Azofeifa, Carlos E.
Aplicación del grado topológico a las ecuaciones diferenciales.
Tecnología en Marcha. Vol. 16 N° 3.

Aplicación del grado topológico a las ecuaciones diferenciales[1]

Carlos E. Azofeifa Z. [2]

Sabemos que tanto el concepto de índice punto fijo como el de grado de una función, son herramientas fundamentales para establecer teoremas de existencia en el análisis funcional no lineal.

Palabras claves

Bifurcación, punto fijo, operador monótono, homotopía, ecuaciones diferenciales.

Resumen

Sabemos que tanto el concepto de índice punto fijo como el de grado de una función, son herramientas fundamentales para establecer teoremas de existencia en el análisis funcional no lineal. En particular queremos mostrar algunas utilidades de estos conceptos en el área de las ecuaciones diferenciales, por ser esta rama de las matemáticas una de las más fecundas en aplicaciones. Además, se quiere rescatar aquellos teoremas y relaciones que muestren la riqueza y potencia de esta teoría, así como establecer las metas logradas y los objetivos por alcanzar.

Introducción

Son conocidas las aplicaciones del teorema de punto fijo de Banach a sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, a ecuaciones integrales lineales y no lineales y, particularmente, a ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales semi-lineales. En la demostración de la existencia de las derivadas para ecuaciones diferenciales en espacios de Banach sobre los valores iniciales y sobre los parámetros, donde se usa el teorema de la función implícita, muchos problemas requieren también la continuidad con respecto a un parámetro. Ésta es la situación:

Por ejemplo para resolver la ecuación operador

$$F(x) = 0 \qquad (*)$$

Una forma importante de hacerlo es introducir dicha ecuación en problemas de *continuum*, es decir

$$G(x,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

en donde el problema se resuelve de manera fácil para t=0; además, el problema es el anterior para el caso t=1. En el caso que sea posible continuar la solución para t=0 a través de t=1, entonces la ecuación (*) se puede

1 Este trabajo forma parte del Proyecto No 114-97-234: "Teoría topológica del punto fijo", inscrito en la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad de Costa Rica.

2 Profesor de la Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. (*cazofeifa@uinteramericana.edu).*

resolver. Este método se llama continuación o prolongamiento con respecto a un parámetro; de hecho, la parte medular consiste en hacer estimaciones a priori sin conocer nada acerca de la existencia real de las soluciones. Básicamente se debe justificar el principio fundamental de existencia, a saber: estimaciones a priori proporcionan existencia de las soluciones y, desde luego, este principio se encuentra estrechamente vinculado con el método del continuo o método del prolongamiento.

El matemático ruso Bernstein (1880-1968) realizó a principios del siglo XX investigaciones fundamentales acerca de los problemas de Hilbert, aplicándolos a cierta clase de ecuaciones diferenciales elípticas no lineales de dos variables. La idea básica aplicada por Bernstein fue la de aplicar el principio anterior. En realidad, la justificación de este principio la presentan en 1934 Leray-Schauder por medio del significado topológico, generalizando la función grado de Brouwer en IR a espacios de Banach de dimensión infinita. De aquí surge el principio analítico funcional de Leray-Schauder, el cual es aplicado en la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales.

Es importante hacer notar que la mayoría de las aplicaciones del grado de una función se basan en el método de prolongación topológica; es decir, el método de homotopía. En particular se mostrará como el índice punto fijo i(T,G) se puede aplicar en muchos resultados importantes concernientes a un operador T, simplemente considerando la homotopía

$$H(x,t)=tT(x)+(1-t)g(x),$$

donde $g=g_i$ y $g_1(x) = x_o$ o $g_2(x) = 2x$. Usando la definición de índice y la propiedad de normalización se tiene $i(g_1,G)=1$, $x_o \in G$ y $i(g_2,G)=(-1)^n$ para $G \subset R^n$ con $0 \in G$.

Las correspondientes proposiciones para el grado de una función son: $\deg(I-x_o,G)=1$ para, $x_o \in G$, y $\deg(-I,G)=(-1)^n$ para $G \subset R^n$ con $0 \in G$.

En particular, trataremos con la teoría de operadores monótonos, la cual fue creada a comienzos de los sesenta por Viusik, Minty y Browder. Esta teoría se puede ver de cierta manera como una extensión de los trabajos de Leray-Schauder y Berstein. Su principal aplicación se da en la obtención de importantes teoremas de existencia para ecuaciones diferenciales no lineales, debido en parte a que muchas ecuaciones diferenciales parciales no lineales de la física matemática corresponden a ecuaciones de operadores monótonos. La idea es reemplazar, en la teoría clásica de Leray-Schauder, compacidad por monotonicidad, de acuerdo con el siguiente principio fundamental de existencia para la solución de una ecuación diferencial:

Prioridad en la producción de estimaciones de existencia

Antes de usar el índice punto fijo de Leray-Schauder como una importante herramienta topológica, presentaremos algunos problemas clásicos relacionados posteriormente con dicha teoría.

Consideremos el problema de valor inicial:

$$x'(t)=f(t,x(t)), \quad x(a)=w, \quad \forall\, t \in [a,b] \qquad (1)$$

donde $x=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. De hecho para $i=1,\ldots,n$ esto constituye un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\lambda_i'(t)=fi(t,\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t)) \quad \lambda_i(a)=\varepsilon_i, \qquad (2)$$

Es claro que si el sistema anterior posee solución única, entonces existe exactamente un punto x(t) en el conjunto solución para cada tŒ [a,b]. Por supuesto que nos interesa observar cuándo falla la unicidad. Las soluciones de (1) se pueden ver como estados de un sistema físico; de ahí nuestro interés en el comportamiento del conjunto de estados {x(t)} en un tiempo t.

Para estudiar (1) tomamos el espacio de Banach $X = C([a,b], R^n)$, es decir si $x \in C([a,b], R^n)$, entonces x es una función continua $x: [a,b] \to R^n$. La norma usada para x es la usual, a saber:

$$\|x\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|$$

Nuestro objetivo se centra en la estructura del conjunto de soluciones de (1), por tanto, se considera a $S=\{x \in X \mid$, x es solución de (1)$\}$ y hacemos las siguientes suposiciones:

1. La función $\phi: [a,b] \times R^n \to R^n$ es continua y además son dados un tiempo inicial t=a y un punto inicial $x \in R^n$.
2. Se escoge b>a de manera que b-a sea lo suficientemente pequeño. Esto es, para R > 0 se escoge M>0 tal que $|\phi(t,x)| \le M$, $\forall$ $t \in [a,c]$ y $|z-x| \le R$, además $a \le b \le c$ y $(b-a)M<R$.

Como bien sabemos, al considerar una ecuación de operador:

$$T(x)=x, \quad x \in G \qquad (3)$$

pequeñas perturbaciones de esta ecuación poseen soluciones únicas, y bajo hipótesis adecuadas el conjunto solución Fix(T) de (3) forma un *continuum*, es decir un conjunto conexo, compacto. Este hecho tiene importantes consecuencias para las soluciones de ecuaciones diferenciales.

Teorema 1 Kneser (1893), Fukuara (1928)[3]

Supongamos que se satisfacen las suposiciones anteriores; entonces el problema de valor inicial (1) posee al menos una solución. El conjunto solución S de (1) es *continuum* no vacío en X. Además, el correspondiente conjunto de estados {x(t)} es un *continuum* no vacío para todo tiempo $t \in [a,b]$.

Demostración

Se puede asumir que z=0, entonces (1) es equivalente a la ecuación integral

$$x(t) = \int_a^t \phi(s, x(s))ds, \quad a \le t \le b$$

Luego la correspondiente ecuación integral de (4) es como (2), donde

$G=\{ x \in X: \|x\| < R\}$

I. Aserto 1: i(T,G)=1.

Comenzamos con $H(x,\tau)= \tau Tx$. Luego para toda solución de la ecuación $x = \tau Tx$, con $(x,\tau) \in G\times[0,1]$; utilizando (4) se tiene

$$\|x\| = \max_{a \le t \le b} \left| \int_t^t \phi(s, x(s))ds \le (b-a)M < \right.$$

Resultando H una homotopía y, por tanto, i(G;T) = i(H(-,0),G) =1

II. La función f se aproxima por medio de f_ε, donde la función f_ε posee componentes polinomiales, por tanto el resultado de aproximar la ecuación integral.

$$x(t) = \int_a^t f_e(s, x(s))ds + y(t)$$

se denotará por $x= T_\varepsilon x+y$, con $x \in R$; si esta ecuación posee solución, ésta será localmente única por la continuidad de

€

3 Este teorema se puede describir como el teorema del valor intermedio para ecuaciones diferenciales.

Lipschitz de f_ε y, por tanto, será única de manera global. Además, el teorema de aproximación de Weierstrass nos da

$$\sup_{x \in G} \|Tx-T_\varepsilon x\|<_\varepsilon$$

III. Utilizando el teorema, resulta que el conjunto S es un *continuum*; si definimos un operador $P:S\to R^n$ por $Px=x(t)$, entonces P es continuo, resultando P(S) también *continuum*. Notamos que para el caso n=1, resulta {x(t)} en un intervalo.

Los sistemas dinámicos tienen muchas aplicaciones; aparecen en ciencias naturales, en economía, en la tecnología, etc.

Problemas de valores en la frontera

En realidad vamos a observar que la resolución de problemas no lineales se convierte en la resolución de ecuaciones integrales no lineales; en efecto, consideremos el problema no lineal de valores en la frontera:

$$-x(t)'' + r(t)x(t) = f(t,x(t)), \quad x(a)=x(b)=0$$

sobre el intervalo]a,b[, con $r: [a,b]\to R^+$. Resulta que esta ecuación diferencial es equivalente a la ecuación integral no lineal:

$$x(s)=\mu\int_a^t K(s,t)f(t,x(t))dt, \quad s\in[a,b],\mu\in IR \quad (5)$$

estableciendo las siguientes condiciones:

1. Las siguientes funciones K: [a,b]¥[a,b]→ R, y f: $R^n x[a,b]\to R$ son continuas, con $a < b\in R$.
2. $K(s,t)\geq 0$, $f(t,x)\geq 0$, $\forall$ $s,t\in R$ y $x\in R^+$.

Al investigar ecuaciones de la forma

$$x-H(\mu,x)=0, \quad \mu\in R, \quad x\in X \quad (6)$$

con el requisito que $H(0,x)=0$, $\forall$ $x\in X$, observamos que el lado izquierdo de (6) es una perturbación de la identidad. Además como un caso especial de (6) se tiene la ecuación:

$$x=\mu F(x), \quad \mu\in R, \quad x\in X \quad (7)$$

Al considerar la componente S del conjunto solución de (6) en R x X, tal que además contiene al punto (0,0).

Ponemos $S^\pm = S \cap (R^\pm \times X)$, de aquí se sigue que $S=S^+\cup S^-$ y $S^+\cap S^- =\{(0,0)\}$. Para el caso que estamos considerando, si X es un espacio de Banach, con $X \neq\{0\}$ y si H: RxX→X es compacta satisfaciendo $H(0,x)=0$, $\forall$ $x\in K$. Entonces por el Teorema de Leray-Schauder, se tiene que la solución componente S de (5) es no acotada, con $(0,0)\in S$, así también de igual manera para S^+ y S^-.

Tomando $X = C([a,b])$ y $J = C^+([a,b])$ un cono ordenado. Si escogemos la función de Green K tal que $K(s,y)\geq 0$, $\forall$ $x\in [a,b]$, entonces usando el teorema de Leray-Schauder para componentes y el hecho de que la función compacta H: RxK→K satisface la condición $H(0,x)=0$, $\forall$ $x\in K$, entonces la solución componente $C^+(K)$ es no acotada. Por tanto, si se cumple la condición 1. entonces la ecuación integral no lineal (5) tiene dos conjuntos no acotados conexos:

$$C^+\subset (R^+ \times C([a,b])) \text{ y } C^- \subset (R^- \times C([a,b]))$$

las cuales contienen la solución nula.

En el caso en que se satisfacen las condiciones 1 y 2 entonces (5) posee un conjunto solución conexo, no acotado $C \subset (R^+ \times C^+([a,b]))$ el cual contiene también la solución nula $\mu=0$, $x=0$ y, por tanto, se satisface la ecuación diferencial dada originalmente con valores en la frontera.

Bifurcación

Los sistemas dinámicos tienen muchas aplicaciones; aparecen en ciencias naturales, en economía, en la tecnología, etc. Para entender el comportamiento cualitativo de esos sistemas, los científicos e ingenieros se basan en dos principios heurísticos fundamentales:

1. Bifurcación estacionaria estable: Pérdida de estabilidad en una posición de equilibrio bajo caminos de un parámetro externo pueden llevar a la bifurcación de una nueva posición estable de equilibrio.
2. Bifurcación de Hopf: Pérdida de estabilidad en una posición de equilibrio bajo un camino de un parámetro externo puede llevar a la bifurcación de nuevas oscilaciones periódicas estables.

Consideramos los sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$y'(t)=F(\mu, y(t)) \qquad (8)$$

además, se tiene la correspondiente ecuación estacionaria:

$$F(\mu, x)=0, \text{ con } \mu\in R, \ x\in R^n \ (9)$$

Las soluciones de (9) son soluciones estacionarias de (8) (Estados de equilibrio).

Aplicaciones a ecuaciones diferenciales

Retomando el problema de valores en la frontera:

$$-x''(t)+ q(t)x(t)=\mu \ \Sigma a_k x(t)^k, \quad k=1,..., \infty,$$
$$\text{sobre }]a,b[, \ x(a)=x(b)=0 \qquad (10)$$

con $\mu,a,b\in R$ y $a < b$.

Hacemos las siguientes suposiciones:

B1 q: $[a,b]\rightarrow R$ es continua y la serie $\Sigma a_k \xi^k$ converge para todo $\xi\in R$, $a_k\in R$, y $a_1>0$.

B2 para $\mu=0$ el problema anterior tiene solamente la solución trivial.

Linealizando el problema para la ecuación (10) por

$$-x''(t)+ q(t)x(t) = \mu \ a_1 x(t),$$
$$\text{sobre }]a,b[, \quad x(a)=x(b)=0 \qquad (11)$$

De manera similar a la ecuación (9), escogiendo el espacio $X=\{x\in C^1([a,b]): x(a)=x(b)=0\}$.

Usando la función de Green K, resulta que la ecuación (10) es equivalente a la ecuación integral

$$x(t)=\mu\int_a^t K(t,s)\sum_{i=1}^{\infty} a_i x(s)^i \, ds \qquad (12)$$

Teoremas asintóticos

Los teoremas de tipo asintótico son aquellos que garantizan la existencia de un punto fijo para un operador T cuando las iteradas T^n poseen ciertas propiedades. En nuestro caso, el interés estará dirigido a la investigación de teoremas de punto fijo de Banach y de Schauder. El hecho de estudiar las iteradas se debe a que el método iterativo $x_{n+1}=Tx_n$ nos lleva a la ecuación $x_n=T^n x_o$.

Esta teoría presenta aplicaciones en otras disciplinas:

- Biología matemática
- Mecánica celeste
- Turbulencia.

Definición 4.1

Sea X un espacio métrico. Se tiene la condición de contracción

$$d(T^n x,T^n y) = kd(x,y), \quad \forall \ x,y \in X$$

Nótese que para n=1 tenemos el clásico teorema de punto fijo de Banach.

€

Teorema 4.1

Sea X un espacio métrico completo y sea $M \subset X$ no vacío y cerrado. Consideremos el operador $T:M \to M$. Si la condición de contracción anterior se satisface para algún $k \in [0,1[$, y para algún $n \in N$, entonces T posee un punto fijo.

Demostración

Si consideramos $\forall x,y \in M$, $d(T^n x, T^n y) = kd(x,y)$, entonces por el teorema de Banach resulta que existe un único $x \in M$ tal que $T^n x = x$. Por otra parte $T^n(Tx) = T^{n+1}x = T(T^n x) = Tx$, y por tanto $Tx = x$.

Para el caso de iteradas y su índice punto fijo, nos preguntamos bajo qué condiciones se cumple la relación

$$i(T^p,G)=i(T,G), \pmod p \tag{13}$$

Teorema 4.2 Zabreico-Krasnoselshii (1971), Steinlein (1972)

La relación anterior (13) se tiene si se cumplen las siguientes relaciones:

1. G es abierto y acotado en el espacio de Banach X.
2. El operador $T: D(T) \subset X \to X$ es compacto y D(T) tiene la propiedad que T^p está definida sobre, G siendo p un número primo mayor o igual a dos.
3. T^p no posee puntos fijos sobre ∂G. Sea Fix el conjunto de puntos fijos sobre G de T^p, entonces $T(Fix) \subset G$.

Algunas generalizaciones del Teorema de punto fijo de Schauder

Recordemos que el Principio General de Punto Fijo se basa en dos condiciones geométricas simples:

(A1) Existe $x_o \in G$ tal que $Tx \neq x_o + \tau > 0$, $\forall \tau > 0$, y $x \in \partial G$, es decir para cada $x \in G$, Tx no es un rayo exterior.

(A2) Sea X un espacio de Banach y $G \subset X$ no vacío y abierto, tal que el operador $T:G \to X$ es compacto.

Cuando se cumplen las condiciones anteriores, es fácil demostrar que f posee un punto fijo (considere la homotopía $H(x,t) = tTx + (1-t)g(x)$, donde $g(x)=x_o$). En forma adicional se verifica que si la condición (A2) se satisface, entonces (A1) será satisfecho y, por tanto, f tendrá un punto fijo sobre si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. *Condición de Roth:* G es convexo y $f(\partial G) \subset G$.
2. *Principio del ángulo agudo:* X es un espacio de Hilbert, $0 \in G$, y además $Re(x-fx|x) \geq 0$.
3. *Principio de Leray-Schauder:* $0 \in G$ y $tTx \neq x$, $\forall (x,t) \in \partial G x]0,1[$.
4. *Condición de Altmann:* $\exists x_o \in G$ tal que $\|Tx - x\|^2 \geq \|Tx - x_o\|^2 - \|x-x_o\|^2$, $\forall x \in \partial G$, en el caso en que T no tenga puntos fijos sobre ∂G, entonces $i(T,G)=1$ en las condiciones anteriores.

Teorema 4.3

Sea X un espacio de Banach y $G \subset X$ abierto, convexo no vacío. Supongamos que $T: X \to X$ es compacto y que para algún primo $p \geq 2$ se tiene $T^k(G) \subset G$, donde $k = p, p+1$. Entonces T tiene un punto fijo sobre G.

Demostración

Por el comentario anterior $i(T^p,G)=1$, y usando el teorema 4.2 se tiene que $i(T,G) \cong 1 \mod(p)$. Consecuentemente $i(T,G) \neq 0$, y por tanto se tiene el teorema.

Corolario, Brouwer 1959

Sea X un espacio de Banach y $T: X \to X$ compacto. Supongamos que $T^n(X)$ es acotado para algún número natural fijo n. Por tanto, T posee un punto fijo.

Demostración

Todos los conjuntos $T^m(X)$ son acotados para $m \geq n+1$, pues T es compacto. Aplique ahora la hipótesis del teorema.

Sistemas dinámicos disipados

Como nuestro interés principal son las aplicaciones a las ecuaciones diferenciales, veamos algunas aplicaciones a sistemas dinámicos disipados. Para ello vamos a considerar el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$x'(t)=f(t,x(t)), \quad x(t) \in R^n \tag{14}$$

Teorema 4.4

Consideremos el sistema disipado (14)[4], el cual posee una solución de período p>0 si:

1. La función f es de período p con respecto a t.
2. Para cualquier valor inicial $x_o \in R^n$ existe una solución única x(.) de (14) con $x(0)=x_o$, la cual existe para cada $t \in [0,\infty[$. Se tiene que x(p) depende continuamente sobre x_o.

Demostración

Consideremos el operador $T: R^n \rightarrow R^n$, definido por $Tx_o=x(p)$, donde x_o es la solución en 2. del teorema. Observemos que $T^2x_o=Tx(p)=x(2p)$, en general se tiene $T^nx_o=x(np)$.

Consideremos a $G=\{x \in R^n: |x|<r\}$, entonces para todo $x \in \bar{G}$, tomando n lo suficientemente grande se tiene que $T^nx_o \in G$, pues el sistema es disipado.

Aplicaciones a ecuaciones diferenciales funcionales en biología matemática se pueden estudiar en [11], [12] y [15], así como el crecimiento de especies bajo condiciones de laboratorio.

Referencias

Amann, H. *Mapping degree on order cones in B-spaces and differential equations.* Arch. Rational Mech. Anal. 24, 82-90. 1967.

Amann, H. *A note on degree theory for gradient mappings.* Proc. Amer. Math. Soc.85, 591-595. 1982.

Brouder, F. *The degree of mapping, and its generalizations.* Contemporary Mathematics 21, 15-41. 1983.

Browder, F. *Nonlinear mappings of nonexpansive and accretive type in Banach spaces.* Bull. Amer. Math. Soc. 73, 875-881. 1967.

Dugundji, J.-Granas, A. *Fixed Point Theory.* Vol 1. Polish Scientific Publishers. Warsaw. 1982.

Elworthy, K.-Tromba, A. *Degree theory on Banach manifolds.* In: Proc. Sympos. Pure Math. Vol. 18, 1, 86-94. American Mathematical Society, Providence, RI. 1970.

Guan, Z.-Kartsatos A.G. *A degree for maximal monotone operators. Theory and applications of nonlinear aperators of accretive and monotone type.* Editado por A.G. Kartsatos. Tampa, Florida. Marcel Dekker, Inc. 113-129. 1996.

Istractescu, V. *Fixed point theory. An introduction.* D.Reidel Publishing Company. Boston. 1981.

Jiang, Tsa-Han. *Fixed-Point Theory.* Springer-Verlag. New York. 1985.

Mawhin, K. *Topological degree methods in nonlinear boundary value problems.* American Mathematical Society, Providence, RI. 1979.

Nussbaum. *Some asymptotic fixed-point theorems.* Trans. Amer. Math. Soc. 171, 349-375. 1972.

Nussbaum. *A global bifurcation theorem with applications to functional differential equations.* J. Funct. Anal. 19, 319-338. 1975.

4 El sistema se llama disipado si existen r, t_o>0, de tal manera que todas las soluciones de (14) cuando $|x(0| \leq r$ siempre implicarán que $\forall\ t \geq t_o$ se tendrá $|x(t)|< r$.

Nagumo, M. *A theory of degree of mapping based on infinitesimal analysis.* Amer. J. Math. 73, 485-496. 1951.

Opoicev, V. *Mapping degree and the behavior of control systems*. Pacific J. Math. 13, 1139-1141. 1963.

Peitgen -Walther, H. *Functional differential equations and approximations of fixed points.* Lectures Notes in Mathematics 730. Springer-Verlag. New York. 1979.

Rabinowitz, P. *A note on topological degree for potential operators.* J. Math. Anal. Appl. 51, 483-492. 1975.

Rabinowitz, P. *Applications of bifurcation theory*. Academic. New York. 1977.

Sard, A. *The measure of critical values of differentiable maps.* Bull. Amer. Math. Soc. 48, 883-890. 1942.

Schoneberg, R. *A degree theory for semicondensing vector fields in infinite-dimensional Banach spaces and applications.* Nonlinear Analysis 4, 393-405. 1980.

Siegberg, H. *Some historical remarks concerning degree theory.* Amer. Math. Monthly 88, 125-139. 1981.

Zeidler, E. *Nonlinear Funtional Analysis and its Aplications, Fixed-Point Theorems.* Tomos I-IV. Springer- Verlag. New York. 1986.