



**Frank Lavagni Bolaños**  
frank.lavagni@gmail.com

*Estudiante de Maestría en Administración de Empresas,  
Instituto Tecnológico de Costa Rica. Bach. Ingeniería Eléctrica  
por la Universidad de Costa Rica.*

**Luis Alberto García González**  
lagarciag@gmail.com

*Estudiante de Maestría en Administración de Empresas,  
Instituto Tecnológico de Costa Rica. Bach. Ingeniería Eléctrica  
por la Universidad de Costa Rica.*

## INTRODUCCIÓN

Un método fundamental para analizar el comportamiento del precio de una acción, o “stock”, ha sido, hasta la fecha, el promedio móvil simple de los datos históricos (SMA por sus siglas en inglés). La mayoría de los proveedores y portales en línea de información bursátil pone a disposición de los inversionistas recopilaciones de datos mensuales, semanales y diarios

sobre los precios de apertura y cierre de las acciones. Por medio de una simple inspección, es posible comprobar que, de hecho, el promedio móvil (en cualquiera de sus modalidades: exponencial, simple o ponderado) tiende a seguir el precio de la acción con cierto retraso cuando el mercado se encuentra “estable”, o cuando se mueve lentamente hacia el alza o la baja, sin darse una fluctuación importante en los precios.

Es probable que la granularidad de esta información permita formar algún criterio cuando se toman decisiones de mediano a largo plazo (aproximadamente de uno a seis meses o incluso más), sin embargo, esto limita mucho la fineza necesaria del inversionista a corto plazo (inversiones de un solo día, por ejemplo). Muchos inversionistas se ven forzados a utilizar promedios móviles con períodos de días, ya sea por la falta de opciones o por desconocer los alcances que tiene hacer estimaciones del precio en intervalos de tiempo cuyo orden de magnitud es menor que el período del SMA.

En este periodo de crisis económica, donde la volatilidad de los precios, la incertidumbre y la desconfianza del mercado inducen a cambios abruptos en el precio a cada segundo que pasa, es necesario cuestionar si resulta útil emplear parámetros estimados a partir de datos muestreados en unidades de tiempo de días o semanas, cuando las decisiones deben tomarse en minutos, como el SMA, por ejemplo. Quien tenga más oportunidad de observar >>

## El beneficio de usar promedios móviles simples de los datos históricos es limitado cuando se usan para tomar decisiones de inversión en plazos muy cortos

>> estos cambios bruscos a corto plazo, o, como se les conoce en la teoría de Procesamiento Digital de Señales (DSP por su siglas en inglés), “componentes de alta frecuencia”, es quien podrá reaccionar con mayor rapidez ante los cambios.

Para responder este cuestionamiento, es necesario acudir a las bases teóricas del muestreo de señales continuas a tiempo discreto<sup>2</sup>, como el análisis de Fourier en el dominio de la frecuencia compleja, la teoría de filtros, el procesamiento digital de señales, la probabilidad de procesos estocásticos, entre otros.

Para tranquilidad del lector, todo se resume en fórmulas, sumas, restas y divisiones que se pueden hacer en una hoja de Excel® sin mayor complicación, aunque demostrar de la teoría que fundamenta estos procedimientos vas más allá del alcance de este artículo.

Esta pequeña introducción nos lleva a plantear dos temas importantes en éste contexto:

- El análisis de Fourier (series de tiempo y espectro en frecuencia) y
- El teorema de muestreo y el ancho de banda de la señal en cuestión.

Ambos conceptos son muy utilizados en muchas disciplinas de ingeniería, física y de carácter científico en general, para la descripción intrínseca de un sistema, así como su respuesta al estímulo externo. Esto brinda un esquema teórico sólido y comprobado que se planea aplicar al estudio del comportamiento del valor de las acciones. Con base en estos principios teóricos, se exponen ciertas limitantes o consideraciones que se deben tener en cuenta a la hora de adquirir los datos, en especial la velocidad de muestreo, la cual depende del nivel de granularidad que se desea obtener.

A continuación se presentan algunos conceptos fundamentales con respecto al análisis espectral (en el dominio de la frecuencia) y al tiempo discreto, con el fin de que el lector saque el mayor provecho de esta lectura.

### CONCEPTOS BÁSICOS

#### Análisis de Fourier y espectro en frecuencia

Esta teoría, aplicada por primera vez por el físico y matemático francés, Joseph Fourier, plantea que, prácticamente, cualquier señal continua en el tiempo, por más compleja que parezca<sup>3</sup>, se puede describir como una suma infinita de ondas (senoidales) o “armónicas”. Esto podría explicarse como una especie de orquesta que toca una sinfonía. Cada instrumento emite un sonido a cierta frecuencia, unos con mayor intensidad que otros, y la suma de todos los sonidos forma la sinfonía cuyo grado de complejidad es mayor que la de los componentes por separado, aunque un oído entrenado pueda reconocer cada uno de los instrumentos.

De manera “generalizada”, cuando se dice que una función está en el

dominio del tiempo, significa que depende del tiempo, y cuando está en el dominio de la frecuencia, la frecuencia se encuentra en el eje de las abscisas en un plano cartesiano (usualmente conocido como eje “x”). La transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia es lo que se conoce como la transformada de Fourier y permite visualizar la repercusión de ciertas frecuencias preponderantes sobre la señal. En el ejemplo de la sinfonía, esto lo constituye el efecto de poder distinguir los instrumentos dominantes gracias a la frecuencia que entona cada uno en un momento dado.

De la descomposición de la señal temporal en sus componentes de frecuencia (o espectro de frecuencia) se pueden deducir eventos periódicos, como, por ejemplo, altibajos que se repiten con cierta regularidad.

#### Ancho de banda de la señal

Una vez transformada la señal al dominio de la frecuencia, es posible suprimir del espectro el efecto del resto de los componentes senoidales, ya que, luego de cierto rango de frecuencias, aportan poco al contenido principal de la señal, es decir, que si se prescindiera de ellos no se pierde mucho del contenido de la señal original. Este valor puede parecer un poco “subjetivo” así que, por convención y por su utilidad en los sistemas de control automático, se asume que la frecuencia de corte es aquella en que la respuesta de frecuencia cae por debajo de 3 dB (decibeles), según el criterio de Bode.

#### Teorema del muestreo

Este teorema propone que “una señal analógica (continua en el tiempo) puede ser enteramente reconstruida a partir de un conjunto de muestras discretas uniformemente espaciadas en el tiempo por un periodo de  $1/2B$  donde  $B$  es el ancho de banda de la señal”<sup>4</sup> (Stremler, 1989). Matemáticamente, el periodo máximo para un muestreo fidedigno debe ser:

$$T = \frac{1}{2B}$$

A este periodo se le conoce como el *periodo de Nyquist* y a su recíproco, *frecuencia de muestra de Nyquist*.

#### Ruido blanco

Es una señal, generalmente indeseable y aleatoria, que se presenta con la misma densidad de potencia en todas las frecuencias y se le llama así por analogía con la luz blanca (que posee todos los componentes de frecuencia con igual proporción de potencia). En la vida real, el ancho de banda del ruido blanco es limitado pero amplio y usualmente cubre el ancho de banda de la señal bajo estudio.

#### Filtro

Es un elemento pasivo (o activo) que elimina el “ruido” o componentes

<sup>2</sup> Un proceso aleatorio en un intervalo finito de tiempo puede clasificarse de varias maneras, sin embargo, la clasificación que nos interesa en este caso muestrea una señal de tiempo continuo en espacios periódicos de tiempo, asumiendo que el valor de los activos de capital se mueven muy rápidamente (y de forma continua en el tiempo) con respecto a la frecuencia de muestreo.

<sup>3</sup> Las tres condiciones básicas para la existencia de la transformada de Fourier son las condiciones de Dirichlet:  $f(t)$  debe ser continua por tramos, tener un número finito de máximos y/o mínimos y cuya área bajo la curva sea menor a infinito.

## Quien pueda observar los cambios bruscos a corto plazo en los mercados accionarios es quien mejor reaccionará y aprovechará las oportunidades

de frecuencia altos, bajos o en un rango específico, si es un filtro paso bajo, paso alto o paso banda, respectivamente. Para efectos prácticos, el promedio móvil simple es uno de los filtros paso bajo más sencillo que existen en DSP.

### Variable aleatoria

Es una variable con propiedades estadísticas (como media y varianza, por ejemplo) que se utiliza en procesos no determinísticos<sup>5</sup> para describir el siguiente estado como un valor esperado de los efectos predecibles del proceso, más un factor aleatorio dependiente de las características mencionadas.

### APLICACIÓN EN BOLSA

El promedio móvil, por definición, es un instrumento con retraso<sup>6</sup> (o lagging en inglés), pero si fuera posible muestrear una tasa de “dato por minuto”, o incluso, “dato por segundo”, se podría contar con mucha más información para reconstruir la señal original que si muestreamos a “dato por día” o “por semana”, por ejemplo. Al aumentar la frecuencia de muestreo y disminuir el periodo, el retraso del promedio móvil se reduce y la estimación se vuelve más cercana al valor real. Existen varias técnicas para seleccionar cuál debe ser el valor del periodo del promedio móvil, sin embargo, por sus buenos resultados para “suavizar datos”, en el pre-filtrado se utilizan periodos que superan, de tres a cinco veces, el periodo de muestra. A modo de ilustración, en la figura 1 se presenta cómo un filtro aplicado sobre la señal

Figura 1: Diagrama de bloques del filtro y su efecto



original puede, en efecto, eliminar en cierta medida “los picos” o componentes de alta frecuencia. Con una señal más refinada y suavizada es posible tomar decisiones con mayor claridad, separando el comportamiento espurio de la tendencia preponderante.

Por otro lado, en la figura 2 se muestra un ejemplo práctico de la vida real. En el cuadro de la izquierda se presenta un muestreo en el tiempo, minuto a minuto, del índice S&P500 de un solo día, correspondiente al 21 de noviembre de 2008, junto con su promedio móvil simple, de periodo 10T, en cuyo caso T es el periodo de muestreo correspondiente a un minuto. El

índice S&P500 se muestra en rojo y el SMA en azul. Nótese cómo el retraso es casi imperceptible y el promedio móvil logra seguir la tendencia principal al minimizar el impacto de las fluctuaciones.

En el cuadro 2 a la derecha, en escala logarítmica, se encuentra el diagrama de magnitud en el dominio de la frecuencia, o espectro de Fourier, de las mismas muestras calculadas con el algoritmo de Turkey y Cooley (1965) para la FFT (Fast Fourier Transform, por sus siglas en inglés).

Se puede observar que los componentes de baja frecuencia, por debajo de 0.02, son los que más aportan a la descripción del índice S&P500, lo cual quiere decir que su efecto se puede observar en el comportamiento de los siguientes minutos (o quizá horas). Sin embargo, hay al menos dos frecuencias (cerca de 0.02 y 0.04) que indican una influencia importante en la señal del tiempo y que podrían indicar un incremento<sup>7</sup> (o decremento) futuro de la señal, por encima de la tendencia principal. Si uno tiene una herramienta computacional que le permita conocer este tipo de datos a la hora de tomar una decisión, podría, incluso, tener un estimado (según los datos validos al momento) de cuándo hacer la transacción de manera óptima, en caso de que la tendencia se mantenga. Desde luego, este momento va a variar conforme cambie el peso de la frecuencia de cada componente, por lo que resulta necesario calcularlo periódicamente y disponer de una herramienta computacional automatizada.

También es posible hacer una especulación acerca del próximo precio si se suma al valor actual del promedio móvil una variable aleatoria (de tipo browniano, por ejemplo), que se mueva con las mismas propiedades estadísticas que el ruido (definido como la resta del dato menos el promedio móvil calculado). De esta manera, es posible estimar la probabilidad de que el precio futuro esté dentro de un rango de precios, y, con base en esa probabilidad, decidir si se toma el riesgo de comprar o vender.

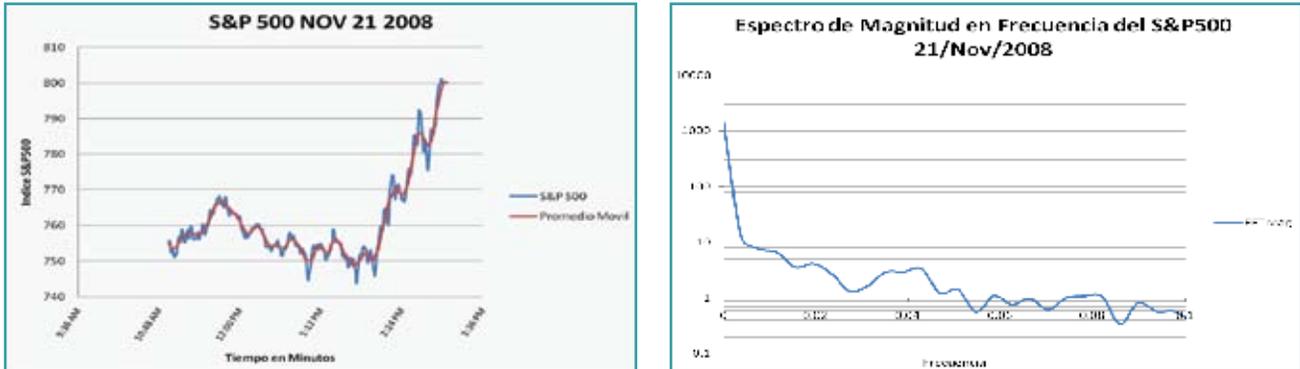
Con respecto al promedio móvil, el lector puede estarse preguntando cómo se utiliza este filtro para tomar decisiones prácticas. Pues hay varias formas ya establecidas<sup>8</sup>. Una de las tácticas más efectivas y conocidas en DSP es colocar dos filtros de promedio móvil en “cascada” (uno después de otro) con periodos de 5T y 3T, respectivamente. Entonces, el dato de salida del primer filtro, cuyo periodo es 5T, es la entrada del segundo, con periodo 3T. Esto permite tener dos ondas suavizadas en sucesión. Cuando el filtro “rápido” (periodo 5T) cruza el PM lento (de 3T) de arriba hacia abajo, es momento de vender, cuando lo cruza de abajo hacia arriba, es momento de comprar. >>

<sup>4</sup> Refiérase a “Introducción a los Sistemas de Comunicación”, de Stremel para más información.

<sup>5</sup> También llamados estocásticos

<sup>6</sup> Esto se debe a que el promedio móvil es, en realidad, un filtro paso bajo. Para más información consulte las referencias sobre Procesamiento Digital de Señales.

**Figura 2: Gráfico en el tiempo y espectro de magnitud en frecuencia de S&P500**

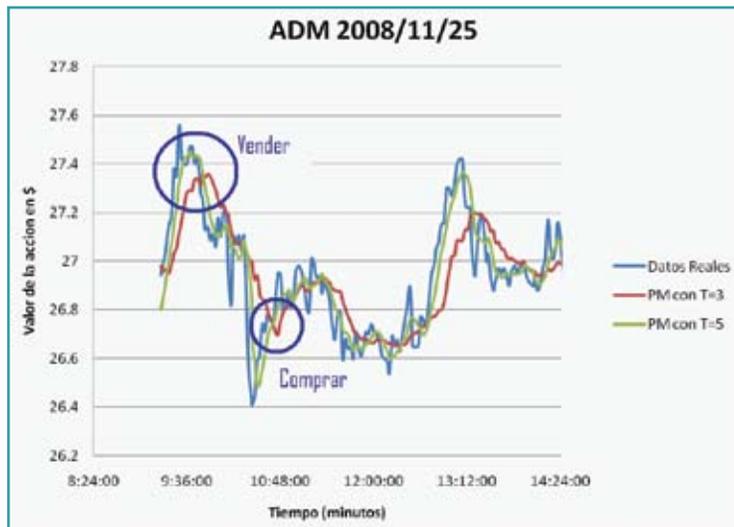


A modo de ejemplo se presenta la aplicación de este algoritmo a la empresa Archer Daniels “NYSE:ADM”, el 25 de noviembre del 2008. Se observa que cerca de las 9:35am, el algoritmo recomendó VENDER hasta cerca de las 10:48, momento en el cual el cruce hacia arriba del promedio móvil de periodo 5T revirtiera la decisión a COMPRAR. Es posible corroborar, gracias al gráfico, que este método es propenso a dar falsas alarmas, por eso se deben “afinar” muy bien los filtros para que el algoritmo tenga alguna utilidad.

**Recomendaciones para la implementación de los algoritmos**

Como se mencionó anteriormente, todas estas estimaciones se pueden realizar desde la versión más reciente de Excel®, usando la herramienta de “Conexiones Predeterminadas” en la pestaña “Datos”, que son macros para adquirir los datos desde dichas conexiones, calcular los promedios móviles y graficar. También, por medio de un “add-in”, es posible incluir el “Análisis de Fourier” en la automatización y manipulación de los datos. Sin embargo,

**Figura 3: Ejemplo filtros en cascada y criterio de decisión.**



el programa presenta otras formas, mucho más elegantes, de recopilar los datos y hacer los análisis, entre ellos los scripts de PERL o las bases de datos. Con respecto a la información, existen muchas formas de obtener datos financieros mediante Internet, pues en varias páginas web se puede ver el precio de las acciones de empresas en las bolsas de valores de los principales mercados del mundo.

También es posible obtener programas comerciales que se conectan a las bolsas de valores a través de Internet, los cuales permiten analizar las tendencias. Sin embargo, muchos de estos programas, poseen limitaciones respecto a la velocidad de muestreo, las cuales impiden efectuar los análisis para las inversiones a corto plazo planteadas en este artículo. Para analizar los datos de la forma deseada, es necesario desarrollar aplicaciones nuevas para obtener la información de Internet en tiempo real y que, automáticamente, hagan los análisis planteados. Una forma muy sencilla de programar aplicaciones de este tipo, es por medio de módulos para finanzas y estadística, los cuales ya fueron desarrollados para este fin en el lenguaje de programación Perl.

Un ejemplo muy utilizado para este fin, es el módulo Finance::Quote<sup>9</sup>, que permite conectarse a gran número de bolsas de valores del mundo y bajar la información en tiempo real. Un programador con algo de experiencia en Perl y bases de datos, podría crear fácilmente una aplicación que monitoree el precio de las acciones minuto a minuto, que emplee los análisis matemáticos y, automáticamente, informe a los usuarios, por mensaje de texto o correo electrónico, el momento óptimo para comprar o vender.

La principal ventaja de Perl es que la programación requerida es mínima, ya que la mayoría de los módulos que se necesitan son de código abierto y sus funciones de adquisición de datos, mensajería (para el envío automático de mensajes), análisis matemático, estadísticos, etc., le permiten al programador concentrarse en el algoritmo en sí, más que en sus periféricos.

El inversionista de corto plazo, utilizando esta información y un poco de criterio personal podría hacer inversiones asumiendo riesgos más bajos.

<sup>9</sup> Según el ángulo de fase asociado a la onda senoidal, el aporte puede ser un incremento o un decremento. Todo diagrama de magnitud tiene asociado un diagrama de fase que, debido a la brevedad de este artículo, se omitió.

<sup>10</sup> Refiérase a la bibliografía para la recopilación de métodos por Alfa-Pari, en su guía para estudio de mercados [en línea].

## Las herramientas para estudiar periodicidades han demostrado su utilidad en el análisis del precio de los activos de capital

### CONCLUSIONES

Las herramientas para estudiar periodicidades han demostrado su utilidad en el análisis del precio de los activos de capital. Aunque esto no es algo novedoso, no fue hasta hace poco que los ingenieros y los financistas combinaron esfuerzos para llegar a un modelo conjunto.

En un mercado donde la información es el arma más valiosa, resulta indispensable conocer acerca de nuevos modelos teóricos que permitan discernir entre las tendencias y las influencias aleatorias. En este artículo se estudió dicho concepto desde el punto de vista de las inversiones cortoplacistas, no obstante puede aplicarse a inversiones con mayores plazos sin ninguna dificultad extra.

Es fundamental contar con herramientas computacionales que le permitan al usuario re-calcular las estimaciones con cada dato que alimenta el historial, con el fin de tener un criterio actualizado a la hora de tomar la decisión.

En el caso concreto de Costa Rica, la oportunidad es enorme por tratarse de un mercado mucho más pequeño que la bolsa NYSE o NASDAQ, y, también, gracias al esfuerzo de la Bolsa Nacional de Valores, pues empezamos a contar con un índice bursátil y datos digitalizados, aunque

aún deben mejorar el acceso automatizado mediante un “socket de software” y la velocidad de muestreo.

### Referencias bibliográficas

Peyton Z, Peebles Jr. “Probability, Random Variables, and Random Signal Principles”, 3ra ed, McGraw-Hill International, 1993. Pag 165

Jackson, Lealand. “Digital Filters and Signal Processing”, 2da ed. Editorial KAP. L ondres, 1995.

Stremler, Ferrel. “Introducción a los Sistemas de Comunicación”, 2da edición, editorial AlfaOmega, 1989, pag 84, 124

AlPari, (2004) “Guía para el análisis de mercados”, Reino Unido, [en línea] Disponible en: <http://www.alpari-idc.com/en/market-analysis-guide/technical-analysis/moving-average.html>

Carr, Peter; Madan, Dilip (1999). NationsBanc Montgomery Securities LLC y Universidad de Maryland, Estados Unidos [en línea]. Disponible en [www.imub.ub.es/events/ssf/vgfrier7.pdf](http://www.imub.ub.es/events/ssf/vgfrier7.pdf)

### RESUMEN:

Este artículo presenta herramientas muy precisas, en especial el análisis de Fourier (Carr y Madan, 1999), que se utilizan en otras disciplinas con resultados prácticos, como la ingeniería, para analizar el comportamiento del precio de las acciones en la bolsa, tanto en inversiones a largo plazo como a muy corto plazo. El concepto es aplicable al estudio de señales digitalizadas así como al mercado de divisas o a la bolsa de valores. Dada la actual crisis económica, es vital conocer la mayor cantidad de información posible a la hora de tomar una decisión de inversión. Mucha de esta información se encuentra en el precio mismo y su historial. Se cuestiona, además, la importancia de la velocidad de muestreo del precio de la acción a la hora de tomar decisiones de inversión de muy corto plazo, así como la de los parámetros calculados sobre estos datos. Con este fin se emplean técnicas usadas en ingeniería para estudiar señales, tales como la transformada discreta de Fourier, los filtros y la teoría de muestreo.

**Palabras Clave:** Análisis de Fourier, FFT, promedio móvil simple, SMA, precio de la acción, stock, inversiones de un día, procesamiento digital de señales, DSP, filtro paso bajo, ancho de banda, teorema del muestreo, tiempo discreto.

### ABSTRACT:

This article presents very precise tools, specifically a Fourier analysis (Carr and Madan, 1999) used with practical results in other disciplines such as engineering, to analyze the behavior of share prices in stock markets, in long as well as in really short terms. The concept is applicable to the study of digital signals as well as in the currency or stock markets. Due to the current economic crisis, it is paramount to know the greatest amount of information in order to make an investment decision. Much of this information is in the share price and its history. The importance of the speed of sampling of share prices at the time of making very short term investment decisions is also questioned, as well as the parameters calculated from these data. To this end techniques used in engineering to study signals, such as the discrete Fourier transform, filters and sampling theory are used.

**Keywords:** Fourier analysis, DFT, simple moving average, SMA, share price, stock, one day investments, digital signal processing, DSP, low pass filter, bandwidth, sampling theorem, discrete time.

<sup>9</sup> Puede encontrar una lista completa de todos los módulos en <http://search.cpan.org/>

<sup>10</sup> El documento original está enfocado en la valoración de opciones mediante la transformada rápida de Fourier.