ser deformado en g sii deg (f)=deg (g).
3. existe una función con un grado dado deg (·).

Desde luego que existen distintas formas de definir este número, por ejemplo f se puede aproximar mediante una serie de Fourier: $\sum_{-n}^{n} a_n z^n = p(z)$ luego se pone deg $f = N(f)-p(f)$, donde $N()$ representa el número de ceros y p ( ) el número de polos.

El grado topológico en dimensión finita

En el caso de dimensión finita el primero en definir la noción de grado topológico fue L.E.J. Brouwer (1912) [5].

Grado de una función en el caso real

Antes de considerar el caso real observemos el siguiente hecho: consideremos una función continua sobre el disco cerrado de radio r, es decir $f: B(0,r) \to R^2$, puesto que x viaja una vez alrededor de la frontera del disco en sentido positivo, $f(x)$ lo haría a través de una curva orientada C, y se asume que $0 \notin C$. Ponemos v_- y v_+ como el número de vueltas en un sentido negativo y positivo respectivamente, se define el grado de f por

$$\deg (f,U) = v_- \text{ y } v_+$$

donde $U = B(0,r)$.

Consideremos ahora la función continua $f : [a,b] \to R$, con $f(a) \neq 0$ y $f(b) \neq 0$ y $a,b \in R$. La situación es hacerle pequeños cambios a f si fuera necesario (Teorema de aproximación de Weierstrauss) para obtener $\bar{f}$ tales que:

1. $\bar{f}$ es continuamente diferenciable en $[a,b]$ y no tiene ceros en los puntos frontera.
2. En el interior de $[a,b]$, $\bar{f}$ no tiene o solamente muchos ceros $x_1,\ldots,x_k$ tales que $\bar{f}'(x_i) \neq 0, \forall i$. Se pone

$$\deg\left(\bar{f},G\right) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}\left(\bar{f}'(x_i)\right)$$

3 Ver Jaffe y Taubes [15].

donde $G=]a,b[$, y por tanto se define deg (f,G)=deg$(\bar{f},G)$.

Como es posible que $\bar{f}$ no tenga ceros en $[a,b]$, se define deg $(\bar{f},\phi)=0$ Se demuestra que la definición anterior es independiente de la aproximación $\bar{f}$ utilizada, además es importante resaltar el hecho que *deg (f)* depende solamente de los valores de f en la frontera, lo cual constituye una propiedad general del grado de una función. En general para una función continua de f de $\bar{G} \subset R$ en R, tomando $G=[a,b]$.

- *deg(f,G)=0 sii f(a)f(b) >0,*
- *deg(f,G)=1 sii f(a)<0, f(b)>0,*
- *deg(f,G)= -1 sii f(a)>0, f(b)<0.*

Por tanto podemos observar que si deg$(f,G) \neq 0$ entonces siempre tendremos la existencia en G de una solución de $f(x)=0$.

Función grado en R^n

Para $y \in R^n$ consideramos $G \subset R^n$ abierto y acotado, y la función continua $f:\bar{G} \to R^n$. De manera similar al caso real se puede aproximar f con una función $\bar{f}$ con las condiciones exigidas anteriormente, a saber $\bar{f}$ es continuamente diferenciable sobre G la cual tiene finitamente a lo sumo muchos ceros: $x_1,\ldots,x_k$ en G y se cumple: det $\bar{f}'(x_j)\neq 0$.

Por tanto definimos

$$\deg(f,G,y)=\deg(\bar{f},G,y)=\deg(\bar{f},G)=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}(\det \bar{f}'(x_i))$$

Si $G=\emptyset$ ponemos deg$(f,G,y)=0$, en el caso en que $G=\emptyset$ y sea fijo suponemos:

1. $f(x)\neq y \forall x \in \partial G$, y
2. $\sup_{x\in\partial G}\left\|f(x)-\bar{f}(x)\right\| < \inf_{x\in\partial G}\left\|f(x)-y\right\|$

   con de clase $C^1(G)$.

por lo tanto la ecuación $\bar{f}(x)=y$, $x\in\bar{G}$ no tiene o posee exactamente finitamente muchas soluciones $x_1,\ldots,x_m$, las cuales son regulares, es decir, $\left(\bar{f}'(x_i)\right)\neq 0, \forall i$.

En el caso de que no se presenten soluciones se tiene $\left(\bar{f},G,y\right)=0$, y de manera similar al caso real se demuestra que la definición es independiente de la aproximación escogida $\bar{f}$. También se nota que deg(f,G,y) es invariante bajo perturbaciones relativamente grandes, lo cual constituye una propiedad fundamental para aplicaciones. Cuando $y=0$, sencillamente escribimos deg(f,G).

Caso de dimensión n

Sea X_n un espacio de dimensión finita n y consideramos la familia de todas las bases de $X_n:(x_1,\ldots,x_n)$. Las siguientes definiciones son bien conocidas por el lector, sin embargo para efecto de mencionar otros hechos complementarios se presentan a continuación:

Definición 2.3.1

Sean $(x_1,\ldots,x_n)$ y $(y_1,\ldots,y_n)$ bases de X_n, decimos que estas bases tienen la misma orientación si det$(a_{ij}) \geq 0$ donde se tiene $y_i=\sum^{n}{}_{j=1} a_{ij}x_j$. Se verifica que esta relación es de equivalencia y se denotara por: ~. Toda clase de equivalencia se llama una orientación en la familia de todas las bases de X_n.

Definición 2.3.2

Si consideramos la base canónica de R^n, luego la orientación correspondiente a esta base se llama la orientación estándar.

Teorema 2.3.1 Sard (1942)[13]

Sea $U\subset R^n$ abierto, y $f:U\to R^n$ una función suave.

Entonces el conjunto $\{x\in U, df_x \text{ es singular}\}$ tiene medida nula de Lebesgue.

Necesitamos además la noción de función homotópica así como la de función homotópica suave, en efecto:

Definición 2.3.3

Sean X y Y espacios topológicos y se consideran las funciones continuas

$f: X \to Y, g: X \to Y$. Se dice que f es homotópica a g si existe una función continua $F:[0,1] \times X \to Y$ tales que $F(0,x) = f(x)$, $F(1,x) = g(x)$. En este caso escribimos $f \cong g$, y F, y F se llama la homotopía entre f y g. Es fácil verificar que esta relación es de equivalencia.

En el caso en que los espacios X y Y sean variedades suaves, y además tanto f como g sean suaves, se define la homotopía suave entre f y g de manera similar, excepto con la condición que F debe ser suave. También se tiene que esta relación es de equivalencia.

Este concepto de difeomorfismo se introduce para obtener una conveniente descripción del teorema de la función inversa, de hecho este y el concepto de variedad son dos de los más importantes conceptos en la moderna topología diferencial.

Definición 2.3.4

Sean M y N subconjuntos arbitrarios en los espacios de Banach X y Y respectivamente. Sea $0 \leq r \leq \infty$. La función $f:M \to N$ se llama un C^r difeomorfismo sii f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son funciones de clase C^r.

Este concepto de difeomorfismo se introduce para obtener una conveniente descripción del teorema de la función inversa, de hecho este y el concepto de variedad son dos de los más importantes conceptos en la moderna topología diferencial. Nótese además que un difeomorfismo de tipo C^o es simplemente un homomorfismo. Además, por lo general cuando se mencionan difeomorfismos de tipo C^r se entiende que $1 \leq r \leq \infty$.

En el caso en que la variedad X tenga la propiedad extra de conexidad, se tiene:

Teorema 2.3.2

Sean X una variedad conexa suave, $x, y \in X$. Entonces existe una función $f:X \to X$ con las siguientes propiedades:

1. f es un difeomorfismo,
2. $f(x)=y$,
3. existe una homotopía suave F entre las funciones f e I (función identidad) tal que $G:X \to X$ definida por $G:(x)=F(t,x)$ es un difeomorfismo sobre X.

Teorema 2.3.3

Sean X y Y variedades suaves y $f:X \to Y$ una función suave. Supongamos además que X es compacto. Entonces la función $y \to N_y(f)$ (número de soluciones de la ecuación $f(x)=y$) es una función localmente constante.

Definición 2.3.5

Sean X y Y variedades orientadas de dimensión n sin fronteras, supongamos además que X es compacto y conexo. Se define el grado de Brouwer para cualquier función suave $f:X \to Y$ en el valor regular y:

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} df_x$$

Observamos que la suma anterior es finita, pues por el teorema 2.3.3 la función $y \to N_y(f)$ es localmente constante. Los siguientes lemas son fundamentales en las demostraciones de las propiedades de la definición de grado.

Lema 1

Sean X, Y, y f como en la definición anterior, y supongamos la existencia de una variedad orientada compacta V de tal manera que X es orientada como la frontera de V. Entonces, si f se extiende a una función $f_1:V \to Y$, $\deg(f,y)=0$ suave para todo valor regular y.

Lema 2

Supongamos que las funciones $f,g:X \to Y$ son homotópicamente suaves. Entonces $\deg(f,y)=\deg(g,y)$, para todo valor común y.

Teorema 2.3.4

Sean X y Y como en la definición 2.3.5. Entonces $\deg(f,y)$ es independiente del valor regular y.

Usando este teorema se demuestra que

Teorema 2.3.5

Si f,g son homotópicamente suaves, entonces deg(f,y)=deg(g,y)=deg(f)

Definición 2.3.6

Sea $X \subset V$ abierto y acotado, donde V es de dimensión n. Si f:$X \rightarrow Y_n$ es una función suave se define el grado de f en y: deg(f,X,y)como el número que satisface las siguientes propiedades:

1. **Propiedad aditiva**

   Cuando las soluciones de $f(x) = y, y \notin / f(\partial X)$ están contenidas en los subconjuntos abiertos X1,...,Xn, con $\cup_i X_i \subset X$ entonces

$$\deg(f,X,y) = \sum_{i=1}^{m} \deg(f / X_i, X_i y), y \notin / f(\partial X_i)$$

2. **Propiedad de homotopía suave**

   Sean f,g:$X \rightarrow Y_n$ homotópicamente suaves, entonces

$$\deg(f,y) = \deg(g,y), y \notin F(t,)(\partial X)$$

3. Propiedad de normalización.

$$\deg(I,X,y) = 1$$

4. Invarianza de traslación.

$$\deg(f,X,y) = \deg(f-y,X,0)$$

5. Propiedad de excisión.

   Cuando $y \notin f(\partial X), K \subset \overline{X}$, con K cerrado y

$$y \notin f(K) \ \deg(f,X,y) = \deg(f \mid x-k, X-K, y)$$

De hecho el grado topológico puede ser definido para la clase de funciones continuas definidas sobre $\overline{X}$, de aquí se tiene precisamente su carácter topológico, en efecto:

Definición 2.3.7

Consideremos la función continua $f:\overline{X} \rightarrow Y_n$, y sea la sucesión ($f_n$) de funciones suaves que convergen uniformemente a f. Entonces

$$\deg(f,X,y) = \lim_{n \to \infty} \deg(f_n, X, y)$$

Es fácil obtener de la definición de grado para funciones continuas sobre $\overline{X}$ las propiedades establecidas para las funciones suaves, con la propiedad extra:

Propiedad del producto cartesiano

Supongamos que

$$X \subset Y_n \text{ y } X' \subset Y_m, f:\overline{X} \rightarrow Y_n f':\overline{X}' \rightarrow Y_m$$

Entonces

$$\deg((f,f'), X \times X', (y,y')) =$$
$$\deg(f,X,y) \cdot \deg(f',X',y')$$

Se puede usar la teoría de grado para probar la siguiente extensión del teorema de punto fijo de Brouwer.

Teorema 2.3.6

Sea $f: B \subset R^n \rightarrow R^n$ una función continua definida sobre la bola unitaria tal que $f(x) \neq \lambda x$, con $\lambda > 0$ y $x \in \partial B$. Entonces f posee un punto fijo en B.

Demostración

Se define $h_t(x)=x-tf(x)$, con $x \in B$ y $t \in [0,1]$. Sea $x \in \partial B$, entonces $h_t(x) \neq 0$ para cualquier valor de x, pues de lo contrario se tendría que $0 = x - tf(x)$ para algún x y por tanto

$$f(x) = \frac{1}{t} x$$

lo cual contradice nuestra hipótesis. Usando la propiedad de homotopía y la propiedad de normalización, se tiene que 1=$deg(h_0,B,0)$=deg(h_1,B,0).

Sabemos además que si deg (f,G,y)≠ 0 entonces la ecuación $f(x)=y$ tiene solución, por lo tanto $h_1(x)=0$ tiene una solución, es decir, para algún x:0=x-$f(x)$. Por tanto f posee un punto fijo en B.

El grado topológico de Leray-Schauder

La noción del grado topológico de Brouwer se extiende a ciertos operadores definidos sobre conjuntos cerrados y acotados en espacios de Banach. De manera similar al teorema 2.3.4 se define el grado para funciones de la forma I-f, siendo f una función continua y compacta.

Teorema 3.1

Consideramos el espacio de Banach $X, G \subset X$ abierto y acotado. Si $f : \overline{G} \to X$ es continua y compacta tal que γ ∉ / (I-f)(∂G). Entonces existe una función $d(I\text{-}f,G,y)$ con valores enteros la cual satisface las siguientes propiedades:

1. Propiedad aditiva

   $$d(I-f,G,y)=\sum_{i=1}^{m} d(I-f,G_i,y)$$

   si

   $$\left[\left(x,(I-f)(x)=y\right)\cap G\right]\subset U_{i=1}^{m} G_i \ ,$$

   donde los G_i son abiertos y disjuntos dos a dos, y además γ∉ / (I-f)(∂G_i).

2. Propiedad de homotopía

   $d(I$ - $f,G,y)$=$d(I$ - $g,G,y)$ si G y y son dados como en la anterior propiedad, con f, g funciones continuas compactas, y para cada t∉[0,1] existe una función continua y compacta f_1 que cumple: f_0 = f,f_1=g y $t \to f_t$ y continua, con $y \notin /(I-f)(\partial G_i)$.

3. Propiedad de normalización:

   $$d(I-f,G,y)= \text{ si } \gamma \in \mathrm{G}$$

4. Propiedad de traslación invariante:

   $$d(I - f,G,t)=d(I-f-y,G,z)$$

   para todo

   $$\gamma \notin f(\partial G)$$

Demostración

Se puede consultar en [13] página 363, sin embargo tomando $y=\theta$, donde θ es un valor regular de f (no se pierde generalidad) y suponiendo que existe una función que toma valores enteros y satisface propiedades de 1 a 4, poniendo $d(i-f,\Psi,y)=d(I-f-y,\Psi,\theta)$ s e verifican los requisitos de las propiedades anteriores.

Es fácil corroborar que el grado así definido tiene la propiedad de ser continuo con respecto a la topología uniforme. Además, la propiedad de homotopía es consecuencia de un caso más general, a saber:

Teorema 3.2

Sea I=[a,b] cerrado y acotado, $f:G\times[a,b]\to X$ continua y compacta tal que $z:[a,b]\to X$ es continua con la propiedad que

$x-f(x,t)\neq z(t)\forall t\in I, x\in\partial G$.

Entonces

$$d(I-f(.,t),G,z(t))=\text{constante}$$

Demostración

Sin perder generalidad se puede suponer que $z(t)=0, \forall t \in I$ de acuerdo con la propiedad 4. Además como $d(I-f(.,t),.,\Theta$ está bien definida, entonces debemos observar que se tiene el mismo valor para diferentes valores de t. Ahora la función f se puede aproximar uniformemente por medio de funciones de rango finito dimensional de acuerdo con el Teorema de Granas (1969).[4]

Pongamos S_X a la familia de todos los subespacios de dimensión finita de X. Sean $t_o,t_1 \in I$ arbitrarios, por el comentario anterior las funciones $f(.,t_o)$ y $f(.,t_1)$ se pueden aproximar simultáneamente por funciones de dimensión finita y de acuerdo con la definición de grado, existe un $C \in Sx$ de tal forma que para todo C_1 tal que $C \subset C_i$ se tiene:

1. $f(x,t) \in C_1, x \in \overline{G} t \in I,$

2. $d(I - f(.,t_o), G\Theta) = d(I - f(.,t_1), G, \Theta)$

$$= d_c((I - f\ .,t_o))/(\overline{G} \cap C_1), G \cap C_1, \Theta)$$

$$= d_c((I - f\ .,t_1))/(\overline{G} \cap C_1), G \cap C_1, \Theta)$$

Como $I - f$ restringido a $\overline{G} \times [t_o,t_1]$ es continuo, por tanto si aplicamos el teorema de la continuidad del grado topológico de Brouwer se tiene que los valores del grado en t_o y t_1 y deben ser iguales. Resultando por tanto que $d(I - f(.,t),G,z(t))$ es constante, como se quería.

El grado de Brouwer también se extiende a ciertas clases de funciones sobre espacios de Banach con propiedades similares a funciones de dimensión finita, a saber: perturbaciones de la identidad por funciones compactas. Un problema que nace de manera natural y en conexión con el grado topológico es el siguiente: ¿es posible definir el grado local para funciones continuas sobre un espacio de Banach X con valores en X? La respuesta nos la proporciona J. Leray con un ejemplo que muestra que tal definición no es de hecho posible [13], página 371.

La conexión del índice de puntos fijos con el grado topológico es intrínsico, pues el índice de punto fijo es la medida del número de puntos fijos de f sobre G al considerar la ecuación $f(x) = x, x \in \overline{G}$, o de manera equivalente la ecuación $x - f(x)=0$. Se define por tanto el índice punto fijo como:

$$i(F,G)=\deg(I - f,G,0)$$

Por tanto una vez que se tiene el índice punto fijo se puede definir el grado de una función en forma paralela como antes.

Definición 3.1

Sea X un espacio de Banach, $G \subset X$ abierto y sea $f : \overline{X} \to X$, sin puntos fijos en la frontera ∂G. Sea $F= I - f$, es decir una perturbación compacta de la identidad, siendo f compacta sobre $\overline{G}$. Entonces se define el grado de la función por

$$\deg(F,G,y)=i(f+y,G)$$

Se observa que esta definición de grado se basa en el hecho de que la ecuación $F(x)=y$, es equivalente a la ecuación $g(x)=f(x)+y=x$, y por tanto la función grado $\deg(F,G,y)$ se convierte en la medida del número de soluciones de la ecuación $F(x) = y, x \in \overline{G}$.

Definición 3.2

Se define ahora el índice local punto fijo como sigue: Sea $U(x_o)$ un vecindario de x_o en el espacio X, y sea $f{:}U(x_o) \to X$ una función compacta en $U(x_o)$, con x_o un

4 Sea X un espacio de Banach y Y un espacio topológico. El conjunto de todas las funciones continuas de Y en X tales que $f(Y)$ sea relativamente compacto y además está contenido en la clausura del conjunto L_t={$g{:}Y \to X, g(Y)$ está contenido en un subespacio de dimensión finita}.

punto fijo aislado de f. Luego definimos el índice local punto fijo de f en el punto x_o como

$$i(f,x_o)=i(f,U(x_o,r))$$

siendo el radio de la bola $U(x_o)$ alrededor de x_o lo suficientemente pequeño y como x_o es un punto aislado, es fácil verificar que esta definición es independiente de $r>0$. También se puede obtener de manera natural a partir del índice el grado local el índice de un punto aislado, en efecto:

Definición 3.3

Se define el índice del punto aislado x_o de f como

$$i(f,x_o)=\lim_{\in\to 0}{}^{d}\left(I-f,x_o+B_{\in},\Theta\right)$$

donde $B_{\in}=\{x\in X:\|x\|\leq\in\}$.

Cuando una función $f{:}G\to X$ continua y compacta posee la condición extra de tener una derivada de Fréchet en un punto $x_o\in Fix\{f\}$, siendo G un subconjunto abierto del espacio de Banach X y 1 no es un valor propio de df_{x_o}, entonces x_o es un punto aislado de f y se obtiene además una importante e interesante relación entre el índice asociado con el punto fijo aislado de f y el índice asociado con Θ para la derivada de Fréchet en Θ de f, a saber:

$$i(f,x_o)=i(dfx_o,\Theta)$$

También es posible obtener una fórmula para el índice en función de la multiciplicidad de algunos de sus valores propios, la respuesta es dada en 1934 por el famoso teorema:

Teorema 3.3 Leray-Schauder

Sea X un espacio de Banach y $G\subset X$ abierto y $f{:}G\to X$ continua y compacta con derivada Fréchet en $x_o\in Fix\{f\}$, y tal que 1 no es un valor propio de df_{x_o}. Entonces

$$i(f,x_o)=(-i)^n$$

donde n es la suma de las multiplicidades de valores propios en]0,1[, si X es un espacio real Banach, y $i(f,x_0)=1$ si el espacio es complejo.

Demostración

Como el caso general se puede obtener por una traslación, se puede suponer sin perder generalidad que $x_o=\Theta$, por tanto para $\|x\|$ muy pequeña se puede suponer que $f(x)=df_{\Theta}(x)+z(x)$ con

$$\|z(x)\|\leq\frac{2L}{3\|z(x)\|}$$

y donde la constante $L>0$ existe pues como df_{xo} es compacta y como 1 no es un valor propio de df_{xo}, entonces $1\text{-}df_{xo}$ es una biyección y por tanto existe $L\geq 0$ tal que $\|x\text{-}df_{xo}(x)\|\geq 2L\|x\|$, y como concecuencia Θ es un punto aislado de df_{xo}.

Consideremos ahora la homotopía $H(x,t)=x\text{-}tf(x)\text{-}(1\text{-}t)df_{x\Theta}(x)$, por tanto se tiene que

$$d(I-f,B_{\in}\Theta)=d(I-dfx_{x\Theta},B_{\in}\Theta)$$

Consideremos el subespacio A de todos lo vectores propios de df_{xo} que corresponden a valores propios en $]0,1[$, y como A es de dimensión finita, entonces tiene un subespacio complementario B. Como $dim\ A=n$, poniendo

$$B_{1,\in}=B_{\in}\cap A,B_{2,\in}=B_{\in}\cap B$$

De la fórmula del producto para el grado topológico se sigue que

$$d(I-df_{\Theta},B_{\in},\Theta)=d(I-df_{\Theta},B_{1,\in},\Theta)$$
$$\cdot\, d(I-df_{\Theta},B_{2,\in},\Theta)$$

Por tanto si $H_1(x,t) = I - tdf_\Theta(x)$ entonces $\forall x \in \partial B_{1,\in}$ se tiene que $H_1(x,t)=0$ sii $tdf_\Theta(x) = x$ sii $df_\Theta(x) = (1/t)x$ sii df_Θ debe tener un valor propio en $]0,1[$, sin embargo como B es el complemento de A esto no es posible, entonces

$$d(I - df_\Theta, B_{2\varepsilon}, \Theta) = d(I, B_{2,\in}, \Theta)$$

y si consideramos

$$H_2(x,t) = ((2t-1)I - tdf_\Theta)(x)$$

entonces se tiene $\partial B_{2,\in}$ que sobre se evita ser cero y por tanto

$$d(I - df_\Theta, B_{2,\in}, \Theta) = d(-I, B_{1,\in}, \Theta) = (-1)^n$$

Para el caso complejo se tiene que la dimensión real de A debe ser par y por tanto se obtiene el teorema.

El concepto de grado se puede extender a ciertas perturbaciones de la identidad por medio de funciones contractivas *k-set*.

Definición 3.4

Sea X un espacio métrico completo y $f{:}X \rightarrow X$ continua, f se llama una contracción *k-set* si existe $k \in [0,1]$ tales que para todos los conjuntos $A \subset X$ acotados y no compactos se tiene

$$\partial(f(A) \leq k\alpha(A)$$

donde α es la medida de no compacidad de Kuratowski, la cual se define como el ínfimo de todos los números $\varepsilon \geq 0$ con la propiedad que A puede ser cubierto de manera finita por muchos conjuntos, donde cada uno tiene su diámetro menor o igual a ε. Lo anterior se justifica pues los operadores compactos mapean conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos, entonces para generalizar el concepto de operador compacto se necesita una medida de no compacidad, la cual determina la desviación de compacidad relativa para un conjunto. De hecho, $\alpha(A)=0$ es equivalente a la compacidad relativa para A.

Definición 3.5

El espacio topológico Y se dice ser un retracto y vecindario absoluto (RVA) si dados cualquier espacio métrico X y $A \subset X$ cerrado, y una función continua $f{:}A \rightarrow Y$, entonces existe un vecindario abierto V de A y una función continua $f{:}V \rightarrow Y$ tal que $F(x) = f(x)$, $\forall x \in A$. En el caso en que F se defina sobre X decimos que Y es un retracto absoluto.

Es importante mencionar que F.E. Browder construyó la función índice sobre la categoría de RVA los cuales son espacios métricos compactos. Denotamos esta categoría de espacios RVA por Ω, por tanto si $A \subset \Omega$ y $G \subset A$, G abierto y $f{:}\,\overline{G} \rightarrow A$ tiene la propiedad de no tener puntos fijos en $\overline{G}/G$, entonces se puede definir el número $i_A(f,G)$ el cual satisface las siguientes propiedades:

1. Propiedad aditiva

   Supóngase que $f{:}\,\overline{G} \rightarrow A$ no tiene puntos fijos en $\overline{G}/G$ y que existen $G_1, G_2 \subset G$ abiertos y disjuntos tales que los puntos fijos de f están $G_1 \cup G_2$ en entonces

   $$i_A(f,G)=i_A(f,G_1)+i_A(f,G_2)$$

2. Propiedad de homotopía

   Sean A y G como antes, ponemos I = [0,1], y supongamos que existe una función $F: \overline{G} \times I \rightarrow G$ y tal que $\forall t \in I,\ F_t : \overline{G} \rightarrow A,\ F_t(x) = F(x,t)$ no tiene puntos fijos en $\overline{G}/G$. En el caso en que f es continua tenemos que $i_A(F_o,G)=i_A(F_1,G)$.

3. Propiedad de normalización

   Cuando $G=A$ entonces $i_A(f,G)=\Lambda(f)$ donde $\Lambda(f)$ es el número de Lefschetz de f [5].

4. Propiedad de conmutatividad

Sean A, B $\in \Omega$ y sea la función $f: A \rightarrow B$ continua, tal que para el subconjunto V de B, existe $g: \overline{V} \rightarrow A$ continua, y tal que $f_o g$ no tenga puntos fijos en $\overline{V}/V$. Tomando $U=f^{-1}(V)$, se tiene que $g_o f$ no tiene puntos fijos en $\overline{U}/U$ y $i_B(f_o g,V)=i_A(g_o f,U)$.

Algunos autores como Nussbaum (1971) definen un índice generalizado a partir de la función índice y demuestran cómo se puede usar el índice generalizado para definir el grado topológico para contracciones *k-set*. Tenemos ahora una generalización del Teorema de Schauder para contracciones *k-set*.

Teorema 3.4 Sadovskii (1976)

Sea X un espacio de Banach y $A \subset X$ no vacío, acotado, cerrado y convexo. Sea $f: A \rightarrow A$ acotada y continua, y tal que para todos los subconjuntos M de A para los cuales $\alpha > 0$ se cumple:

$$\alpha(f(M)) \leq \alpha(M)$$

donde α es la medida de no compacidad de Kuratowski (se dice que f es una función condensante). Entonces f posee un punto fijo.

Demostración

Sea $x \in K$ y consideramos Λ la familia de todos los subconjuntos C de K tales que y $x \in C$ y $f: C \rightarrow C$.

Ponemos

$$B = \cap_{C \in \Lambda} C \text{ y } D = C_O[f(B) \cup \{x\}]$$

Se desea mostrar primero que $B=D$. Sean $x \in B$ y $f:B \rightarrow B$ entonces por definición de D se tiene que $D \subset B$. También esto implica $f(D) \subset f(B) \subset D$. Así , $x \in D$, $D \in \Lambda$. Entonces $B \subset D$.

De lo anterior se sigue que $f(D) = f(B) \subset D \subset B$ y $\alpha(D) = \alpha(f(D))$: Por ser f condensante se tiene que, y por tanto D es compacto y convexo siendo $f:D \rightarrow D$ continua. Ahora el resultado se sigue aplicando el Teorema de Schauder.

La función grado y las funciones esenciales

Definición 4.1

Sea X un espacio de Banach y $A \subset X$. La perturbación compacta de la identidad $f: A \rightarrow X$, $f(x) \neq 0$ para $x \in A$ se llama esencial con respecto al conjunto envolvente C de A, es decir $A \subset C$ si la ecuación $f(x)=0$ posee solución para toda extensión $f: C \rightarrow X$, la cual también es una perturbación compacta de la identidad. Si f no es esencial sencillamente le llamamos no esencial[6].

Definición 4.2

Consideremos los espacios topológicos X y Y, sean A y C tales que $A \subset C \subset X$. Entonces la función continua $f: A \rightarrow Y$ es no esencial topológicamente con respecto a C si existe una extensión continua $f: f \rightarrow Y$.

En el caso en que X y Y sean espacios de Banach y A sea acotado. Si $f: A \rightarrow Y$ es compacta entonces por el Teorema de Tietze (1915) y Dugundji (1951), posee una extensión continua $f:X \rightarrow co(f(A))$, donde $co(f(A))$ es la envolvente convexa de $f(A)$. Por ser $f(A)$ relativamente compacto, entonces $co(f(A))$ también lo

5 En 1926 Lefschetz proporciona una extensión del teorema de Brouwer a n-variedades orientales sin frontera, usando lo que hoy día se llama el número de Lefschetz, en la dirección de n-variedades con frontera también extendió sus resultados.

6 El concepto de función esencial es en realidad una generalización natural del clásico teorema del valor intermedio.

es, y por tanto $f: X \rightarrow co(f(A))$ es una extensión compacta.

Nuestra meta en este apartado es obtener el Teorema de Hopf, para ello es crucial el siguiente resultado:

Teorema 4.1

Sea $X \neq \phi$ un espacio de Banach y $G \subset X$ una región acotada, y sea $f: \partial G \rightarrow X-\{0\}$ una perturbación compacta de la identidad. Entonces f es no esencial con respecto a $\overline{G}$ si $deg(f,G)=0$, es decir f es esencial con respecto a $\overline{G}$ si $deg(f,G) \neq 0$.

Demostración

Supongamos que la función f es no esencial con respecto a $\overline{G}$. Por el comentario anterior existe una extensión compacta $f: \overline{G} \rightarrow X-\{0\}$, la cual además es una perturbación de la identidad. Como $f(x) \neq 0$ sobre $\overline{G}$, por tanto $deg(f,G)=0$.

Supongamos ahora que $deg(f,G)=0$. Y consideremos el caso genérico $X=R^n$, y $f=I-F$, donde $F \in C_o(G, R^n) \subset C(G,R^n)$, que es la clase de funciones compactas de $\overline{G}$ en X para las cuales el índice punto fijo está definido. Procediendo inductivamente se tiene que la función $f:\partial G \rightarrow X$ es no esencial con respecto a $\overline{G}$. Veamos cómo se puede reducir el caso general al caso genérico:

1. Supongamos como antes que $deg(f,G)=0$ y que $X=R^n$. Existe por la definición de grado una función genérica f_1 de manera que ∂G: $f_1 \cong f$ (mod 0) y $deg(f\_1,G) = deg(f,G)$. Por lo anterior $f_1:\partial G \rightarrow X$ es no esencial con respecto a $\overline{G}$. Usando el teorema de extensión de homotopía[7] también f lo es.
2. Supongamos que $deg(f,G)=0$ y $dimX=\infty$. Procediendo por contradicción, supongamos que $f:\partial G \rightarrow X$ es esencial con respecto a $\overline{V}_1$.
3. Usando el teorema de aproximación para operadores compactos existe un subespacio de dimensión finita Y de X y una función compacta $F_1: \partial G \rightarrow X$ de manera que ∂G: $f_1 \cong f$ (mod 0), donde $f_1=I-F_1$. Usando de nuevo el teorema de extensión de homotopía la función $f_1: \partial G \rightarrow X$ es esencial con respecto a $\overline{G}$, resultando que la función restricción $f_1:\partial G \cap Y \rightarrow Y$ es esencial con respecto a $\overline{G} \cap Y$. Usando el teorema de extensión combinado con el hecho de que $f_1(x)=0$, $x \in \overline{G}$ entonces $x = F_1(x) \in Y$. De la definición de grado se pueden escoger Y y f_1 de manera que $deg(f,G)=deg(f_1, G \cap Y)$ y por tanto la función $f_1:\partial G \cap Y \rightarrow Y$ es no esencial con respecto a $\overline{G} \cap Y$ lo cual nos proporciona una contradicción.

Teorema 4.2 Hopf 1927-E.Rothe 1936 [32]

Consideremos el espacio real de Banach X con dimensión mayor o igual a 2, o el espacio complejo de Banach X con dimensión mayor o igual a 1. Por tanto, las funciones $f,g \in C(V,X)$ son holomórficas sobre ∂V *sii* $i(f,V)=i(g,V)$.

Demostración

Recordemos que este importante teorema fue demostrado por Hopf para R^n con $n \geq 2$.

Por la propiedad de la invarianza homotópica observamos que es suficiente demostrar que $i(f,V)=i(g,V)$ implica αV: $f \cong g$.

7 Sea X un espacio de Banach y $A \subset B \subset X$ cerrados y acotados. Supongamos que la función $h:A \times [0,1] \rightarrow X$ es compacta y que $h(x,t) \neq x$, de tal manera que $H(x,t)=x-h(x,t)$, cumple $H(x,t) \neq 0$ $\forall (x,t) \in A \times [0,1]$. Entonces $f_o(x)=H(x,0)$ es no esencial con respecto a B sii $f_1(x)=H(x,1)$ también lo es.

1. Sea $X=R^n$ para $n \geq 2$, poniendo $F=I-f$ y $G=I-g$ se tiene por hipótesis que $deg(F,UV)=deg(G,V)$. Por simplicidad supondremos por ahora que V es una bola abierta que contiene el origen y sea V_1 una bola más pequeña que contiene el origen y sea h: $\overline{V} \to V_1$ una transformación de similaridad. Y por traslación ponemos $G_1(x):=G(h^{-1}x)$ sobre $\overline{V}_1$.

Luego la igualdad $deg(G_1,V_1)= deg(G,V)$ se tiene pues la función grado es invariante bajo homomorfismos que preservan la orientación. La idea ahora es construir una función continua, en efecto:

$G_2 : \overline{V} - \overline{V}_1 \to R^n$ con valores frontera $G_2(x)=F(x)$ sobre ∂V, y $G_2(x) = G_1(x)$ sobre ∂V_1

Por la aditividad de la función grado y la dependencia en la frontera se tiene

$$\deg(f,V) = \deg(G_2, V - \overline{V}_1) + \deg(G_1, V_1)$$

esto nos proporciona la condición $\deg(G_2, V - \overline{V}_1) = 0$.

Si consideramos n ≥ 2 resulta que el conjunto $V - \overline{V}_1$ es una región, y por tanto por teorema 4.1 y lo anterior, existe una extensión libre-cero continua $G_2 : \overline{V} - \overline{V}_1 \to R^n$ de los valores frontera de G_2. Por tanto para $x \in \partial V$ y $t \in [0,1]$, $H(x,t)= \overline{G}_2(x(t))$ con $x(0)=x$ será la homotopía deseada ∂V: $F \cong G$, *(mod 0)*, aquí $x(t)$ es el camino recorrido en un periodo de tiempo $0 \leq t \leq 1$ que va radialmente y de manera uniforme de $x \in \partial V$ *a* $\partial \overline{V}_1$. Observemos además que $H(x,0)=(x(0))=_2(0)=F(x)$ y $H(x,1)= \overline{G}_2(x(1))=G(x)$, de manera similar para el caso en que V es general, por tanto se tiene demostrado el teorema en el caso en que $dim(X)<\infty$.

2. Supongamos ahora que $dim(X)=\infty$ y que $i(f,V)=i(g,V)$, usando la definición de índice existe un subespacio lineal de dimensión finita Y de X y funciones compactas $\overline{f}, \overline{g} : \overline{V}_1 \to Y$ de manera que

$$f \cong \overline{f}\, y, g \cong \overline{V}_1, sobre\, \partial V \qquad (1)$$

Poniendo $U=V \cap Y$ obtenemos

$i(f,V) = i(\overline{f},U)$ y $i(g,V) = i(\overline{g},U)$

concluyendo por nuestra hipótesis que $i(\overline{f},U) = i(\overline{g},U)$. Podemos aplicar la parte anterior 1. en este caso para obtener

$$\partial U : \overline{f} \cong \overline{g} \qquad (2)$$

Nuestro objetivo principal es extender esta homotopía a

$$\partial V : f \cong g \qquad (3)$$

pues entonces (1) implicaría el aserto ∂V:$f \cong g$.

Probamos ahora (3). Consideramos a $H:\partial U \times [0,1] \to Y$ la homotopía correspondiente a (2), por el teorema de extensión esta homotopía se puede extender a $H: \partial V \times [0,1] \to Y$ y por tanto se obtiene (3).

Como consecuencia del Teorema de Hopf se tiene que todas las funciones se dividen en clases de homotopía, las cuales están caracterizadas precisamente por la función grado. Por otra parte es importante mencionar que el teorema para el caso $X=R$ es falso, además con las hipótesis del teorema para cada entero n existe $f \in C(V,X)$ de tal manera que $i(f,V)=n$.

Otra consecuencia es que si $y \in X$ es fijo, dadas $f_1,f_2: \to X$ perturbaciones compactas de la identidad con $f_1(x) \neq y$ y $f_2(x) \neq$ y sobre ∂V. Entonces

$deg(f_1,V,y)=deg(f_2,V,y)$ *sii* ∂V: $f_1 \cong f_2$ *,(mod 0)*

Además si n es un entero dado, existe una perturbación compacta de la identidad $f_i : \overline{V}_1 \rightarrow X$ con $f_1(x) \neq y$ sobre ∂V, de tal manera que $deg(f_1,V,y)=n$.

Problema de la unicidad

Nagumo en 1951 es el primero en hacer mención que la unicidad del grado de Brouwer se puede probar por aproximación simplicial. Para el grado de Leray-Schauder tenemos a O'Neill (1953), en donde la unicidad se obtiene usando la unicidad del índice de punto fijo introducido vía teoría cohomología. Es importante mencionar la existencia de una prueba elemental de la unicidad para el índice, esta es dada en 1970 por Robert Brown.

Para el caso de contracciones k-set, J.Thomas probó en 1973 que si además estas son diferenciales entonces si el grado satisface las propiedades conocidas de aditividad, homotopía, normalización y producto, entonces este es único. En el caso de espacios de Hilbert se puede eliminar la condición de diferenciación, usando el teorema de aproximación de Weierstrass por Prenter (1970), haciendo referencia a una clase especial de espacios de Banach. Uno de los primeros teoremas de aproximación de este tipo fue obtenido por V.I.Istratescu (1971, 1980).

Existencia y unicidad del índice punto fijo en espacios de Banach

La introducción en 1934 [20] del índice punto fijo marca de manera principal la base para el desarrollo del análisis funcional no lineal.

Teorema 4.3 Leray-Schauder 1934

Sea X un espacio arbitrario de Banach, entonces para toda fŒV(G,X) y para toda C(G,X) existe exactamente un índice punto fijo, el cual satisface las cuatro propiedades del índice.

Es importante notar que la unicidad fue establecida por Amann y Weiss hasta 1973, a pesar de que el índice punto fijo fue introducido desde 1934 por Leray y Schauder. No se incluye la demostración por ser excesivamente larga, el lector interesado puede consultar [32].

Computación del grado topológico

Un pionero importante en la computación del grado topológico es F. Stenger (1974), el cual prueba una fórmula básica, la cual fue anticipada en 1904 por Hadamard en un contexto más simple. En Istratescu se puede observar la presentación de algunos algoritmos para la computación del grado topológico obtenidos por P. Erdelski y M. Stynes (1977,1978,1979). Realmente estos algoritmos se basan en el uso de refinamientos imparciales y se demuestra que hay un número finito de iteraciones necesarias para obtener los simples necesarios para la subdivisión.

También interesantes aplicaciones a la computación del grado topológico se pueden observar en Kearfoot (1978, 1980).

Otras aplicaciones del grado topológico dentro de la teoría de punto fijo

Además de las aplicaciones mencionadas anteriormente es de vital importancia rescatar otras más, entre las que podemos citar:

1. Proporciona una nueva prueba del teorema de punto fijo de Schauder.
2. Otra demostración del teorema de Altman.
3. La condición de Leray-Schauder.
4. El teorema antipodal de Boruk. Este teorema usualmente se presenta en el caso de dimensión finita sin usar el teorema de grado de Brouwer, luego se da una demostración utilizando dicho teorema; además de que esta se

extiende inmediatamente a espacios de dimensión infinita usando una aproximación.

5. Recientemente se han hecho generalizaciones del grado a perturbaciones compactas de operadores m-acretivos. Particularmente en [8] Chen desarrolla una teoría del grado para perturbaciones compactas de operadores m-acretivos, el espíritu de este trabajo es recogido por Guan y Kartsatos [12], en donde se desarrolla una teoría de grado para perturbaciones compactas de operadores monótonos maximales. Un tratado sobre perturbaciones compactas y resolventes compactos de operadores acretivos, se puede consultar en Kartsatos [16].

Básicamente el grado que se desarrolla es para operadores del tipo A-C, con A monótono maximal y C compacto, esto también se puede hacer usando los resultados de Brouwer; sin embargo, la aplicación usada por Guan y Kartsatos es más directa, con la ventaja de que este método también se puede usar para establecer la función grado para A-C, donde A es monótono maximal con resolventes compactas y C solamente es continua, y también se usa para perturbaciones compactas A: $D(A)\subset X\rightarrow 2^X$ de tipo m-acretivo y $C:G\rightarrow X$ compacto.

Referencias

1. Amann, H. *Mapping degree on order cones in B-spaces and differential equations*. Arch. Rational Mech. Anal. 24, 82-90. 1967.

2. Amann, H. *A note on degree theory for gradient mappings*. Proc. Amer. Math. Soc.85, 591-595. 1982.

3. Amann, H.-Weiss, S. *On the uniqueness of the topological degree*. Math. Z.130, 39-54. 1973.

4. Azofeifa, C. *Aplicaciones de la teoría de punto fijo*. Tesis M.Sc. U.C.R. San Pedro. 1993.

5 Browder, F. *Uber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann. 70, 161-165. 1912.

6. Brouder, F. *The degree of mapping, and its generalizations*. Contemporary Mathematics 21, 15-41. 1983.

7. Browder, F. *Nonlinear mappings of nonexpansive and accretive type in Banach spaces*. Bull. Amer. Math. Soc. 73, 875-881. 1967.

8. Chen, Y.Z. *The generalized degree for compact perturbations de m-accretive operators and applications*. Nonlinear analysis. TMA.13, 393-403. 1989.

9. Dugundji, J-Granas, A. *Fixed Point Theory*. Vol 1. Polish Scientific Publishers. Warsaw. 1982.

10. Elworthy, K.-Tromba, A. *Degree theory on Banach manifolds*. In: Proc. Sympos. Pure Math. Vol. 18, 1, 86-94. American Mathematical Society, Providence, RI. 1970.

11. Goebel, K-Kirk, W.A. *Topics in metric fixed point theory*. Cambridge Univ. Press. 1990.

12. Guan, Z.-Kartsatos A.G. *A degree for maximal monotone operators. Theory and applications of nonlinear aperators of accretive and monotone type*. Editado por A.G. Kartsatos. Tampa, Florida. Marcel Dekker, Inc. 113-129. 1996.

13. Istratescu, V. *Fixed point theory. An introduction*. D. Reidel Publishing Company. Boston. 1981.

14. Heinz, E. *An elementary theory of the degree of a mapping in n-dimensional space*. J. Math. Mech. 8, 231-247. 1959.

15. Jaffe, A-Taubes, C. *Vortices and Monopoles*. Structure of Static Gauge Theories. Birkhauser. Boston. 1981.

16. Jiang, Tsa-Han. *Fixed Point Theory*. Springer-Verlag. New York. 1985.

17. Kartsatos, A.G. *Recent results involving compact perturbations and compact resolvents of accretive operators in Banach spaces*. Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analysis. Tampa, Florida. 1992. III (1995), Walter De Gruyter, 2197-2222.

18. Kirk, W.A. *Fixed point theory: A brief survey*. Universidad de los Andes. Venezuela. 1990.

19. Krauss, E. *A degree for operators of monotone type*. Math. Nachr. 114, 53-62. 1983.

20. Leray, J.-Schauder, J. *Topologie et equations fonctionelles*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 51, 45-78. 1934.

21. Ma, T. *Topological Degrees for set-valued compact vector fields in locally convex spaces*. PWN. Warsaw. 1972.

22. Mawhin, K. *Topological degree methods in nonlinear boundary value problems*. American Mathematical Society, Providence, RI. 1979.

23. Nagumo, M. *A theory of degree of mapping based on infinitesimal analysis*. Amer. J. Math. 73, 485-496. 1951.

24. Opoicev, V. *Mapping degree and the behavior of control systems*. Pacific J. Math. 13, 1139-1141. 1963.

22. Petryshyn, W.-Fitzpatrick, P. *A degree theory, fixed-point theorems, and mapping theorems for multivalued noncompact mappings*. Trans. Amer. Math. Soc. 194, 1-25. 1974.

26. Rabinowitz, P. *A note on topological degree for potential operators*. J. Math. Anal. Appl. 51, 483-492. 1975.

27. Rabinowitz, P. *Applications of bifurcation theory*. Academic. New York. 1977.

28. Sard, A. *The measure of critical values of differentiable maps*. Bull. Amer. Math. Soc. 48, 883-890. 1942.

29. Schoneberg, R. *A degree theory for semicondensing vector fields in infinite-dimensional Banach spaces and applications*. Nonlinear Analysis 4, 393-405. 1980.

30. Siegberg, H. *Some historical remarks concerning degree theory*. Amer. Math. Monthly 88, 125-139. 1981.

31. Smart, D.R. *Fixed point theorems*. Cambridge Tracts in Mathematics. Great Britain. 1974.

32. Zeidler, E. *Nonlinear Funtional Analysis and its Aplications, Fixed-Point Theorems*. Tomo I. Springer- Verlag. New York. 1986.