TEC | Tecnológico de Costa Rica

edepa

Memorias

VII Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

Cartago, Costa Rica, del 16 al 26 de noviembre de 2022

ISBN 978-9930-541-68-5

Editores: Greivin Ramírez Arce y Jennany Ortiz

1. Presentación

La Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica (TEC) organizó el VII **Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos** (EDEPA 7) los días del 19 al 26 de noviembre 2022.

El propósito central del evento fue rescatar, a través de conferencias, talleres, ponencias, reportes de investigación y charlas, entre otras actividades, la importancia que tienen la enseñanza de estos tópicos en un mundo cada vez más competitivo e informatizado. Se contó con aportes pedagógicos sobre probabilidad y estadística, particularmente relacionados con los temas propuestos en los nuevos programas del Ministerio de Educación de Costa Rica.

Al VII EDEPA asistieron 140 participantes y contó con ponentes de los siguientes países de Iberoamérica: España, Chile, Brasil, El Salvador, Argentina y México. Además, se contó con la participantes de estos países.

Las actividades académicas fueron: 6 conferencias, 28 ponencias y 7 talleres.

2. Comité organizador

M.Sc. Giovanni Sanabria Brenes, Instituto Tecnológico de Costa Rica (co-coordinador).
M.Sc. Félix Núñez Vanegas, Instituto Tecnológico de Costa Rica (co-coordinador).
M.Sc. Greivin Ramírez Arce, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
Dr. Jorge Monge Fallas, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
Dr. Jesús Humberto Cuevas Acosta, Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México.

3. Comité científico

Comité científico internacional

- Dra. Carmen Batanero Bernabeu. Universidad de Granada. España
- Dra. María Magdalena Gea Serrano. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.
- Dr. Jesús Humberto Cuevas Acosta. Tecnológico Nacional de México.
- Dr. Ernesto Sánchez Sánchez. Investigador en el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Dra. Carolina Carvalho. Investigadora en el Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal.
- Dra. Silvia Azucena Mayén Galicia. Instituto Politécnico Nacional. México.
- Dra. Gabriele Kaiser. University of Hamburg. Alemania
- Dr. Mario Olguin Scherffig. Universidad San Sebastian. Chile.

- Dr. Hugo Alejandro Alvarado Martínez. Universidad Católica de la Santísima Concepción. Chile
- Dra. Claudia Alejandra Vásquez Ortiz, Pontificia Universidad Católica de Chile, Campus Villarrica.
- Dra. Marcela Alfaro Córdoba. Escuela de Estadística, Universidad de California, Santa Cruz, USA.
- Dr. Jairo Andrés Díaz Rodríguez. Universidad de York, Canadá.
- Dr. Ailton Paulo de Oliveira Júnior. Universidad Federal del ABC. Brasil.
- Dra. Jesús Guadalupe Lugo Armenta. Universidad de Los Lagos. Chile.
- Dr. José Alexandre dos Santos Vaz Martins. Instituto Politécnico da Guarda. Portugal.
- Dr. Jairo Andrés Díaz Rodríguez. Universidad de York, Canadá.
- Dr. Ailton Paulo de Oliveira Júnior
- M.Sc. Ingrith Álvarez Alfonso. Universidad Pedagógica Nacional. Colombia.
- M.Sc. Pedro Ramos. Universidad de El Salvador. El Salvador.

Comité científico local

- Dr. Edwin Chaves. Universidad Nacional. Costa Rica
- Dr. Luis Gerardo Meza Cascante. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Dr. Erick Chacón Vargas. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Dra. Tania Elena Moreira Mora. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Dra. Milena Castro Mora. Escuela de Estadística, Universidad de Costa Rica.
- M.Sc. Giovanni Sanabria Brenes. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- M.Sc. Félix Núñez Vanegas. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- M.Sc. Carlos Monge Madriz, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- M.Sc. Greivin Ramírez Arce. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- MSc. Luis Acuña Prado. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- MSc. Cindy Calderón Arce. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- M.Sc. Nuria Figueroa Flores. Instituto Tecnológico de Costa Rica.

4. Información del VII EDEPA

Se contó con los siguientes medios de comunicación:

Página web: https://www.tec.ac.cr/edepa
Facebook: https://www.facebook.com/EDEPA-341307349313857/
Correo: edepa@itcr.ac.cr
Aviso mediante correo electrónico a personas que han participado en ediciones anteriores del EDEPA (Ver anexo #1)

Teléfono: (506) 2550-2225

5. Objetivos Generales del VII EDEPA

1. Evidenciar los esfuerzos realizados para el mejoramiento de la enseñanza de la estadística, probabilidad y análisis de datos, en primaria, secundaria y nivel universitario.

2. Incentivar al participante a realizar investigaciones cuantitativas utilizando la estadística, la probabilidad y el análisis de datos.

3. Constituir un espacio de crítica, debate y comunicación sobre el estado actual y desarrollo reciente de la investigación en Didáctica de la Estadística, de la Probabilidad y del Análisis de Datos a nivel nacional e internacional.

4. Establecer un grupo de trabajo interesado en fomentar el mejoramiento de la enseñanza de la estadística y probabilidad en primaria y secundaria.

6. Temática del evento

La temática del VII EDEPA incluye los temas propuestos en los nuevos programas del **Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. Además, se incluyen temas a nivel universitario.** Los temas son:

- La resolución de problemas en la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística.
- Generación de una cultura estadística en la comunidad educativa nacional.
- El papel del contexto y de la evaluación en la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística.
- Las creencias y mitos sociales sobre probabilidad y estadística.
- Didáctica de la Estadística.
- Didáctica de la Probabilidad.
- Didáctica del Análisis de Datos.
- Experiencias docentes y propuestas de trabajo en la enseñanza de la probabilidad, la estadística y el análisis de datos.
- Aplicaciones prácticas de la probabilidad, la estadística y el análisis de datos.
- Uso de la tecnología y manejo de paquetes estadísticos.
- Visualización datos y big data.

Idioma oficial: Español

TEC Tecnológico de Costa Rica

edepa7

PROGRAMA DE ACTIVIDADES

" VII encuentro sobre didáctica de la **estadística**, la **probabilidad** y el **análisis de datos.**"

Cartago, Costa Rica. 19 al 26 de noviembre de 2022

Instituto Tecnológico de Costa Rica Escuela de Matemática 2550-2225 edepa@tec.ac.cr

PROGRAMA DE ACTIVIDADES

Sábado 19

Actividad	Nivel	Hora	Modalidad	Enlace/Lugar
Inauguración	General	8:00am a 9:00am	Bimodal	Centro de Artes https://bit.ly/3EAYO14
Conferencia Inaugural:02 Un marco de análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en correlación y regresión mediante criterios e indicadores de valor. Por Dr. María Gea Serrano, Universidad de Granada, España.	General	9:00am a 10:00am	Bimodal	
Receso		10:00am a 10:30am		
Taller:06 Explorando Mathigon para enseñar estadística y probabilidad.	Primaria	10:30am a 12:30pm	Presencial	Adm-Emp: B1-10
Taller:04 Métodos elementales para identificar valores atípicos.	Secundaria		Presencial	Laimi 1: Sala A
Taller:02 Desarrollo de Pruebas de Hipótesis con recursos didácticos tecnológicos.	Universidad		Presencial	Lab C1-06
Conferencia Plenaria:03 Ajuste de curvas para Datos de Covid-19 usando regresión Logística generalizada.	General	2:00pm a 3:00pm	Bimodal	Centro de Artes https://bit.ly/3EAYO14

Lunes 21

Actividad	Nivel	Hora	Modalidad	Enlace/Lugar
Conferencia Paralela:05 El azar y la probabilidad: ¿ son un método natural de generar conocimiento?	Primaria Secundaria	3:00pm a 4:20pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/88386884361
Conferencia Paralela:04 Valores atípicos en estadística. Identificación y tratamiento a edades tempranas.	Universidad		Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/89493900558
Receso		4:20pm a 5:00pm		
Ponencia:01 Propuesta didáctica para la enseñanza de la probabilidad dirigida a estudiantes de sexto año de educación primaria de Costa Rica.	Primaria	5:00pm a 5:40pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/88386884361
Ponencia:08 Un problema de estandarización.	Secundaria		Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/81216895996
Ponencia:18 Problema de la ruina del jugador: oportunidad didáctica para el modelado de fenómenos aleatorios.	Universidad		Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/89493900558
Ponencia:02 Evaluación de las actitudes de profesores de primaria hacia la enseñanza de la probabilidad.	Primaria	5:40pm a 6:20pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/88386884361
Ponencia:09 Una propuesta para introducir la estandarización y la variabilidad relativa mediante el enfoque curricular costarricense.	Secundaria		Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/81216895996
Ponencia:19 Una operacionalización del desarrollo del Pensamiento Algorítmico en estudiantes universitarios de matemática y estadística, y su correlación con otras variables.	Universidad		Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/89493900558

PROGRAMA DE ACTIVIDADES

Martes 22

Actividad	Nivel	Hora	Modalidad	Enlace/Lugar
Ponencia:03 Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria en Chile: contextos y niveles de complejidad semiótica.	Primaria	3:00pm a 3:40pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/88386884361
Ponencia:10 Modelos de Enseñanza de la Matemática: Estudio comparativo entre la metodología de resolución de problemas y la metodología tradicional.	Secundaria	3:00pm a 3:40pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/81216895996
Ponencia:20 Una propuesta de enseñanza para reconstruir conceptos de Estadística Descriptiva con el Análisis de Datos, bajo el modelo TPACK.	Universidad	3:00pm a 3:40pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/89493900558
Ponencia:04 El lenguaje probabilístico de estudiantes de quinto grado de primaria: identificación de fenómenos o experimentos aleatorios.	Primaria	3:40pm a 4:20pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/88386884361
Ponencia:11 El desarrollo del razonamiento probabilístico en estudiantes de bachillerato.	Secundaria	3:40pm a 4:20pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/81216895996
Ponencia:21 Aprendizaje Significativo: La formación cuantitativa en bibliotecología. Factores biológicos y neuroprocesos influyentes.	Universidad	3:40pm a 4:20pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/89493900558
Receso		4:20pm a 5:00pm		
Ponencia:05 Evaluación del conocimiento de estudiantes de quinto año de primaria sobre tablas estadísticas.	Primaria	5:00pm a 5:40pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/88386884361
Ponencia:12 Una secuencia didactica para la nocion de probabilidad clasica en estudiantes de 1ero medio a partir de los registros de representaciones semioticas.	Secundaria	5:00pm a 5:40pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/81216895996
Ponencia:22 Modelo de clustering y recomendador para impulsar uso de tarjeta de crédito.	Universidad	5:00pm a 5:40pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/89493900558
Ponencia:06 La media aritmética en el libro de texto de quinto básico en Chile.	Primaria	5:40pm a 6:20pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/88386884361
Ponencia:13 Una clase sobre la distribución de los números enteros positivos.	Secundaria	5:40pm a 6:20pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/81216895996
Ponencia:23 Alcances y limitaciones de estudiantes universitarios al abordar la prueba de hipótesis desde un enfoque informal.	Universidad	5:40pm a 6:20pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/89493900558

PROGRAMA DE ACTIVIDADES

Miércoles 23

Actividad	Nivel	Hora	Modalidad	Enlace/Lugar
Ponencia:07 Libro interactivo de acceso abierto para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en primaria.	Primaria	3:00pm a 3:40pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/88386884361
Ponencia:14 Medidas de tendencia central desde un enfoque de la matemática realista mediante un ambiente dinámico (OVA).	Secundaria		Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/81216895996
Ponencia:24 Análisis de la Serie Temporal de Hospitalizaciones por COVID-19 en Costa Rica.	Universidad		Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/89493900558
Ponencia:15 Análisis de la organización matemática escolar en torno a los problemas de contar.	Primaria-Secundaria	3:40pm a 4:20pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/88386884361
Ponencia:25 Enseñanza de la estadística en educación superior con estrategias de aprendizaje activo.	Universidad		Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/89493900558
Ponencia:26 Implementación de una feria de probabilidad universitaria como recurso didáctico para la clasificación del razonamiento estadístico.	Universidad		Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/82544039302
Receso		4:20pm a 5:00pm		
Conferencia Plenaria:06 El rol del contexto en la enseñanza de la estadística y la probabilidad en la Educación Primaria.	Primaria	5:00pm a 5:40pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/88386884361
Ponencia:16 La tensión entre conceptos opuestos en la construcción del conocimiento matemático. Lo discreto-continuo.	Secundaria		Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/81216895996
Ponencia:27 Diseño de perfil y test vocacional en las áreas de Computadores, Agrícola y Enseñanza de la Matemática.	Universidad		Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/82544039302
Conferencia Plenaria:06 El rol del contexto en la enseñanza de la estadística y la probabilidad en la Educación Primaria.	Primaria	5:40pm a 6:20pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/88386884361
Ponencia:17 Educación estadística en la formación inicial del profesorado en secundaria.	Secundaria		Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/81216895996
Ponencia:28 Uso de Kaggle en la enseñanza de estadística descriptiva: Una experiencia de clase.	Universidad		Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/82544039302

PROGRAMA DE ACTIVIDADES

Jueves 24

Actividad	Nivel	Hora	Modalidad	Enlace/Lugar
Taller:07 Empoderándonos en didáctica de gestión de datos.	Secundaria Universidad	5:00pm a 7:00pm	Virtual Asincrónico	
Taller:08 Formación docente a partir de un cuento histórico para la enseñanza de la probabilidad en la escuela primaria.	Primaria	5:00pm a 7:00pm	Virtual Asincrónico	

Viernes 25

Actividad	Nivel	Hora	Modalidad	Enlace/Lugar
Taller:08 Formación docente a partir de un cuento histórico para la enseñanza de la probabilidad en la escuela primaria.	Primaria	5:00pm a 7:00pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/88386884361
Taller:07 Empoderándonos en didáctica de gestión de datos.	Secundaria Universidad	5:00pm a 7:00pm	Virtual Sincrónico	https://itcr.zoom.us/j/81216895996

Sábado 26

Actividad	Nivel	Hora	Modalidad	Enlace/Lugar
Taller:03 El muestreo sí sirve: una guía didáctica con excel.	Secundaria	8:00am a 10:00am	Presencial	Laimi 1: Sala A
Taller:05 Implementación de CODAP para la enseñanza de la estadística y la probabilidad.	Secundaria	8:00am a 10:00am	Presencial	Adm-Emp: B1-10
Taller:02 Desarrollo de Pruebas de Hipótesis con recursos didácticos tecnológicos.	Universidad	8:00am a 10:00am	Presencial	Lab: C1:06
Receso		10:00am a 10:30am		
Taller:03 El muestreo sí sirve: una guía didáctica con excel.	Secundaria	10:30am a 12:30pm	Presencial	Laimi 1: Sala A
Taller:05 Implementación de CODAP para la enseñanza de la estadística y la probabilidad.	Secundaria	10:30am a 12:30pm	Presencial	Adm-Emp: B1-10
Taller:02 Desarrollo de Pruebas de Hipótesis con recursos didácticos tecnológicos.	Universidad	10:30am a 12:30pm	Presencial	Lab: C1:06
Conferencia de Clausura				
Conferencia de Clausura:01 Desde la matemática educativa a la matemática aplicada. El caso de la función de distribución uniforme generalizada. Por Carlos Rondero Guerrero, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.	General	02:00pm a 3:00pm	Bimodal	Auditorio D3:01 https://bit.ly/3EAYO14

EXPOSITORES Y CONFERENCISTAS

Día	Actividad	Expositor
Sábado 19	**C:02** Un marco de análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en correlación y regresión mediante criterios e indicadores de valor.	Dr. María Gea Serrano, Universidad de Granada, España.
	T:06 Explorando Mathigon para enseñar estadística y probabilidad.	M.Sc. Carlos Alberto Monge Madriz, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
	T:04 Métodos elementales para identificar valores atípicos.	Dr. Jesús Humberto Cuevas Acosta,Tecnológico Nacional de México, Campus Chihuahua II, México.
	T:02 Desarrollo de Pruebas de Hipótesis con recursos didácticos tecnológicos.	Salomón Chaves Cascante y Rolando Navarro Rodríguez, Casio Académico Costa Rica.
	C:03 Ajuste de curvas para Datos de Covid-19 usando regresión Logística generalizada.	Dr. Mario Alberto Villalobos Arias, Universidad de Costa Rica e Instituto Tecnológico de Costa Rica.
Lunes 21	**C:05** El azar y la probabilidad: ¿ son un método natural de generar conocimiento?	M.Sc. Giovanni Sanabria Brenes, Tecnológico de Costa Rica - Universidad de Costa Rica.
	C:04 Valores atípicos en estadística. Identificación y tratamiento a edades tempranas.	Dr. Jesús Humberto Cuevas Acosta,Tecnológico Nacional de México, Campus Chihuahua II, México.
	P:01 Propuesta didáctica para la enseñanza de la probabilidad dirigida a estudiantes de sexto año de educación primaria de Costa Rica.	Marianela del Carmen Chinchilla Morales y Deily Quesada Sancho Tecnológico de Costa Rica.
	P:08 Un problema de estandarización.	Melania Corrales Mora, Universidad Internacional San Isidro Labrador, Costa Rica.
	P:18 Problema de la ruina del jugador: oportunidad didáctica para el modelado de fenómenos aleatorios.	Maria Cristina Medel Lopez, Gladys Denisse Salgado Suárez , Francisco Solano Tajonar Sanabria,Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.
	P:02 Evaluación de las actitudes de profesores de primaria hacia la enseñanza de la probabilidad.	Ailton Paulo de Oliveira Júnior y Luciene dos Santos Silva, Universidade Federal do ABC, Brasil.
	P:09 Una propuesta para introducir la estandarización y la variabilidad relativa mediante el enfoque curricular costarricense.	Luis Armando Hernández Solís, Universidad Estatal a Distancia.
	P:19 Una operacionalización del desarrollo del Pensamiento Algorítmico en estudiantes universitarios de matemática y estadística, y su correlación con otras variables.	Eduardo Adam Navas López y Pedro Armando Ramos Alberto, Universidad de El Salvador. El Salvador.
Martes 22	**P:03** Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria en Chile: contextos y niveles de complejidad semiótica.	Juan Ignacio Villa-Esparza, Danilo Díaz-Levicoy y Audy Salcedo, Universidad Católica del Maule, Chile.
	P:10 Matemática: Estudio comparativo entre la metodología de resolución de problemas y la metodología tradicional.	Nelson Guzmán Garit y Carlos Corrales Espinoza, Universidad de Costa Rica.
	P:20 Una propuesta de enseñanza para reconstruir conceptos de Estadística Descriptiva con el Análisis de Datos, bajo el modelo TPACK.	Verónica San Román y Susana Beatriz Marrón, Departamento de Matemática. Universidad Nacional del Sur.
	P:04 El lenguaje probabilístico de estudiantes de quinto grado de primaria: identificación de fenómenos o experimentos aleatorios.	Ailton Paulo de Oliveira Júnior, Fátima Aparecida Kian y Luzia Roseli da Silva Santos, Universidade Federal do ABC, Brasil.
	P:11 El desarrollo del razonamiento probabilístico en estudiantes de bachillerato.	Dr. María Gea Serrano, Universidad de Granada, España.
	P:21 Aprendizaje Significativo: La formación cuantitativa en bibliotecología. Factores biológicos y neuroprocesos influyentes.	Milena Castro, Grettel Mora y Wanner Cano, Escuela de Bibliotecología y Ciencias de la Información. Universidad de Costa Rica.
	P:05 Evaluación del conocimiento de estudiantes de quinto año de primaria sobre tablas estadísticas.	Ailton Paulo de Oliveira Júnior, Fátima Aparecida Kian y Luzia Roseli da Silva Santos, Universidade Federal do ABC, Brasil.
	P:12 Una secuencia didáctica para la noción de probabilidad clásica en estudiantes de 1ero medio a partir de los registros de representaciones semioticas.	Juan Pablo Quevedo Martínez, Antonieta Barría Brunettí, Francisca Jaidar Espinaza y Nicolás Sánchez Acevedo, Universidad Alberto Hurtado, Chile.
	P:22 Modelo de clustering y recomendador para impulsar uso de tarjeta de crédito.	Welman Rosa Alvarado, FEDECREDITO, El Salvador.
	P:06 La media aritmética en el libro de texto de quinto básico en Chile.	José H. Parra-Fica,Danilo Díaz-Levicoy, Universidad Católica del Maule y María del Mar López-Martín,Universidad de Almería, España.
	P:13 Una clase sobre la distribución de los números enteros positivos.	Francisco Barrientos, Colegio Saint Francis, Costa Rica.
	P:23 Alcances y limitaciones de estudiantes universitarios al abordar la prueba de hipótesis desde un enfoque informal.	Eleazar Silvestre Castro y Manuel Alfredo Urrea Bernal. Universidad de Sonora, México.

EXPOSITORES Y CONFERENCISTAS

	Actividad	Expositor
Miércoles 23	**P:07** Libro interactivo de acceso abierto para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en primaria.	Carlos Alberto Monge Madriz, Rebeca Solís Ortega, Zuleyka Suárez Valdés-Ayala eIvonne Sánchez Fernández. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
	P:14 Medidas de tendencia central desde un enfoque de la matemática realista mediante un ambiente dinámico (OVA).	Juan camilo Bedoya Alvarez, Johan David Gallego Guzman y Jose Miguel Leon Banguero. Universidad del Valle, Colombia.
	P:24 Análisis de la Serie Temporal de Hospitalizaciones por COVID-19 en Costa Rica.	Samuel Valverde Sánchez, Instituto Tecnológico de Costa Rica. Emanuelle Parra Rodríguez, Ministerio de Educación Pública, Costa Rica.
	P:15 Análisis de la organización matemática escolar en torno a los problemas de contar.	Gisela Juberó Silva, Universidad Autónoma de Barcelona, España.
	P:25 Enseñanza de la estadística en educación superior con estrategias de aprendizaje activo.	Elena Andraus Alfaro, Universidad de Costa Rica.
	P:26 Implementación de una feria de probabilidad universitaria como recurso didáctico para la clasificación del razonamiento estadístico.	Beatriz Adriana Rodríguez González, Judith Alejandra Hernández Sánchez. Universidad Politécnica de Zacatecas, México.
	C:06 El rol del contexto en la enseñanza de la estadística y la probabilidad en la Educación Primaria.	Claudia Alejandra Vásquez Ortiz, Pontificia Universidad Católica de Chile.
	P:16 La tensión entre conceptos opuestos en la construcción del conocimiento matemático. Lo discreto-continuo.	Carlos Rondero Guerrero, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.
	P:27 Diseño de perfil y test vocacional en las áreas de Computadores, Agrícola y Enseñanza de la Matemática.	Alejandra Alfaro Barquero, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
	P:17 Educación estadística en la formación inicial del profesorado en secundaria.	Miguel Ángel Verástegui Gutiérrez, José Iván López Flores y Jaime Israel García García. Universidad Autónoma de Zacatecas, México y Universidad de Los Lagos, Chile.
	P:28 Uso de Kaggle en la enseñanza de estadística descriptiva: Una experiencia de clase.	Gladys Denisse Salgado Suárez, José Rubén Conde Sánchez y Guillermina Sánchez López . Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México y Universidad Autónoma de Puebla, México.
Jueves 24 / Viernes 25	**T:07** Empoderándonos en didáctica de gestión de datos.	Augusta Osorio Gonzales, Miluska Osorio Martinez, Angelica Ramos Rosas, Percy Callinapa Supo y Elizabeth Advincula Clemente. Pontificia Universidad Católica del Perú.
	T:08 Formación docente a partir de un cuento histórico para la enseñanza de la probabilidad en la escuela primaria.	Ailton Paulo de Oliveira Júnior y Fátima Aparecida Kian. Universidade Federal do ABC, Brasil.
Sábado 26	**T:03** El muestreo sí sirve: una guía didáctica con excel.	Luis Rojas Torres, Universidad de Costa Rica.
	T:05 Implementación de CODAP para la enseñanza de la estadística y la probabilidad.	José David Gómez Acuña, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
	T:02 Desarrollo de Pruebas de Hipótesis con recursos didácticos tecnológicos.	Salomón Chaves Cascante y Rolando Navarro Rodríguez, Casio Académico Costa Rica / UISIL).
	C:01 Desde la matemática educativa a la matemática aplicada. El caso de la función de distribución uniforme generalizada.	Carlos Rondero Guerrero, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.

TEC Tecnológico de Costa Rica

edepa 7

Instituto Tecnológico de Costa Rica Escuela de Matemática - 2550-2225 - edepa@tec.ac.cr

CONFERENCIAS

Desde la matemática educativa a la matemática aplicada. El caso de la función de distribución uniforme generalizada.

Carlos Rondero Guerrero[1]

Resumen

Considerando de inicio una investigación en matemática educativa, en donde se logró identificar un operador denominado, media potenciada, que es una generalización de la media aritmética. Posteriormente se logró realizar, a su vez, la generalización de la distribución uniforme usual, correspondiente a una variable aleatoria continua.

De manera que en una siguiente etapa, se identificaron algunas aplicaciones de la uniforme generalizada, a varios modelos estadísticos, para precisamente realizar también sus propias generalizaciones, tales modelos son aplicados a problemas de salud, ingeniería o economía. Se mostrarán ejemplos de tales modelos.

[1] Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.
ronderocar@gmail.com

Un marco de análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en correlación y regresión mediante criterios e indicadores de valor.

María Gea Serrano[1]

Resumen

La investigación en educación estadística aporta resultados que orientan la labor docente tanto de modo general como atendiendo a un contenido en particular. El objetivo de esta conferencia es presentar un marco de análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en correlación y regresión, como resultado de sintetizar aquellos fundamentos que aporta la investigación en modo de criterios e indicadores, según la teoría de idoneidad didáctica propuesta en el marco teórico del enfoque ontosemiótico. Se describen también, de forma resumida, resultados de la aplicación de este marco específico en el análisis de textos escolares y recursos educativos, así como sus posibilidades en cuanto al desarrollo del conocimiento didáctico-matemático del docente.

[1] Universidad de Granada, España
mmgea@ugr.es

Ajuste de curvas para Datos de Covid-19 usando regresión Logística generalizada.

Mario Alberto Villalobos Arias[1]

Resumen

Este tipo de curvas se utilizan para estudiar el crecimiento de la población, en este caso la población de personas infectadas por el virus Covid-19; y también se puede utilizar para aproximar la curva de supervivencia utilizada en estudios actuariales y similares.

El modelo resultante también podría utilizarse para aproximar los casos diarios y otros datos relacionados con la pandemia, como el número de casos hospitalizados y en la UCI. Además, también se propone un método de ajuste para la detección de segundas y posteriores oleadas.

Se presentan ejemplos para algunos países latinoamericanos.

[1] Universidad de Costa Rica e Instituto Tecnológico de Costa Rica.
mario.villalobos@ucr.ac.cr

Valores atípicos en estadística. identificación y tratamiento a edades tempranas

Jesús Humberto [1]

Resumen

Existe un debate sobre el tratamiento de los valores atípicos, la controversia principal reside en los posibles efectos de su eliminación o inclusión en los resultados del análisis estadístico. Su eliminación, puede derivar en una pérdida de datos; su inclusión, generar distorsiones en la selección de métodos para su tratamiento estadístico e interpretación de resultados.

No obstante, la magnitud del debate y las divergencias respecto de las rutas a seguir hacen necesario elaborar estrategias para aceptar la existencia de este tipo de valores en fenómenos de distinta índole; luego, se estará en mejores condiciones de aprender a identificarlos y tratarlos en términos estadísticos. Es probable que la institución escolar constituya el medio más apropiado para realizar lo anterior de manera masiva y articulada.

[1] Tecnológico Nacional de México, Campus Chihuahua II, México
jesus.humberto.cuevas@outlook.com

El azar y la probabilidad: ¿son un método natural de generar conocimiento?

Giovanni Sanabria Brenes[1]

Resumen

En Sanabria (2015), se definieron los niveles de desarrollo para la enseñanza del concepto de probabilidad. El presente trabajo, toma algunos referentes teóricos, reflexiones y resultados de investigaciones realizadas, con el fin de dar sustento y caracterizar el primer nivel: Nivel cualitativo. Estos insumos nos llevan a valorar el azar y la probabilidad como herramientas que permiten generar conocimiento.

Se pretende ver el azar como una forma natural de respuesta a las situaciones que nos generan incertidumbre (las cuales luego puede volverse deterministas), y el aprendizaje busca controlar este azar, si lo controla totalmente hay aprendizaje determinista; pero si no, las probabilidades nos pueden ayudar a obtener conocimiento y orientar decisiones.

[1] Instituto tecnológico de Costa Rica-Universidad de Costa Rica
gsanabria@itcr.ac.cr

El rol del contexto en la enseñanza de la estadística y la probabilidad en la Educación Primaria

Claudia Vásquez[1]

Resumen

Cada vez son más los países que incluyen la estadística en los currículos de las primeras etapas. Con ello, se pretende promover el desarrollo de conocimientos y habilidades que permitan formar a una ciudadanía capaz de interpretar, evaluar críticamente y, cuando sea pertinente, expresar opiniones respecto a la información estadística, los argumentos relacionados con los datos o fenómenos estocásticos.. Esto cobra aún más sentido si se tiene en cuenta que, cada vez de manera más habitual, la población debe enfrentarse a una gran cantidad de datos, lo cual requiere un pensamiento crítico, junto con conocimientos que permitan interpretar los datos para poder tomar decisiones fundamentadas, o bien, distinguir entre aquella información que no es relevante o no se ha comunicado adecuadamente.

Desde este punto de vista, este trabajo se centra en la importancia de promover la enseñanza de la estadística y la probabilidad a partir de contextos reales y cercanos a los estudiantes, con el propósito de contribuir al desarrollo de la alfabetización estadística y probabilística desde edades tempranas. Para ello, se presenta un conjunto de recursos y estrategias a partir de proyectos y ciclos de investigación estadística que permiten contextualizar los contenidos en situaciones interesantes para el alumno e integrar la enseñanza de la estadística dentro del proceso más general de investigación, en lugar de introducir los conceptos y técnicas descontextualizadas, o aplicadas únicamente a problemas tipo, difíciles de encontrar en la vida real.

[1] Pontificia Universidad Católica de Chile.
cavasque@uc.cl

Un Marco de Análisis de Procesos de Enseñanza y Aprendizaje en Correlación y Regresión Mediante Criterios e Indicadores de Idoneidad

María M. Gea[1]

Resumen

La literatura en educación estadística aporta resultados que orientan la labor docente, pero es útil sistematizar el análisis de dichos resultados y ofrecer herramientas teóricas al profesorado que faciliten el diseño de procesos de enseñanza y aprendizaje, así como su reflexión sobre la práctica. En base a las facetas que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico organiza la Teoría de Idoneidad Didáctica para contribuir en este propósito. El objetivo de esta conferencia es presentar un marco de análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en el tema de correlación y regresión en la etapa de secundaria, como guía organizada en criterios e indicadores, fundamentada en la literatura de investigación en el tema y en dicho nivel educativo según el marco teórico propuesto.

Palabras clave: Idoneidad Didáctica, Correlación y Regresión, Procesos de Enseñanza y Aprendizaje.

Abstract

The statistical education literature provides results that guide the teaching work, but it is useful to systematize the analysis of these results and offer to teachers theoretical tools for facilitating the design of the teaching and learning processes, as well as their reflection on practice. Based on the facets that intervene in the teaching and learning processes, the ontosemiotic approach provides the theory of didactic suitability to contribute to this purpose. The objective of this conference is to present a guide organized into criteria and indicators based on the research literature on the subject, according to the proposed theoretical framework for the analysis of teaching and learning processes in correlation and regression.

Keywords: didactic suitability, correlation and regression, teaching and learning processes.

Modalidad: Conferencia

[1] Universidad de Granada, España. mmgea@ugr.es

PONENCIAS

Propuesta didáctica para la enseñanza de la probabilidad dirigida a estudiantes de sexto año de educación primaria de Costa Rica

Marianela del Carmen Chinchilla Morales[1] & Deily Quesada Sancho[2]

Resumen

El presente artículo expone una propuesta didáctica para trabajar con estudiantes de sexto grado de primaria en las edades de los 11 y los 12 años aproximadamente. Se trabajará en dos lecciones de 40 minutos cada una, dicha propuesta estará basada en las habilidades específicas planteadas por el MEP (Ministerio de Educación Pública) de Costa Rica, específicamente en el tema de probabilidad en sexto grado de primaria. Se pretende ampliar la forma en la que se trabajan estas habilidades utilizando el trabajo cooperativo mediante juegos en las lecciones.

[1] Estudiante del Instituto tecnológico, Costa Rica. nelach10@gmail.com
[2] Estudiante del Instituto tecnológico, Costa Rica. deilyquesada308@gmail.com

Evaluación de las actitudes de profesores de primaria hacia la enseñanza de la probabilidad

Ailton Paulo de Oliveira Júnior[1] & Luciene dos Santos Silva[2]

Resumen

En este estudio, traemos una mirada sobre la enseñanza, más específicamente sobre las actitudes hacia la probabilidad de 52 profesores de los primeros años de la Enseñanza Fundamental en Brasil que participaron en un curso de extensión denominado "Formación de profesores a partir de un relato histórico para la enseñanza de la probabilidad". para los primeros años de primaria.

Según Estrada y Batanero (2015) existen escalas para medir actitudes, pero ninguna para medir actitudes en relación a la probabilidad dirigidas a los docentes. Se considera que la medición de estas actitudes es importante para organizar acciones de formación, ya que la probabilidad es un tema nuevo en los primeros años de la escuela primaria.

Destacamos la importancia de evaluar las actitudes de los docentes según la Base Curricular Común Nacional brasileña, cuando indica que la competencia se define como la movilización de conocimientos, habilidades, actitudes y valores para resolver demandas complejas de vida cotidiana, en pleno ejercicio de la ciudadanía y del mundo del trabajo.

Así, aplicamos la escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza (EAPE) de Estrada y Batanero (2015), un instrumento específico para evaluar las actitudes de los docentes hacia la enseñanza de la probabilidad. Sus 28 ítems se estructuran en torno a 7 componentes: (1) afectivo en relación con la probabilidad; (2) cognitiva en relación con la probabilidad; (3) comportamiento en relación con la probabilidad; (4) afectivo en relación con la enseñanza de la probabilidad; (5) didáctica para la enseñanza de la probabilidad; (6) comportamiento hacia la enseñanza de la probabilidad; (7) de valor en relación con la probabilidad y su enseñanza.

Luego de la recolección y tabulación de datos mediante planilla electrónica, migramos los datos al software estadístico PSPP (software libre para el análisis de datos) y realizamos un análisis de los datos utilizando las técnicas de Estadística Descriptiva (frecuencias absolutas y relativas, media y desviación estándar) soportado por el software libre PSPP.

Así, analizando los datos, observamos 17 ítems con una puntuación media superior a 4,0, que pueden ser considerados como los ítems de la escala que indican los aspectos más positivos. Cabe destacar que el ítem mejor evaluado, con un promedio de 4,92, es el número 10, que dice "La probabilidad se debe enseñar en los primeros niveles de educación". El ítem corresponde al componente conductual para la enseñanza de la probabilidad que evalúa la tendencia a la acción y el uso que se hace de la probabilidad, indicando que los docentes comprenden la necesidad de enseñar conceptos probabilísticos desde los primeros años de formación de sus alumnos.

[1] Universidade Federal do ABC, Brasil. ailton.junior@ufabc.edu.br
[2] Universidade Federal do ABC, Brasil. lucieneifsp@hotmail.com

También tenemos en cuenta que todos los ítems son evaluados positivamente, con una media mayor o igual a 2,5. De estos, observamos 4 ítems con puntaje promedio igual o menor a 3.0, indicando una actitud menos positiva según Alvarado, Andaur y Estrada (2018). En este caso, encontramos que el valor promedio más bajo fue el ítem 11, “Me siento intimidado por los datos probabilísticos”, con una puntuación de 2,60 y que está relacionado con el componente afectivo en relación con la probabilidad, es decir, los sentimientos sobre la probabilidad.

Por lo tanto, es claro que los docentes se sienten intimidados cuando tienen acceso a datos probabilísticos al darse cuenta que tienen deficiencias en el dominio de conceptos. Además, se evidencia que el docente considera que la Probabilidad es una tendencia hacia la acción didáctica cuando valora la utilidad y relevancia de la probabilidad en la vida personal y profesional.

Gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria en chile: contextos y niveles de complejidad semiótica

Juan Ignacio Villa-Esparza[1] & Danilo Díaz-Levicoy[2] & Audy Salcedo[3]

Resumen

Este trabajo tiene por objetivo analizar los contextos y los niveles de complejidad semiótica en las actividades que involucran gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria en Chile. Para ello se sigue una metodología de tipo cualitativa, bajo el paradigma interpretativo, con un diseño de estudio de casos y usando el método de análisis de contenido. Para la realización del análisis se contemplaron 6 libros de textos proporcionados por el MINEDUC para la enseñanza de la matemática de estudiantes de 1° a 6° de Educación Primaria, y las unidades de análisis de los contextos definidos en las pruebas PISA y los niveles de complejidad semiótica de los gráficos estadísticos presentes en los libros de texto.

El análisis arrojó que, en cuanto a los tipos de contextos que intervienen en las actividades en que involucran gráficos estadísticos, estos son principalmente son del tipo personal (75,8%), lo que indica que las actividades son cercanas a la vida cotidiana de los estudiantes. En segundo lugar, se encuentra el contexto científico (13,6%), seguido por el contexto social (6%) y finalmente, el contexto menos frecuente es el profesional (4,6%). En lo que respecta al nivel de complejidad semiótica de los gráficos estadísticos presentes en los libros de texto, estos corresponden, en su gran mayoría, al nivel semiótico 3 (representación de una distribución de datos) (81,7%), lo que indica que estas construcciones presentan una distribución de datos, considerando la idea de frecuencia y distribución de frecuencia. Luego, le sigue el nivel semiótico 2 (representación de una lista de datos sin sintetizar una distribución) (12,7%), no observándose la idea de distribución en estas construcciones. Por último, se encuentra nivel semiótico 4 (representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico) (5,6%).

Considerando la importancia de los contextos en las actividades matemáticas, como sugiere la prueba PISA de matemática, estos deberían ser variados, lo cual no se observa en los libros analizados. Sin embargo, se puede destacar que la totalidad de actividades presentes en los libros de texto están contextualizadas, lo cual es de relevancia en el caso de la estadística, ya que esto es fundamental para la interpretación de los datos. Por otra parte, en cuanto al nivel semiótico de los gráficos estadísticos se cubre la casi totalidad de los niveles.

En síntesis, en esta investigación se entregan antecedentes de utilidad a los profesores, debido al uso que hacen del libro de texto, permitiéndoles adaptar las actividades a contextos y niveles semióticos menos frecuentes, con el fin de que los estudiantes se relacionen con distintas situaciones y representaciones propias del día a día.

[1] Universidad Católica del Maule, Chile. ignaciov19@outlook.com
[2] Universidad Católica del Maule, Chile. dddiaz01@hotmail.com
[3] Universidad Católica del Maule, Chile. asalcedo@ucm.cl

El lenguaje probabilístico de estudiantes de quinto grado de primaria: identificación de fenómenos o experimentos aleatorios

Ailton Paulo de Oliveira Júnior[1] & Fátima Aparecida Kian [2] & Luzia Roseli da Silva Santos[3]

Resumen

Buscamos en este trabajo describir y analizar cómo los elementos lingüísticos probabilísticos emergen de los estudiantes del quinto año de la Enseñanza Fundamental, en este caso el concepto de fenómeno o experimento aleatorio, entendido como un lenguaje especializado y sustentado en la Base Nacional Común Curricular - BNCC (Brasil, 2018).

La BNCC indica que el estudio de las probabilidades en los primeros años de la Enseñanza Fundamental tiene como objetivo promover la comprensión de que no todos los eventos son deterministas, y deben ser considerados gradualmente. Además, advierte que es muy común que las personas juzguen hechos imposibles que nunca han visto suceder. Por lo tanto, en esta etapa, es importante que los estudiantes verbalicen, en eventos que involucran el azar, los resultados que podrían haber ocurrido en contraposición a lo que realmente sucedió.

En cuanto a los fenómenos o experimentos aleatorios, consideramos necesario hacer observaciones sobre lo que sucede en determinados momentos para identificar posibles resultados y poder concluir si un resultado es más predecible que los demás. La investigación es exploratoria, con un enfoque cualitativo y cuantitativo a través de un cuestionario proporcionado por Google Forms y analizado por el software IRaMuTeQ (R Interfaz para análisis de cuestionarios y texto multidimensional) para describir y analizar cómo emergen los elementos lingüísticos en el proceso de enseñanza y aprendizaje. de 61 alumnos del quinto año de la Enseñanza Fundamental de una escuela pública de la ciudad de Barueri, São Paulo, en este caso el concepto de fenómeno o experimento aleatorio.

Para lograr el análisis señalado en el ítem referente a los análisis textuales multivariantes, es necesario contar con herramientas que permitan el análisis microscópico de las prácticas probabilísticas puestas en juego en la resolución de las tareas propuestas que buscarán identificar y explicar la multiplicidad de términos utilizadas en la conceptualización de fenómenos o experimentos aleatorios.

La situación presentada en Google Forms fue la siguiente: “Considera la siguiente situación: Sal a la calle y encuentra a un amigo de tu escuela. Escribe una palabra o unas pocas palabras sobre la posibilidad de que ocurra esta situación”.

[1] Universidade Federal do ABC, Brasil. ailton.junior@ufabc.edu.br
[2] Universidade Federal do ABC, Brasil. fatima.kian@ufabc.edu.br
[3] Universidade Federal do ABC, Brasil.. luziaroselidasilvasantos@gmail.com

En el resultado de la Clasificación por el Método de Reinert, el corpus se dividió en dos subcorpus, representando la clase 1 el 46,1% del corpus total y la clase 2 el 53,9%. Por tanto, las dos clases contienen las formas activas o palabras organizadas que presentaron mayor frecuencia, en orden descendente, y que son significativas para representar cada uno de los subcorpus a través de la prueba de asociación chi-cuadrado, es decir, la mayor adherencia de las mismas en la clase y entre las clases.

En la Clase 1, a la que denominamos "Situaciones presentes en las que vivieron o pudieron vivir la situación propuesta", tomando las combinaciones de palabras que presentan una relación significativa, destacamos el siguiente injerto: "Ya me he encontrado con varios amigos en la calle, la posibilidad de que esto vuelva a suceder es bastante alta". En la Clase 2, que denominamos "Uso de términos probabilísticos para explicar la situación propuesta", tomamos las combinaciones de palabras que tienen una relación significativa, se destaca el siguiente injerto: "Muy probable, porque varias personas viven cerca de mí". Los resultados del estudio convergen a lo que indica Vásquez (2018) cuando dice que el lenguaje probabilístico en las edades tempranas y consecuentemente en los primeros años de la escuela primaria tiene una conexión muy estrecha con el lenguaje cotidiano, ya que los primeros elementos lingüísticos forman parte del lenguaje de los estudiantes. Confirmamos que es importante desarrollar actividades que utilicen la representación de conceptos probabilísticos, ya que le permiten al estudiante identificar las situaciones reales propuestas y, gradualmente, asociarlas con el lenguaje probabilístico.

Evaluación del conocimiento de estudiantes de quinto año de primaria sobre tablas estadísticas

Ailton Paulo de Oliveira Júnior[1] & Fátima Aparecida Kian[2] & Luzia Roseli da Silva[3]

Resumen

Partimos de la idea de que la competencia básica necesaria para alcanzar la cultura estadística es, entre otras, es la capacidad de leer e interpretar tablas estadísticas, siendo estos formatos recursos privilegiados para agrupar y sintetizar grandes cantidades de información de forma eficiente y visualmente atractiva.

Este estudio es un estudio exploratorio, con enfoque cualitativo y cuantitativo a través de un cuestionario proporcionado por Google Forms y analizado por el software IRaMuTeQ (R Interfaz para análisis de cuestionarios y texto multidimensional) con el objetivo de identificar el conocimiento sobre tablas estadísticas de los estudiantes, en el quinto año de la Enseñanza Fundamental, de una escuela de Barueri, São Paulo, Brasil, a partir de los conceptos indicados por la Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018). Así, se realizaron análisis textuales multivariados para identificar lo que indicaron 59 estudiantes del quinto año de la Enseñanza Fundamental sobre las tablas estadísticas, utilizando el software IRaMuTeQ. Se utilizó la Clasificación Jerárquica Descendente - CHD, Método de Reinert, que permite la identificación de raíces léxicas, ofreciendo contextos en los que se insertan las clases, según el segmento de texto del corpus de investigación.

En cuanto al conocimiento sobre tablas estadísticas, se dividió el corpus en tres subcorpus, y en un principio se dividió en dos subcorpus, separando la Clase 3 del resto del material, que representa el 41,2% del corpus textual (1ra partición o iteración). En un segundo momento, se dividió el subcorpus, originándose las Clases 1 y 2 que contenían, respectivamente, el 29,4% y el 29,4% del corpus textual (2ª partición o iteración).

Así, en la Clase 3, que llamamos "Ejemplos presentes que justifican la necesidad de construir una mesa", está configurada, por ejemplo, por las indicaciones de la Alumna 33 (10 años, sexo femenino, que le gusta su escuela, pero, no gusta estudiar las matemáticas) al decir que la tabla estadística "Sirve para hacer convocatorias, clasificación, números de convocatorias de alumnos, etc.".

En la Clase 1, que llamamos "Razones presentes para la construcción de una tabla estadística" se configura, por ejemplo, por la indicación de la Alumna 33 (11 años, sexo femenino, que le gusta la escuela y las matemáticas) al decir que las tablas estadísticas "Se usa para mostrar algo, por ejemplo: el resultado de una investigación, cómo son las ventas de una tienda de ropa, cómo es tu desempeño en la escuela, etc.". Finalmente, la Clase 2, que llamamos "Presentación de la estructura formal en la construcción de una mesa", se configura, por ejemplo, por la indicación del Alumno 10 (10 años, varón,

[1] Universidade Federal do ABC, Brasil. ailton.junior@ufabc.edu.br
[2] Universidade Federal do ABC, Brasil. fatima.kian@ufabc.edu.br
[3] Universidade Federal do ABC, Brasil.. luziaroselidasilvasantos@gmail.com

que le gusta su escuela y las matemáticas) al decir que la tabla estadística es la “Representación matricial que está en filas y columnas”.

Los resultados convergen a lo que indica la BNCC en Brasil (2018) y el documento norteamericano, Lineamientos para la Evaluación e Instrucción en la Enseñanza de la Estadística - GAISE I (Franklin et al, 2007), o sea, la necesidad de que el estudiante sea capaz de recolectar, clasificar y representar los datos recolectados a través de tablas estadísticas. Es importante que tengan la percepción y el conocimiento de que para

representar los datos es necesaria una estructura formal para que se presente de forma clara y objetiva.

A partir de la comprensión de este grupo de estudiantes en cuanto a lo que entienden por tablas estadísticas, consideramos que deben partir de situaciones cotidianas, mostrando cómo se estructuran las tablas estadísticas y pedirles secuencialmente que las elaboren y posteriormente las analicen, generando informes de datos.

La media aritmética en el libro de texto de quinto básico en Chile

José H. Parra-Fica[1] & Danilo Díaz-Levicoy[2] & María del Mar López-Martín[3]

Resumen

El currículo chileno establece, en el eje datos y probabilidades, la organización de los contenidos propuestos para quinto año relacionados con la media aritmética. Para esa tarea, el libro de texto es considerado un recurso fundamental tanto para la enseñanza, ejercitación y aplicación de este objeto matemático. Por ello, este trabajo busca analizar las actividades sobre media aritmética presentes en los libros de texto de matemática de quinto año de Educación Básica. Se revisó, mediante un análisis de contenido, en el texto del estudiante y el cuaderno de actividades distribuidos gratuitamente por el Estado en todos los establecimientos, sean estos públicos o particulares subvencionados. Las unidades de análisis consideradas son: 1) tipo de tarea; 2) contexto de la actividad; 3) demanda cognitiva. Los resultados muestran al cálculo como la tarea con mayor presencia en las actividades relacionadas con media aritmética, además, el contexto social y los procedimientos sin conexión como las categorías que prevalecen en estas tareas.

Concluimos que el texto y cuaderno de actividades están alineados a lo propuesto en el currículo nacional. Se destaca la importancia de estos resultados tanto para maestros en formación como en activo en el diseño de las estrategias de enseñanza de la media aritmética en el quinto año de Educación Básica.

[1] Universidad de Almería, España. jparra@ucm.cl
[2] Universidad de Almería, España. dddiaz01@hotmail.com
[3] Universidad de Almería, España.. mdm.lopez@ual.es

Libro interactivo de acceso abierto para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en primaria

Carlos Alberto Monge Madriz[1] & Rebeca Solís Ortega[2] Zuleyka Suárez Valdés-Ayala[3] & Ivonne Sánchez Fernández[4]

Resumen

En esta ponencia se presentará un libro interactivo de acceso abierto sobre el tema de la estadística y la probabilidad para estudiantes del I Ciclo de Educación General Básica de Costa Rica. Este libro es parte de los resultados del proyecto Educación Virtual para Estudiantes de Tercer Grado de Primaria (EVEPRIM 3) de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Para la confección del libro se tomaron todas las consideraciones que los programas de estudio de matemáticas del Ministerio Educación Pública indican, como ejes disciplinares y la metodología de resolución de problemas. Además, se consideraron los resultados obtenidos en investigaciones previas vinculadas con el análisis de libros de primaria disponibles en Costa Rica, en donde se detectaron ciertas deficiencias en torno al uso de la tecnología y aspectos teóricos relacionados con las actividades que se proponen en ellos.

Este libro incluye secciones que relacionan los contenidos con el uso de aplicaciones multimedia (videos de autoría propia, juegos y actividades interactivas en línea, entre otros), problemas con una contextualización activa vinculada con la realidad costarricense. Estos libros son de acceso abierto, por lo que podrán ser utilizados y distribuidos para el uso de estudiantes, padres de familia y docentes.

Palabras Clave

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica. camonge@itcr.ac.cr
[2] Instituto Tecnológico de Costa Rica. rsolis@tec.ac.cr
[3] Instituto Tecnológico de Costa Rica. zsuarez@tec.ac.cr
[4] Instituto Tecnológico de Costa Rica. ivsanchez@tec.ac.cr

Una propuesta para introducir la estandarización y la variabilidad relativa mediante el enfoque curricular costarricense

Luis Armando Hernández Solís[1]

Resumen

El enfoque principal del currículo de matemáticas costarricense (MEP, 2012) es la resolución de problemas en contextos reales, donde se dan dos énfasis: "la resolución de problemas como estrategia metodológica principal y la contextualización activa como un componente pedagógico especial" (MEP, 2012, p. 36). La resolución de problemas y el estilo de la lección tienen como propósito desarrollar conocimientos y habilidades asociadas a ellos, pero especialmente capacidades cognitivas superiores y lo que se denomina competencia matemática general, definida como "una capacidad de usar las matemáticas para entender y actuar sobre diversos contextos reales, subraya una relación de esta disciplina con los entornos físicos y socioculturales y también brinda un lugar privilegiado al planteamiento y resolución de problemas" (MEP, 2012, p. 14).

Por lo tanto, los problemas reales en los que aparecen los entornos físicos y socioculturales juegan un papel crucial; y dado que los datos estadísticos no son simplemente números, sino que están inmersos en un contexto particular, la enseñanza de la estadística se vuelve una herramienta fundamental para el desarrollo de la competencia matemática establecida en el currículo MEP (2012). Esta fue una de las razones por las cuales al área de Estadística y Probabilidad se le dio una mayor relevancia en este currículo; Ruiz (2020) sostiene que "fue planteada para asumir un soporte en el trabajo con los contextos reales en todo el currículo (…) es además un articulador de elementos de las otras áreas." (p. 42). Lo anterior es algo natural de la disciplina, como así lo indican Batanero y Díaz (2011): "la estadística es inseparable de sus aplicaciones, y su justificación final es su utilidad en la resolución de problemas externos a la propia estadística" (p. 21).

De acuerdo a lo establecido en el currículo MEP (2012), la resolución de problemas como estrategia metodológica pretende que la persona estudiante se enfrente a una situación donde se planteen interrogantes, y en el proceso de solución pueda compartir y discutir sus hallazgos y estrategias, logrando así una mayor interacción social y construcción de los significados. MEP (2012, p. 29) define un problema como "un planteamiento o una tarea que busca generar la interrogación y la acción estudiantil utilizando conceptos o métodos matemáticos". Se debe tener claro que una tarea matemática, será un problema o ejercicio, dependiendo de los conocimientos previos del estudiante.

Por otro lado, como el currículo se distancia de la visión equivocada de una "Estadística escolar como colecciones de fórmulas y un manejo mecánico de esos instrumentos" (MEP, 2012, p. 55), se busca con el diseño de problemas estadísticos que la persona estudiante desarrolle destrezas elementales vinculadas con los procesos de análisis de datos y sea capaz de reflexionar más allá de ellos, es decir, comprender el trasfondo de la información que se comunica por medio de los diferentes instrumentos de tratamiento de

[1] Universidad Estatal a distancia, Costa Rica
lhernandez@uned.ac.cr

información.

A partir de lo anterior, se analizarán dos problemas que pretenden introducir el tema de medidas relativas (estandarización y variabilidad relativa) a nivel de undécimo año de Educación Secundaria costarricense (último año de la educación preuniversitaria). Asimismo, se brindarán algunos elementos teóricos referentes a la resolución de problemas y su relación con el currículo costarricense; y a su vez, se expondrán las indicaciones metodológicas y perspectiva general del área de Estadística y Probabilidad.

Modelos de enseñanza en la matemática: estudio comparativo entre la metodología de resolución de problemas y la metodología tradicional

Nelson Guzmán Garit[1] & Carlos Corrales Espinoza[2]

Resumen

El objetivo de este Proyecto de investigación es mostrar evidencias cuantitativas del impacto que tienen dos metodologías de clase, como lo son la de resolución de problemas y la tradicional, en el rendimiento académico de los estudiantes. Para lograrlo se realizó una intervención en el colegio Saint Anthony que es una institución privada en San José de Costa Rica. La población que participó durante el proceso corresponde a 44 estudiantes que cursaban noveno año. El total de los alumnos fue dividido en dos grupos correspondientes a un control y otro experimental que recibieron durante tres semanas, lecciones basadas en las metodologías en cuestión. Previo a la realización de la intervención se desarrolló, desde la teoría, propuestas didácticas basadas en ambas metodologías, las cuales se consultaron con personas experimentadas, con tal de lograr una intervención acorde a los principios de estas. Al ser un estudio con un enfoque cuantitativo se establecieron mediciones que permitieron registrar, acorde al objetivo, el rendimiento previo y posterior del estudiante.

Luego de haber recopilado la información se procedió al registro del mismo para su siguiente análisis de covarianza (ANCOVA), que permitió determinar que la diferencia resultante entre las dos metodologías, en el rendimiento académico del estudiante en general y en los ítems de resolución de problemas no es significativa, pero sí en los ítems de selección única que favoreció a los que recibieron clases bajo la metodología tradicional.

[1] Universidad de Costa Rica. nelson.guzman@ucr.ac.cr
[2] Universidad de Costa Rica. carloscorralesespinoza@gmail.com

El desarrollo del razonamiento probabilístico en estudiantes de bachillerato

María Gea Serrano[1]

Resumen

La probabilidad es un contenido matemático fundamental en la resolución de situaciones donde se requiere tomar decisiones. Su estudio se inicia en la mayoría de países en las primeras edades mediante su significado intuitivo, con principal atención al lenguaje como medio para expresar conceptos, razonamientos o argumentos relativos al azar y la aleatoriedad, así como para organizar la información disponible mediante diferentes representaciones (tablas, gráficos, diagramas, etc.). Los procedimientos relativos al cálculo de la probabilidad se suelen introducir conforme se avanza en el nivel escolar, en dificultad gradual y creciente, atendiendo en las primeras etapas a los significados clásico y frecuencial; mientras que en los niveles educativos superiores previos a la universidad, generalmente en la etapa de secundaria y bachillerato, se profundiza en los anteriores y se introducen los significados axiomático y subjetivo a través de propiedades y teoremas cuya estructura matemática requiere de un razonamiento más formal.

El desarrollo del razonamiento probabilístico del estudiante en cada etapa escolar es, sin duda, una garantía de éxito para el estudio de la probabilidad en la etapa de bachillerato. Aunque, sin entrar en los motivos, las evidencias que ofrece la literatura especializada en este campo de investigación nos informan de los errores que cometen y las dificultades que muestran los estudiantes cuando interpretan enunciados probabilísticos o explican sus razonamientos ante la toma de decisiones en contextos reales.

En esta ponencia se reflexiona sobre las componentes del razonamiento probabilístico según dos marcos de referencia en este campo de investigación y se muestran resultados de su evaluación en una experiencia con estudiantes de bachillerato cuando interpretan situaciones reales fuera del contexto escolar.

[1] Universidad de Granada, España
mmgea@ugr.es

Una secuencia didáctica para la noción de probabilidad clásica en estudiantes de 1ero medio a partir de los registros de representaciones semióticas

Juan Pablo Quevedo Martínez[1] & Antonieta Barría Brunettí[2] & Francisca Jaidar Espinaza[3] & Nicolás Sánchez Acevedo[4]

Resumen

En la investigación de Alguacil, Boqué y Pañellas (2011), se menciona que “la probabilidad no se estudia suficientemente en la educación primaria ni en la secundaria” (p. 288), debido a que se observan dificultades en la concepción de probabilidad en los/as estudiantes por las representaciones semióticas, ya que, tal como menciona Rojas (2012) las dificultades a las que se enfrentan los/as estudiantes se articulan por medio de equivalencias, en el que se presentan grupos, los cuales son el reconocimiento simbólico, anclaje a situaciones, interpretación de estas con el objeto matemático y dificultades de interpretación y apropiación del lenguaje matemático.

Debido a esto, se encuentra un vacío en las investigaciones que relacionen sobre la noción de probabilidad y uso de representaciones semióticas, a partir de esto, nos surge la siguiente pregunta de investigación ¿Cuáles son las características que emergen sobre la comprensión de la noción de probabilidad clásica que tiene los/as estudiantes de primero medio a partir del diseño de una secuencia didáctica con la teoría de representaciones semióticas?

[1] Universidad Alberto Hurtado, Chile. juanpabloquevedomartinez@gmail.com
[2] Universidad Alberto Hurtado, Chile. antonietabarriabrunetti@gmail.com
[3] Universidad Alberto Hurtado, Chile. franciscaantoniajaidar@gmail.com
[4] Universidad Alberto Hurtado, Chile. nsanchez@uahurtado.cl

UNA CLASE SOBRE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

Francisco Barrientos[1]

Resumen

A partir de los Planes de Estudio aprobados en 2012 por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP), se incorporaron las temáticas de Estadística y Probabilidad en los distintos nivel de la educación primaria y media de nuestro país.

A nivel de undécimo año, estos conceptos deberían de haber alcanzado un mayor y mejor nivel de asimilación y comprensión entre el estudiando, especialmente entre los estudiantes que han optado por el proyecto de MATEM (Precálculo y Cálculo) que ofrecen las universidades públicas de nuestro país.

Así, con algunas técnicas elementales del Cálculo Diferencial (específicamente, el cálculo de límites), se pueden profundizar un poco más los conceptos relacionados con el análisis exploratorio de datos cuantitativos.

En mi propuesta, pretendo compartir con otros colegas y por escrito, mi plan de clase sobre el estudio de la distribución de los números enteros positivos (1,2,3,…,n,…) con las técnicas y conceptos estadísticos. Por ejemplo, las medidas de tendencia central (media y mediana), así como algunas medidas de dispersión (coeficiente de variación y desviación estándar de la muestra).

El objetivo principal consiste en que los estudiantes constanten por su cuenta, ciertas consideraciones en torno la "estabilidad" de ciertos estadísticos, cuando la variable "número entero positivo" crece (tiende a infinito).

[1] Colegio Saint Francis, Costa Rica
barrientos_francisco@hotmail.com

Medidas de tendencia central desde un enfoque de la matemática realista mediante un ambiente dinámico (OVA)

Juan Camilo Bedoya Alvarez[1] & Johan David Gallego Guzman[2] & Jose Miguel Leon Banguero[3]

Resumen

Luego de la revisión bibliográfica de trabajos que toman como referencia las medidas de tendencia central (MTC) con la educación matemática realista (EMR), se determinó que existen muy pocas investigaciones, además que se relacionen con el uso de la tecnología el indicador es más bajo. Debido a esto se planteó el objetivo proponer actividades a través de un objeto virtual de aprendizaje (OVA) que promuevan la compresión y significación de las medidas de tendencia central en estudiantes de grado 9° por medio de situaciones realistas. Se realiza un diseño de una secuencia de actividades basada en la trayectoria hipotética de aprendizaje. Esta es una investigación cuasi-experimental con un enfoque cualitativo que trabaja el paradigma sociocultural. Previamente a la implementación del diseño de la secuencia se realiza una prueba piloto con expertos en diseño y con una población pequeña de estudiantes. El diseño de la secuencia promovió el interés, comprensión y significación de las MTC en estudiantes de grado 9°. Asimismo, aporta a una nueva línea de recursos digitales para el desarrollo de la estadística basado en el enfoque EMR.

[1] Universidad del Valle, Colombia. juan.bedoya.alvarez@correounivalle.edu.co
[2] Universidad del Valle, Colombia. johan.gallego@correounivalle.edu.co
[3] Universidad del Valle, Colombia. jose.leon@correounivalle.edu.co

Análisis de la organización matemática escolar en torno a los problemas de contar

Gisela Juberó Silva[1]

Resumen

Recientemente, la combinatoria ha experimentado un desarrollo notable como área de las matemáticas y se ha convertido en clave para el progreso y la creación de muchos otros campos. A pesar de que no existe demasiada investigación en didáctica de las matemáticas sobre su enseñanza, se ha investigado recientemente sobre las ventajas que tendría su estudio en una edad temprana como la adolescencia. Ahora bien, la situación actual de la combinatoria en la educación secundaria de Cataluña tiene un papel secundario, que en el marco de la Teoría Antropológica del Didáctico (TAD), se traduce en términos de limitaciones e incompletitudes de la organización matemática que se propone para su enseñanza. Se parte de la hipótesis de que dichas limitaciones e incompletitudes están relacionadas con la ausencia de un proceso de modelización explícito de las situaciones propuestas que permita caracterizar los elementos del conjunto de objetos a contar.

Siguiendo la metodología de la TAD, proponemos analizar en términos de praxeologías el capítulo sobre combinatoria de un libro de texto de secundaria que consideramos como un caso típico representante de la organización matemática dominante en secundaria en torno a los problemas de contar. Lo comparamos con el capítulo correspondiente de otro libro de texto que presenta este proceso de modelización de forma explícita. El objetivo final es contrastar la hipótesis e identificar si el uso de la modelización matemática, en el caso de la combinatoria, favorece o no un mayor grado de completitud.

[1] Universidad Autónoma de Barcelona, España.
gisela13101@gmail.com

La tensión entre conceptos opuestos en la construcción del conocimiento matemático. lo discreto-continuo

Carlos Rondero Guerrero[1]

Resumen

La tensión existente entre diferentes conceptos de las matemáticas, tiene diferentes manifestaciones, como la literalidad, la univocidad y la equivocidad, lo que conlleva a interpretaciones diversas. En este trabajo se muestran diferentes contextos donde tiene presencia la tensión entre lo discreto-continuo, y algunas de sus manifestaciones en la construcción de conocimiento matemático.

[1] Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.
ronderocar@gmail.com

Educación estadística en la formación inicial del profesorado en secundaria

Miguel Ángel Verástegui Gutiérrez[1] & José Iván López Flores[2] & Jaime Israel García García[3]

Resumen

Este trabajo consiste en un avance de investigación, el cual tiene como objetivo general valorar si la formación de los profesores de matemáticas les permite enseñar estadística en nivel secundaria. De esta manera, se plantea mirar cómo se fomenta un razonamiento estadístico en los profesores de matemáticas normalistas por medio de los programas de los cursos de Tratamiento de la Información, Pensamiento estocástico y Estadística Inferencial (SEP, 2018), en correspondencia con lo que debe enseñar en secundaria, según dicta el plan de estudios de matemáticas en dicho nivel (SEP, 2017).

La pregunta de investigación que se desea responder es ¿Cómo se promueve el razonamiento estadístico en el futuro profesor de secundaria y cómo su formación le permite enseñar estadística a sus estudiantes de nivel secundaria?

En los últimos veinte años, la educación estadística ha evolucionado, por medio de las diferentes investigaciones que se han hecho en cuanto a dicho campo. La literatura especializada señala que una de las áreas en las que la educación estadística tendría que enfocarse más es en la formación de profesores (Hernández et al., 2013). Esto se debe a que en cuanto a su preparación como docente la capacitación para enseñar estadística a sus estudiantes es poca o casi nula (Batanero, 2000). Siendo esta última problemática una de las más importantes por atender.

La escasa formación de profesores de matemáticas en cuanto a la enseñanza de la estadística ha afectado mayormente a los estudiantes de los diferentes niveles educativos, ya que cuando llegan a los niveles universitarios, no tienen los conocimientos ni competencias básicas en estadística (Batanero, 2004).

Pfannkuch y Ben-Zvi (2011) plantean que es necesario que se transforme la formación docente, por medio de un cambio de paradigma que pueda desarrollar el pensamiento estadístico y la comprensión conceptual de los profesores, de forma que sería conveniente los futuros maestros fuesen capacitados en educación o didáctica de la estadística. Además, (Estrella, 2017) señala que la preparación de los profesores que enseñan estadística debe de complementar las ideas estadísticas fundamentales a desarrollar en sus estudiantes.

[1] Universidad Autónoma de Zacatecas, México y Universidad de Los Lagos, Chile. mikee041699@gmail.com
[2] Universidad Autónoma de Zacatecas, México y Universidad de Los Lagos, Chile. jlopez@uaz.edu.mx
[3] Universidad Autónoma de Zacatecas, México y Universidad de Los Lagos, Chile. jaime.garcia@ulagos.cl

Las ideas estadísticas fundamentales son diferentes dependiendo de la postura de cada uno de los autores (Burrill y Biehler, 2011; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Batanero & Borovnick. 2016; National Research Council, 2001) que las han propuesto y también tomando en cuenta el nivel educativo en el que se quieran desarrollar (Salcedo, 2019). Para este trabajo se consideran las ideas de Burril y Biehler (2011): Datos, Variación, Distribución, Representación, Relaciones de asociación y modelado entre dos variables, Modelos de probabilidad para procesos de generación de datos, Muestreo e Inferencia.

Las ideas estadísticas fundamentales ayudan a desarrollar el razonamiento estadístico, el cual se define como "la forma en que las personas razonan con ideas estadísticas y dar sentido a la información estadística" (Ben-Zvi & Garfield, 2004, p. 7).

Será posible mirar el razonamiento estadístico desde el modelo Entorno de Aprendizaje de Razonamiento Estadístico o SRLE, por sus siglas en inglés (Ben-Zvi, 2011). Dicho modelo busca un aula de estadística eficaz y positiva que pueda verse como un entorno de aprendizaje para desarrollar en los estudiantes una comprensión profunda y significativa de la estadística, ayudando también a los estudiantes a desarrollar su capacidad de pensar y razonar estadísticamente (Garfield & Ben-Zvi, 2008). El modelo SRLE cuenta con seis principios pedagógicos: Ideas estadísticas fundamentales, Conjunto de datos, Actividades de clases, Herramientas tecnológicas, Discusión en clase y Evaluación formativa.

En conjunto con el marco referencial que abarca el Modelo SRLE (Ben-Zvi, 2011), el razonamiento estadístico (Ben-Zvi & Garfield, 2004) y las ideas estadísticas fundamentales (Burrill y Biehler, 2011) en conjunto con el marco metodológico de Análisis de Contenido (Bernete, 2013) se mirarán los diferentes programas de estudios de formación del profesor y el plan de estudio de matemáticas para el nivel secundaria (SEP, 2017).

Problema de la ruina del jugador: oportunidad didáctica para el modelado de fenómenos aleatorios

Maria Cristina Medel López[1] & Gladys Denisse Salgado Suárez[2] & Francisco Solano Tajonar Sanabria[3]

Resumen

La ruina del jugador es un problema clásico que plantea un escenario en el que dos participantes inician con un número finito de monedas o fichas, ejecutan partidas de un juego que no permite empates y en el que las probabilidades de ganar que tiene cada jugador permanecen constantes, el problema consiste en determinar la probabilidad de ruina que tiene cada jugador, y la duración esperada del juego bajo tales condiciones. Desde su aparición en el tratado de Huygens en 1657 como el último de una lista de cinco problemas relacionados a dinámicas de juego, capturó la atención de distintos matemáticos, quienes utilizaron diferentes herramientas y análisis para encontrar la solución, desde progresiones geométricas, descomposición de eventos, ecuaciones en diferencia, etcétera. En el presente trabajo se explora su estudio a través de la modelación de la situación de juego, mediante el uso de lenguajes de programación y con el enfoque de probabilidad frecuencial. Siendo esta una oportunidad para que el alumno comprenda mejor el desarrollo de un fenómeno aleatorio, así como el uso de la probabilidad frecuencial (a partir de los datos generados por la simulación) y su relación con las expresiones obtenidas a partir de métodos relacionados al cálculo de probabilidades. Otro aspecto relevante de la práctica propuesta es su relación con temas propios de programación, como la generación de números pseudoaleatorios, el diseño de funciones recursivas y el uso de memoria dinámica, entre otras. Por lo cual representa un ejercicio adecuado en el propósito de incorporar las herramientas de programación en el aprendizaje matemático, favoreciendo el desarrollo interdisciplinar en la enseñanza y aprendizaje de los contenidos de probabilidad, además de que este modelo se puede replicar a otros problemas clásicos.

[1] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. medellcristina@gmail.com
[2] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. gladys008@hotmail.com
[3] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.. ftajonar@fcfm.buap.mx

Una operacionalización del desarrollo del pensamiento algorítmico en estudiantes universitarios de matemática y estadística, y su correlación con otras variables

Eduardo Adam Navas López[1] & Pedro Armando Ramos Alberto[2]

Resumen

Esta investigación cuantitativa constituye un acercamiento a la caracterización del desarrollo del Pensamiento Algorítmico en los estudiantes de las carreras de Licenciatura en Matemática y Licenciatura en Estadística de la sede central de la Universidad de El Salvador, en el período de 2018 a 2020.

Es de diseño no experimental ya que no se controla intencionalmente ninguna variable de los sujetos que componen la muestra. Es de tipo transversal ya que se analizan a todos los sujetos en una única ocasión y no se les da seguimiento en el tiempo. Finalmente, el alcance de esta investigación es correlacional, ya que se realiza una correlación múltiple entre las variables investigadas de los sujetos de la muestra.

Después de realizar la correspondiente revisión de la literatura, se decidió desarrollar una definición operacional propia de Pensamiento Algorítmico, y correspondientemente una propuesta de rúbrica para calcular el nivel de Pensamiento Algorítmico a partir de sus sub-variables para un problema dado.

La recolección de datos consistió en aplicar un instrumento de medición del nivel de desarrollo del Pensamiento Algorítmico a cuatro grupos de alumnos (80 alumnos en total de una población de 252 alumnos activos) de las carreras mencionadas, a medida que los educandos de estas carreras van aumentando su nivel académico de acuerdo al pensum, específicamente a través de las asignaturas que requieren y están relacionadas con la programación de computadoras.

Particularmente se analiza un grupo de alumnos que no haya cursado ninguna materia universitaria sobre informática o programación de computadoras (Grupo P0, constituido por 47 estudiantes), otro grupo que haya aprobado una materia de este tipo (Grupo P1, constituido por 9 estudiantes), otro grupo que haya aprobado dos materias de este tipo (Grupo P2, constituido por 13 estudiantes), y otro grupo que haya aprobado tres materias de este tipo (Grupo P3, constituido por 11 estudiantes), que son todas las posibilidades dados los planes de estudio de las carreras analizadas. Por lo que el tipo de muestra es No Probabilística, seleccionada así por conveniencia para resaltar las etapas académicas que deberían propiciar el desarrollo del Pensamiento Algorítmico más que otras etapas.

Se encontró una correlación moderada entre el avance en el nivel académico y el nivel de desarrollo del

[1] Universidad de El Salvador. eduardo.navas@ues.edu.sv
[2] Universidad de El Salvador. pedroramalberto@gmail.com

Pensamiento Algorítmico. Así mismo no se encontró una correlación significativa entre el nivel de desarrollo del Pensamiento Algorítmico y las notas globales de los estudiantes, ni su edad, ni su género.

Los productos teóricos de este trabajo son: (a) el desarrollo de una definición operacional propia de Pensamiento Algorítmico, (b) su correspondiente rúbrica de evaluación genérica, y (c) la rúbrica específica que fue aplicada.

Una propuesta de enseñanza para reconstruir conceptos de estadística descriptiva con el análisis de datos, bajo el modelo TPACK

Verónica San Román[1] & Susana Beatriz Marrón[2]

Resumen

La estadística irrumpe en todos los campos de la actividad humana. Su aplicabilidad la ha convertido en una ciencia indiscutible que permite describir con exactitud un conjunto de datos proveniente de cualquier disciplina. Por ello, se presenta como una herramienta que permite relacionar y analizar información empleando métodos estadísticos que favorecen las predicciones de valores futuros y colaboran en la toma de decisiones. Los mismos deberían ser usados en todas las etapas de una investigación ya desde el comienzo donde se realiza el diseño del experimento, en la elección de las técnicas de recolección de datos y en la metodología para el análisis de la información, hasta el estudio de los mismos para obtener las conclusiones. Acompañando esta evolución de la estadística como ciencia, resulta necesario incorporarla en la formación integral de la mayoría de las carreras universitarias para fortalecer las competencias específicas en probabilidad y estadística de los futuros profesionales. En el caso particular de los ingenieros es una herramienta que los enriquece en distintos aspectos tales como: diseñar nuevos productos y sistemas, perfeccionar los existentes, y desarrollar mejoras en los procesos de producción.

Por otra parte, analizando las diferentes investigaciones en Didáctica de la Estadística se dejan al descubierto ciertas dificultades recurrentes en el estudiantado. Las mismas están relacionadas con la posibilidad de consolidar el aprendizaje de los conceptos y procedimientos correspondientes tanto al azar como a la estadística. Por lo tanto será preciso experimentar y evaluar métodos de enseñanza adaptados a la naturaleza específica de la estadística que en general no siempre coincide con la cultura tradicional determinista de la matemática.

En este trabajo describimos el diseño para la implementación y el análisis de una secuencia de enseñanza destinada a introducir los conceptos y procedimientos aplicados en Estadística Descriptiva, en la enseñanza universitaria a estudiantes de carreras de Ingeniería, bajo el modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge). El objetivo fundamental es lograr una integración eficiente de las TIC durante la realización del proceso de enseñanza-aprendizaje. En este sentido se fundamentan las decisiones que se tomarán, relacionadas con este perfil profesional, pues el verdadero potencial de la tecnología para transformar el aprendizaje no es facilitar el suministro y consumo de conocimientos, sino permitir que los futuros ingenieros puedan transferir sus conocimientos en el mundo real.

[1] Departamento de matemática, Universidad Nacional del Sur. vsanroman@gmail.com

[2] Departamento de matemática, Universidad Nacional del Sur. beatriz.marron@uns.edu.ar

Aprendizaje significativo: la formación cuantitativa en bibliotecología. factores biológicos y neuroprocesos influyentes

Milena Castro[1] & Grettel Mora[2] & Wanner Cano[3]

Resumen

Objetivo Integrar una didáctica meta-cognitiva desde el proceso matemático, descriptivo, inferencial y bibliométrico, considerando el marco neurológico, fisiológico e informacional, para la formación de bibliotecólogos. Contexto La necesidad de formar meta-cognitivamente en bibliotecología dada la cantidad de información actual. "El siguiente artículo se propone, a partir del análisis de un proceso de investigación sobre el área pedagógica en los planes de formación docente, realizar una invitación a la incorporación del estudio del cerebro humano, como eje dentro de la formación profesional para el ejercicio docente. La capacidad de educabilidad propia de los seres humanos tiene su explicación sobre la base del aporte de distintas disciplinas científicas; sin embargo, en ocasiones hemos focalizado nuestra atención en aspectos psicológicos y filosóficos, sin considerar que lo biológico juega un papel trascendental. Algunas situaciones presentes en el acto cotidiano escolar encuentran su origen en la actividad neuronal humana. Por ello el conocimiento que el docente tenga sobre sus características, potencialidades y, por ende, sobre las implicaciones en los distintos ámbitos de la acción educativa le permite ampliar las fuentes para la toma de decisiones en los procesos pedagógicos. Pensar en el desarrollo profesional del docente, exige crear y promover espacios de construcción del conocimiento acerca de la manera como los seres humanos nos educamos y los elementos que entran en juego en dicho proceso vital. De hecho el ámbito neuronal es uno de ellos, por eso la invitación a su estudio y revisión."

Métodos Partimos de la caracterización del ambiente en el que se desarrolla el estudiante desde su contexto cotidiano, fisiológico y el estado de salud de su cerebro, para el desarrollo de una didáctica integral y que pueda responder a un proceso coherente y derivar

en procesos de aprendizaje significativo. Se da una prioridad a la evaluación formativa, para identificar las oportunidades de crecimiento a nivel de contenido y de neuroprocesos que intervienen y se puedan potenciar. Se describen, comparan e integran ejemplos y resultados de prácticas educativas en los cursos que se imparten dentro del plan de estudios de las carreras de Bibliotecología y Ciencias de la Información y se ubican dentro del área de investigación, de carácter matemático, estadístico y bibliométrico: Métodos Cuantitativos I, Métodos Cuantitativos II y Métodos Cuantitativos III.

Resultados: Hemos observado factores que inciden en la motivación de los estudiantes para elaborar conocimientos cuantitativos. Diferentes formas de organizar los contenidos pueden incidir en mejores

[1] Escuela de Bibliotecología y Ciencias de la Información. Universidad de Costa Rica. milena.castromora@ucr.ac.cr

[2] Escuela de Bibliotecología y Ciencias de la Información. Universidad de Costa Rica. grettel.mora_c@ucr.ac.cr

[3] Escuela de Bibliotecología y Ciencias de la Información. Universidad de Costa Rica. wanner.cano@ucr.ac.cr

evaluaciones y en la resolución de problemas complejos. La construcción de ambientes positivos y seguros en el que el estudiante pueda preguntar con tranquilidad y comodidad es fundamental para que el estudiante elabore sus propias funciones de probabilidad. Esperamos lograr una coherencia entre los diferentes contenidos dados desde el primer año de carrera hasta tercer año y el desarrollo meta-cognitivo del estudiante. La construcción de evaluaciones en las que se observan los procesos neurológicos y como la perspectiva de los estudiantes entra en juego para su propio aprendizaje.

Modelo de clustering y recomendador para impulsar uso de tarjeta de crédito

Welman Rosa Alvarado[1]

Resumen

Estimular el uso de la tarjeta de crédito es un tema muy crucial en una entidad bancaria para alcanzar dentro de su plan estratégico un objetivo primordial, el cual es, el incrementar las estrategias comerciales; sin embargo, realizarlo de manera muy tradicional como generalmente se hace, en la que no existe un sistema que pueda recomendar aquellos comercios más relevantes e idóneos y que el tarjetahabiente pueda ser estimulado para realizar una transacción con su tarjeta de crédito, es el reto en el cual se enmarca este trabajo de investigación. El objetivo que se persigue es crear un modelo de clustering y recomendador que permita estimular el uso de la tarjeta de crédito, y para ello, se realiza mediante la utilización de información propia del cliente, así como también, de la transaccionalidad histórica del uso de la tarjeta de crédito. Se aplican técnicas de inteligencia artificial como análisis de componentes principales para descubrir cuáles son las variables que discriminaran los grupos; además, se aplica el algoritmo de aprendizaje no supervisado clustering HCPC para crear una segmentación de aquellos clientes con características y patrones de consumo similares. Todo con el fin de aplicar el tipo de recomendación de filtrado colaborativo basado en ítem y usuario. Se realiza una evaluación del modelo tanto para el enfoque predictivo así como también, para el enfoque de recomendación, aplicando la técnica de validación cruzada k-fold y validar las recomendaciones que genera el algoritmo, con la finalidad de que los resultados sean precisos y eficientes a la hora de sugerir qué comercios son los más relevantes y estimular de esta manera, el uso de la tarjeta de crédito, concluyendo de forma significativa los objetivos que persigue este trabajo de investigación.

[1] FEDECREDITO, El Salvador
welman_16@hotmail.com

Alcances y limitaciones de estudiantes universitarios al abordar la prueba de hipótesis desde un enfoque informal

Eleazar Silvestre Castro[1] & Manuel Alfredo Urrea Bernal[2]

Resumen

La inferencia estadística, pese a ser una herramienta ampliamente utilizada en la investigación científica y estar presente en la mayoría de los programas universitarios, constituye un complejo entramado de técnicas y conceptos estadísticos y probabilísticos que distan mucho de ser triviales respecto a su enseñanza y aprendizaje. En años recientes, un enfoque o aproximación informal a la inferencia estadística ha evidenciado ser una vía de acceso potencialmente favorable para la mejora de la comprensión del tema; para el caso de la prueba de hipótesis, la aproximación informal se basa en la metodología de Fisher y el uso de simulaciones computarizadas para generar distribuciones muestrales empíricas. No obstante, aun se conoce poco acerca de los factores que condicionan el desarrollo del razonamiento de los estudiantes acerca del concepto en el marco de esta aproximación didáctica, y por tanto sus alcances y dificultades respecto a su aprendizaje.

La presente contribución es un esfuerzo en esta dirección; se presentan resultados parciales de un experimento de enseñanza en el que participaron N=39 estudiantes de la Lic. en Finanzas, que consistió en la implementación de una trayectoria hipotética de aprendizaje cuyo objetivo fue introducir la prueba de hipótesis desde un enfoque informal. Para este reporte, centramos nuestra atención en las tres tareas iniciales de la trayectoria, que trataron sobre: (1) la evaluación, por parte de los estudiantes, de la hipótesis nula de “no diferencia” o “no efecto” a partir de su conocimiento estadístico y contextual, luego a partir de la distribución muestral empírica que la modeliza; (2) la identificación del papel del resultado muestral y el tamaño de muestra en el mecanismo de la prueba; y (3) la realización de la prueba con una hipótesis nula diferente del modelo de no diferencia.

La realización del experimento se llevó a cabo de manera virtual en cinco sesiones de una hora cada una, se recurrió al software Fathom para generar las distribuciones muestrales empíricas y, como evidencias, se recopilaron las hojas de trabajo electrónicas de los estudiantes y se transcribieron los audios de conversaciones suscitadas durante las sesiones de clase. Se utiliza el marco de Case y Jacobbe (2018) para caracterizar e interpretar los alcances y dificultades de los estudiantes con el concepto de la prueba, que se basa en identificar cómo es que se coordinan la perspectiva “del mundo real”, en la que se ubica materialmente la situación inferencial bajo estudio, con la perspectiva hipotética, donde se asume que la hipótesis nula es verdadera; en paralelo, se identifica cómo es que se relacionan los conceptos de población, muestra y distribución muestral durante la realización de la prueba.

Nuestros resultados indican que, inicialmente, la mayoría de los estudiantes evalúa la hipótesis nula de no diferencia bajo el contexto de la perspectiva real de la situación inferencial en cuestión, relegando así el

[1] Universidad de Sonora, México. eleazar.silvestre@unison.mx
[2] Universidad de Sonora, México. manuel.urrea@unison.mx

utilizar su conocimiento estadístico y la lógica de la argumentación indirecta. La influencia de esta perspectiva es significativa ya que, disponiendo de la distribución muestral empírica que modeliza la hipótesis nula, los estudiantes tienden a interpretarla como el resultado de un ejercicio real de replicación de la situación inferencial bajo estudio. No obstante, en un segundo momento, varios logran desprenderse de esta perspectiva e identifican el papel de la distribución muestral, el resultado experimental y el tamaño de muestra en el esquema de la prueba, evidenciando así el desarrollo de la noción de una proto-prueba de hipótesis. Finalmente, en un tercer momento se identifica que, si bien el desempeño de los estudiantes mejora con su paso por las tareas de la trayectoria, el cálculo del p-valor, la conclusión de la prueba y el cambio de tipo de hipótesis nula pueden representar obstáculos significativos para que consoliden su noción de proto-prueba de hipótesis. Se concluye el trabajo con reflexiones acerca de los alcances y limitaciones de los estudiantes en su aprendizaje sobre el tema y también con recomendaciones para su enseñanza.

Análisis de la Serie Temporal de Hospitalizaciones por COVID-19 en Costa Rica

Samuel Valverde Sánchez[1] & Emanuelle Parra Rodríguez[2]

Resumen

Este trabajo consiste en un análisis exploratorio y el ajuste de un modelo univariado que sea óptimo para la serie de Hospitalizaciones por COVID-19 en Costa Rica, con una ubicación temporal del 01 de mayo de 2020 al 30 de mayo de 2022, para un número de observaciones de 759 días. Los datos de este proyecto provienen del Observatorio del Desarrollo de la Universidad de Costa Rica, el cual obtiene los datos directamente del Ministerio de Salud de Costa Rica (fuente oficial). Primero se presenta un análisis exploratorio de la serie, donde se destacan algunas propiedades como la tendencia, estacionalidad, estacionariedad, autocorrelaciones, descomposiciones aditivas y multiplicativas. Posteriormente, se presentan algunos modelos de series temporales para ajustar la serie en cuestión, que incluye los diagnósticos principales para su validación, además de pronósticos y comparaciones mediante distintas métricas de los errores resultantes. Específicamente, se trabajó con la metodología de modelos SARIMA (Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average) del enfoque de Box-Jenkins, y a su vez, se desarrolló un análisis de variancia condicional en la serie, por medio de un modelo de ajuste GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedastic) y sus extensiones EGARCH (Exponential GAGRCH) y TGARCH (Threshold GARCH). La implementación de los análisis estadísticos de este estudio se llevó a cabo mediante el lenguaje de programación R.

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica.. savalverde@itcr.ac.cr
[2] Ministerio de Educación Pública, Costa Rica. emanuelle.parra.rodriguez@mep.go.cr

Enseñanza de la estadística en educación superior con estrategias de aprendizaje activo

Elena Andraus Alfaro[1]

Resumen

A pesar de que las estrategias de enseñanza de aprendizaje activo han probado ampliamente su efectividad, comparadas con la enseñanza tradicional (magistral), todavía no hay una clara aplicación de las mismas en los cursos de la Escuela de Estadística de la UCR. En un estudio previo realizado por la Comisión de Docencia de dicha U.A. se mostró que la mayoría de las estrategias utilizadas por los docentes corresponden a métodos de enseñanza tradicional.

En esta investigación se propone, en primer lugar, realizar un diagnóstico con los docentes de la Escuela de Estadística tanto de cursos de carrera como de cursos de servicio para identificar y categorizar las técnicas de aprendizaje que aplican en sus clases, así como su frecuencia de utilización, comparada con estrategias tradicionales. En esta fase de la investigación también se establecerán cuáles son las percepciones de los docentes sobre la naturaleza del aprendizaje activo y las condiciones en las que se debe aplicar.

Una vez realizado este diagnóstico y a partir del marco de referencia teórico y metodológico sobre el que se basa el aprendizaje activo, se diseñará una propuesta pedagógica para ser puesta a prueba con un diseño experimental. Los contenidos que se trabajarán en dicha propuesta se refieren a temas complementarios del curso de Estadística para Ciencias Sociales I.

Dado que no es adecuado trabajar directamente con cursos regulares, puesto que la evaluación en el aprendizaje activo también cambia, se propone crear un curso de extensión gratuito dirigido a estudiantes de la carrera de Ciencias Sociales voluntarios, tratando temas de análisis estadístico de importancia particular para la investigación social.

Los estudiantes participantes se aleatorizarán en dos grupos, uno recibirá los contenidos bajo las estrategias tradicionales y el otro bajo las estrategias de aprendizaje activo.

Para el análisis de los datos se utilizarán modelos mixtos bayesianos, incluyendo covariables de los estudiantes que pueden afectar el rendimiento en los exámenes.

[1] Universidad de Costa Rica.
elena.andraus@ucr.ac.cr

Implementación de una feria de probabilidad universitaria como recurso didáctico para la clasificación del razonamiento estadístico

Beatriz Adriana Rodríguez González[1] & Judith Alejandra Hernández Sánchez[2]

Resumen

El razonamiento estadístico ha sido una herramienta para determinar la forma de razonar de las personas estadísticamente, a través de tareas, prácticas o actividades que permiten clasificar el tipo de pensamiento, con el objetivo de perfeccionar las prácticas que contribuyen a desarrollar un pensamiento estadístico. Para Estrella (2017), el razonamiento estadístico puede conectar un concepto a otro, o puede combinar ideas acerca de los datos y el azar. Según la autora, este razonamiento significa también comprender y ser capaz de explicar e interpretar de forma cabal los procesos y los resultados estadísticos.

[1] Universidad Politécnica de Zacatecas, México. brodriguez@upz.edu.mx
[2] Universidad Politécnica de Zacatecas, México. judith700@hotmail.com

Diseño de perfil y test vocacional en las áreas de Computadores, Agrícola y Enseñanza de la Matemática

Alejandra Alfaro Barquero[1]

Resumen

La investigación buscó diseñar y evaluar una prueba de preferencias vocacionales para las carreras de Ingeniería en Computadores, Ingeniería Agrícola y Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos, del Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR). Participaron 13 docentes y 435 estudiantes, con edad promedio de 20.74 años, 63.2 % hombres y 36.8% mujeres. Se elaboró el perfil vocacional por disciplina y se revisó y validó con expertos. El documento resultante sirvió de base para elaborar el instrumento vocacional. Posteriormente, se evaluaron las propiedades psicométricas del mismo con análisis factoriales, obteniendo indicadores de bondad de ajuste adecuados. La prueba incluyó la escala de habilidades generales e intereses y tareas por carrera. Se evidenció la existencia de perfiles vocacionales para cada disciplina y quienes mostraron mayor afinidad con el perfil de su carrera evidenciaron mayor satisfacción vocacional.

[1] Instituto tecnológico de Costa Rica
alealfaro@itcr.ac.cr

Uso de Kaggle en la enseñanza de estadística descriptiva: Una experiencia de clase

Gladys Denisse Salgado Suárez[1] & José Rubén Conde Sánchez[2] & Guillermina Sánchez López[3]

Resumen

En el presente trabajo se expone una experiencia de clase en la enseñanza de la estadística descriptiva en estudiantes de la materia de Adquisición y Procesamiento de Datos Experimentales de la licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (FCFM-BUAP) en Puebla, México, a través del uso de datasets de la plataforma Kaggle, la cual dispone datos de libre utilización. El objetivo es aprovechar la experiencia que los estudiantes han ido adquiriendo en el uso de las herramientas tecnológicas como el uso de la computadora, laptop o teléfonos inteligentes y la accesibilidad a la información dispuesta en el internet para poder acceder a datos reales que generen mayor interés en los alumnos y poder emplearlos para el aprendizaje de los conceptos básicos de estadística descriptiva en el nivel de licenciatura empleando datasets ofrecidos por Kaggle.

[1] Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México y Universidad Autónoma de Puebla, México. gladys.salgado@udlap.mx
[2] Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México y Universidad Autónoma de Puebla, México. ruben.conde@correo.buap.mx
[3] Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México y Universidad Autónoma de Puebla, México. guillermina.sanchez@correo.buap.mx

TALLERES

Desarrollo de pruebas de hipótesis con recursos didácticos tecnológicos

Salomón Chaves Cascante[1] & Rolando Navarro Rodríguez[2]

Resumen

La Estadística es una de las ramas de la Matemática con más aplicaciones en otras áreas del saber. Prácticamente todas las asignaturas, incluyendo las que pertenecen a las ciencias sociales, hacen amplio uso de las herramientas y bondades de la Estadística tanto a nivel descriptivo como inferencial. Esto se ve directamente reflejado en el plan de estudios de una basta cantidad de carreras universitarias en la que suelen incluirse al menos un curso de Matemática Básica y uno o dos cursos de Estadística.

Sin embargo, esto podría convertirse en el talón de Aquiles para muchos estudiantes que enfrentan dificultades con estas materias. Especialmente con Estadística Inferencial, donde la complejidad de los procedimientos se ve aumentada al entrar en juego las fórmulas y las tablas de las distribuciones de probabilidad.

La propuesta está dirigida a docentes de Matemática a nivel universitario o Bachillerato Internacional y consiste en un taller enfocado en el desarrollo de Pruebas de Hipótesis mediante el uso de herramientas tecnológicas que facilitan y aceleran los procedimientos algorítmicos, brindan distintas representaciones y favorecen la comprensión de las ideas detrás de las pruebas.

El desarrollo de taller incluye una fase de familiarización de los participantes con la calculadora Casio Classwiz FX 570/FX 991 y su emulador, así como con la vista de "Cálculos de Probabilidad" de GeoGebra. Posteriormente se desarrollarán ejercicios prácticos que potencien la comprensión por parte de los participantes y evidencien el potencial de las herramientas utilizadas.

[1] CASIO académico, Costa Rica.
[2] CASIO académico, Costa Rica. rolnava@gmail.com

El muestreo sí sirve: una guía didáctica con excel.

Luis Rojas Torres[1]

Resumen

El uso de las muestras aleatorias es un tema muy común en los noticieros, no obstante, muchos espectadores desconfían de su efectividad. El objetivo de este taller es presentar una metodología para la enseñanza del muestreo simple aleatorio, enfocada en mostrar la efectividad de esta técnica. El taller consistirá en usar el software excel para seleccionar muestras aleatorias de bases de datos públicas y verificar cómo el promedio de las muestras se "acerca" al promedio poblacional. También se utilizarán estas muestras aleatorias para introducir los conceptos de margen de error e intervalos de confianza. Por último, se analizará el problema de cuál es el tamaño de muestra necesario para algunos estudios.

[1] Universidad de Costa Rica.
luismiguel.rojas@ucr.ac.cr

Métodos elementales para identificar valores atípicos

Jesús Humberto [1]

Resumen

En la Teoría Estadística, es habitual encontrar diversas acepciones respecto del término valor atípico. En la inmensa mayoría, se hace alusión a uno o más datos que se alejan en términos numéricos del resto. Es difícil identificar las causas que los originan, algunas están asociadas a errores en el procedimiento de recopilación y registro, otras a eventos extraordinarios, algunas más a causas desconocidas.

Actualmente, existen diversos métodos para su identificación, algunos de aplicación general y otros de mayor complejidad formulados para casos específicos.

El propósito de este taller es presentar algunos de los métodos más representativos para identificar valores atípicos. Se hará énfasis en el trabajo con datos reales y contextuales, además de usar representaciones gráficas asociadas a las mediciones que se realicen.

[1] Tecnológico Nacional de México, Campus Chihuahua II, México
jesus.humberto.cuevas@outlook.com

Implementación de CODAP para la enseñanza de la estadística y la probabilidad

José David Gómez Acuña[1]

Resumen

Se propone el desarrollo de un taller que proporciona una introducción al uso de la plataforma CODAP para apoyar a los docentes de matemáticas en la implementación de las TIC en la enseñanza de la estadística y probabilidad en cualquier nivel de primaria, secundaria o universidad. Se explica sobre la manera en que funciona la plataforma, las herramientas con las que cuenta y la forma en que los docentes pueden utilizar una base de datos y generar distintas representaciones de la información para que sea más manejable y los estudiantes puedan aprender a interpretarla.

[1] Estudiante del Instituto Tecnológico de Costa Rica
JDavidGA@estudiantec.cr

Explorando Mathigon para enseñar estadística y probabilidad

Carlos Alberto Monge Madriz[1]

Resumen

En este taller se exponen las principales herramientas de la pizarra interactiva virtual Polypad de Mathigon. Los participantes aprenderán a utilizar las herramientas de "probabilidad y datos" del programa, realizar simulaciones con ruletas, dados, monedas o cartas, construir gráficos y tablas estadísticas que pueden vincularse a las simulaciones construidas. Además, aprenderán a construir su propia aula virtual dentro de Mathigon y poder recopilar respuestas de los estudiantes. Este taller es dirigido principalmente a primaria, pero también podrá ser de provecho para docentes de secundaria que pueden aprender de la herramienta para adaptarla a sus lecciones.

[1] Instituto tecnológico de Costa Rica
camonge@itcr.ac.cr

Empoderándonos en didáctica de gestión de datos.

Miluska Osorio Martínez[1] & Angelica Ramos Rosas[2] & Percy Callinapa Supo[3] & Augusta Osorio Gonzales[4]

Resumen

En este taller se busca que los profesores del nivel básico asistentes puedan experimentar diversas situaciones problemas, que les permita conocer como trabajar la resolución de un proceso de gestión de datos utilizando el ciclo de investigación empírica.

La estrategia didáctica ha utilizar se basa en el enfoque sobre el pensamiento estadístico en la investigación empírica propuesto por Wild y Pfannkuch (1999), en el cual se definen cuatro dimensiones del pensamiento estadístico: Dimensión I: ciclo investigativo, Dimensión II: ciclo interrogativo, Dimensión III: tipos de pensamiento estadístico y Dimensión IV: disposiciones.

Nuestro taller se centra en la dimensión I, ciclo de investigación empírica o ciclo PPDAC, que consta de cinco etapas (Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones).

El ciclo PPDAC, por nuestra experiencia en formación continua de profesores, puede ser aplicado a cualquier nivel de educación básica e inclusive a educación superior. El ciclo PPDAC propone que se enfatice no solo el análisis de datos, sino por igual la recopilación de datos. Este ciclo también permite potenciar la capacidad del profesor para analizar, variar y crear situaciones problema adecuadas para la enseñanza de la estadística descriptiva.

El tipo de situación problema que proponemos trabajar para la aplicación del ciclo PPDAC, es aquella en la que los alumnos deberán articular un conjunto contextualizado de información a fin de resolver una tarea determinada en la que la solución no es evidente a priori (Advíncula, Osorio y Saire, 2021).

La situación problema propuesta se compone de elementos que permiten el análisis durante el proceso de resolución y estos elementos son los siguientes:

- Un problema que se resuelve con los datos a recopilar, problema estadístico.
- Un contexto y restricciones de trabajo para dicho contexto.
- Un propósito para dirigir la resolución del problema propuesto en el contexto dado.

---

[1] Pontificia Universidad Católica del Perú.
mosoriom@pucp.edu.pe
[2] Pontificia Universidad Católica del Perú.
giovanna.ramos@pucp.pe
[3] Pontificia Universidad Católica del Perú.
pcallinap@hotmail.com
[4] Pontificia Universidad Católica del Perú.
arosorio@pucp.edu.pe

- Un posible producto a realizar a partir de la solución del problema.
- Una problemática que enmarque el propósito, de ser posible..

Para poder relacionar la resolución de la situación problema con las etapas del ciclo PPDAC, hacemos uso de una secuencia de tareas o actividades que se puntualizan mediante preguntas que permitirán hacer emerger los objetos y procesos estadísticos a utilizar en cada paso de la resolución.

- ¿Cuál es el problema estadístico a resolver en la situación problema propuesta?.
- ¿Qué variables estadísticas necesitamos trabajar para resolver el problema estadístico identificado?
- ¿Quiénes nos deben proporcionar los datos sobre dichas variables?
- ¿Con qué instrumento vamos a recoger los datos?
- ¿Cómo vamos a aplicar los instrumentos y validar los datos recogidos?
- ¿Qué objetos estadísticos vamos a utilizar con estos datos para obtener información?
- ¿Qué información nos proporcionan los datos?
- ¿Cuál es la solución al problema estadístico propuesto?
- ¿Qué otras conclusiones podemos obtener de los datos?
- ¿Cómo comunicamos los resultados encontrados en los datos?

Nuestra propuesta de material para el taller es: entregar material de lectura para la parte asincrónica que permita al participante interiorizar el ciclo PPDAC, material de lectura sobre la estructura de los objetos y procesos estadísticos que se requieren para transitar por el ciclo PPDAC en la enseñanza básica, material con dos ejemplos de aplicación totalmente resueltos (uno dirigido a alumnos de 10 años y otro a alumnos de 14 años) y una situación problema de tarea que se desarrollará en forma conjunta con los profesores durante la jornada sincrónica.

Formación docente a partir de un cuento histórico para la enseñanza de la probabilidad en la escuela primaria.

Ailton Paulo de Oliveira Júnior[1]

Resumen

Creemos que los cuentos agudizan la imaginación y despiertan a mundos extraordinarios, además del interés por la lectura en el proceso escolar que ayuda en la formación de la personalidad, pues cada personaje presentado viene con la capacidad de identificar y discernir entre lo real y lo imaginario. Además, creemos que la historia tiene un gran valor cultural y social.

Pero, sobre todo, su principal habilidad se basa en que sigue siendo capaz de mejorar el aprendizaje. Este valor se puede trabajar en el aula, permitiendo mostrar a los estudiantes que el contenido no es un campo de conocimiento estático y prefabricado, sino que está en constante cambio de acuerdo con las necesidades de cada nación y región a lo largo de la historia.

Destacamos que la historia que forma parte del cuento tiene una propuesta didáctica encaminada a centrarse en el desarrollo del contenido probabilístico, utilizando como detonante un juego que fue estudiado por primera vez en 1733 por el naturalista y matemático francés Georges-Louis Leclerc, el Conde de Buffon.

En Oliveira Júnior y Cardoso Barão (2021) se presenta una investigación para evaluar el aprendizaje probabilístico con un grupo de estudiantes de cuarto año de la escuela primaria en Brasil, tomando en cuenta situaciones que involucran conceptos básicos de probabilidad, como el espacio muestral y sus eventos, a través de la narrativa utilizada en una historia corta. "¿Sabías que los niños jugaban con el juego de baldosas hace mucho tiempo, en Francia?".

La Teoría de Situaciones Didácticas - TSD fue el soporte para la evaluación de la actividad de intervención, buscando el desarrollo de competencias y habilidades relacionadas con la probabilidad. Los resultados indican que los estudiantes fueron capaces de identificar los elementos históricos traídos a la narrativa y que la propuesta de juego propuesta por el Conde de Buffon, presentando conceptos elementales de probabilidad, sirvió como motivador y elemento para la aprehensión del conocimiento probabilístico. Indicamos que, en respuesta a la pregunta de investigación, los resultados obtenidos proporcionaron una fuerte evidencia de que las actividades contribuyeron a la enseñanza y el aprendizaje de la Probabilidad.

Además, los resultados mostraron las dificultades experimentadas por algunos de los estudiantes en la adquisición de conocimientos, y los errores cometidos nos llevaron a pensar en diferentes enfoques para la apropiación de conocimientos.

Por lo tanto, el presente taller tiene como objetivo estudiar el potencial del aprendizaje de la probabilidad, teniendo en cuenta situaciones que involucran conceptos básicos de probabilidad a través de la narrativa utilizada en un cuento histórico llamado: "¿Sabías que los niños jugaban al juego de las fichas hace mucho tiempo en Francia?". El taller abordará los conceptos de: azar; espacio muestral; eventos aleatorios; enfoque clásico y frecuencial de la probabilidad.

---

[1] Universidade Federal do ABC, Brasil. ailton.junior@ufabc.edu.br

El estudio de la ocurrencia de la Probabilidad en la historia proporciona una forma de conocer el mundo, además de un conjunto de técnicas, resultados y teoremas, comprendiendo el progreso de la humanidad en estas áreas y que han pasado por la evolución de la ciencia, la organización de estados y el gobierno del mundo. Por lo tanto, la historia contribuye al desarrollo del pensamiento probabilístico de los sujetos. Pretendemos mostrar que el uso de la historia, ya sea dentro o fuera del relato, para el estudio de la probabilidad, puede ayudar a comprender el camino de quienes contribuyeron a su desarrollo teórico, sobre los obstáculos que tuvo que superar y los errores cometidos en la resolución de algunos problemas importantes, no siendo sólo una anécdota, sino un elemento importante y reflexivo.

ARTICULOS COMPLETOS

Evaluación De Las Actitudes De Profesores De Primaria Hacia La Enseñanza De La Probabilidad

Ailton Paulo de Oliveira Júnior[1] & Luciene dos Santos Silva[2]

Resumen

En este estudio, traemos una mirada sobre la enseñanza, más específicamente sobre las actitudes hacia la probabilidad de 52 profesores de los primeros años de la Enseñanza Fundamental en Brasil que participaron en un curso de extensión denominado "Formación de profesores para la enseñanza de la probabilidad" para los primeros años de primaria. Por lo tanto, es claro que los docentes se sienten intimidados cuando tienen acceso a datos probabilísticos al darse cuenta que tienen deficiencias en el dominio de conceptos. Además, se evidencia que el docente considera que la Probabilidad es una tendencia hacia la acción didáctica cuando valora la utilidad y relevancia de la probabilidad en la vida personal y profesional.

Palabras clave: Actitudes, Profesores de Primaria, Enseñanza de la Probabilidad.

Abstract

In this study, we bring a look on teaching, more specifically on the attitudes towards probability of 52 teachers from the first years of Elementary School in Brazil who participated in an extension course called "Training teachers for teaching probability" for the first years of elementary school. Therefore, it is clear that teachers feel intimidated when they have access to probabilistic data when they realize that they have deficiencies in the mastery of concepts. In addition, it is evident that the teacher considers that Probability is a tendency towards didactic action when he values the usefulness and relevance of probability in personal and professional life.

Keywords: Attitudes, Primary Teachers, Teaching of Probability.

Modalidad: Ponencia

I. Introducción

Partimos de la premisa de que la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad ocupa un lugar cada vez más importante en la vida del ciudadano debido a la necesidad actual de manejar una gran cantidad de información y/o comprenderla y que sirva de apoyo a la toma de decisiones.

[1] Universidade Federal do ABC, Brasil. ailton.junior@ufabc.edu.br
[2] Universidade Federal do ABC, Brasil. lucieneifsp@hotmail.com

Creemos en la necesidad de una sociedad alfabetizada probabilísticamente y, en base a esta consideración, las actitudes de los docentes hacia la Probabilidad merecen especial atención. Además, las actitudes y creencias de los docentes pueden impedir (o ayudar) el proceso de enseñanza y aprendizaje, lo que puede afectar el desarrollo de habilidades de pensamiento probabilístico y la conducción del proceso de enseñanza en el aula.

De esa forma, destacamos la importancia de evaluar las actitudes de los docentes según la Base Curricular Común Nacional - BNCC brasileña (Ministério da Educação, 2018), cuando indica que la competencia se define como la movilización de conocimientos, habilidades, actitudes y valores para resolver demandas complejas de vida cotidiana, en pleno ejercicio de la ciudadanía y del mundo del trabajo.

Para Batanero (2013), considerando que la enseñanza de la probabilidad tiene una tradición consolidada en la escuela secundaria, su inserción en la escuela primaria es reciente, habiéndose presenciado un cambio de enfoque, favoreciendo un enfoque frecuencial, basado en la simulación y la experimentación, con el fin de brindar a los niños con una experiencia estocástica, es decir, un pensamiento basado en elementos estadísticos que convergen a la definición de conceptos probabilísticos.

Además, según Estrada y Batanero (2015) existen escalas para medir actitudes, pero ninguna para medir actitudes hacia la probabilidad dirigidas a docentes, y la medición de estas actitudes se considera importante para organizar acciones formativas, ya que la probabilidad es un tema nuevo en los primeros años de la escuela primaria.

Por lo tanto, ese estudio tiene como objetivo evaluar las actitudes hacia la probabilidad de 52 profesores de los primeros años de la Enseñanza Fundamental en Brasil que participaron en un curso de extensión denominado "Formación de profesores para la enseñanza de la probabilidad" para los primeros años de primaria.

II. Marco Teórico

El problema en el estudio de las actitudes hacia la Probabilidad radica en la propia definición de actitud, aspecto difícil de definir por su alto componente abstracto. Auzmendi (1992) define la actitud como un constructo psicológico que se relaciona con aspectos no directamente observables, compuestos por creencias, sentimientos y predisposiciones conductuales en relación con el objeto hacia el que se dirigen.

Para Gal, Ginsburg y Schau (1997), la actitud concreta hacia la probabilidad es una tendencia que se va formando a lo largo del tiempo y como consecuencia de las emociones y sentimientos vividos en el contexto del aprendizaje se puede definir como una suma de emociones y sentimientos experimentados durante el período de aprendizaje del sujeto, que se desarrollan lentamente y en el que los factores culturales juegan un papel importante, y que además son estables y resistentes al cambio.

Con base en la reciente inserción de contenidos probabilísticos en la educación primaria, Batanero y Díaz (2012) señalan que algunos docentes y estudiantes de magisterio de primaria pueden sentirse inseguros a la hora de enseñar probabilidad a los niños, porque no han recibido la formación suficiente en la enseñanza de la probabilidad o no tener experiencia en la enseñanza de la misma.

Asimismo, para Estrada y Batanero (2015), no se ha advertido la necesidad de formación en probabilidad infantil, indicando que no se valora la disciplina o su enseñanza, y es importante considerar valorar y reforzar el componente emocional en su formación, porque si un profesor no valora una materia, le parece que no está preparado para enseñarla o no le gusta, no podrá aprender de los alumnos.

También destacamos, con base en la afirmación de Miguel (2015), la importancia de conocer las actitudes de los docentes, cuando indica que las actitudes hacia la probabilidad varían de acuerdo a su experiencia previa con la materia. Así, es importante conocer las actitudes de los docentes en relación a la enseñanza de la probabilidad y trazar estrategias que puedan minimizar actitudes que puedan ser negativas.

En Brasil hay pocos trabajos sobre este tema como, por ejemplo, el estudio de Oliveira Júnior y Morais (2009) en el que se creó y validó una escala de actitudes hacia la enseñanza de la estadística para profesores de educación superior y Oliveira Júnior y Vieira (2018) en el que se identificaron las actitudes de los profesores en los primeros años de la Enseñanza Fundamental en escuelas de una ciudad en el interior del estado de Minas Gerais, Brasil.

III. Metodología

Esta investigación se cataloga dentro del enfoque cuantitativo y se considera de tipo exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández, y Baptista, 2014). En este contexto, en lo que sigue exponemos la muestra analizada, el instrumento junto a las variables consideradas y una breve síntesis de los procedimientos de análisis realizados para responder a las preguntas de investigación pretendidas.

Los participantes de la investigación suman un total de 52 docentes de enseñanza básica, de los cuales el 84,61% son mujeres. El promedio de los docentes es de 43,42 años y desviación estándar de 6,79 años, con un promedio de 11,85 años de experiencia docente (desviación estándar de 7,38 años). Aún sobre la edad de los docentes, a través del cálculo del coeficiente de variación, que es determinado por la razón entre la desviación estándar y la media, el grupo tiene baja variabilidad o dispersión, es decir, tienen un perfil de edad más homogéneo.

También podemos observar que el 82,69% del total de docentes imparte sus clases en escuelas públicas, 4 (7,69%) docentes en escuelas privadas y 5 (9,61%) docentes tanto en escuelas públicas como privadas. Destacamos también que el 76,92% de los docentes residen en el estado de São Paulo y el 61,54% están casados o en unión estable.

Así, para evaluar las actitudes del grupo de 52 docentes de diferentes escuelas que participaron en un curso de extensión sobre la enseñanza de contenidos probabilísticos, se aplicó la escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza - EAPE de Estrada y Batanero (2015), instrumento específico para evaluar las actitudes de los docentes hacia la enseñanza de la probabilidad. Los docentes aceptaron participar en la investigación antes de responder el cuestionario. Sus 28 ítems se estructuran en torno a 7 componentes:

(1) Afectivo hacia la probabilidad - Trata de valorar los sentimientos del sujeto positivos o negativos hacia la probabilidad;

(2) Competencia cognitiva hacia la probabilidad - Incluso cuando una materia guste a un sujeto, es posible que la encuentre difícil o piense que tiene poca capacidad para la misma. Es importante que un profesor tenga una buena percepción de su propia capacidad para una materia dada. Valora la percepción del sujeto de su capacidad, conocimientos y habilidades intelectuales en probabilidad;

(3) Comportamental hacia la probabilidad - Evalúa la tendencia a utilizar la probabilidad. Valora la tendencia a la acción, la toma de decisiones, la ayuda a otros compañeros y el uso que se hace de la probabilidad;

(4) Afectivo hacia la enseñanza de la probabilidad - Trata de valora los sentimientos personales hacia la enseñanza de la probabilidad, que pueden variar (aunque estarán relacionados) con el componente afectivo hacia el tema: agrado-desagrado, miedo-confianza, interés-desinterés, por enseñar probabilidad;

(5) Competencia didáctica hacia la enseñanza de la probabilidad - Aunque el profesor pueda pensar que tiene facilidad para aprender un tema, puede sentirse capacitado o no para enseñarlo. Evalúa la percepción del profesor de la propia capacidad para enseñar probabilidad, resolver dificultades de los estudiantes, proponer buenas tareas, buscar recursos, etc.;

(6) Comportamental hacia la enseñanza de la probabilidad - Valora la tendencia a la acción didáctica: si el profesor trata o ha tratado o no de enseñar probabilidad, si le da prioridad sobre otros temas, si piensa que debería posponerse en general;

(7) Valor hacia la probabilidad y su enseñanza - Evalúa el valor, utilidad y relevancia que el profesor concede a la probabilidad en la vida personal y profesional y a la formación del alumno en este tema.

Además, presentamos en la Tabla 1 los componentes de la escala de actitudes hacia la enseñanza de la probabilidad asociados a cada uno de los ítems que la componen.

Presentamos la representación descriptiva de las actitudes de estos estudiantes en relación a la enseñanza de la Probabilidad de los ítems (proposiciones) contenidos en la escala, su naturaleza (positiva o negativa) y factores presentados en la Tabla 1.

Tabla 1. Componentes de las actitudes evaluadas en la escala

Componentes de la escala de actitudes	**Ítems**
Afectivo hacia la probabilidad – ARP	1 – 7 – 11- 20
Competencia cognitiva hacia la probabilidad – CCP	6 – 8 – 17 -19
Comportamental hacia la probabilidad – CRP	5 – 14 – 24 – 25
Afectivo hacia la enseñanza de la probabilidad – AEP	9 – 12 – 15 – 18
Competencia didáctica hacia la probabilidad - CDEP	16 – 26 – 27 – 28
Comportamental hacia la enseñanza de la probabilidad - CREP	10 – 13 – 22 - 23
Valor hacia la probabilidad y su enseñanza - VEP	2 – 3 – 4 - 21

Fuente: Adaptado de Estrada y Batanero (2015)

Previo a la implementación de la escala se estableció una codificación para la tabulación apropiada de la información, debido a que existen ítems expresados en sentido positivo y negativo, y es necesario que todos estén enfocados en el mismo sentido para tener una escala homogénea de comparación. Para los ítems con enunciado desfavorable al que tratamos de medir, fue necesario realizar la puntuación contraria, por ejemplo, tener en cuenta que una puntuación alta en realidad indica una puntuación baja (actitud negativa).

Para generar el valor de la media y la desviación estándar, cada alumno recibió una cantidad de puntos por ítem respondido, tanto positivos como negativos, es decir, los enunciados positivos del cuestionario/escala corresponden a los ítems: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 16, 17, 22, 24, 26, y tienen la siguiente puntuación: Muy de acuerdo (5 puntos); De acuerdo (4 puntos); Indiferente (3 puntos); En desacuerdo (2 puntos); Muy en desacuerdo (1 punto). En el caso de los enunciados negativos, corresponden a los ítems: 3, 6, 11, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 23, 25, 27, 28 y tienen la puntuación como se muestra a continuación: Muy de desacuerdo (5 puntos); En desacuerdo (4 puntos); Indiferente (3 puntos); De acuerdo (2 puntos); Muy de acuerdo (1 punto).

En la elaboración del informe técnico se utilizó el programa libre PSPP versión 1.6.2 y la generación de ficha técnica y base de datos mediante Excel.

IV. Resultados

En la Tabla 2 se presenta las frecuencias de respuestas, media y desviación estándar en cada ítem la escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza elaborado por Estrada y Batanero (2015) compuesta por 28 ítems (naturaleza y componentes) en escala de Likert con puntuación por ítem según el grado de afinidad desde muy en desacuerdo a muy de acuerdo.

Tabla 2. Frecuencias de respuestas, media y desviación estándar en cada ítem

Ítem	Naturaleza(*)	Compontentes	Muy de acuerdo	De acuerdo	Indiferente	En desacuerdo	Muy en desacuerdo	Media	Desvio padrao
1) Me gusta la probabilidad ya que es un tema que siempre me ha interesado.	P	Afectivo hacia la probabilidad – ARP	19	28	-	3	2	4,13	0,97
7) Disfruto de las clases donde se explica la probabilidad.	P		19	20	5	5	3	3,90	1,18
11) Me intimidan los datos probabilísticos.	N		12	19	7	6	8	2,60	1,38
20) No me gusta resolver problemas de probabilidad.	N		23	16	6	15	15	4,04	1,10
9) Me preocupa cómo responder las preguntas de probabilidad de los estudiantes.	P	Afectivo hacia la enseñanza de la probabilidad – AEP	20	21	3	7	1	4,13	1,03
12) Como profesor, creo que me sentiré cómodo enseñando probabilidad.	P		14	17	3	7	1	4,00	1,08
15) No creo que me vaya a gustar enseñar probabilidad en la escuela.	N		4	1	3	9	35	4,35	1,19
18) No me interesa mucho enseñar probabilidad, aunque aparece en el plan de estudios.	N		-	3	1	10	38	4,60	0,80
5) Uso la probabilidad en la vida cotidiana.	P	Comportamental hacia la probabilidad – CRP	15	30	4	1	2	4,35	0,99
14) Nunca usé la probabilidad fuera de las matemáticas.	N		7	6	4	13	22	3,71	1,46
24) Uso información de probabilidad cuando tomo decisiones.	P		24	16	8	4	-	4,15	0,96
25) Evito leer información donde aparecen términos de probabilidad (en folletos de medicamentos y alimentos, en noticias políticas, económicas, etc.).	N		-	4	7	16	25	4,19	0,95
10) La probabilidad debe enseñarse en los primeros grados.	P	Comportamental hacia la enseñanza de la probabilidad - CREP	48	4	-	-	-	4,92	0,27
13) Solo enseñaré probabilidad si tengo tiempo después de los otros temas.	N		1	9	3	9	30	4,12	1,23
22) Cuando sea relevante, usaré la probabilidad en otras materias que enseño.	P		27	13	1	4	7	3,94	1,45
23) Si pudiera eliminar algún tema, sería la probabilidad.	N		1	2	2	7	40	4,60	0,89
6) No me siento preparado para resolver ningún problema básico de probabilidad.	N	Competencia cognitiva hacia la probabilidad – CCP	6	23	1	13	9	2,92	1,37
8) Domino el contenido principal de probabilidad.	P		1	21	3	19	8	2,77	1,20
17) La probabilidad es fácil.	P		3	25	2	13	9	3,00	1,30
19) La probabilidad solo la entienden los científicos.	N		-	-	2	3	47	4,79	0,80
16) Me será fácil diseñar actividades de evaluación de probabilidades.	P	Competencia didáctica hacia la enseñanza de la probabilidad - CDEP	4	25	6	11	6	3,19	1,21
26) Creo que seré capaz de detectar y corregir los errores y dificultades de los estudiantes con probabilidad.	P		13	27	4	6	2	3,83	1,06
27) No creo que pueda preparar recursos didácticos adecuados para la clase de probabilidad.	N		2	15	1	16	18	3,63	1,33
28) Será difícil para mí enseñar probabilidad.	N		2	18	2	9	21	3,56	1,42
2) La probabilidad ayuda a entender el mundo actual.	P	Valor hacia la probabilidad y su enseñanza - VEP	32	18	1	1	-	4,56	0,64
3) La probabilidad no es tan valiosa como otras ramas de las matemáticas.	N		3	9	-	11	29	4,04	1,34
4) El conocimiento de la probabilidad ayuda a los estudiantes a razonar críticamente.	P		43	9	-	-	-	4,83	0,38
21) La probabilidad solo funciona para los juegos de azar.	N		-	-	1	3	48	4,90	0,36

(*) Positivo (P); Negativo (N).

Fuente: Datos elaborados por los autores a partir de la salida de PSPP

Análisis de resultados por ítems

El cuestionario fue aplicado a una muestra de 52 profesores de los primeros años de la Enseñanza Fundamental en Brasil que participaron en un curso de extensión denominado "Formación de profesores para la enseñanza de la probabilidad" para los primeros años de primaria. Posteriormente se realizó el análisis de los resultados referentes a cada uno de los 28 ítems como fueron presentados a los participantes. En la Tabla 2 se muestra el número de casos tabulados para cada ítem, y también se indican las medias y desviaciones obtenidas. Recordamos que para realizar la valoración de los ítems con enunciado negativo utilizamos la valoración contraria a la que corresponde. En el caso de las medias y desviaciones se calculan de acuerdo a las puntuaciones obtenidas de cada respuesta en escala positiva, y una media más alta indica una actitud más positiva.

Ítems mejor evaluados

Hubo 11 ítems con puntuación media sobre 4.0 y que consideramos con las mejores valoraciones. Según los resultados totales por ítems, se resalta que el mejor ítem evaluado, con una media de 4,92, es el número 10 que dice "La probabilidad debe enseñarse en los primeros grados". Este enunciado es positivo y se encuentra en una puntación directamente proporcional donde en realidad los profesores señalan la importancia de enseñar probabilidad desde la primera infancia. El ítem corresponde a la componente comportamental hacia la enseñanza de la probabilidad que evalúa la tendencia a la acción y al uso que se hace de la Probabilidad.

Otro enunciado que se encuentra con un puntaje elevado es el ítem 21, con una media de 4,90 y que se refiere a "La probabilidad solo funciona para los juegos de azar", que se encuentra expresado en forma negativa, por lo que en realidad significa que los profesores piensan que la probabilidad no sólo funciona para los juegos de azar. Corresponde a una componente de v alor en relación con la probabilidad y su enseñanza que valora la utilidad y la relevancia que el profesor concede a la probabilidad en la vida personal y profesional y a la formación del alumno en este tema.

Ítems peor evaluados

Se debe tener en cuenta que todos los ítems están evaluados en forma positiva, por tanto, una puntuación menor a 3 indica una actitud negativa. En este caso encontramos que el menor valor promedio fue el ítem 11, *Me intimidan los datos probabilísticos*, con una puntuación de 2,60 y que se relaciona con la componente afectiva en relación con la probabilidad. Lo sigue el ítem 8, *Domino el contenido principal de probabilidad*, con puntuación de 2,77 y el ítem 6, *No me* *siento preparado para resolver ningún problema básico de probabilidad*, que están asociadas a la componente cognitiva hacia la probabilidad.

Homogeneidad de la respuesta

Otro tema a considerar, parte de Estrada (2002) que sugiere estudiar la dispersión de la respuesta, debido a que una dispersión pequeña indica un gran acuerdo en la respuesta. En nuestro estudio existe homogeneidad de las respuestas de los profesores, puesto que al realizar el estudio se encuentra que existe un pequeño grado de dispersión de los datos. Esto significa que las respuestas son similares en la muestra de profesores, ya que las desviaciones estándar son relativamente bajas en comparación con las medias.

A continuación, indicamos los tres ítems con mayor grado de dispersión entre 1,42 a 1,46: ítem 14, *Nunca usé la probabilidad fuera de las matemáticas*, ítem 22, *Cuando sea relevante, usaré la probabilidad en otras materias que enseño*, y el ítem 28, *Será difícil para mí enseñar probabilidad*. Así, hay diferentes posiciones respecto a estos enunciados en las valoraciones de componentes comportamental en relación con la probabilidad, comportamental hacia la enseñanza de la probabilidad y de competencia didáctica hacia la enseñanza de la probabilidad.

En cuanto a las componentes se observa que las consideradas más positiva son la comportamental hacia la enseñanza de la probabilidad y la de valor hacia la probabilidad y su enseñanza. En cambio, la muestra de participantes considera menos positiva la componente de competencia didáctica hacia la enseñanza de la probabilidad y la competencia cognitiva hacia la probabilidad.

Una vez analizado los resultados por ítem se realizó un estudio de fiabilidad por medio del programa libre PSPP versión 1.6.2, obteniendo un coeficiente de consistencia interna, α de Cronbach, de 0,81, que consideramos suficiente para el estudio, teniendo en cuenta el tamaño restringido de la muestra. El análisis de consistencia interna (alfa de Cronbach) que se refiere calcular la correlación que existe entre cada ítem de la escala y el resto de ítems o el total (puntuación total) de los ítems (Pasquali, 2001). Además, se observa sólo un ítem que se correlaciona negativamente con el total de las pruebas, ítem 9, *Me preocupa cómo responder las preguntas de probabilidad de los estudiantes*, lo que indica que evalúan componentes diferenciados respecto al resto de los ítems.

Análisis de resultados globales totales

Una vez estudiado los resultados por ítem, analizamos la escala de actitudes por medio de la puntuación total; la cual puede variar desde 28 a 140 puntos por profesor, considerando las puntuaciones con enunciados positivos. En el caso de que todos los encuestados hayan tenido una posición de indiferencia (puntuación 3 en el cuestionario), se obtendría una puntuación de 84.

Observamos que no existen puntuaciones inferiores a ese valor, lo que nos lleva a afirmar que la actitud de los encuestados respecto a la Probabilidad es positiva, concentrándose en gran parte, alrededor de la moda que es 102, como se muestra en el histograma (Figura 1) y que corresponde a una forma aproximadamente normal de la distribución de frecuencias de puntación total, que indica el uso de programas de análisis de varianza.

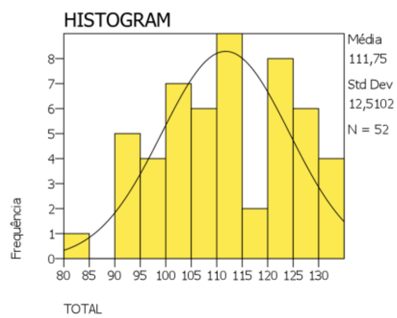


Figura 1. Distribución de frecuencias de puntuación total
Fuente: Datos de la Investigación

El valor de la media obtenida en las puntuaciones es 111,75, teniendo en consideración que la menor puntuación corresponde a 84 y la mayor a 133. Además, se obtuvo el valor tipificado del coeficiente de asimetría (-0,17) y curtosis (-0,92) ubicados entre los límites [-2,2] que son los admitidos dentro de los límites de normalidad.

Análisis de resultados por componentes

En la Tabla 3 se muestra los resúmenes estadísticos de cada uno de los componentes.

Tabla 3. Estadística global y por componentes de las actitudes

Componentes	Mínimo posible	Mínimo	Máximo posible	Máximo	Media	Desviación estándar	Coeficiente de variación
Afectivo hacia la enseñanza de la probabilidad – AEP	4	14	20	20	17,58	2,05	0,117
Valor hacia la probabilidad y su enseñanza - VEP	4	12	20	20	17,37	2,26	0,130
Competencia cognitiva hacia la probabilidad – CCP	4	10	20	20	17,08	2,43	0,142
Comportamental hacia la probabilidad – CRP	4	8	20	20	16,40	3,04	0,185
Afectivo hacia la probabilidad – ARP	4	9	20	20	14,67	3,01	0,205
Comportamental hacia la enseñanza de la probabilidad - CREP	4	4	20	20	14,21	3,55	0,250
Competencia didáctica hacia la probabilidad - CDEP	4	8	20	19	13,48	2,77	0,205

Fuente: Datos de la Investigación

Podemos observar de manera más positiva el componente afectivo hacia la enseñanza de la probabilidad, con todas las puntuaciones medias iguales o superiores a 4,0 y el ítem 18, *No me interesa mucho enseñar probabilidad, aunque aparece en el plan de estudios,* el mejor evaluado señalado anteriormente. Este ítem se expresa de forma negativa, por lo que realmente significa que los docentes están muy interesados en enseñar probabilidad, con base, en este caso, en el nuevo currículo brasileño, la Base Nacional Comum Curricular - BCCC (Ministerio de Educación, 2018).

También, los profesores consideran positivo la componente de valor hacia la probabilidad y su enseñanza; destacando la utilidad y relevancia de la probabilidad en la vida personal y profesional. Por otro lado, se presenta de una forma menos positiva el componente de competencia didáctica hacia la enseñanza de la probabilidad. Lo cual nos lleva a pensar que al profesor le complica enseñar este contenido, responder dudas de los estudiantes, elaborar recursos para sus clases, etc. Cabe señalar, que los coeficientes de variación en todas las componentes son inferiores o iguales a 25% indicando que podemos asumir que los puntajes por componente son homogéneos.

V. Consideraciones Finales

Los resultados de la investigación develan una actitud positiva hacia la probabilidad y su enseñanza en los profesores en ejercicio en Brasil. Este acontecimiento concuerda con los obtenidos por Estrada (2009), Estrada, Bazán y Aparicio (2010) y Estrada, Batanero y Díaz (2018) en profesores de primaria en Chile, España y Perú.

Analizando los datos, observamos 16 ítems con una puntuación media superior a 4,0, que según Alvarado, Andaur y Estrada (2018) pueden ser considerados como los ítems de la escala que indican las mejores valoraciones. De acuerdo con los resultados totales por ítems, para docentes en ejercicio, se destaca que el ítem mejor evaluado, con un promedio de 4,92, es el número 10, que dice la probabilidad de que se enseñe en los primeros niveles educativos. El ítem corresponde al componente comportamental hacia la enseñanza de la probabilidad que evalúa la tendencia a la acción y el uso que se hace de la probabilidad. Esta afirmación es positiva, indicando que los docentes comprenden la necesidad de enseñar conceptos probabilísticos desde los primeros años de formación, confluyendo con la indicación de la BNCC (Ministerio de Educación, 2018) de que estos conceptos se enseñen a los estudiantes a partir de los 6 años.

Los resultados de nuestro estudio concuerdan con la investigación de Estrada (2009) y Alvarado, Andaur y Estrada (2018) indicando que uno de los componentes más valorados es el comportamental hacia la enseñanza de la probabilidad, es decir, los profesores consideran importante enseñar la materia y la consideran prioritaria.

Teniendo en cuenta que todos los ítems son evaluados positivamente, observamos 4 ítems con puntaje promedio igual o menor a 3.0, lo que indica una actitud negativa según Alvarado, Andaur y Estrada (2018). En este caso, encontramos que el valor medio más bajo fueran el ítem 11, "Me siento intimidado por los datos probabilísticos", que se relaciona con el componente afectivo en relación a la probabilidad, es decir, los sentimientos hacia los contenidos probabilísticos y el ítem 8 (Domino el contenido principal de probabilidad) y 6 (No me siento preparado para resolver ningún problema básico de probabilidad), que están asociadas a la componente cognitiva hacia la probabilidad.

El resultado de nuestro estudio contradice lo que indican Estrada, Bazán y Aparicio (2010) con docentes de España y en Alvarado, Andaur y Estrada (2018) con docentes de Chile e España, cuando señalan que el componente mejor evaluado en los docentes es el afectivo, ya que es una manifestación de sentimiento o afecto en relación con la asignatura, la probabilidad. Estas actitudes con mayor acuerdo en España pueden ser explicadas, en parte, por el mayor trabajo, aunque todavía insuficiente y dependiendo de las universidades (Estrada y Batanero 2008), en formación de profesores, en currículo y en didáctica.

Sin embargo, converge con el estudio de Estrada (2009) y Alvarado, Andaur y Estrada (2018), es decir, que el componente señalado como peor corresponde a aspectos relacionados hacia la dificultad de dominio del tema, el cognitivo. El docente muestra poca capacidad en conocimiento y habilidades intelectuales en probabilidad.

Por lo tanto, se nota que los docentes se sienten intimidados cuando tienen acceso a datos probabilísticos aunado a que perciben que tienen deficiencias en el dominio de conceptos. Además, en nuestro estudio de los componentes para la probabilidad y su enseñanza, se evidencia que el docente considera este importante eje temático con tendencia a la acción didáctica, valorando la utilidad y relevancia de la probabilidad en la vida personal y profesional.

Por último, a pesar de la limitación del tamaño de la muestra, esta investigación es un primer estudio de caracterización de la actitud hacia la probabilidad en profesores en formación y ejercicio en Brasil. Los alcances son aplicar la escala en una muestra más grande de profesores para efectos comparativos entre países y ampliar los análisis estadísticos, con el propósito de indagar en una estrategia didáctica que propicie la mejora de la actitud hacia la probabilidad.

Bibliografía

[1] Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Bilbao, España: Mensajero.

[2] Batanero, C. y Díaz, C. (2012). Training teachers to teach probability: Reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, 3(1), 3-13.

[3] Batanero, C. (2013). Teaching and learning probability. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 491-496). Springer.

[4] Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado* Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
[5] Estrada, A. (2009). Las actitudes hacia la estadística de los profesores en formación. Incidencia de las variables género, especialidad y formación previa. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 117-131). Melilla, Facultad de Humanidades y Educación. Universidad de Granada.
[6] Estrada, A., Bazán, J., y Aparicio, A. (2010). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos. *Unión*, 24, 45-56.
[7] Estrada, A. y Batanero. C. (2015). Construcción de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 239-247). Alicante: SEIEM.
[8] Estrada, A., Batanero, C., y Díaz, C. (2018). Exploring Teachers' Attitudes Towards Probability and Its Teaching. En C. Batanero y E. Chernoff, (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp. 313-332). Berlin: Springer.
[9] Gal, I., Ginsburg, L., y Schau, C. (1997). Monitoring Attitudes and Beliefs in Statistics Education. En I. Gal; J. B. Garfield (Eds.), *The Assessment Challenge in Statistics Education* (pp. 37-51). IOS Press.
[10] Hernández, S. R., Fernández, C. C., y Baptista, L. P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta. Ed.). McGraw Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V.
[11] Miguel, A. (2015). A Terapia Gramatical-Desconstrucionista como Atitude de Pesquisa (Historiográfica) em Educação (Matemática). *Perspectivas da Educação Matemática*, 8(18), 607-647.
[12] Ministério de Educación. (2018). *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC): Educação é a Base. Brasília, Brasil. Recuperado de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf
[13] Oliveira Júnior. A. P. y Morais, J. F. (2009). Validação da escala de atitudes de professores de estatística em relação à Estatística no ensino superior no Brasil. *Ciência & Educação*, 15(3), 581-591.
[14] Oliveira Júnior, A. P. y Vieira, M. L. (2018). Validação e avaliação das atitudes de professores dos anos iniciais do ensino fundamental em relação ao ensino de estatística. *Alexandria*, 11(1), 149-171.
[15] Pasquali, L. (2001). A medida e sua prática em Psicologia. En Conselho Regional de Psicologia (13a. região PB/RN). *A diversidade da Avaliação Psicológica:* considerações teóricas e práticas. João Pessoa: Ideia.

Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria en Chile: contextos y niveles de complejidad semiótica

J. Ignacio Villa-Esparza[1], Danilo Díaz-Levicoy[2], & Audy Salcedo[3]

Resumen

Este estudio tiene por objetivo analizar los contextos y los niveles de complejidad semiótica en las actividades que involucran gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria en Chile. Para ello, se sigue una metodología cualitativa, bajo el paradigma interpretativo, utilizando un diseño de estudio de casos y el método de análisis de contenido. Los resultados muestran el predominio del contexto personal y del nivel de complejidad semiótica 3 (representación de una distribución de datos). Se concluye la necesidad de incrementar las representaciones gráficas en que se trabajen los niveles 2 y 4 de complejidad semiótica, así como la variedad de los contextos.

Palabras clave: Gráficos estadísticos, Libros de texto, Educación Primaria.

Abstract

The objective of this study is to analyze the contexts and levels of semiotic complexity in activities involving statistical graphics in elementary school textbooks in Chile. For this purpose, a qualitative methodology is followed, under the interpretative paradigm, using a case study design and the content analysis method. The results show the predominance of personal context and semiotic complexity level 3 (representation of a data distribution). It is concluded that there is a need to increase the graphic representations in which levels 2 and 4 of semiotic complexity are worked, as well as the variety of contexts.

Keywords: Statistical graphs, Textbooks, Elementary school

Modalidad: ponencia

I. Introducción

La televisión, los periódicos y las redes sociales, se han transformado en medios que proporcionan una gran cantidad de información, que permite ser recibida de manera inmediata por los ciudadanos, producto de la globalización y los avances tecnológicos. Parte importante de

[1] Universidad Católica del Maule, Chile. Ignaciov19@outlook.com
[2] Universidad Católica del Maule, Chile. dddiaz01@hotmail.com
[3] Universidad Católica del Maule, Chile. audy.salcedo@gmx.com

la información que recibimos es de tipo estadística y presentada mediante gráficos estadísticos. Por lo anterior, es que se ha vuelto una necesidad imperante que los ciudadanos cuenten con habilidades para comprender la información representada en un gráfico estadístico. Además, estas representaciones son parte de la cultura estadística, la que se entiende como la:

> a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante (Gal, 2002, p. 2-3).

Dada la relevancia que han tomado los contenidos relacionados con estadística, entre ellos los gráficos estadísticos, ha motivado diferentes cambios educativos. Por ejemplo, a nivel curricular, en el caso de Chile en el año 2009 el Ministerio de Educación [MINEDUC] incorpora el eje temático *Datos y Azar* para que estos contenidos sean abordados desde el primer curso de Educación Primaria (MINEDUC, 2009). Posteriormente, este eje es modificado y reemplazado por el denominado *Datos y Probabilidades*, en que establece la enseñanza de la estadística desde el primer curso (MINEDUC, 2012). Lo anterior, ha sido producto de la transversalidad de la estadística en distintas disciplinas y la necesidad de formar ciudadanos estadísticamente cultos, con las capacidades de analizar y evaluar críticamente la información presentada, por ejemplo, mediante gráficos estadísticos. Esto ha influido fuertemente en distintas áreas de la educación como es el caso de la formación inicial y continua de los profesores, los materiales educativos, los libros de texto, entre otros (Samuel et al., 2019).

Por otro lado, el libro de texto juega un rol fundamental en la enseñanza de la matemática y la estadística. Este material es definido por Díaz-Levicoy et al. (2017) como un recurso de apoyo constante a los procesos de enseñanza y de aprendizaje, que presenta actividades adaptadas al desarrollo cognitivo de los estudiantes y “permite que la familia colabore con el proceso de formación, ya que pueden aclarar dudas que presenten los estudiantes en el desarrollo de sus tareas y hacer un seguimiento de su proceso de formación” (p. 321).

El uso multidisciplinar que presta el libro de texto, ha llevado a considerarlo a este como la concreción del currículo oficial (Braga y Belver, 2016), razón por la que investigadores en diferentes áreas, como la Didáctica de la Estadística, centraron su interés en ellos, e incluso la establezcan como una línea de investigación (Díaz-Levicoy et al., 2017).

En consideración de lo anterior, es que en este estudio se busca analizar los contextos y los niveles de complejidad semiótica en las actividades que involucran gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria en Chile.

Esta investigación se ha estructurado de la siguiente forma: en el apartado 2 se describen los gráficos estadísticos presentes en el currículo chileno de Educación Primaria, los contextos según PISA y niveles de complejidad semiótica. Luego, en el apartado 3, se dan a conocer investigaciones previas relacionadas a este estudio acerca del análisis de gráficos estadísticos en libros de texto, para luego presentar en el apartado 5 la metodología empleada. Finalmente, en los apartados 6 y 7 se presentan los resultados y las conclusiones derivadas de estos respectivamente.

Gráficos estadísticos en las directrices curriculares de Chile

Como se indicó antes, las directrices curriculares no son ajenas a los cambios sociales, dado que deben contribuir al logro de las habilidades requeridas por la sociedad, permitiéndoles interactuar de modo satisfactorio en el medio en el que se desenvuelven. Es por esto que Pinkasz y Tiramonti (2006) definen currículo como el "resultado de un proceso de selección cultural que establece, para una sociedad en un momento determinado, qué es lo deseable que las nuevas generaciones aprendan" (p. 68).

En lo que concierne a la matemática, estos cambios se han materializado en lo que comprende, por ejemplo, a materias relacionadas a estadística y probabilidad, incluyéndolas desde los primeros niveles educativos (Batanero, 2001), justificando así su importancia y la necesidad de formar ciudadanos estadísticamente cultos, capaces de leer, interpretar y evaluar información estadística.

De acuerdo a los cambios realizados en el currículo chileno en el eje *Datos y probabilidades*, se pretende que se trabaje la creación de preguntas, recolección de datos, tablas de datos y pictogramas en el primer curso de primaria. Luego, desde el segundo al quinto curso se espera que se trabaje con gráficos de barras simples y con escala. El trabajo con diagramas de puntos se demanda ser abordado en el tercer y sexto curso. En el quinto curso se solicita trabajar con gráficos de líneas. La inclusión del gráfico de tallo y hojas se ve en el quinto y sexto curso. Finalmente, el trabajo con gráficos circulares y de barra doble en el último curso (MINEDUC, 2012).

Chile, por medio del eje antes mencionado, busca desarrollar estas competencias en los ciudadanos de manera progresiva desde los primeros años de escolarización (MINEDUC, 2012), proponiendo así una variedad de objetivos de aprendizaje a desarrollar en cada uno de los niveles educativos los cuales se presentan a continuación:

Tabla 1. *Objetivos de aprendizaje sobre gráficos estadísticos en Educación Primaria del currículo chileno*

Cursos	Objetivos
Primero	• Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas. • Construir, leer e interpretar pictogramas (p. 228).
Segundo	• Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas. • Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas. • Construir, leer e interpretar pictogramas con escala y gráficos de barra simple (p. 232).
Tercero	• Realizar encuestas, clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas y

Cursos	Objetivos
	visualizarlos en gráficos de barra. • Construir, leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, de acuerdo a información recolectada o dada. Representar datos usando diagramas de puntos (p. 237).
Cuarto	• Realizar encuestas, analizar los datos y comparar con los resultados de muestras aleatorias, usando tablas y gráficos. • Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo. • Leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala y comunicar sus conclusiones (p. 244).
Quinto	• Leer, interpretar y completar tablas, gráficos de barra simple y gráficos de línea y comunicar sus conclusiones. • Utilizar diagramas de tallo y hojas para representar datos provenientes de muestras aleatorias (p. 249).
Sexto	• Comparar distribuciones de dos grupos, provenientes de muestras aleatorias, usando diagramas de puntos y de tallo y hojas. • Leer e interpretar gráficos de barra doble y circulares y comunicar sus conclusiones (p. 254).

Fuente: MINEDUC (2012)

De acuerdo a la tabla anterior, se observa que el trabajo con gráficos estadísticos se da desde el primer curso, comenzando con pictogramas considerando a este tipo de representación como el cimiento para el trabajo posterior con gráficos de un mayor nivel de dificultad como es el caso de los gráficos de barras dobles en el ultimo curso. Un aspecto a destacar de los objetivos propuestos en relación a gráficos estadísticos, es la falta de progresión que se observa con los diagramas de puntos, debido a que estos se incluyen en tercero y luego se vuelven a incorporar en el último curso.

Contextos

La enseñanza de la matemática está caracterizada por su contextualización, por ejemplo, en la resolución de problemas. El contexto es comprendido como un aspecto propio del mundo en el que se encuentran y desenvuelven los seres humanos. Para evaluaciones internacionales como PISA es fundamental la utilización de contextos variados en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, como indica el informe de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OCDE], 2013).

Para la matemática, y específicamente la estadística, la presentación de actividades contextualizadas son fundamentales para el éxito de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, ya que de estos se relaciona con la selección de las mejores estrategias y formas de presentación los contenidos (OCDE, 2013). Por otra parte, el importante rol que se asigna al contexto en el “aprendizaje de la matemática, es debido al desarrollo de las competencias de los alumnos para aplicar las matemáticas escolares a contextos de la vida real, ya que consiste en entender con más detalles el entorno de la situación" (Benítez, 2011, p. 51). En el caso de la estadística, el contexto es aún más relevante, como señalan Cobb y Moore (1997), los datos como números en contexto, con lo cual se destaca la importancia de los contextos reales para enseñar y aprender estadística. En estadística, el contexto da sentido a los datos, en conciencia a la información que se pueda extraer de ellos. Es por lo anterior, que se hace indispensable el uso de contextos de los que son participes los estudiantes en la planificación de la enseñanza y los recursos educativos.

Niveles de complejidad semiótica

La construcción de gráficos estadísticos no es una tarea sencilla, debido a la intervención de distintos objetos matemáticos y estadísticos, como los títulos y etiquetas, el marco del gráfico, especificadores y el fondo (Friel, *et al*., 2001). Por lo anterior, Arteaga (2011) considera la construcción de estas representaciones una actividad semiótica compleja, con distinto nivel de dificultad, el cual dependerá del tipo de gráfico y los elementos incorporados en su construcción. En este sentido, "los gráficos producidos no deben considerarse simplemente como representaciones equivalentes de un concepto subyacente (la distribución de datos obtenida) sino como configuraciones diferenciadas de objetos relacionados e interactuando con dicha distribución" (Arteaga, 2011, p. 159).

Al igual que las construcciones gráficas, las tablas estadísticas cuentan con una estructura definida, que posee distintos componentes como el título, las etiquetas de las filas o columnas y el cuerpo de la tabla (Estrella, 2014). Considerando la lectura particular de cada uno de los componentes mencionados, así como de la tabla en su totalidad, esta actividad hace que se considere a las tablas estadísticas un objeto semiótico complejo, con distintos niveles de dificultad.

Para el análisis de las construcciones gráficas Arteaga et al. (Arteaga, 2011; Batanero et al., 2010) proponen los siguientes niveles de complejidad semiótica:

- Nivel 1. Representación de datos individuales. Se representan el conjunto de datos de manera incompleta, no incorporando las ideas de variable y distribución.

- Nivel 2. Representación de una lista de datos sin sintetizar una distribución. No se realiza el cálculo de las frecuencias asociadas a un mismo valor, por lo que, solo se trabaja la idea de variable de un conjunto de datos

- Nivel 3. Representación de una distribución de datos. En este nivel se reúnen valores similares, calculándose sus respectivas frecuencias, incorporando objetos como orden numérico, frecuencia, variable y distribución de datos.

- Nivel 4. Representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico. A partir de una escala común, se representan de forma conjunta más de una distribución en un mismo gráfico.

II. Investigaciones sobre gráficos estadísticos en libros de texto

Investigadores del campo de Didáctica de la Matemática y, específicamente, Didáctica de la Estadística, han considerado un tema de interés el estudio del libro de texto, debido a la importancia que este tiene en los procesos de enseñanza y de aprendizaje (Díaz-Levicoy et al., 2017).

Trabajos en español como el realizado por Díaz-Levicoy et al. (2016) dan cuenta de lo mencionado. Estos autores, analizan las actividades sobre gráficos estadísticos en libros de texto españoles y chilenos, concluyendo que los textos presentan un predominio del gráfico de barras, del nivel de lectura 2 (leer dentro de los datos) y nivel de complejidad semiótica 3 (representación de una distribución).

Jiménez-Castro et al. (2020) realizan un estudio de los libros de texto de Educación Primaria de Costa Rica, observando en estos una mayor presencia de los gráficos de barras, actividades correspondientes al nivel de lectura 2 (leer dentro de los datos) y nivel de complejidad semiótica 3 (representación de una distribución), tareas leer y calcular, y los contextos más frecuentes son el laboral y escolar. De igual forma, Vidal-Henry et al. (2020) analizan libros de textos para la Educación Primaria mexicana, detectando en estos una mayor presencia de los gráficos de barras, actividades correspondientes nivel de lectura 2 (leer dentro de los datos) y nivel de complejidad semiótica 3 (representación de una distribución).

Por su parte, Bustamante-Valdés y Díaz-Levicoy (2020) hacen un análisis de los libros de texto chilenos para la Educación Primaria rural multigrado, concluyendo que en estos hay una mayor frecuencia de los gráficos de barras, actividades asociadas al nivel de lectura 2 (leer dentro de los datos), actividades correspondientes al nivel de complejidad semiótica 3 (representación de una distribución), la tarea calcular y el contexto más recurrente fue el personal.

III. Metodología

Esta investigación sigue una metodología de tipo cualitativa, bajo el paradigma interpretativo, con un diseño de estudio de casos y usando el método de análisis de contenido.

Las unidades de análisis utilizadas para el estudio de los libros de texto corresponden a los contextos descritos en la prueba PISA de matemática (OCDE, 2013) y los niveles de complejidad semiótica (Arteaga, 2011; Batanero et al., 2010).

Con respecto a los contextos utilizados, en la evaluación de matemática PISA 2012, se definen los siguientes contextos con el fin de clasificar las tareas matemáticas (OCDE 2013):

- *Contexto personal*. Son propios del día a día de las personas y sus familias.
- *Contexto profesional*. Este tipo de contextos están relacionados al mundo laboral de las personas.
- *Contexto social*. Se relacionan a actividades de comunidad, ya sea a nivel local (pueblos, comunas, ciudades) o país.
- *Contexto científico.* Corresponden a áreas relacionadas a la naturaleza, salud, tecnología, entre otras.

En cuanto a los niveles de complejidad semiótica, se utilizaron los propuestos Arteaga y cols. (Arteaga, 2011; Batanero et al., 2010): 1) representación de datos individuales; 2) representación de una lista de datos sin sintetizar una distribución; 3) representación de una distribución de datos; 4) representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico.

Para el análisis se contemplaron 6 libros de texto proporcionados por el MINEDUC para la enseñanza de la matemática de estudiantes de 1° a 6° de Educación Primaria, que llevan por nombre *Sumo primero,* de la editorial Gakko Tosho, los cuales son detallados en el anexo de este estudio. Los libros de texto seleccionados, son entregados de forma gratuita a los estudiantes chilenos pertenecientes a la educación financiada por el Estado, siendo un gran porcentaje de ellos que los recibe, lo cual fue un motivo para su consideración en este estudio.

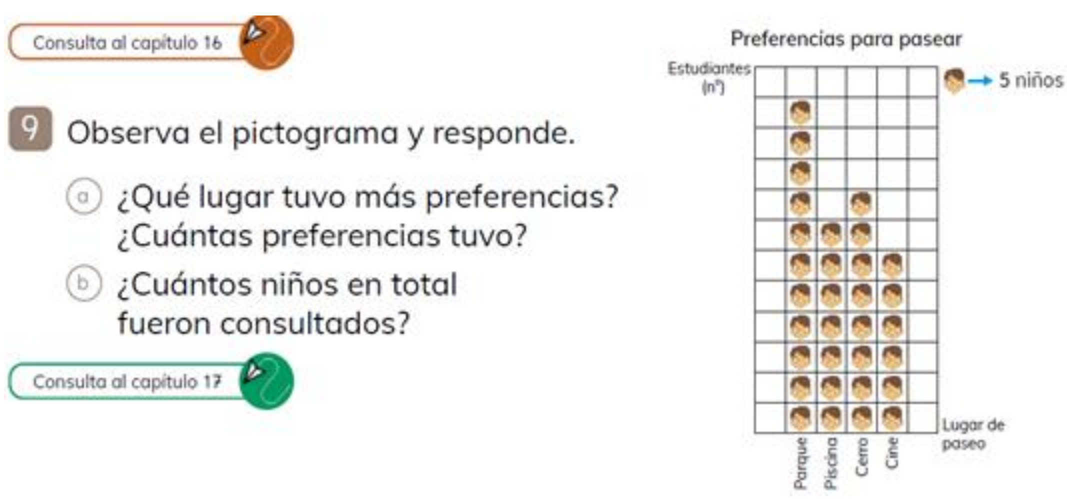
IV. Análisis de los datos

Contextos

En esta investigación en primer lugar se analizaron los contextos que presentan las actividades asociadas a gráficos estadísticos en los libros de textos de Educación Primaria.

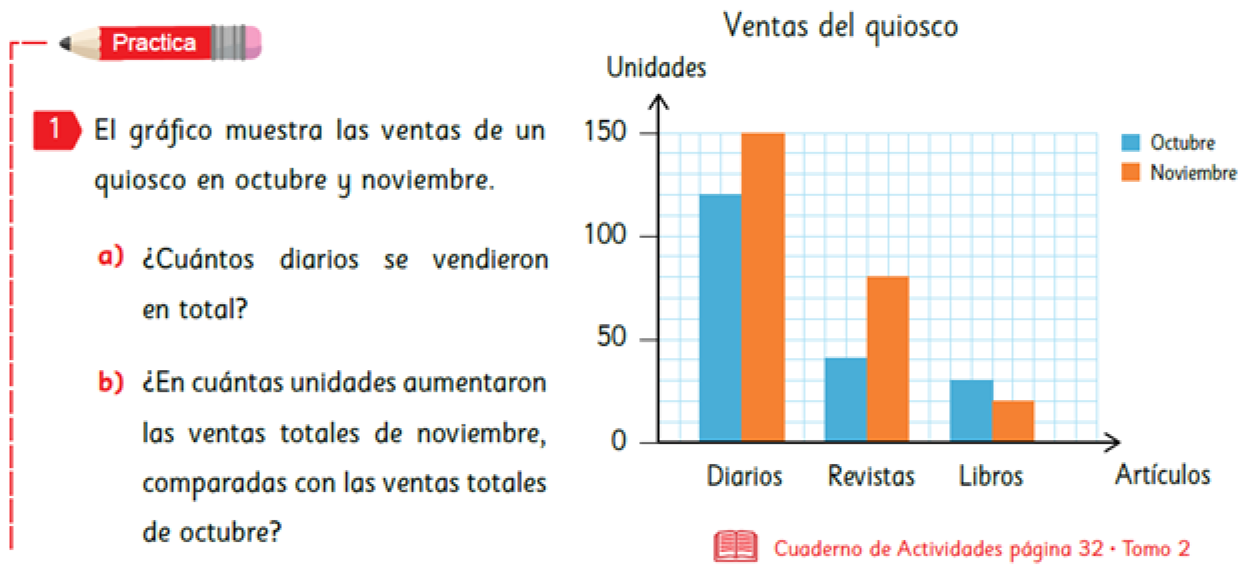
El *contexto personal* se ejemplifica en la Figura 1, en donde la situación presentada pertenece a la vida cotidiana y gustos de los estudiantes, como es el caso de los lugares favoritos para pasear, representados por medio de un pictograma.

Figura 1. Ejemplo de contexto personal (T4, p. 98)



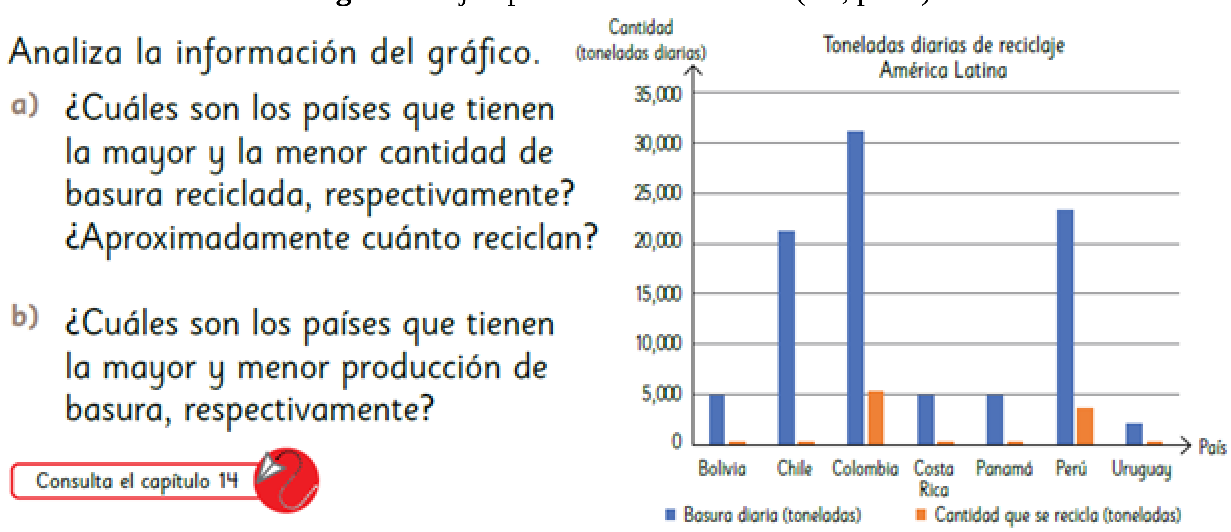
Un ejemplo del *contexto profesional* se observa en la actividad de la Figura 2, donde se presente un gráficos de barras doble sobre las ventas de un quiosco de distintos artículos durante dos meses.

Figura 2. Ejemplo de contexto profesional (T6, p. 58)



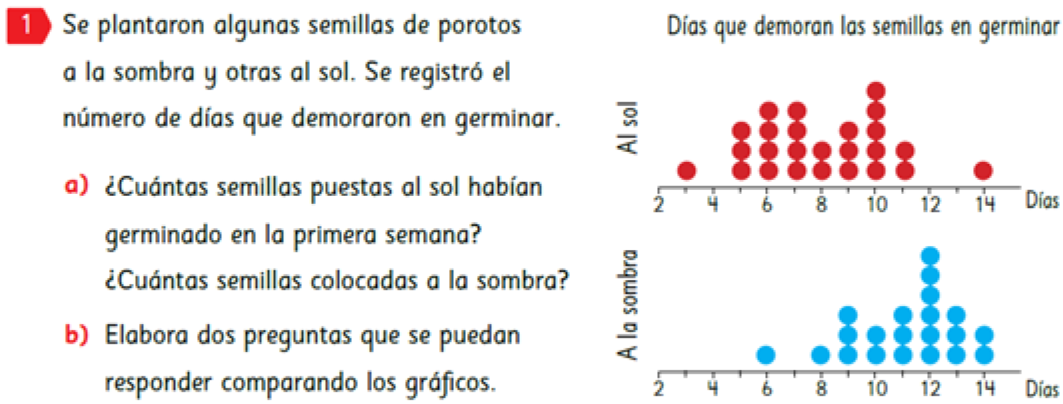
El *contexto social* se puede observan en la actividad de la Figura 3, en la que se representa la cantidad de basura diaria y lo que se reciclada por países de América Latina, lo que corresponde a un problema de interés local, nacional e internacional.

Figura 3. Ejemplo de contexto social (T6, p. 63)



Finalmente, el *contexto científico* se ejemplifica en la actividad de la Figura 4, en la cual se muestra una situación referida al tiempo de germinación de una semilla de porotos, con o sin presencia de Sol, entendiendo que en este contexto se presentan actividades del mundo de la ciencia, matemática, medioambiente, meteorología, entre otros.

Figura 4. Ejemplo de contexto científico (T6, p. 53)



En la Tabla 3 se presenta la distribución de los contextos que intervienen en las actividades sobre gráficos estadísticos en los libros de texto del proyecto Sumo Primero. En ella se observa que los contextos más frecuentes son los de tipo *personal* (75,8%), lo que indica que las actividades son cercanas a acciones del día a día de los estudiantes. En segundo lugar, se encuentra el contexto *científico* (13,6%), seguido por el contexto *social* (6%) y finalmente, el contexto menos frecuente es el *profesional* (4,6%).

Al analizar los resultados de la Tabla, 3 por curso, se ve que el *contexto personal* se encuentra en actividades desde el segundo a sexto curso. El *contexto profesional* se concentra en el primer, tercer y sexto curso. En cuanto al *contexto social*, este se ve en actividades presentes en los libros de los últimos tres cursos. Y finalmente, el *contexto científico* se encuentra en cursos como tercero, quinto y sexto de primaria. De acuerdo a como se distribuyen por grado los contextos de las actividades de gráfico, no parece haber ninguna intencionalidad, más allá de favorecer el contexto personal.

Tabla 3. *Frecuencias (y porcentajes) de los contextos de las actividades con gráficos estadísticos en los libros de texto*

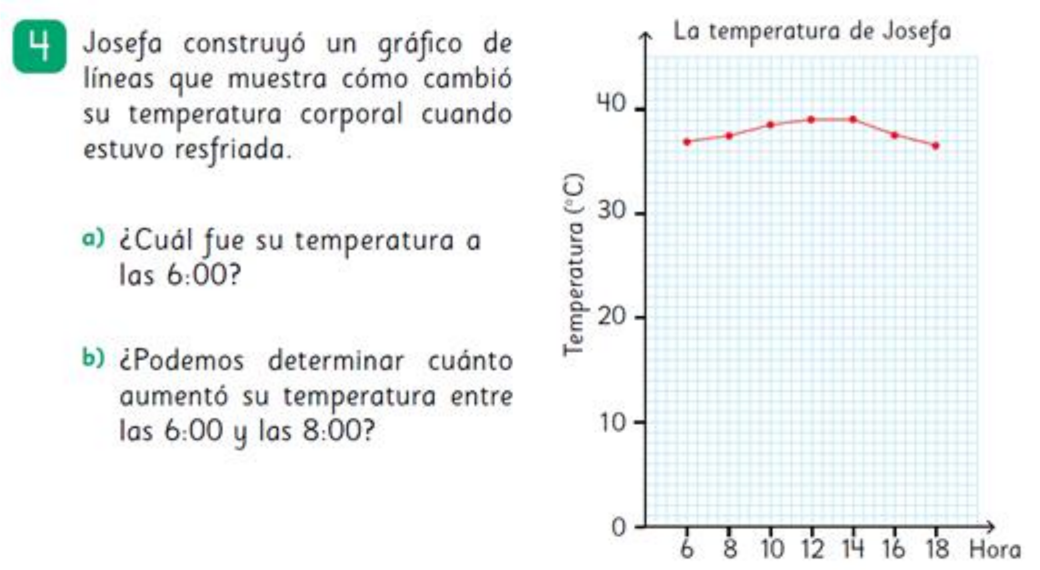
Contexto	1°	2°	3°	4°	5°	6°	Total
Personal	0(0)	2(100)	15(88,2)	10(90,9)	12(70,6)	11(61,1)	50(75,8)
Profesional	1(100)	0(0)	1(5,9)	0(0)	0(0)	1(5,6)	3(4,6)
Social	0(0)	0(0)	0(0)	1(9,1)	1(5,9)	2(11,1)	4(6)
Científico	0(0)	0(0)	1(5,9)	0(0)	4(23,5)	4(22,2)	9(13,6)
Total	1(100)	2(100)	17(100)	11(100)	17(100)	18(100)	66(100)

Niveles de complejidad semiótica

La segunda unidad de análisis corresponde a los niveles de complejidad semiótica de los gráficos estadísticos presentes en las actividades de los libros de texto de Educación Primaria. En los libros analizados, se detectan construcciones gráficas correspondientes a los niveles 2, 3 y 4.

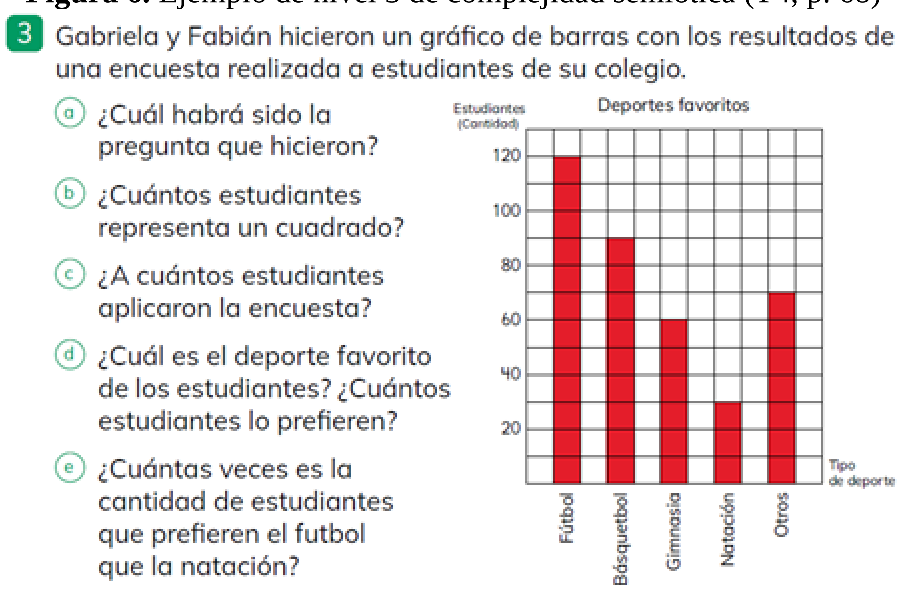
Un ejemplo del *nivel de complejidad semiótica 2* (representación de un conjunto de datos, sin llegar a resumir su distribución) se muestra en la Figura 5, en la cual se representa, por medio de un gráfico de líneas, la variación de temperatura corporal de Josefa en distintas horas de un día. En esta representación, se observa la idea de variable (temperatura corporal) y no la de frecuencia.

Figura 5. Ejemplo de nivel 2 de complejidad semiótica (T5, p. 123)



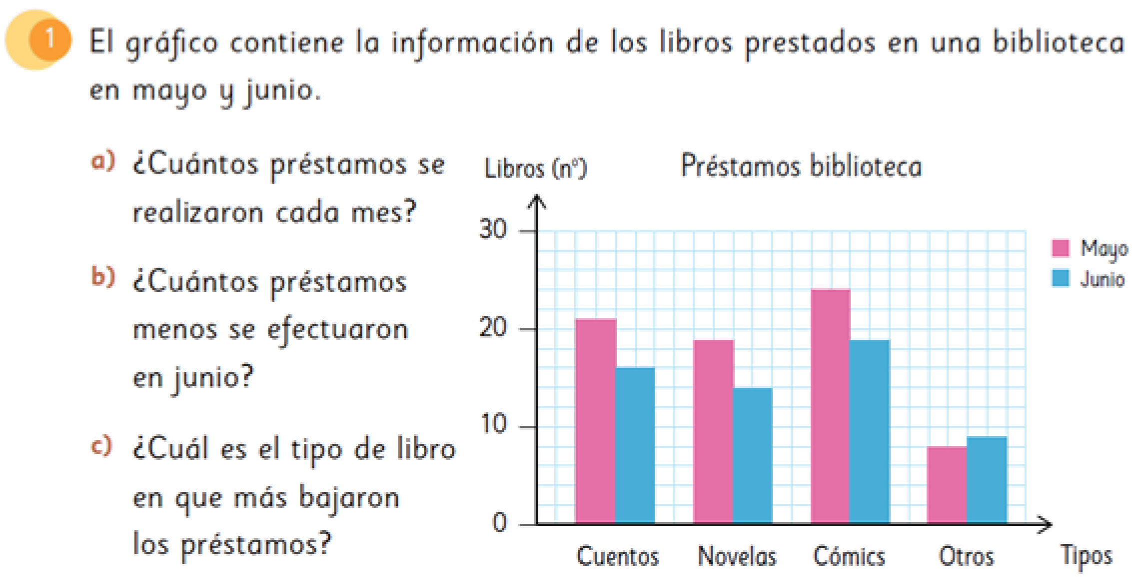
El *nivel de complejidad semiótica 3* (representación de una distribución de datos), se ve ejemplificado en la Figura 6, en donde, por medio de un gráfico de barras, se representan las preferencias acerca de los deportes de un grupo de estudiantes, observándose el trabajo con las ideas de frecuencia y de distribución de frecuencias.

Figura 6. Ejemplo de nivel 3 de complejidad semiótica (T4, p. 68)



Finalmente, el *nivel de complejidad semiótica 4* (representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico), se observa en la Figura 7, en la que se muestran, por medio de un gráfico de barras dobles, los préstamos de libros de una biblioteca durante dos meses, observándose dos distribuciones en un mismo grafico (prestamos de los meses de mayo y junio) de forma simultánea, permitiendo compararlas entre sí.

Figura 7. Ejemplo de nivel 4 de complejidad semiótica (T6, p. 61)



El resumen de los niveles de complejidad semiótica de los gráficos estadísticos que intervienen en las actividades de los libros de texto de Educación Primaria se presenta en la Tabla 4. En ella se aprecia que estos corresponden, en su gran mayoría, al *nivel semiótico 3* (representación de una distribución de datos) (79,1%), lo que indica que estas construcciones presentan una distribución de datos, considerando la idea de frecuencia y distribución de frecuencia. Luego, sigue el *nivel semiótico 2* (representación de una lista de datos sin sintetizar una distribución) (13,4%), no observándose la idea de distribución de frecuencias en estas construcciones. Por último, se encuentra *nivel semiótico 4* (representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico) (7,5%).

Tabla 4. *Frecuencias (y porcentajes) de los niveles de complejidad semiótica de las actividades con gráficos estadísticos en los libros*

Nivel semiótico	1°	2°	3°	4°	5°	6°	Total
1	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)
2	0(0)	0(0)	(0)	2(16,7)	5(29,4)	2(11,1)	9(13,4)
3	1(100)	2(100)	17(100)	10(83,3)	11(64,7)	12(66,7)	53(79,1)
4	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	1(5,9)	4(22,2)	5(7,5)
Total	1(100)	2(100)	17(100)	12(100)	17(0)	18(100)	67(100)

En la Tabla 4, se ve que gráficos estadísticos correspondientes al *nivel 2* (representación de una lista de datos sin sintetizar una distribución) se encuentran en los tres últimos cursos. En lo que respecta al *nivel 3* (representación de una distribución de datos), estas representaciones están presentes en todos los cursos. Y, finalmente, los gráficos asociados al *nivel 4* (representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico), se ubican en quinto y sexto curso, destacando que se presenten estas representaciones en quinto de primaria a pesar de que el currículo no lo demande. Parece haber un problema de la distribución por grado de los gráficos por complejidad semiótica. En una distribución progresiva de complejidad semiótica, los de nivel 2, deberían seguir una distribución semejante a los del nivel 3. No parece apropiado que los del nivel 2 se concentre en los tres últimos grados, cuando están trabajando con los gráficos de nivel 3 desde el primer grado.

V. Conclusión

Considerando los resultados obtenidos en esta investigación con respecto al análisis de los libros de texto de matemática de Educación primaria de Chile, se concluye lo siguiente:

Primero, en cuanto a los contextos que presentan las actividades de los libros de texto analizados, se observa que estos en su gran mayoría corresponde al *contexto personal*, lo que indica que las actividades son pensadas en situaciones cercanas a los estudiantes. Sin embargo, como se indica en la prueba PISA (OCDE, 2013), los contextos deberían ser variados. A pesar de esto, se destaca que la totalidad de actividades están contextualizadas. Los resultados obtenidos, concuerdan con lo reportado por Bustamante-Valdés y Díaz-Levicoy (2020), los que analizan libros de textos para la educación rural multigrado de Chile, concluyendo que el contexto más frecuente es el *personal*. Por otra parte, se observan resultados distintos en lo realizado por Jiménez-Castro et al. (2020) los que analizan libros de texto de Costa Rica, determinando que estos presentan principalmente un contexto *laboral/escolar*, lo que correspondería al contexto *profesional y personal.*

En lo que respecta a los niveles de complejidad semiótica, las representaciones gráficas presentes en los libros de texto en su gran mayoría corresponden al *nivel 3* (representación de una distribución de datos). Al comparar lo concluido con investigaciones previas, se observan similitudes en los resultados obtenidos en el análisis de libros de texto de Chile, España, Costa Rica, México y Perú (Bustamante-Valdés y Díaz-Levicoy, 2020; Díaz-Levicoy et al., 2016; Díaz-Levicoy et al., 2018; Jiménez-Castro et al., 2020; Vidal-Henry et al., 2020).

En síntesis, en esta investigación se entregan antecedentes relevantes para la mejora de los libros de texto, debido a que se analizan libros de texto vigentes y utilizados por un gran número de estudiantes de Chile. Además, se entrega información a ser utilizada por los docentes, como es el caso de los contextos y niveles de complejidad semiótica, pudiendo estos adaptar y potenciar áreas que los libros de texto no cubren, como es el caso de la utilización de contextos variados.

Bibliografía

[1] Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. Repositorio institucional de la Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/arteaga.pdf

[2] Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Universidad de Granada.

[3] Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 141-154.

[4] Benítez, A. (2011). La importancia de los eventos contextualizados en el desarrollo de competencias matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 51-59). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

[5] Bustamante-Valdés, M. y Díaz-Levicoy, D. (2020). Análisis de gráficos estadísticos en módulos de matemática para la enseñanza de escuelas rurales multigrado en Chile. *Espacios, 41*(16), 24.

[6] Braga, G. y Belver, J. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación, 27*(1), 199-218. https://doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n1.45688

[7] Cobb, G. y Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *American Mathematical Monthly*, 104, 801-823.

[8] Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: un estudio comparativo entre España y Chile. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática, 30*(55), 713-737. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a20

[9] Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B. y Arteaga, P. (2017). Caracterización de los gráficos estadísticos en libros de texto argentinos del segundo ciclo de Educación Primaria. Profesorado, *Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 21*(3), 299-326.

[10] Díaz-Levicoy, D., Osorio, M., Arteaga, P. y Rodríguez-Alveal, F. (2018). Gráficos estadísticos en libros de texto de matemática de Educación Primaria en Perú. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática, 32*(61), 503-525. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a10

[11] Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Actualidades Investigativas en Educación*, *14*(2), 1-23. https://doi.org/10.15517/AIE.V14I2.14817

[12] Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 1-50.

[13] Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. International Statistical Review, 70(1), 1-25. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

[14] Jiménez-Castro, M., Arteaga, P. y Batanero, C. (2020). Los Gráficos Estadísticos en los Libros de Texto de Educación Primaria en Costa Rica. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática, 34*(66), 132-156. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a0

[15] MINEDUC. (2009). *Propuesta ajuste curricular: Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios*. Unidad de Currículum y Evaluación.

[16] MINEDUC. (2012*). Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.

[17] OCDE. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

[18] Pinkasz, D. y Tiramonti, G. (2006). Las oportunidades educativas de las mujeres en la modernización de los 90 en Argentina. En P. Provoste (Ed.), *Equidad de género y reformas educativas. Argentina, Chile, Colombia y Perú* (pp. 51-97). Hexagrama Consultoras, FLACSO, IESCO.

[19] Samuel, M., Díaz-Levicoy, D. y Rodríguez-Alveal, F. (2019). Diseño y validación de un cuestionario para evaluar la comprensión de gráficos estadísticos en futuras educadoras de párvulos. *Espacios*, *40*(41), 20.

[20] Vidal-Henry, S., Díaz-Levicoy, D., Navarro, C. y García-García, J. (2020). Gráficos estadísticos en libros de texto de matemáticas para la Educación Primaria mexicana. *Educação e Fronteiras On-Line*, *10*(29), 153-170.

Anexo

Libros de texto analizados:

T1. Isoda, M. (2021). *Sumo primero, texto del estudiante 1° básico.* Gakko Tosho Co.

T2. Isoda, M. (2021). *Sumo primero, texto del estudiante 2° básico.* Gakko Tosho Co.

T3. Isoda, M. (2021). *Sumo primero, texto del estudiante 3° básico.* Gakko Tosho Co.

T4. Isoda, M. (2021). *Sumo primero, texto del estudiante 4° básico.* Gakko Tosho Co.

T5. Isoda, M. (2021). *Sumo primero, texto del estudiante 5° básico.* Gakko Tosho Co.

T6. Isoda, M. (2021). *Sumo primero, texto del estudiante 6° básico.* Gakko Tosho Co.

El Lenguaje Probabilístico De Estudiantes De Quinto Grado De Primaria: Identificación De Fenómenos O Experimentos Aleatorios

Ailton Paulo de Oliveira Júnior[1], Fátima Aparecida Kian[2] & Luzia Roseli da Silva Santos [3]

Resumen

Buscamos en este trabajo describir cómo los elementos lingüísticos probabilísticos emergen de los estudiantes del quinto año de la Enseñanza Fundamental, en este caso el concepto de fenómeno o experimento aleatorio, entendido como un lenguaje especializado y sustentado en Brasil por la Base Nacional Común Curricular. Los resultados del estudio sugieren que el lenguaje probabilístico en edades tempranas y consecuentemente en los primeros años de la escuela primaria tiene una conexión muy estrecha con el lenguaje cotidiano, ya que los primeros elementos lingüísticos forman parte del lenguaje de los estudiantes. Finalmente, se considera que el desarrollo de actividades que utilizan la representación de conceptos probabilísticos, permite al alumno identificar las situaciones reales propuestas y asociarlas progresivamente al lenguaje probabilístico.

Palabras clave: Lenguaje Probabilístico, Educación Primaria, Fenómenos o Experimentos Aleatorios.

Abstract

In this paper we seek to describe how probabilistic linguistic elements emerge from students in the fifth year of Elementary School, in this case the concept of phenomenon or random experiment, understood as a specialized language and supported in Brazil by the National Common Curricular Base. The results of the study suggest that probabilistic language at an early age and consequently in the first years of primary school has a very close connection with everyday language, since the first linguistic elements are part of the students' language. Finally, it is considered that the development of activities that use the representation of probabilistic concepts, allow the student to identify the real situations proposed and progressively associate them with the probabilistic language.

Keywords: Probabilistic Language, Primary Education, Phenomena or Experiments Random.

Modalidad: Ponencia

[1] Universidade Federal do ABC, Brasil. ailton.junior@ufabc.edu.br
[2] Universidade Federal do ABC, Brasil. fatima.kian@ufabc.edu.br
[3] Universidade Federal do ABC, Brasil. luziaroselidasilvasantos@gmail.com

I. Introducción

En este trabajo buscamos describir y analizar cómo los elementos lingüísticos probabilísticos emergen de los estudiantes del quinto año de la Enseñanza Fundamental, en este caso el concepto de fenómeno o experimento aleatorio, entendido como un lenguaje especializado y sustentado en la Base Común Curricular Nacional - BNCC (Ministerio de Educación, 2018), Brasil.

La BNCC (Ministerio de Educación, 2018) indica que el estudio de probabilidades en los primeros años de la Enseñanza Básica tiene como objetivo promover la comprensión de que no todos los eventos son deterministas, y deben ser considerados de manera gradual.

Además, la BNCC advierte que es muy común que las personas juzguen hechos imposibles que nunca han visto suceder. Así, en esta etapa, es importante que los estudiantes verbalicen, en eventos de azar, los resultados que pudieron haber ocurrido frente a lo que realmente ocurrió (Ministerio de Educación, 2018).

II. Marco Teórico

El concepto de azar no siempre es claro, porque se refiere a una entidad abstracta, no completamente definida, lo que aumenta las dificultades potenciales para los estudiantes. La aleatoriedad es un objeto multifacético, como se muestra en diversas interpretaciones recibidas a lo largo de la historia (Bennett, 1999; Batanero, Henry, y Parzysz, 2005; Saldanha y Liu, 2014).

Batanero (2015) recuerda que el concepto de aleatoriedad no es simple y que a lo largo de la historia ha tenido diferentes significados y está asociado a discusiones filosóficas, pudiéndose encontrar diferentes definiciones. Generalmente se define a través de algunas propiedades como "imprevisibilidad", "posibilidad de varios resultados", "incontrolable", entre otras.

Morgado et al. (2004) expresa que fenómenos o experimentos aleatorios suceden constantemente en nuestra vida diaria y que, repetidos bajo las mismas condiciones, generalmente producen resultados diferentes.

Específicamente en relación con los fenómenos o experimentos aleatorios, Salmerón (2015) considera que es necesario realizar observaciones sobre lo que sucede en determinados momentos para identificar posibles resultados y poder concluir si un resultado es más predecible que los demás. Cada observación se considera un experimento, ya sea realizado artificialmente en el laboratorio u observado en la naturaleza.

Para este trabajo, nos basamos en Vásquez (2018) y Oliveira Júnior et al. (2019) que presentan un conjunto de situaciones en las que el estudiante puede identificar situaciones cotidianas y, luego, que puede indicar si el experimento o fenómeno presentado se configura como aleatorio.

Concebimos que como los estudiantes ya han recibido instrucción previa sobre este tema, deben concebir situaciones que se configuran como un fenómeno aleatorio. Además, consideramos que los estudiantes deben relacionar el azar con la suerte y con términos relacionados con fenómenos que ocurren de forma inesperada, por azar.

Trayendo aspectos relacionados con el lenguaje probabilístico, uno de los focos de este trabajo, Gal (2005) propone cinco aspectos para la adquisición de este lenguaje (verbal, numérico, tabular, gráfico y simbólico), entendido como especializado para comunicar el azar, en el cual es necesario desarrollar como una progresión de sus ideas probabilísticas para obtener una comprensión adecuada de la Teoría de la Probabilidad.

En este estudio, nos centraremos específicamente en el lenguaje verbal (referido a la diversidad de términos y expresiones verbales), con base en el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas - NCTM de los Estados Unidos, NCTM (2003), al considerar el papel fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en edades tempranas, debido a la estrecha relación entre las expresiones comunes y el lenguaje probabilístico.

Dentro del tipo de lenguaje verbal, según Shuard y Rothery (1984), es posible distinguir tres categorías de expresiones utilizadas en la enseñanza de las matemáticas y que asociaremos aquí con la enseñanza de la probabilidad: (1) Expresiones verbales específicas de probabilidad - las que no forman parte del lenguaje común, es decir, corresponden a un lenguaje técnico de probabilidad; (2) Expresiones verbales vinculadas a la probabilidad: utilizadas tanto en contextos probabilísticos como cotidianos, pero no siempre tienen el mismo significado en ambos contextos; (3) Expresiones verbales comunes: tienen significados iguales o muy cercanos tanto en el contexto probabilístico como en la vida cotidiana.

Además, según D'Amore (2007), el lenguaje con el que se hace Matemática tiene su propio código semiológico, que conlleva varias convenciones más o menos explícitas: el uso de escrituras específicas, expresiones simbólicas (fórmulas o representaciones numéricas). Así, no sólo los símbolos matemáticos, sino el propio lenguaje natural, parece mucho más complejo, ya que con pocas palabras se da mucha información.

III. Metodología

Esta investigación es exploratoria, con un enfoque cualitativo y cuantitativo a través de un cuestionario proporcionado por Google Forms y analizado por el software IRaMuTeQ (Interfaz R para texto multidimensional y análisis de cuestionarios) para describir y analizar cómo emergen elementos lingüísticos probabilísticos de estudiantes de quinto grado de primaria. escuela, en este caso el concepto de fenómeno o experimento aleatorio.

Así, para el análisis de datos se utilizó el software IRaMuTeQ, que fue desarrollado como herramienta auxiliar para el proceso de codificación de los elementos traídos a través de la recolección de datos (Mutombo, 2013). Es un software libre y de código abierto, desarrollado por Pierre Ratinaud (Lahlou, 2012; Marchand y Ratinaud, 2012) que permite realizar análisis estadísticos sobre corpus textuales y sobre tablas de individuos/palabras, anclando ellos ya sea en software R y lenguaje Python.

Este software se utilizó para realizar un análisis léxico cuantitativo que considera la palabra como una unidad, ofreciendo además su contextualización en el corpus o en el instrumento de investigación o cuestionario. Cada pregunta del instrumento está compuesta por contenido semántico, formando la base de datos o corpus analizado por el software.

Para obtener los datos, el instrumento fue enviado a 167 alumnos matriculados en el quinto año de la Enseñanza Fundamental, distribuidos en cinco clases de una escuela pública de la ciudad de Barueri, São Paulo, respondiendo 61 (36,5%) alumnos.

Por lo tanto, los participantes de la investigación suman un total de 61 alumnos del quinto año de la Enseñanza Fundamental de una escuela municipal de Barueri, São Paulo, de los cuales el 60,7% son del sexo femenino.

La edad promedio de los estudiantes es de 10,44 años, dentro del rango de edad esperado para este nivel, con una desviación estándar de 0,56 años; y los estudiantes de 10 y 11 años son mayoría (96,7%).

Aún sobre la edad de los estudiantes, al calcular el coeficiente de variación, que se determina por la relación entre la desviación estándar y la media, el grupo tiene poca variabilidad o dispersión, es decir, los valores observados de las edades de los estudiantes tienen una pequeña dispersión alrededor de la media, mostrándose homogéneas.

En cuanto al gusto por las matemáticas, encontramos un porcentaje del 85,2%, lo que indica que a los estudiantes todavía les gusta esta materia y eso parece indicar que los niños aún no han creado resistencia en relación a las matemáticas y que pueden ser utilizadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Los análisis se realizaron considerando los retornos al llenado del instrumento a través de Google Forms. El estudio involucró a estudiantes que recibieron algún tipo de instrucción previa en conceptos básicos de probabilidad en años anteriores. Considerando la BNCC referente a los ciclos anteriores, se entregan a los estudiantes los siguientes objetos de conocimiento que se adhieren al concepto de aleatoriedad, en este orden: 1) primer año: noción de azar; 2) segundo año: análisis de la idea de aleatoriedad en situaciones cotidianas; 3) tercer año: análisis de la idea de azar en situaciones cotidianas: espacio muestral; 4) cuarto año: análisis de probabilidad de eventos aleatorios.

Destacamos que esta investigación fue presentada y aprobada por el comité de ética en investigación de Plataforma Brasil de la Universidade Federal do ABC - UFABC con el número CAAE: 42350720.7.0000.5594.

Así, para el análisis de los resultados obtenidos en el cuestionario, utilizamos el análisis textual, un tipo específico de análisis de datos, en el que tratamos material verbal transcrito, es decir, textos (Nascimento-Schulze y Camargo, 2000). Este análisis tiene varios propósitos, siendo posible analizar textos, entrevistas, documentos, ensayos, etc. En el caso de este estudio, las respuestas indicadas por los estudiantes al instrumento disponible a través de Google Forms.

Así, a través del análisis textual es posible describir un material producido, ya sea de forma individual o colectiva, así como utilizar el análisis textual con un propósito relacional, comparando diferentes producciones según variables específicas que describen quién produjo el texto.

La definición de las unidades de análisis la realiza el investigador y dependerá de la naturaleza de la investigación, es decir, las respuestas del instrumento que atañen a las respuestas de “n” participantes a una pregunta abierta y cada respuesta será un texto y por lo tanto tendremos "n" textos.

El conjunto de textos constituirá un corpus de análisis. El corpus apto para el análisis de la Clasificación Jerárquica Descendente - tipo CHD, debe consistir en un conjunto textual centrado en un tema. El material textual debe ser monotemático, ya que el análisis de textos sobre varios ítems previamente estructurados o diferentes temas resulta en la reproducción de su estructuración previa (Camargo, 2005).

El corpus está organizado por líneas de comando denominadas “líneas de asterisco”, en las que se informan los números de identificación del texto, seguido de algunas variables indispensables para realizar el análisis textual. En esta investigación, las variables se codificaron de la siguiente manera:

(1) Texto: texto_01 y así sucesivamente hasta texto_61;
(2) La edad: Id_01, 9 años; Id_02, 10 años; Id_03, 11 años.
(3) Género: Gen_01, Masculino; Gen_02, Femenino.

(4) Gusto por las Matemáticas: GM_01, Sí; GM_02, No.

Además, los textos que componen el *corpus* textual se configuraron según lo definido en el tutorial de IRaMuTeQ (Camargo y Justo, 2013), principalmente en cuanto a acentuación, uso de caracteres especiales y formateo. El procedimiento para organizar las líneas de comando para la inserción de producciones científicas se puede ver en las primeras cinco respuestas de los alumnos:

**** *n_01 *Id_3 *Gen_1 *GM_1
Para jugar o para estudiar.
**** *n_02 *Id_2 *Gen_1 *GM_1
Ya paso unos días lo saludo el para un lado y yo para el otro o hablamos.
**** *n_03 *Id_3 *Gen_2 *GM_1
Me encontré con un amigo en la calle.
**** *n_04 *Id_2 *Gen_2 *GM_1
Poco probable.
**** *n_05 *Id_2 *Gen_1 *GM_1
Probable.

Resaltamos que los análisis tipo CHD, para ser útiles en la clasificación de cualquier material textual, requieren una retención mínima del 75% de los segmentos de texto, y para algunos autores, la posibilidad de considerar el uso del 70% de los segmentos de texto debe ser considerados segmentos de texto (Camargo y Justo, 2013). En el caso de este estudio, se retuvo el 73,33% de los segmentos de texto.

Para analizar las respuestas de los estudiantes a la pregunta que presenta un fenómeno o experimento aleatorio, se utilizó el método de Reinert, que propone un CHD de acuerdo con el método descrito por Reinert (1990), con el objetivo de obtener clases de segmentos de texto (ST) que, en al mismo tiempo, tienen vocabulario similar entre sí y vocabulario diferente al ST de las otras clases.

Destacamos que la elección de utilizar una u otra técnica de análisis depende de las características del problema y de los objetivos de la investigación (Leblanc, 2015). En esa dirección, el marco teórico-metodológico del investigador, más el apoyo de software de análisis lexicométrico, pueden brindar mayor confiabilidad a las inferencias realizadas en la investigación cualitativa (Camargo y Justo, 2014; Santos et al., 2017).

Por lo tanto, este análisis se basa en la proximidad léxica y la idea de que las palabras utilizadas en un contexto similar se asocian con el mismo mundo léxico y forman parte de mundos mentales o sistemas de representación específicos. En este análisis, los segmentos de texto se clasifican según su respectivo vocabulario y el conjunto de términos se divide según la frecuencia de las raíces de las palabras. El sistema busca obtener clases formadas por palabras que se asocien significativamente con esa clase (la significación comienza con la prueba de chi-cuadrado - χ^2).

Según Oliveira (2015), la prueba chi-cuadrado es uno de los análisis más importantes de IRaMuTeQ, ya que el software utiliza lógica de correlación, a partir de segmentaciones del corpus textual, junto con la lista de formas reducidas y el diccionario (en este caso, en portugués), disponibles en él para presentar un esquema jerárquico de clases. De esta forma, se procesa el texto para que se puedan identificar clases de vocabulario, lo que permite inferir qué ideas quiere transmitir el corpus textual, es decir, el análisis se hace a partir de una lógica estadística procesada por computadora y aplicada léxicamente.

Por lo tanto, el trabajo utilizó un software desarrollado para el análisis textual y un procedimiento clásico de análisis de contenido en conjunto. El software IRaMuTeQ se basa en cálculos realizados sobre la coocurrencia de palabras en segmentos de texto, buscando distinguir clases de palabras que representan diferentes formas de discurso sobre el tema de interés de la investigación.

IV. Resultados

La actividad aquí presentada considera los contenidos propuestos en la BNCC para los primeros años de la Enseñanza Fundamental, Ministerio de Educación (2018), con el fin de que los estudiantes comprendan inicialmente conceptos básicos de probabilidad, en ese momento la noción de azar, identificando fenómenos o experimentos aleatorios. Por lo tanto, se presenta una situación-problema para que los estudiantes puedan discutir fenómenos aleatorios, a partir de una solicitud para que el estudiante escriba con una palabra o palabras sobre la posibilidad de que ocurra una determinada situación propuesta.

Además, los llamados fenómenos aleatorios o experimentos son procesos reales o hipotéticos en los que se pueden identificar de antemano los posibles resultados, pero no podemos predecir con certeza lo que sucederá, ya que el azar juega un papel preponderante, teniendo dos características fundamentales: (1) El resultado no se puede predecir con certeza; (2) Aunque no es posible establecer qué resultado particular ocurrirá, es posible describir el conjunto de todos los resultados posibles del experimento. Así, presentamos una de las situaciones presentadas a los estudiantes como fenómenos o experimentos aleatorios Figura 1.

Considere la siguiente situación: “Salgo y me encuentro con un amigo de mi escuela”. Escribe una palabra o unas pocas palabras sobre la posibilidad de que ocurra esta situación.

Figura 1. Situación presentada en Google Forms asociada a un fenómeno o experimento aleatorio
Fuente: Elaborado por los autores

En el resumen de las respuestas de 60 alumnos (98,4% del total), podemos ver que las palabras con mayor frecuencia, o aquellas con un número de formas activas con una frecuencia mayor o igual a 3, se indican en la Tabla 1.

Te recordamos que las formas activa y complementaria son las palabras consideradas activas (adjetivos, sustantivos, verbos y adverbios) y complementarias (artículos y pronombres), salvo artículos y preposiciones que han sido eliminados.

Tabla 1. Indicación de formas activas con tres o más indicaciones en los análisis referentes a las respuestas de los estudiantes a la primera pregunta que presenta un fenómeno o experimento aleatorio

Palabra (función léxica)	**Frecuencia**	**Palabra (función léxica)**	**Frecuencia**
Bien (adverbio)	9	Ser (verbo)	4
Amigo (nombre)	9	Oportunidad (nombre)	3
Suceder (verbo)	9	Barrio (nombre)	3
No (adverbio)	7	Mismo (adjetivo)	3
Posible (adjetivo)	6	Encontrar (verbo)	3
Probable (adjetivo)	6	Certeza (nombre)	3
Encontrar (verbo)	5	Coincidencia (nombre)	3
Vivir (verbo)	4	Ocurrir (verbo)	3
La calle (nombre)	4		

Fuente: Organizado a partir de IRaMuTeQ

Observamos en la Tabla 1 que la palabra con mayor frecuencia es el adverbio “Bien”, y según el diccionario en línea Antonio Houaiss, su significado enfocado en aspectos probabilísticos es lo que se realiza como certeza, o probablemente, o incluso lo adecuado, exacto, en cuanto a la naturaleza de la cosa de la que se habla.

También identificamos que el verbo "Suceder" se refiere a un proceso que está directamente relacionado con el significado que le otorgan los estudiantes a la noción de azar, ratificado por el sistema periférico de análisis de semejanza, en el cual contiene las siguientes palabras: azar, algo, motivo, cosa, espera, nada e impredecible. Merecen ser destacadas otras dos palabras, que son: 1) El adjetivo "Posible" que tiene alguna posibilidad de ocurrir, aunque no sabe cuándo y si ocurrirá; 2) El adjetivo "Probable" que refleja algo que se espera o que es probable que suceda o con una gran posibilidad de que suceda.

Así, en la Figura 2 presentamos el dendrograma generado en el CHD, el cual indica las particiones que se realizaron en el corpus hasta llegar a las dos clases finales.

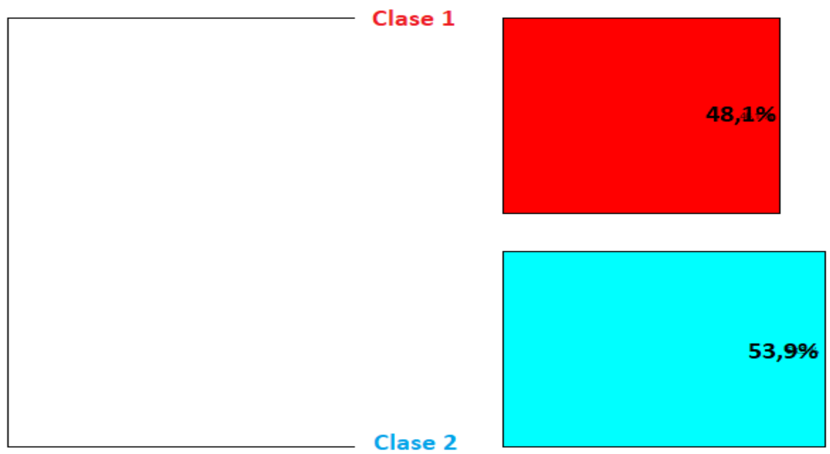


Figura 2. Resultado de la Clasificación por el Método de Reinert respecto a las respuestas de los estudiantes a la pregunta que presenta un fenómeno o experimento aleatorio: Dendrograma

Así, en el resultado de la Clasificación por el Método de Reinert: Dendrograma, Figura 3, el corpus "Cuerpo" fue dividido en dos subcorpus, representando la clase 1 el 46,1% del total del corpus y la clase 2 el 53,9%.

Por tanto, las dos clases contienen las formas activas o palabras organizadas que presentaron mayor frecuencia, en orden decreciente, y que son significativas para representar cada uno de los subcorpus a través de la prueba de asociación chi-cuadrado, es decir, la mayor adherencia de los mismos en la clase y entre clases y eso se puede observar (Tabla 2).

Tabla 2. Indicación de las formas activas con tres o más indicaciones que forman las dos clases en los análisis referentes a las respuestas de los estudiantes a la pregunta que presenta un fenómeno o experimento aleatorio

Clase 1	**Frecuencia**	**Clase 2**	**Frecuencia**
Amigo (nombre)	9	Bien (adverbio)	9
Suceder (verbo)	9	Probable (adjetivo)	6
No (adverbio)	7		
Encontrar (verbo)	5		
La calle (nombre)	4		

Fuente: Organizado a partir de IRaMuTeQ

Tomando el dendrograma (Figura 2) y las palabras más frecuentes que presentaron relación significativa entre ellas (Tabla 2), se buscó identificar las respuestas de los estudiantes a la pregunta que presenta un fenómeno o experimento aleatorio.

Así, en la Clase 1, a la que denominamos "Situaciones presentes en las que vivieron o pudieron vivir la situación propuesta", tomando las combinaciones de palabras que presentan una relación significativa, destacamos los siguientes injertos:

> **** *n_02 *Id_2 *Gen_1 *GM_1
> Ha pasado unos días lo saludo a un lado y yo al otro o hablamos.
> **** *n_03 *Id_3 *Gen_2 *GM_1
> Conocí a un amigo en la calle.
> **** *n_06 *Id_1 *Gen_1 *GM_1
> Puedes encontrarte con un amigo de tu escuela si está en el parque, la plaza o el mercado.
> **** *n_10 *Id_1 *Gen_1 *GM_1
> Puede suceder. Me ha pasado
> **** *n_19 *Id_2 *Gen_2 *GM_1
> Mucho, si tu amigo vive en el mismo barrio o ciudad que tú, pocos si no.
> **** *n_20 *Id_3 *Gen_2 *GM_1
> Coincidencia, me encuentro con mi amigo en la calle.
> **** *n_22 *Id_3 *Gen_2 *GM_1
> Podría pasar, pero no es muy probable.
> **** *n_25 *Id_2 *Gen_2 *GM_1
> El cincuenta por ciento, ya que todos mis amigos viven en el mismo barrio que yo.
> **** *n_36 *Id_2 *Gen_1 *GM_1
> Hola, vamos a casa a jugar.
> **** *n_45 *Id_3 *Gen_2 *GM_1
> Ya me he encontrado con varios amigos en la calle, la posibilidad de que esto vuelva a suceder es muy alta.

**** *n_47 *Id_3 *Gen_1 *GM_1
No encontrar a nadie, encontrar niños que no conoces o incluso salir a la calle.
**** *n_53 *Id_2 *Gen_1 *GM_1
Creo que esto rara vez sucederá.
**** *n_56 *Id_2 *Gen_2 *GM_1
Muchas posibilidades de que eso suceda.

En la Clase 2, que denominamos "Uso de términos probabilísticos para explicar la situación propuesta", tomamos las combinaciones de palabras que presentan una relación significativa, destacando los siguientes injertos:

**** *n_04 *Id_2 *Gen_2 *GM_1
Poco probable.
**** *n_05 *Id_2 *Gen_1 *GM_1
Probable.
**** *n_12 *Id_3 *Gen_2 *GM_2
Es muy difícil que esto suceda.
**** *n_15 *Id_2 *Gen_2 *GM_1
Lo más probable es que varias personas vivan cerca de mí.
**** *n_17 *Id_2 *Gen_1 *GM_1
Improbable, aleatorio.
**** *n_18 *Id_3 *Gen_2 *GM_1
Es probable que suceda.
**** *n_24 *Id_2 *Gen_2 *GM_2
Es muy probable que eso suceda.
**** *n_35 *Id_2 *Gen_2 *GM_1
Muy poco. El cinco por ciento de cien.
**** *n_38 *Id_2 *Gen_1 *GM_1
Posible, improbable, aleatorio, sorpresa.
**** *n_39 *Id_3 *Gen_2 *GM_1
Muy probable. Vivo muy cerca de la escuela.
**** *n_50 *Id_2 *Gen_1 *GM_1
Muy difícil que se dé esta situación.
**** *n_60 *Id_3 *Gen_2 *GM_1
Bastante difícil.

Para comprenderlo y analizarlo, fue necesario identificar cómo se hizo la construcción del discurso que compone el corpus del texto, y así identificar la estructura inicial que relaciona las formas léxicas y el contexto presente en la base de datos.

Por ello traemos a Marocci y Nacarato (2013) cuando enfatizan que es necesario comprender inicialmente lo que los estudiantes entienden sobre los términos más frecuentes, para luego ampliar los significados ya construidos y avanzar en la formación de conceptos probabilísticos, presuponiendo procesos de comunicación y reflexión de los estudiantes.

Este estudio converge con Vásquez y Alsina (2017) quienes concluyen que los significados surgen de las experiencias cotidianas respecto al vocabulario que compone el lenguaje probabilístico y todo el desarrollo del razonamiento probabilístico, a través de expresiones que denotan sus grados de creencias sobre lo que puede ocurrir en un determinado momento. situación evento

Aun indicando ejemplos para explicar la ocurrencia del evento en cuestión, para Alveal, Levicoy y Vásquez (2018) el desarrollo de experimentos aleatorios da lugar a describir la probabilidad en función del grado de posibilidad de ocurrencia de eventos que provienen de diferentes situaciones cotidianas.

Finalmente, Marocci y Nacarato (2013) expresan que el significado atribuido a expresiones o palabras en situaciones cotidianas es subjetivo, es decir, la comprensión de una determinada situación que involucra probabilidad será diferente para cada persona.

Al respecto, Konold (1991) indica que los estudiantes tienen una comprensión coherente, proveniente del contacto con circunstancias que involucran incertidumbre y, a partir de ahí, intentan dar sentido a las situaciones vividas.

Con eso, notamos en nuestro estudio que las situaciones cotidianas provocan en el niño el uso del lenguaje probabilístico, presentando indicios de la comprensión sobre conceptos probabilísticos.

IV. Consideraciones Finales

En este trabajo buscamos describir y analizar cómo surgen elementos lingüísticos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad de alumnos del quinto año de la Enseñanza Fundamental de una escuela pública de la ciudad de Barueri, São Paulo.

Así, el estudio en cuestión sugiere que estos estudiantes de quinto año de la Enseñanza Básica tienen conocimientos y experiencias previas del contexto cotidiano que posibilitan el estudio de la probabilidad desde edades tempranas.

Según Bryant y Nunes (2012), comprender la probabilidad de resultados inciertos juega un papel extremadamente importante en nuestras vidas. Dependemos de él para decidir el tratamiento médico que debemos tomar, el auto que compramos y las precauciones que debemos tomar para proteger a nuestras familias y hogares. Todas estas y muchas otras decisiones dependen de nuestro conocimiento de los posibles eventos que podrían ocurrir y de nuestra comprensión de la probabilidad de que estos eventos sean diferentes.

Por tanto, partimos de la premisa de que, para el estudio de la probabilidad, se desarrollan las primeras nociones y elementos de aproximación para la adquisición y desarrollo del lenguaje probabilístico. Además, los conceptos probabilísticos, al ser complejos y con un alto grado de abstracción, es necesario comenzar de forma gradual para que el estudiante tenga una comprensión adecuada del lenguaje específico de los términos probabilísticos.

Nuestro estudio apuntó y apoyó en Vásquez (2014) que el aprendizaje probabilístico debe estar enfocado en situaciones cotidianas en las que surgen o están presentes los conceptos de experimentos aleatorios. Se notó que cuando los estudiantes respondieron la pregunta propuesta, consideraron y reflexionaron sobre el experimento o fenómeno aleatorio que se les presentaba, indicando que las situaciones reales facilitan la aprehensión de conceptos probabilísticos.

Los resultados del estudio también convergen a lo que indica Vásquez (2018) cuando dice que el lenguaje probabilístico en las edades tempranas y consecuentemente en los primeros años de la Enseñanza Básica tiene una conexión muy estrecha con el lenguaje cotidiano, ya que los primeros elementos lingüísticos forman parte del mismo. el idioma de los estudiantes.

Este estudio confirma que es importante desarrollar actividades que utilicen la representación de conceptos probabilísticos, ya que permiten al estudiante identificar las situaciones reales propuestas y, gradualmente, asociarlas con el lenguaje probabilístico.

De esta forma, desde los primeros años, el estudiante debe tener contacto con el lenguaje probabilístico, partiendo de aspectos más intuitivos y naturales y, progresivamente, partiendo de problemas más simples a más elaborados, y construyendo un conocimiento más formal y sólido respecto a la Teoría de Probabilidad.

Bibliografía

[1] Alveal, F., Levicoy, D., y Vásquez, C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Revista Estudios Pedagógicos*, 44(1), 135-156.
[2] Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school*: challenges for teaching and learning (pp. 15-37). New York: Springer.
[3] Batanero, C. (2015). Understanding randomness: challenges for research and teaching. En *Proceedings of 9 Congress of European Research in Mathematics Education* – 9 CERME. Praha.
[4] Bennett, D. J. (1998). *Randomness*. Harvard University Press.
[5] Bryant, P. y Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability*: a literature review. Nuffield Foundation. Recuperado de

http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf
[6] Camargo, B. V. (2005). ALCESTE: um programa informático de análise quantitativa de dados textuais. En A. S. P Moreira, B. V. Camargo, J. C. Jesuíno, y S. M. Nóbrega (Org.), *Perspectivas teórico-metodológicas em representações sociais* (pp. 511-540). João Pessoa: Editora Universitária.
[7] Camargo, B. V. y Justo, A. M. (2013). Tutorial para uso do software de análise textual IRaMuTeQ. Recuperado de http://www.iramuteq.org/documentation/fichiers/tutoriel-en-portugais
[8] D'Amore, B. (2007). *Elementos de Didática da Matemática*. Tradução Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física.
[9] Gal, I. (2005). Towards probability literacy for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. En *Exploring probability in school* (pp. 39-63). Springer US.
[10] Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
[11] Lahlou, S. (2012). Text Mining Methods: An answer to Chartier and Meunier. *Papers on Social Representation*s, 20(38), 1-7.
[12] Leblanc, J.-M. (2015). Proposition de protocole pour l'analyse des données textuelles: pour une démarche expérimentale en lexicométrie. *Nouvelles perspectives en sciences sociales* (NPSS), 11(1), 25-63.
[13] Marchand, P. y Ratinaud, P. (2012). L'analyse de similitude appliqueé aux corpus textueles: les primaires socialistes pour l'election présidentielle française. En *Actes 11 Journées internationales d'Analyse statistique des Données Textuelles* – JADT (pp. 687-699). Liége, Belgique.
[14] Marocci, L. M. y Nacarato, A. M. (2013) Um ambiente de aprendizagem baseado na resolução de problemas: a possibilidade de circulação de significados sobre a Probabilidade por meio da linguagem. *Educação Matemática Pesquisa*, 15(1), 101-123.
[15] Ministério de Educación. (2018). *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC): Educação é a Base. Brasília, Brasil. Recuperado de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf
[16] Morgado, A. C, Pitombeira, J. C, Carvalho, P. C. P., y Fernandez, P. (2004). *Análise combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM.
[17] Mutombo, E. (2013). A bird's-eye view on the EC environmental policy framing: Ten years of Impact assessment at the commission. En *Proceedings 1st International Conference on Public Policy*. Grenoble: ICPP. http://www.icpublicpolicy.org/IMG/pdf/panel17_s1_mutombo.pdf
[18] Nascimento-Schulze, C. M. y Camargo, B. V. (2000). Psicologia social, representações sociais e métodos. *Temas de Psicologia*, 8(3), 287-299.
[19] NCTM. (2003). National Council of Teachers of Mathematics. *Principios y estándares para la educación matemática*. Traducción de Castellana. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

[20] Oliveira Júnior, A. P. de. et al. (2019). A apreensão do conceito de experimento aleatório: resolução de problemas e jogo pedagógico. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, 9(2), 238-257.
[21] Oliveira, L. F. R. (2015). Tutorial (básico) de utilização do IRaMuTeQ. Goiânia: Universidade Federal de Goiás. Recuperado de https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/771/o/Tutorial_-_Revis%C3%A3o.pdf
[22] Saldanha, L. y Liu, Y. (2014). Challenges of developing coherent probabilistic reasoning: rethinking randomness and probability from a stochastic perspective. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking*: presenting plural perspectives (pp. 367-396). Dordrecht: Springer.
[23] Salmerón, E. H. (2015). *El lenguaje del azar en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria*. Máster en Didáctica de la Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, Granada, España.
[24] Santos, V. et al. (2017). IRaMuTeQ nas pesquisas qualitativas brasileiras da área da saúde: scoping review. En *Actas del 6 Congresso Ibero-Americano em Investigação Qualitativa* (pp. 392-401). Salamanca (Espanha).
[25] Shuard, H. y Rothery, A. (1984). *Children Reading Mathematics*. Londres: Murray.
[26] Vásquez, C. A. O. (2014). *Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria em activo*. Tesis Doctoral en Educación. Programa de Doctorado em Educación, Universitat de Girona, España.
[27] Vásquez, C. O. y Alsina, A. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. *Bolema*, 31(57), 454-478.
[28] Vásquez, C. O. (2018). Surgimiento del lenguaje probabilístico en el aula de educación primaria. *REnCiMa*, 9(2), 374-389.

Evaluación Del Conocimiento De Estudiantes De Quinto Año De Primaria Sobre Tablas Estadísticas

Ailton Paulo de Oliveira Júnior[1], Luzia Roseli da Silva Santos[2] & Fátima Aparecida Kian[3]

Resumen

Consideramos que la competencia básica necesaria para lograr la cultura estadística es, entre otras, la capacidad de leer e interpretar tablas estadísticas, siendo estos formatos recursos privilegiados para agrupar y sintetizar grandes cantidades de información de forma eficiente y visualmente atractiva. Así, buscamos identificar el conocimiento sobre tablas estadísticas de 59 alumnos del quinto año de la Enseñanza Fundamental, de una escuela de Brasil. Los resultados indican la necesidad de que el estudiante sea capaz de recolectar, clasificar y representar los datos recolectados a través de tablas estadísticas. Es importante que tengan la percepción y el conocimiento de que para representar los datos se necesita una estructura formal para que se presenten de forma clara y objetiva.

Palabras clave: Tablas estadísticas, Educación Primaria, Enseñanza de la estadística.

Abstract

We consider that the basic competence necessary to achieve statistical culture is, among others, the ability to read and interpret statistical tables, these formats being privileged resources to group and synthesize large amounts of information in an efficient and visually attractive way. Thus, we sought to identify the knowledge about statistical tables of 59 students in the fifth year of Elementary School, from a school in Brazil. The results indicate the need for the student to be able to collect, classify and represent the data collected through statistical tables. It is important that they have the perception and knowledge that to represent the data, a formal structure is needed so that they are presented in a clear and objective way.

Keywords: Statistical tables, Primary education, Teaching statistics.

Modalidad: Ponencia

[1] Universidade Federal do ABC, Brasil. ailton.junior@ufabc.edu.br
[2] Universidade Federal do ABC, Brasil. luziaroselidasilvasantos@gmail.com
[3] Universidade Federal do ABC, Brasil. fatima.kian@ufabc.edu.br

I. Introducción

La inclusión de estadísticas y probabilidades en las pautas curriculares de todo el mundo para la educación primaria presenta varios desafíos para el sistema escolar en general. En el caso de Brasil, en la Base Común Curricular Nacional - BNCC (Ministerio de Educación, 2018), planificar cómo realizar la investigación ayuda a comprender el papel de la estadística en el cotidiano de los estudiantes. Así, la lectura, interpretación y construcción de tablas tienen un papel fundamental, además de la forma de producción de texto escrito para la comunicación de datos, ya que es necesario comprender que el texto debe sintetizar o justificar las conclusiones.

Así, el lenguaje tabular es muy importante, tanto desde el punto de vista matemático, como por su amplio uso en el mundo actual y, como todos los idiomas, tiene unas características propias que los estudiantes deben aprender para utilizarlo correctamente.

Además, a través de tablas se puede representar información de una situación cotidiana, a partir de la formulación de preguntas de investigación sobre contenidos específicos y descripción para detectar los conocimientos de un determinado grupo y al mismo tiempo estimular y hacer ver a los estudiantes su importancia como elementos de gran contenido informativo.

Por lo tanto, en este estudio, preguntamos a estudiantes de quinto año de la escuela primaria de una escuela municipal en Barueri, São Paulo, Brasil, qué saben sobre tablas estadísticas. A través de las respuestas indicadas por este grupo de estudiantes, presentaremos análisis textuales multivariados que indiquen este conocimiento y, a partir de estos resultados, junto con las pautas curriculares tomadas como base para este texto, las utilizaremos para desarrollar tareas

II. Marco Teórico

Para Glazer (2011), la interpretación de datos y la capacidad de construir tablas son esenciales en el proceso y producción de la ciencia, es decir, organizar datos en tablas es un método invaluable de representar datos para encontrar relaciones entre variables con el fin de determinar patrones, propiedades y relaciones.

Actualmente, la estadística es considerada una disciplina transversal y relevante por sus aportes en diferentes áreas del conocimiento (científico, social y humanístico) (Molina-Portillo et al., 2019). Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras (2011) afirman que este hecho se refleja en la gran cantidad de información estadística (en forma de tablas, gráficos y resúmenes estadísticos) que se observa en diferentes medios (televisión, internet, periódicos, etc.).

También destacamos que es importante recordar su utilidad en diversas actividades de la vida diaria, por ejemplo, la presencia de medidas resumen y representaciones tabulares en los medios (Gal, 2011; Mcconway, 2016; Jurečková y Csachová, 2020).

Estos elementos forman parte de la cultura estadística, es decir, según Del Pino y Estrella (2012), que una persona alfabetizada en estadística debe ser capaz de: 1) leer e interpretar los datos; 2) usar argumentos estadísticos para dar evidencia sobre la validez de alguna afirmación; 3) pensar críticamente sobre las afirmaciones, encuestas y estudios estadísticos que aparecen en los medios de comunicación; 4) leer e interpretar tablas, gráficos y medidas de resumen que aparecen en los medios de comunicación; interpretar, evaluar críticamente y comunicar información estadística; comprender y utilizar el lenguaje y las herramientas básicas de la estadística; 5) apreciar el valor de las estadísticas en la vida cotidiana, cívica y profesional como consumidor de datos, para actuar como ciudadano informado y crítico en la sociedad de la información

Por otro lado, Weiland (2017) indica que la cultura estadística va más allá de evaluar críticamente la información a la que se tiene acceso, debe ser un lente para ver el mundo.

Además, según Muñoz, Esparza, Ciprés y Macías (2020), una competencia básica necesaria para lograr una cultura estadística es la capacidad de leer e interpretar tablas estadísticas, ya que estos formatos son recursos privilegiados para agrupar y sintetizar grandes cantidades de información de manera eficiente y visualmente atractiva.

Las tablas estadísticas no solo son muy utilizadas por los medios de comunicación, sino que también son parte importante de la difusión de estadísticas oficiales e informes de investigación en un gran número de áreas del conocimiento (Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras, 2011; Estrella, 2014).

III. Metodología

Esta investigación es exploratoria, con un enfoque cualitativo y cuantitativo a través de un cuestionario proporcionado por Google Forms y analizado por el software IRaMuTeQ (Interfaz R para texto multidimensional y análisis de cuestionarios) para identificar lo que hacen los estudiantes de los primeros años de la Enseñanza Primaria (final de este ciclo), el quinto año, saber sobre tablas estadísticas.

Las respuestas de los estudiantes constituirán los elementos iniciales para la estructuración de un libro paradidáctico que pretende auxiliar en la enseñanza de los contenidos estadísticos propuestos por el BNCC (Ministerio de Educación, 2018) para los primeros años de la Enseñanza Fundamental.

Presentaremos en este texto los resultados de la aplicación del instrumento (cuestionario) para establecer el conocimiento de 74 alumnos de los años iniciales de la Enseñanza Fundamental (quinto año) de una escuela municipal de Barueri, São Paulo, Brasil, sobre tablas estadísticas.

En la primera parte del instrumento, nos propusimos establecer un breve perfil de los participantes y que consideramos poder aportar más elementos para establecer algunas pautas al momento de analizar el texto y al momento de elaborar las actividades del libro paradidáctico.

Los participantes de la investigación suman un total de 74 alumnos del quinto año de la Enseñanza Fundamental, de los cuales el 62,2% son del sexo femenino. La edad promedio de los estudiantes es de 10,51 años, dentro del rango de edad esperado para este nivel, con una desviación estándar de 0,53 años; algo más de la mitad de ellos tiene 11 años (51,4%). Aún sobre la edad de los estudiantes, al calcular el coeficiente de variación, que se determina por la relación entre la desviación estándar y la media, el grupo tiene poca variabilidad o dispersión, es decir, los valores observados de las edades de los estudiantes tienen una pequeña dispersión alrededor de la media, mostrándose homogéneas.

Todavía podemos observar que casi todos los estudiantes (95,9%) declararon que les gustaba la escuela, así, incluso en tiempos de la pandemia de Covid-19, hubo una relación positiva en relación a lo que ofrece la escuela. En cuanto al gusto por las matemáticas, encontramos un porcentaje del 79,7%, lo que indica que a los estudiantes todavía les gusta esta materia y que parece que los niños aún no han creado resistencia en relación a las matemáticas y que pueden ser utilizadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Frente al tema y la pregunta de investigación, el objetivo de este trabajo es identificar cómo los estudiantes conciben, a partir del conocimiento cotidiano y/o aprendido en la escuela, la comprensión de tablas estadísticas, realizando análisis textuales, a través de del software IRaMuTeQ, a saber, Clasificación Jerárquica Descendente – CHD y Análisis Factorial de Correspondencia (AFC).

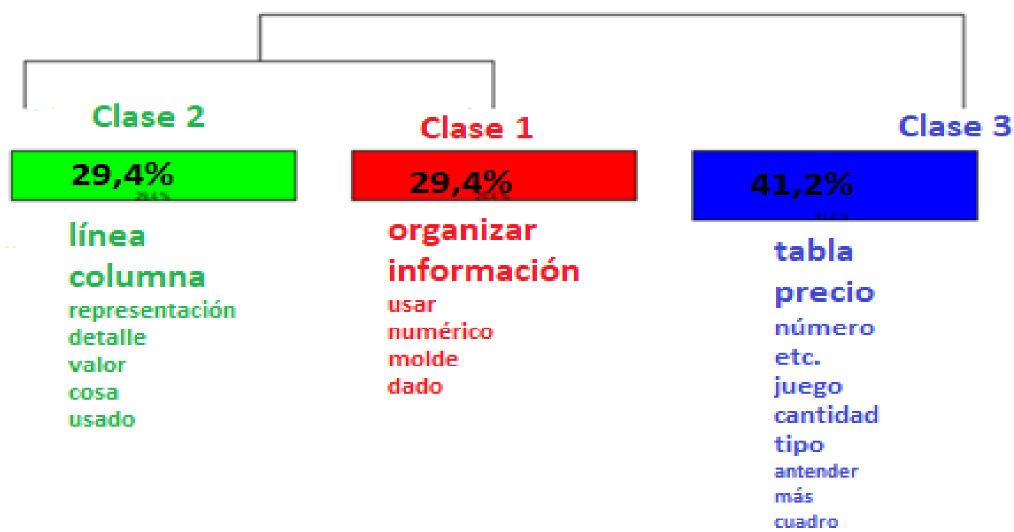
Este software se utilizó para realizar un análisis léxico cuantitativo que considera la palabra como una unidad, ofreciendo además su contextualización en el corpus o en el instrumento de investigación o cuestionario. Cada pregunta del instrumento estaba compuesta por contenido semántico, que formaba la base de datos o corpus analizado por el software.

Por lo tanto, se realizó un análisis de CHD, que permitió analizar las raíces léxicas y ofrecer contextos en los que se insertan las clases, según el segmento de texto del corpus de investigación (Camargo y Justo, 2013).

IV. Resultados

Consideramos que saber identificar adecuadamente tablas para presentar datos estadísticos es una parte fundamental, ya sea una nota de prensa, un artículo de análisis o un trabajo de investigación. El uso de tablas ayuda a minimizar la cantidad de datos en el texto y también evita tener que discutir variables insignificantes que no son esenciales para el tema.

Por lo tanto, presentamos un análisis textual multivariante para indicar la comprensión de 59 estudiantes (79,7%) de un total de 74 sobre tablas estadísticas. En la Figura 1 presentamos el dendrograma generado en el CHD de los resultados de IRaMuTeQ, el cual muestra las particiones que se realizaron en el corpus hasta llegar a las tres clases finales.

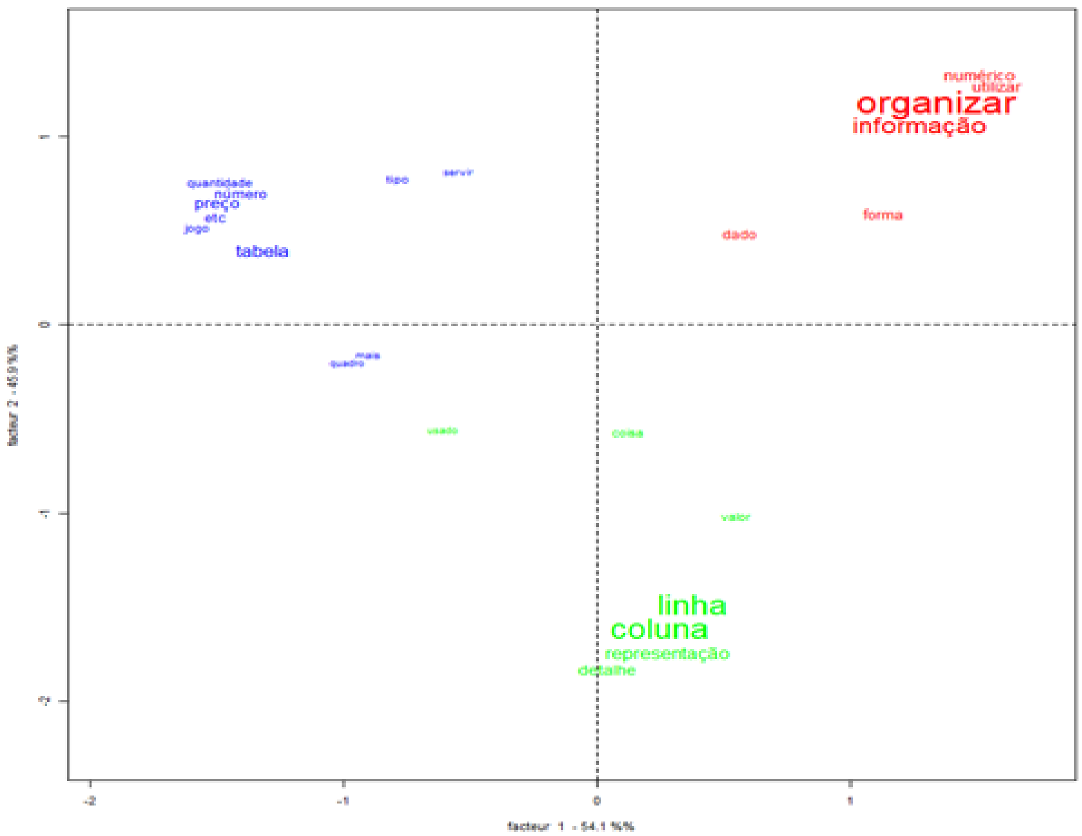


Fuente: Salida del software IRaMuTeQ.

Figura 1. Resultado de la Clasificación del Método de Reinert para los conocimientos presentados sobre tablas estadísticas: Dendrograma.

Así, en el resultado de la Clasificación por el Método de Reinert: Dendrograma, Figura 1, en un primer momento, el corpus "Cuerpo" se dividió en dos subcorpus, separando la clase 3 del resto del material que representa el 41,2% del corpus textual (1ª partición o iteración) En un segundo momento, se dividió el subcorpus mayor, originándose las clases 1 y 2 que contienen, respectivamente, el 29,4% y el 29,4% del corpus textual (2ª partición o iteración).

De la misma forma que el ítem anterior, considerando el AFC, fue posible realizar la asociación del corpus textual entre las palabras, considerando la frecuencia de incidencia de las palabras y las clases, representándolas en un plano cartesiano. Así, es posible visualizar la contextualización del vocabulario típico de cada clase, posibilitando identificar qué clases se complementan y concentran el corpus, y cuáles se alejan del centro y muestran cierta especificidad (Figura 2).



Fuente: Salida del software IRaMuTeQ.

Figura 2. Resultado de la Clasificación del Método Reinert para los conocimientos presentados sobre tablas estadísticas: AFC.

Se observa que las palabras de las clases se presentan en un segmento centralizado que se expande hacia puntos periféricos, y estos están bien definidos y separados, con pequeñas aproximaciones entre palabras asociadas a las tres clases.

Tomando las Figuras 1 y 2, nombramos las tres clases, describiendo lo que indican y luego presentamos algunos injertos de los discursos de los estudiantes para facilitar la comprensión de cómo los estudiantes perciben las tablas estadísticas.

En la Clase 3, que llamamos “Presente ejemplos que justifican la necesidad de construir una tabla”, tomando las combinaciones de palabras (línea, columna, representación, detalle, valor, cosa y usado) que tienen una relación significativa, destacamos los siguientes injertos:

**** *n_01 *Id_1 *Gen_1 *GE_1 *Gm_2

Las estadísticas aparecen originalmente en tablas.
**** *n_13 *Id_2 *Gen_2 *GE_1 *Gm_1
Tabla pequeña, tabla de consulta sistemática de datos donde se registran precios, lista de personas, etc.
**** *n_16 *Id_2 *Gen_2 *GE_1 *Gm_1
Puede ser una tabla que marque los puntos.
**** *n_25 *Id_2 *Gen_2 *GE_1 *Gm_1
Tabla pequeña, tabla de consulta sistemática de datos donde se registran precios, lista de personas, etc.
**** *n_33 *Id_2 *Gen_2 *GE_1 *Gm_2
Sirve para hacer llamadas, clasificar, números de llamadas de alumnos, etc.
**** *n_37 *Id_3 *Gen_1 *GE_1 *Gm_1
Mesa de precios, mesa de pizarra. Tenemos varios tipos de mesas diferentes.
**** *n_38 *Id_2 *Gen_1 *GE_1 *Gm_1
Un partido de fútbol está sobre la mesa, nombres de personas, goles. Gustavo anotó 3 goles y Danilo 4.
**** *n_43 *Id_3 *Gen_2 *GE_1 *Gm_2
Conozco las mesas escolares.
**** *n_54 *Id_3 *Gen_1 *GE_1 *Gm_1
Usado en juegos que no sean de fútbol, lista de precios.
**** *n_56 *Id_3 *Gen_1 *GE_1 *Gm_1
Plantillas estándar sobre listas de mercado, listas de precios y otras diferentes.
**** *n_67 *Id_2 *Gen_1 *GE_1 *Gm_2
Presenta los datos como una tabla de filas y columnas y se utiliza para ver detalles y comparar valores.
**** *n_70 *Id_3 *Gen_2 *GE_1 *Gm_2
Tablas de números o palabras o cualquier cosa.

En esta primera clase, podemos ver de las respuestas presentadas anteriormente que los estudiantes conciben las tablas estadísticas asociándolas a situaciones cotidianas o situaciones en general en las que son necesarias para la presentación de datos.

Las tablas estadísticas son parte de un lenguaje universal, una forma de presentar datos para describir información, con el objetivo de producir en el investigador, el público o el estudiante una impresión más rápida y vívida del tema en estudio, que hoy en día muchas veces se puede ver ocupando un lugar destacado en los medios escritos y hablados.

Reflexionando sobre la representación en tablas, Pagan y Magina (2010) argumentan que los ciudadanos necesitan saber cómo construirlas, identificando la mejor forma de representación de los datos con los que están trabajando.

Así, para trabajar con tablas, puedes trabajar con información del mundo real para, junto con tus alumnos, transformarla en datos numéricos, organizarla en tablas, discutirla y comprenderla. Consideramos que esta comprensión le otorga al estudiante subsidios para posicionarse críticamente, inferir e incluso hacer predicciones sobre el hecho o fenómeno en estudio.

En la Clase 1, que denominamos "Razones presentes para la construcción de una tabla estadística" y observando las combinaciones de palabras (organizar, información, uso, numérico, forma y datos) que tienen una relación significativa, destacamos los siguientes injertos:

> **** *n_02 *Id_3 *Gen_1 *GE_1 *Gm_1
> Organizar datos.
> **** *n_07 *Id_3 *Gen_2 *GE_1 *Gm_1
> Información numérica organizada.
> **** *n_11 *Id_2 *Gen_1 *GE_1 *Gm_1
> Ayuda a organizar la información.
> **** *n_14 *Id_2 *Gen_2 *GE_1 *Gm_1
> Conjunto de información en orden.
> **** *n_22 *Id_2 *Gen_2 *GE_1 *Gm_1
> Manera de organizar los datos.
> **** *n_24 *Id_3 *Gen_2 *GE_1 *Gm_1
> Estructura que utilizamos para organizar los datos, que es información sobre un tema determinado. Estos datos pueden ser cualitativos (relacionados con características y atribuciones) o cuantitativos (referidos a valores numéricos).
> **** *n_30 *Id_2 *Gen_1 *GE_1 *Gm_1
> Opción de organizar las cosas.
> **** *n_39 *Id_2 *Gen_2 *GE_1 *Gm_2
> Estructura que utilizamos para organizar los datos, que es información sobre un tema determinado.
> **** *n_44 *Id_3 *Gen_2 *GE_1 *Gm_1
> Hacer cuentas de varias cosas y organizar.
> **** *n_52 *Id_2 *Gen_2 *GE_1 *Gm_1
> Organizar.
> **** *n_60 *Id_3 *Gen_2 *GE_1 *Gm_2
> Sirven para organizar la información textual y numérica de forma clara y cómoda.

En este segundo grupo, notamos que los estudiantes señalan diferentes razones que justifican la elaboración de tablas, indicando que tienen la percepción de que estas representaciones son formas de organizar datos o información.

Las tablas brindan información rápida y confiable sobre las variables en estudio, permitiendo determinaciones administrativas y pedagógicas más coherentes y científicas (Crespo, 2002).

Finalmente, en la clase 2, que denominamos "Presentación de la estructura formal en la construcción de un cuadro", también presentamos combinaciones de palabras que muestran una relación significativa, y de las cuales destacamos algunos injertos a continuación:

**** *n_06 *Id_3 *Gen_2 *GE_1 *Gm_1
Líneas y columnas.
**** *n_10 *Id_2 *Gen_2 *GE_1 *Gm_1
Representación matricial que es en líneas y columnas.
**** *n_17 *Id_2 *Gen_1 *GE_1 *Gm_1
Cosas que tienen columnas y líneas.
**** *n_19 *Id_3 *Gen_2 *GE_1 *Gm_1
Marco con líneas.
**** *n_20 *Id_2 *Gen_2 *GE_1 *Gm_1
Presenta datos con líneas y columnas, y se utiliza para ver detalles y comparar valores.
**** *n_49 *Id_3 *Gen_2 *GE_1 *Gm_2
Líneas y columnas.
**** *n_55 *Id_2 *Gen_2 *GE_1 *Gm_1
Representación en líneas y columnas.
**** *n_61 *Id_3 *Gen_2 *GE_1 *Gm_2
Líneas y columnas para organizar la información de forma clara y cómoda.
**** *n_64 *Id_3 *Gen_2 *GE_1 *Gm_1
Representación formada por líneas y columnas, utilizada para ver detalles y valores.
**** *n_67 *Id_2 *Gen_1 *GE_1 *Gm_2
Presenta los datos como una tabla de líneas y columnas y se utiliza para ver detalles y comparar valores.
***** *n_71 *Id_3 *Gen_1 *GE_1 *Gm_1
Ver en líneas y columnas.

Consideramos que este tercer grupo asume que la tabla es una estructura para organizar datos y esta estructura está formada por líneas y columnas, y la unión de filas y columnas se denomina celda. Es en la celda donde se ingresa la información, es decir, los datos. Para indicar el número de líneas y columnas que tiene una tabla, podemos multiplicar el número de líneas por el número de columnas. Destacamos la indicación de los elementos importantes señalados por Crespo (2005) para la construcción de un cuadro, elementos que ratifican los supuestos de Araujo y Flores (2010).

En Crespo (2002), se señalan los elementos que debe contener una tabla en su construcción: 1) Cuerpo: conjunto de líneas y columnas que contienen información sobre la variable en estudio; 2) Cabecera: parte superior de la tabla que especifica el contenido de cada columna; 3) Columna indicadora: parte de la tabla que especifica el contenido de las columnas; 4) Líneas: rectas imaginarias que facilitan la lectura, en el sentido horizontal de los datos que se inscriben en sus intersecciones con las columnas; 5) Casa o celda: espacio destinado a un solo número; 6) Título: conjunto de información, lo más completa posible, y que pueda responder a las preguntas: ¿Qué? ¿Cuándo? ¿Dónde? Debe estar ubicado en la parte superior de la tabla y es de suma importancia, porque si no lo ponemos, los lectores no sabrán de qué está hablando la tabla.

V. Consideraciones Finales

Es interesante señalar que algunos alumnos, cuando se les pregunta qué entienden por mesa, piensan en los aspectos más formales de su estructura de elaboración y dejan de lado otros aspectos que consideramos también esenciales para su construcción.

Por ello, es importante desarrollar actividades utilizando la representación en forma de tabla, ya que permiten al sujeto identificar los datos con mayor rapidez. Son herramientas que amplían nuestra capacidad para procesar información estadística y establecer relaciones entre diferentes tipos de información.

Todavía podemos resaltar que este estudio indicó lo que establece Pereira (2009), o sea, que las tablas sirven para resumir un conjunto de informaciones y aun tomando Duval (2003), que el estudio de las tablas debe orientarse en el tránsito entre diferentes tipos de datos de registros, porque de esta manera se brinda la visualización de un mismo objeto matemático bajo diferentes formas, llevando a los estudiantes a no "encerrar registros", llevando al individuo a tener un pensamiento abierto a nuevas posibilidades.

Así, desde los primeros años, el alumno debe tener contacto con tipos de tablas, desde las más sencillas hasta las más elaboradas, ya que su construcción es importante para que el alumno desarrolle la capacidad de observar y representar.

Bibliografía

[1] Araujo, G. E. y Flores, C. R. (2010). O Tratamento da informação nas séries iniciais: uma proposta de formação de professores para o ensino dos gráficos e tabelas. En *Anais do 9 Encontro Nacional De Educação Matemática*. Belo Horizonte, Minas Gerais.

[2] Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., y Contreras, M. (2011). Las Tablas y Gráficas como Objetos Culturales. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 76, 55-67.

[3] Camargo, B. V. y Justo, A. M. (2013). Tutorial para uso do software de análise textual IRaMuTeQ. Recuperado de http://www.IRaMuTeQ.org/documentation/fichiers/tutoriel-en-portugais
[4] Crespo, M. I. (2005). Um estudo sobre o comportamento de busca e uso de informação de pesquisadores das áreas de biologia molecular e biotecnologia: impactos do periódico científico eletrônico. Mestrado em Comunicação e Informação. Faculdade de Biblioteconomia e Comunicação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
[5] Crespo, A. (2022). *A Estatística Fácil*. São Paulo: Saraiva.
[6] Del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo, Revista De Investigación Latinoamericana (PEL)*, *49*(1), 53–64.
[7] Duval, R. (2003). Registro de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. En S. Dias y S. D. A. Machado (Orgs.), *Aprendizagem em Matemática*: registro de representação semiótica (pp. 11-33). Campinas, São Paulo: Papirus.
[8] Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 14(2), 1-23.
[9] Gal, I. (2011). Does Census at school develop statistical literacy? *Statistical Journal of the IAOS*, 27(3-4), 229-230.
[10] Glazer, N. (2011). Challenges with graph interpretation: a review of the literature. *Studies in Science Education*, 47(2), 183-210.
[11] Jurečková, M. y Csachová, L. (2020). Statistical literacy of Slovak lower secondary school students. *Technium Social Sciences Journal*, 9, 163-173.
[12] Mcconway, K. (2016). Statistics and the media: a statistician's view. *Journalism*, 17(1), 49-65.
[13] Ministério de Educación. (2018). Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Educação é a Base. Brasília, Brasil. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf
[14] Molina-Portillo, E. et al. (2019). Statistical literacy in the information society. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 35(2), 148-169.
[15] Muñoz, D. E., Esparza, A. C. M., Ciprés, M. C., y Macías, M. G. M. (2020). Comprehension of statistical graphs and tables by primary school teachers-in-training. *Zetetiké*, 28, 1-17.
[16] Pagan, A. y Magina, S. (2010). O ensino de estatística a partir da interdisciplinaridade: um estudo comparativo. En *Anais do 10 Encontro Nacional de Educação Matemática* – ENEM. Salvador, Bahia.
[17] Pereira, S. (2009). *A leitura e interpretação de tabelas e gráficos para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental*: uma intervenção de ensino. Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
[18] Weiland, T. (2017). Problematizing statistical literacy: an intersection of critical and statistical literacies. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 33-47.

Análisis de la organización matemática escolar en torno a los problemas de contar

Gisela Juberó Silva[1]

Resumen

Actualmente la combinatoria en la educación secundaria de Cataluña tiene un papel secundario, que enmarcados en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), se traduce en términos de limitaciones e incompletitudes de la organización matemática escolar dominante. Partiendo de la hipótesis de que dichas limitaciones e incompletitudes están relacionadas con la ausencia de un proceso de modelización explícito, proponemos analizar en términos de praxeologías el capítulo sobre combinatoria de un libro, de texto considerado un caso prototípico en secundaria y lo comparamos con el capítulo correspondiente de otro libro centrado en el proceso de modelización. El objetivo final es contrastar la hipótesis e identificar si el uso de la modelización matemática favorece o no un mayor grado de completitud.

Palabras clave: *TAD, praxeología, modelización matemática, grado de completitud.*

Abstract

Currently, combinatorics in secondary education in Catalonia has a secondary role, which, framed in the Anthropological Theory of Didactics (ADT), is translated in terms of limitations and incompleteness of the dominant school mathematical organization. Starting from the hypothesis that these limitations and incompleteness are related to the absence of an explicit modeling process, we propose to analyze in terms of praxeology the chapter on combinatorics of a textbook considered a prototypical case in secondary school and we compare it with the corresponding chapter of another book focused on the modeling process. The goal is to test the hypothesis and identify whether the use of mathematical modeling advantages a greater degree of completeness or not.

Keywords: *TAD, praxeology, mathematical modeling, degree of completeness*.

Modalidad: Ponencia

[1] Universidad Autónoma de Barcelona, España. gisela13101@gmail.com

I. Introducción

En las últimas décadas, la combinatoria se ha convertido en una de las áreas de las matemáticas que mayor crecimiento ha experimentado. En particular, su implicación en el sector de la ciencia computacional la ha convertido en una herramienta esencial que ha contribuido al desarrollo y avance de campos científicos más allá de las matemáticas (Lenart, 2015). La creciente demanda de conocimientos combinatorios en la sociedad ha conducido a considerarla como un instrumento esencial tanto en el ámbito académico como en los profesionales, hecho que ya argumentaba Kapur en 1970 en su artículo *Combinatorial analysis and school mathematics*.

El currículo de la Educación Secundaria Obligatoria de Cataluña (2019) ubica la combinatoria en el sector de matemáticas, como un contenido de cuarto curso (estudiantes de 15-16 años), el último de la educación obligatoria. Está situado dentro del apartado “Estadística y azar” y subapartado “Conceptos básicos de probabilidad” como se ilustra en la siguiente imagen:

- Conceptes bàsics de probabilitat (CC16)
  - – (*) Probabilitat condicionada i successos independents.
  - – Càlcul de probabilitats de successos compostos (taules de contingència i diagrames d'arbre).
  - – (*) Combinatòria (variacions, permutacions i combinacions) per quantificar.
  - – Simulació amb recursos digitals per al càlcul de probabilitats (CCD24).

Figura 1: Contexto de la combinatoria en el Curriculum de secundaria catalan (Generalitat de Catalunya, 2019, p.169)

Notemos que la palabra combinatoria viene marcada con un asterisco, lo que significa que se trata de una noción de “las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” y no para las “aplicadas”. Es decir, solamente para aquellos alumnos que seguirán los estudios de bachillerato científico o tecnológico. En este sentido, es probable que dicho contenido no ocupe un espacio importante en las matemáticas escolares, hecho que entra en contradicción con las apreciaciones de que la combinatoria tiene y es un recurso valioso para el desarrollo del razonamiento de los estudiantes. Dada esta limitación es natural cuestionarse sobre la matemática de la combinatoria que se enseña y la manera en cómo se enseña.

En este trabajo se aborda el problema de la enseñanza de la combinatoria a través del estudio y la comparación de dos libros de texto: uno prototípico en cuanto a su metodología y uso y otro más particular, actualmente en desuso, elaborado por profesionales de la didáctica de las matemáticas. Se pretende evidenciar las diferencias entre ellos y reafirmar la importancia del uso de la modelización matemática para enseñar, aprender y estudiar matemáticas. Para ello usamos la metodología y marco conceptual proporcionados por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD) concretamente con las nociones de praxeología y de grado de completitud relativo de una praxeología (Fonseca, 2004), para analizar la actividad matemática y, en particular, la actividad matemática escolar.

II. **Marco teórico**

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) nace dentro del marco general de la llamada *Didáctica Fundamental*, iniciada por Guy Brousseau en los años setenta, cuando se propuso el análisis del saber matemático como vía de acceso para el estudio de fenómenos didácticos. Esta partía del del supuesto básico que todo fenómeno didáctico tiene un componente matemático esencial y, por tanto, se puede modelizar, en un sentido amplio (Bosch, García, Gascón, e Higueras, 2006).

El enfoque antropológico, en particular la TAD, se caracteriza porque "sitúa la actividad matemática, y en consecuencia la actividad del estudio en matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales" (Chevallard, 1999, p.1).

En este enfoque, para describir el conocimiento matemático se utilizan las praxeologías u organizaciones praxeológicas.

Las praxeologías son entidades formadas por cuatro elementos: (1) tareas T, agrupadas en *tipos de tareas* que corresponden a las acciones o problemas que afrontan los sujetos, (2) las *técnicas* τ utilizadas para llevar a cabo las tareas de cada tipo; corresponden a la manera de hacer o realizar las tareas, es decir, el cómo. Los tipos de tarea y sus técnicas constituyen un "saber-hacer", que hace referencia a la práctica o praxis de la actividad. En las instituciones sociales sale entonces la necesidad de explicar estos elementos y es así como llegamos a (3) las *tecnologías*, θ, son discursos racionales que tiene como objeto justificar y explicar la técnica, justificar en el sentido de asegurarse de que la técnica permite realizar la tarea y explicar en el sentido de dar un motivo, un porqué la técnica es correcta. Finalmente (4) la *teoría* Θ constituye el argumento formal que permite describir, justificar y articular rigurosamente las tecnologías.

$$\text{Praxeologías matemáticas} \begin{cases} \text{PRAXIS} \begin{cases} \text{- tareas T} \\ \text{- técnicas } \tau \end{cases} \\ \\ \text{LOGOS} \begin{cases} \text{- tecnologías } \theta \\ \text{- teorías } \Theta \end{cases} \end{cases}$$

Figura 2: Esquema de las partes de una praxeología, elaboración propia.

La noción de praxeología se utiliza para designar actividades y organizaciones de conocimiento de distintos “tamaños”. En general, en una institución I, una teoría Θ permite fundamentar varias tecnologías θ_j, cada una asociada a un conjunto de técnicas τ_{ij} y tipos de tareas T_{ij}. Así, podemos tener praxeologías puntuales $[T/\tau/\theta/\Theta]$ alrededor de un único tipo de tareas como, por ejemplo, los “problemas de permutaciones” que consisten en contar de cuántas maneras se puede ordenar una serie de *m* objetos sacados de un conjunto de *n* objetos distintos. Existe un discurso tecnológico que permite relacionar este tipo de problemas con otros tipos, como los “problemas de variaciones”, los “problemas de combinaciones”, etc., formando así una praxeología local $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$; es decir, una praxeología en torno a una misma tecnología θ. Al considerar distintas praxeologías locales fundamentadas por la misma teoría Θ, llegamos a una praxeología regional $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$.

Y, finalmente, cuando distintas praxeologías regionales se articulan entre sí, obtenemos una organización global $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$ que podemos asociar con un determinado ámbito del saber o de la actividad humana. En general, hablaremos de organizaciones praxeológicas para designar las posibles praxeologías de distintos “tamaños”. En el particular caso de las matemáticas, hablaremos, para simplificar, de organizaciones matemáticas: puntuales (OMP), locales o regionales.

Las praxeologías permiten pues, ordenar y clasificar el saber estudiado de manera que se pueda identificar las relaciones que hay entre ellas. Formar una imagen. Como en este análisis lo que buscamos es comparar y sacar conclusiones nos ha parecido oportuno usar la herramienta que nos proporciona Fonseca 2004 cuando habla del grado de completitud de una organización matemática.

Fonseca presenta “un conjunto de conjeturas relativas a la rigidez de la actividad matemática”, que culminan en unos criterios para el análisis del grado relativo de completitud de una praxeología u en el ámbito de las matemáticas organización matemática local (OML).
El grado de completitud es una herramienta que permite comparar dos organizaciones matemáticas. Entendiendo siempre que este, es un concepto relativo. No existirá nunca la organización matemática completa por excelencia. Solamente podremos hablar de una OM más completa que otra. El grado de completitud no es un concepto absoluto.
El grado de completitud de una OML viene definido mediante dos tipos de indicadores: los relativos al estudio del proceso de construcción, es decir, como se llega al resultado final hablaremos e Organizaciones Didácticas (OD) y los que refieren a la estructura del objeto construido, es decir la realidad matemática a estudiar y aquí hablaremos e Organizaciones Matemáticas (OM).
Los dos aspectos son inseparables ya que toda OM es generada por un estudio y al mismo tiempo, todo proceso de estudio se realiza con base en una OM en construcción.
A continuación, concisa y brevemente se exponen los distintos criterios (Fonseca, 2004):

- OML1: Integración de los tipos de tareas: en una OML conviven varios tipos de tareas relacionadas entre sí mediante discursos tecnológicos o sucesivos desarrollos de la técnica, esta OML analiza la integración entre las distintas tareas y los vínculos entre ellas. Una OML será menos completa cuanto más aislados estén los tipos de tareas.
- OML2: Existencia de diferentes técnicas para la realización de una misma tarea y criterios que permitan escoger entre ellas (por ejemplo: cual es la más económica, la más fiable, etc)

- OML3: Flexibilidad de las técnicas. Entendiendo la "flexibilidad" de una técnica con que ésta no se identifique rígidamente con los objetos ostensivos usados para describirla (Bosch y Chevallard, 1999).
- OML4: Existencia de tareas y técnicas inversas.
- OML5: Existencia de criterios para interpretar el funcionamiento de las técnicas que forman la OML y para interpretar los resultados obtenidos al aplicarlas.
- OML6: Existencia de tareas matemáticas "abiertas", es decir aquellas tareas cuyos datos e incógnitas no están prefijados de antemano. Se incluyen en este tipo las "tareas de modelización matemática"
- OML7: Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica, es decir en que grado la tecnología permite construir nuevas técnicas capaces de ampliar los tipos de tareas de la OML.

- OD1: La OML responde a cuestiones que no pueden ser respondidas en las OMP
- OD2: Existencia de momentos exploratorios
- OD3: Desarrollo del trabajo de la técnica
- OD4: Cuestionamiento tecnológico (sobre la justificación y alcance de las técnicas).
- OD5: Momentos de institucionalización (se pueden distinguir elementos auxiliares que se han utilizado para la construcción de los conocimientos de aquellos "componentes explícitos" considerados conceptos matemáticos)
- OD6: Momentos de evaluación (se debe "evaluar la calidad de los componentes" de la OML construida. Por ejemplo, en el caso de las tareas podríamos preguntarnos si están bien identificadas o si hay suficiente variabilidad…)

III. **Metodología**

El propósito de nuestro estudio fue analizar las praxeologías u organizaciones matemáticas relacionadas en el ámbito de la combinatoria que se enseñan actualmente en la enseñanza secundaria en España. Mejor dicho, analizamos lo que consideramos como la organización matemática dominante en el saber por enseñar, dado que es una organización matemática local (OML) que encontramos en los distintos libros de texto examinados, con muy pocas variaciones entre ellos. Mostramos que la citada OM dominante en torno a los problemas de contar, presenta limitaciones e indicios de incompletitud matemática que nos proponemos identificar y, en cierto sentido, explicar.

La hipótesis de partida, que pretendemos contrastar, consiste en postular que dichas limitaciones e incompletitudes están relacionadas con la ausencia de un modelo intermedio (intermedio debido a que se encuentra entre el enunciado contextualizado de los problemas de contar y las técnicas para contar el número de objetos que satisfacen ciertas condiciones), el cual permite unificar el estudio de los diferentes tipos de problemas de contar, relacionarlos entre sí y construir técnicas compuestas que permitan distinguir entre los problemas simples y los compuestos descomponibles o no.

La metodología que utilizaremos para contrastar dicha hipótesis consistirá en el análisis praxeológico del libro de texto Marea Verde de Salvador, A., y Molero, M (2022) (en adelante MV) para secundaria de acceso abierto y en línea, que consideramos como un caso típico, esto es, un buen representante de la OM dominante en secundaria en torno a los problemas de contar. Utilizaremos como contraste el manual de Bosch et al. (1996) editado por Castellnou en catalán y Almadraba en castellano (en adelante CA), y que actualmente está agotado. Este texto fue escrito por un equipo de autores formado por profesores de secundaria e investigadores en didáctica de las matemáticas expertos en la TAD. Se caracteriza por utilizar un proceso de modelización matemática que formaliza el enunciado de los problemas, simbolizando cada uno de los objetos a contar mediante una cadena de símbolos que cumplen determinadas condiciones formales. A este proceso de modelización lo llamaremos modelo intermedio.

Mostramos que, gracias a este modelo intermedio, se obtiene una OML relativamente más completa y que si dicha OM se construye (como es habitual en la mayoría de los libros de texto) partiendo de los enunciados contextualizados de los problemas, superándose, además, determinadas limitaciones relativas a lo que se entiende por "enseñar y aprender a resolver problemas de contar". El punto de vista subyacente al libro de Almadraba, identifica la actividad matemática y la actividad de estudio de las matemáticas con una actividad de modelización matemática, lo que permite ampliar el objetivo de "resolver" los problemas de contar (calculando el número de objetos por contar) hacia un objetivo más ambicioso consistente en "estudiar" los diferentes tipos de problemas de contar, analizar las relaciones entre ellos y construir técnicas de contar más elaboradas, flexibles y potentes.
A continuación, un ejemplo del uso de este modelo intermedio en el libro analizado (Bosch et. al, 1997, p. 290-291):

3 Reparto de premios iguales

Tú y tus amigas habéis ganado tres entradas iguales (no numeradas) para ir a un concierto, pero, como sois seis las que queríais ir, decidís sortearlas entre vosotras. ¿Cuántos tríos distintos de amigas ganadoras puede haber?

1 Descripción simbólica

Llamaremos N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 y N_6 a las chicas; escribimos unos cuantos grupos de símbolos que representen distintos repartos de las entradas:

Chicas que reciben entradas	Grupo de símbolos
N_1, N_2 y N_6 N_1, N_3 y N_5 N_2, N_4 y N_5	$N_1 N_2 N_6$ $N_1 N_3 N_5$ $N_2 N_4 N_5$

2 Análisis cualitativo

Estudiemos las características de estos grupos de símbolos:

- Ningún símbolo **se repite** en ningún grupo ($N_1N_1N_1$ significaría que la primera chica recibe las tres entradas).
- Si se **intercambian** dos símbolos (diferentes, por supuesto) en un grupo, el nuevo grupo es el **mismo** que el primero. Efectivamente, $N_1N_4N_3$ y $N_1N_3N_4$ significan lo mismo: reciben la entrada las chicas N_1, N_4 y N_3.

No existen otras restricciones.

Los grupos de símbolos que cumplen estas características reciben el nombre de *combinaciones* (ordinarias o sin repetición).

3 Análisis cuantitativo

Si construyes un árbol para contar los grupos, observarás que es el mismo árbol del ejemplo anterior, cambiando N por P (compruébalo). Se registran, entonces, el mismo número de columnas o niveles: $6 \cdot 5 \cdot 4$, de acuerdo con la **regla del producto**.

Ahora bien, la estructura de este árbol implica que $N_1N_2N_3$ se considera diferente de $N_3N_2N_1$, cuando esto no es cierto. Estás contando más grupos de los que existen en realidad.

Fíjate que el grupo $N_1N_2N_3$ se ha contado $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ veces:

$$N_1N_2N_3,\ N_1N_3N_2,\ N_2N_1N_3,\ N_2N_3N_1,\ N_3N_1N_2,\ N_3N_2N_1$$

Análogamente, el grupo $N_1N_2N_4$ se cuenta $3! = 6$ veces, e igual sucede en todos los grupos.

Por lo tanto, el número total de grupos de símbolos corresponde a la **sexta parte** del número total de caminos:

$$\text{Número de grupos de símbolos} =$$
$$= \text{Número de repartos} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 = 20$$

4 Fórmula general de las combinaciones

En las igualdades anteriores, el numerador es $V_{6,3}$, mientras que el denominador es $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ y equivale al número de distribuciones de los tres pósters en una fila de tres lugares.

Por otra parte, sabemos que **m** = 6 (disponemos de 6 símbolos para formar los grupos) y **n** = 3 (cada grupo consta de tres símbolos).

Puede deducirse la siguiente fórmula general para las combinaciones:

$$\mathbf{C_{m,n}} = \frac{\mathbf{V_{m,n}}}{\mathbf{P_n}} = \frac{\mathbf{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}}{\mathbf{n!}}$$

Se suele escribir $\mathbf{C_{m,n}} = \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$

Estas expresiones se denominan *números combinatorios.*

Resumiendo, para contrastar nuestra hipótesis hemos llevado a cabo un análisis comparativo, matemático y didáctico, de la OM en torno a los problemas de contar que propone cada uno de dichos textos. Hemos utilizado los indicadores de completitud relativa de Fonseca (2004) para especificar y comparar el grado de completitud de cada uno de ellos.

El análisis consiste en las siguientes fases, que hemos repetido para cada uno de los dos libros de texto:

1. Descripción del contenido del capítulo de combinatoria
2. Análisis en términos praxeológicos, que empieza con una descripción del contenido del capítulo de combinatoria, sigue comentando aspectos referentes a la tecnología y termina con una síntesis de la estrategia matemático-didáctica implementada por los autores.
3. Análisis del grado de completitud

Finalmente, en esta ponencia presentamos una síntesis, solamente, de los resultados obtenidos en la tercera fase ya que, teniendo que escoger, estos son los que finalmente nos han permitido posicionarnos y quizás contrastan la hipótesis de partida de manera más evidente.

IV. Análisis grado de completitud

Criterio	MV	CA
OML1	Los tres tipos de problemas (permutaciones, variaciones y combinaciones) se presentan desconectados entre ellos. Cada tipo tiene asignada una fórmula y entre las fórmulas sí se establecen relaciones a nivel teórico. Pero no entre los problemas. Queda en manos de los alumnos el determinar, para cada problema, si el conjunto de objetos por contar corresponde a permutaciones, variaciones o combinaciones. En el caso de los problemas complejos, se propone una estrategia general basada en los principios de la resolución de problemas de Polya que no es específica de los problemas de contar.	Se propone un gran tipo de problemas sobre cómo contar un conjunto de objetos y se introduce una técnica general basada en una primera modelización del conjunto de objetos por contar a partir de cadenas de símbolos. Este modelo intermedio es el que permite determinar, en una segunda fase, si la cadena de símbolos corresponde a permutaciones, variaciones o combinaciones.

OML2	Se identifican los diagramas de árboles y la construcción de tablas como herramientas para la misma tarea. Se usan indistintamente en los problemas. Y no se especifican las situaciones donde convendría más una que la otra. En algunas actividades resueltas se propone reformular el enunciado de un problema disminuyendo el número de opciones para simplificar el conteo. No se introduce como una técnica, sino como un recurso para "facilitar" la comprensión del problema y no se vuelve a mencionar.	La justificación y diversidad de herramientas para una misma técnica es escasa y no se establecen criterios para distinguir cual es la más económica o eficaz. No obstante, se proponen actividades que tienen como objetivo el establecimiento de relaciones entre las técnicas y se recomienda, en el caso de las combinaciones en lugar del diagrama de árboles, usar la tabla.
OML3	Hay muy poca diversidad. Los diagramas de árbol son siempre análogos, así como las letras n y m utilizadas para crear las distintas fórmulas. Las nomenclaturas son las estándares.	Hay muy poca diversidad. Los diagramas de árbol son siempre análogos, así como las letras n y m utilizadas para crear las distintas fórmulas
OML4	No contribuye a aumentar el grado de completitud porque no hay problemas de contar inversos y por lo tanto no aparece como indicador de flexibilidad de las técnicas.	No contribuye a augmentar el grado de completitud porque no hay problemas de contar inversos y por lo tanto no aparece como indicador de flexibilidad de las técnicas.
OML5	No aparece como indicador de completitud puesto que raramente aparece en el texto un discurso tecnológico para interpretar el resultado de aplicar las técnicas de resolución de los problemas de contar	La estrategia del modelo simbólico intermedio y su relación con las distintas técnicas, tanto simples como compuestas da una explicación sobre las técnicas construidas y sus resultados
OML6	No hay actividades abiertas. Se encuentran "observaciones" que formuladas podrían convertirse en una actividad abierta	No se identifican actividades abiertas en el sentido propuesto

OML7	El alcance de los elementos tecnológico-técnico es limitado a la resolución de problemas prototipo	El modelo simbólico se utiliza para la resolución de problemas. De manera que en el caso de una práctica ``fuera de los límites trabajados" junto con el concepto de problema compuesto permite evolucionar la técnica lo cual supone de cierta manera una ampliación de la técnica
OD1	Cumple de manera limitada y parcial el criterio ya que se identifican cuestiones que no pueden ser resueltas solamente con las OMP pero el libro MV no brinda los conocimientos para resolverlos.	Se cumple satisfactoriamente el criterio con el apartado de los problemas compuestos
OD2	Se abordan las técnicas directamente con ejemplos de actividades resueltas, completas y terminadas. Sin dejar espacio a los momentos exploratorios. No se cumple el criterio	El libro invierte las primeras páginas para desarrollar un momento exploratorio que después saciará con la construcción de las técnicas. De igual manera durante todo el proceso son preguntas exploratorias las que guían el desarrollo de la técnica.
OD3	El identificador está ausente. La rutinización es rígida ya que no hay un progreso en el uso repetido de las técnicas	El desarrollo del trabajo de la técnica queda implícito en la propuesta de ejercicios de cada tipo que se da al final del libro. Sin embargo, ésta no está ordenada, hecho desfavorable para el inicio de la rutinización.
OD4	La dinámica de dar los resultados antes de que el alumno pueda cuestionar la forma de entenderlos perjudica la aparición de cuestionamiento tecnológico. Consecuentemente la OD4 no se puede evaluar	Igual que en MV no aparecen de forma explícita cuestiones de interpretación y justificación de las técnicas. No se cumple el indicador.
OD5	Hay instrumentos auxiliares pero estos se presentan al mismo "nivel" que los conceptos principales, hecho que puede generar confusión. Se cumple confusamente el criterio	Describe explícitamente la técnica, algoritmos y criterios utilizados. Cumple sustancialmente el indicador comparado con MV.

OD6	No se cumple el criterio	No se encuentran elementos claros que nos permitan afirmar mayor cumplimiento en este caso comparado con el del libro de MV.

IV. Resultados

Los resultados de nuestros análisis comparativos entre los capítulos sobre combinatoria de los libros de Marea Verde (MV) y Castellnou-Almadraba (CA) no deben entenderse en un sentido valorativo entre dos productos o recursos educativos. No se trata en ningún modo de mostrar las limitaciones o fortalezas de un caso a través de su comparación con otro. Los dos casos de estudio corresponden a dos posibles organizaciones matemáticas de las praxeologías por enseñar alrededor de la combinatoria. El objetivo de este estudio es el de analizar las particularidades de una y otra organización desde el punto de vista de los componentes praxeológicos introducidos en cada caso de la estrategia didáctica propuesta para dicha introducción, así como caracterizar el resultado final en términos de su completitud relativa.

Más allá de este análisis, partimos del supuesto que la organización matemática propuesta por el libro de MV corresponde a la organización dominante en el sistema educativo español de la educación secundaria, mientras que la del libro de CA muestra una OM alternativa que facilita el análisis por contraste, al tiempo que muestra una propuesta difícil de hacer vivir bajo las condiciones institucionales actuales, ya que como se ha comentado éste está descatalogado.

Nuestros análisis nos han permitido, en primer lugar, ilustrar y caracterizar fenómenos didácticos generales establecidos en la literatura sobre las limitaciones de las OM escolares. Como son por ejemplo la atomización y rigidez de las técnicas, el aislamiento temático y, en general, la incompletitud de las OML. Estos fenómenos no son específicos de la combinatoria, pero parecen manifestarse en este ámbito de una forma específica y muy nítida. Además, se le añade que la combinatoria aparece en muchos casos como un ámbito de las matemáticas cuyo objetivo es obtener una solución numérica a los diferentes tipos de problemas propuestos. Y se ignora que se pueden trabajar otros conceptos cuya línea de razonamiento es totalmente distinta. Un ejemplo de ello es la teoría de grafos.

Para muchas comunidades hacer matemáticas, en cierto sentido, se identifica con la actividad de calcular, de obtener una respuesta concreta y numérica a las preguntas formuladas. En este estudio no hemos encontrado ningún otro planteamiento de la problemática, como podría ser la de preguntar ¿qué situaciones podrían corresponder a una fórmula dada?, ¿qué relación podría haber entre distintos tipos de problemas o de técnicas?, ¿qué utilizaciones tienen estas técnicas más allá de resolver problemas de contar?, ¿qué tipos de problemas de contar no pueden resolverse con las técnicas escolares?, ¿cómo podrían desarrollarse las técnicas presentadas para abarcar otros tipos de problemas de contar?, etc.
Consecuentemente, enseñar y aprender matemáticas se identifica escolarmente con proporcionar y movilizar técnicas de cálculo más o menos sofisticadas. Corresponde así a lo que Bosch y Gascón (1994) designan como “organizaciones didácticas tecnicistas”.

Postulamos que dichos fenómenos, están relacionados con la ausencia de una visión de las matemáticas como una actividad de modelización.
Para empezar a contrastar la afirmación anterior, con respecto a la modelización, se ha analizado, paralelamente al libro de MV, el texto de CA porque este constituye un intento, aunque humilde, de introducir una mínima actividad de modelización a través de la construcción de modelos en forma de cadenas de símbolos.

Es decir, mientras en MV se utilizan las actividades resueltas para introducir, justificar y explicar la formula general de los diferentes tipos de problemas de contar, en CA se siguen las siguientes cuatro fases:

1. Descripción simbólica (o traducción del enunciado del problema al lenguaje simbólico)
2. Análisis cualitativo de los grupos de símbolos
3. Análisis cuantitativo de los grupos de símbolos
4. Fórmula general de un tipo particular de problemas

A través de este contraste que, repetimos, no pretende hacer valoraciones, hemos intentado poner de manifiesto en qué grado y de qué forma se modifican los hechos matemático-didácticos citados cuando se plantea el estudio de la combinatoria elemental y aunque sea de manera limitada, desde la perspectiva del estudio de una actividad de modelización (como son las cuatro fases anteriores).

El libro de CA muestra el papel que podría tener la introducción de una actividad de modelización, basada en la construcción de modelos simbólicos, expresados en forma de cadenas de símbolos.

Al realizar el análisis del texto de CA, hemos podido observar cómo la utilización de estos modelos intermedios da un mayor grado de completitud a la Organización Matemática Local (OML) propuesta, la cual en este caso corresponde a los distintos problemas de contar.
Usar el modelo intermedio mejora la articulación entre las OMP (como por ejemplo las fórmulas generales), que integran la OML. También hace posible una caracterización más orgánica de los problemas de contar simples y permite hablar de problemas más complejos como lo serían los compuestos descomponibles. Finalmente, también hemos observado que el uso del modelo intermedio facilita las posibilidades de construir nuevas técnicas. Lo consigue componiendo técnicas de contar simples, para estudiar otros tipos problemas. Es claro, sin embargo, que la propuesta del libro de CA se apliega a las restricciones propias de un recurso didáctico para 4º de la ESO. Pero no parece difícil imaginar cuál sería la construcción ampliada que podría obtenerse si dejáramos de lado estas restricciones: inclusión de problemas inversos, estudio sistemático del alcance de las técnicas, caracterización de otros tipos de problemas compuestos, introducción de cuestiones tecnológico-teóricas, etc.

Finalmente, desde un punto de vista metodológico, este trabajo se propone también contribuir al conjunto de investigaciones que utilizan el análisis praxeológico de los libros de texto como herramienta principal.

Bibliografía

Bosch, M., Compta, A., Gascón, J., Lamarca, J. M., y Urbaneja, P. (1997). *Matemáticas 4º ESO (Opción B) (1a ed.).* Almadraba

Bosch, M., y Chevallard, Y. (1999). *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. Recherches en didactique des mathématiques* (Revue), 19 (1), 77–123.

Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., y Higueras, L. R. (2006). *La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico 1* (Vol. 18; Inf. Téc. n.o 2)

Chevallard, Y. (1999). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathéematicques,* 19 (2), 221–266

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascon, J. (2004). *Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares*. *Recherches en didactique des les mathematiques.*

Generalitat de Catalunya. (2019). *Currículum d' educació secundària obligatòria.*

Kapur, J.N. (1970). *Combinatorial analysis and school mathematics*

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C., y Godino, J. D. (1996). *Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. Educación Matemática, 8 (1), 26–39.*

Salvador, A., y Molero, M. (2022). Capítulo 14: Combinatoria. En Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4ºb de eso. Marea Verde. Descargado de www.apuntesmareaverde.org.esf

VII Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

Una propuesta de enseñanza para reconstruir conceptos de Estadística Descriptiva con el Análisis de Datos, bajo el modelo TPACK

Verónica San Román[1] y Susana Beatriz Marrón[2]

Resumen

La Estadística irrumpe en todos los campos de la actividad humana. Su aplicabilidad la ha convertido en una ciencia indiscutible ya que permite describir un conjunto de datos, realizar predicciones de valores futuros y colaboran en la toma de decisiones en cualquier disciplina. En este trabajo describimos el diseño y análisis de una secuencia de enseñanza destinada a reconstruir los conceptos y procedimientos aplicados en Estadística Descriptiva para estudiantes de carreras de Ingeniería. Procurando una integración eficiente de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje nos basamos en los lineamientos del modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) que permitirá a los futuros ingenieros transferir, utilizando la tecnología, los conocimientos estadísticos en el mundo real.

Palabras clave: Educación Estadística, Conocimiento tecnológico pedagógico del contenido (TPACK), Estadística Descriptiva, Análisis de datos.

Abstract

Statistics bursts into all fields of human activity. Its applicability has turned it into an indisputable science since it can describe a set of data, make predictions of future values and collaborate in decision making in any discipline. In this paper we describe the design and analysis of a teaching sequence designed to introduce the concepts and procedures applied in Descriptive Statistics for Engineering students. In order to achieve an efficient integration of ICT in the teaching-learning process, we follow the model TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) that will allow future engineers to transfer, using technology, statistical knowledge in the real world.

Keywords: Statistical education, Technological pedagogical content knowledge (TPACK), Descriptive statistics, Data analysis

Modalidad: Ponencia virtual

[1] Departamento de Matemática. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca, Argentina. vsanroman@gmail.com

[2] Departamento de Matemática. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca, Argentina. beatriz.marron@uns.edu.ar

I. Introducción

La Estadística, como ciencia que estudia el comportamiento de la información cualitativa o cuantitativa y los métodos utilizados para tratar dicha información, se ocupa de la recopilación, organización, presentación, análisis e interpretación de datos con el fin de tomar decisiones efectivas y pertinentes.
El interés por la enseñanza de la estadística dentro de la Educación Matemática viene ligado tanto al rápido desarrollo de la misma como ciencia que brinda apoyo a la investigación, la vida profesional e incluso la vida cotidiana de este mundo globalizado en que vivimos, como a su crecimiento, impulsado por el uso de las nuevas tecnologías, para procesar grandes volúmenes de datos y comunicar resultados (Batanero, 2001). Esto pone en evidencia la necesidad de perfeccionar las prácticas educativas para favorecer el desarrollo de una cultura estadística, esta se refiere a:

> dos componentes interrelacionados: a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos y, b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante (Gal, 2002, p.2)

Asimismo, Suárez (2008, como se citó en Rocha y Salamanca, 2013), afirma que la Estadística es un área de conocimiento de fundamental importancia en toda situación del campo de la Ingeniería que requiera del análisis de datos para la toma de decisiones informadas en presencia de incertidumbre y variación.
Por ello debemos considerar que la formación del futuro ingeniero contemple una concepción de los contenidos como una construcción dinámica del conocimiento estadístico, que sirva como base para el desarrollo del pensamiento complejo.
En este sentido, las concepciones alternativas no han de ser vistas como un impedimento al aprendizaje sino como un punto de partida necesario con el que se ha de contar para llegar a construir los nuevos conocimientos científicos. Es decir, las concepciones de los estudiantes son sus hipótesis de partida que hay que tener en cuenta en la (re)construcción de los conocimientos científicos (Furió Más, et al., 2006). Esto resultará sumamente interesante para que el alumno comprenda tanto el carácter multidisciplinar de la Estadística como las estrechas relaciones que se establecen entre ésta y otras áreas del conocimiento formal e informal.
En este contexto las TIC ofrecen herramientas invaluables para resolver problemas de la realidad sin perder de vista a la estadística como producto cultural, como práctica, como forma de pensamiento y como modo de argumentación. Siguiendo esta corriente pedagógica tomamos como guía para el diseño de la secuencia didáctica los lineamientos del modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) desarrollado en al año 2006 por Mishra y Koehler. Como indica Cabero Almenara et al. (2015) el modelo TPACK pone de relieve la vinculación, investigación, diagnóstico y reflexión entre los diferentes tipos de conocimiento, presentes en toda acción docente que incorpore las TIC en el desarrollo de su propuesta didáctica. Es decir, el núcleo de dicho

modelo está formado por tres formas de conocimiento primario: Tecnología (TK), Pedagogía (PK) y Contenido (CK). Estas tres formas de conocimiento, o mejor, estos tres conocimientos sectoriales, se interrelacionan dando lugar a conocimientos específicos tales como: Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK), Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), Conocimiento Tecnológico del Contenido (TCK), y Conocimiento Técnico Pedagógico del Contenido (TPACK). Las relaciones entre las distintas formas de conocimiento se ven reflejadas en el siguiente esquema (Figura 1):

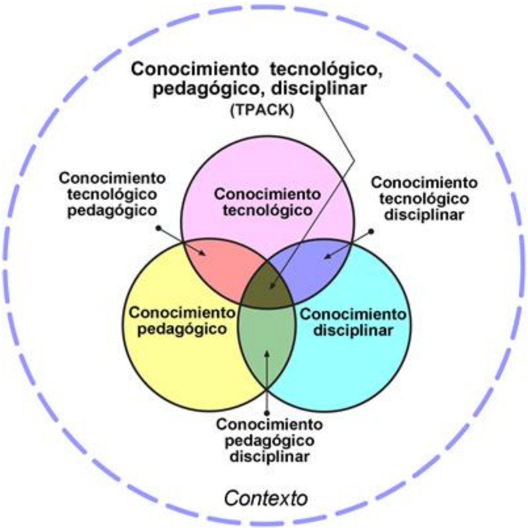


Figura 1: Conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar. Los tres círculos –disciplina, pedagogía y tecnología– se superponen y generan cuatro nuevas formas de contenido interrelacionado. Fuente: http://tpack.org/

En resumen, bajo el modelo TPACK se sostiene que una verdadera integración de tecnología requiere comprender y negociar la interrelación entre estos tres tipos de conocimiento. Un docente capaz de negociar estas relaciones representa un saber experto diferente del de un experto disciplinar (un matemático o un historiador), o de un experto en tecnología (un ingeniero en sistemas) o un experto en pedagogía (un licenciado en educación). En particular la integración de la tecnología en la enseñanza de estadística requiere el desarrollo de una forma de razonar en situaciones de incertidumbre que permita realizar inferencias y guiar la toma de decisiones a partir del análisis de los datos. Por ello es imprescindible establecer una relación dinámica y transaccional entre las tres componentes del conocimiento pues “saber cómo utilizar tecnología no es lo mismo que saber cómo enseñar con tecnología” (Mishra y Koehler, 2006, p. 1033).
En este marco el rol del docente es el de tutor, facilitador y mediador:

> no es sólo un pedagogo, sino un planificador, un diseñador y un director que tomará como insumo importante todo lo que sus alumnos saben previamente para determinar alguna forma de traer al aula los estilos de aprendizaje y las predisposiciones de [esta] generación de aprendizaje ubicuo (Burbules, 2012, p.13).

Para finalizar, mencionar que aplicando el modelo TPACK los contenidos serán organizados y presentados para su enseñanza, atendiendo el perfil de los estudiantes, promoviendo en ellos un rol más activo y articulado entre los diferentes elementos del proceso pedagógico mediado por las TIC. Esto mejorará la asimilación del conocimiento y facilitará el desarrollo de habilidades relacionadas con el pensamiento aleatorio, el uso de software específico para el análisis estadístico, la interpretación y contextualización de los resultados numéricos, entre otras; propiciando que los estudiantes "aprendan en contextos que hacen honor a las ricas conexiones entre la tecnología, el tema (contenido) y los medios para enseñarlo (la pedagogía)" (Koehler y Mishra, 2006 como se citó en Magadán, 2012).

III. Metodología de Enseñanza

La planificación de esta secuencia didáctica, orientada desde una perspectiva constructivista del aprendizaje, se basa en la concepción de que la realidad es una construcción interna, propia del individuo. En su diseño se contempló la incorporación de diferentes momentos destinados a perfeccionar las competencias de los estudiantes; no solo en su conocimiento declarativo sino también en los conocimientos estratégicos del razonamiento y explicativos relacionados con la argumentación. En este contexto, Mayer (2005 como se citó en Latapie, 2007) afirma que la incorporación de las TIC forma una parte primordial en el aprendizaje multimedia donde el sujeto logra la construcción de representaciones mentales ante una presentación multimedia, es decir, logra construir conocimiento.
De esta manera, considerando los lineamientos del modelo TPACK, resulta esencial la planificación o programación como una guía indispensable para llevar adelante la tarea de preparar clases con TIC donde resulta imprescindible tomar tres tipos de decisiones: disciplinares, pedagógicas y tecnológicas (Figura 2).

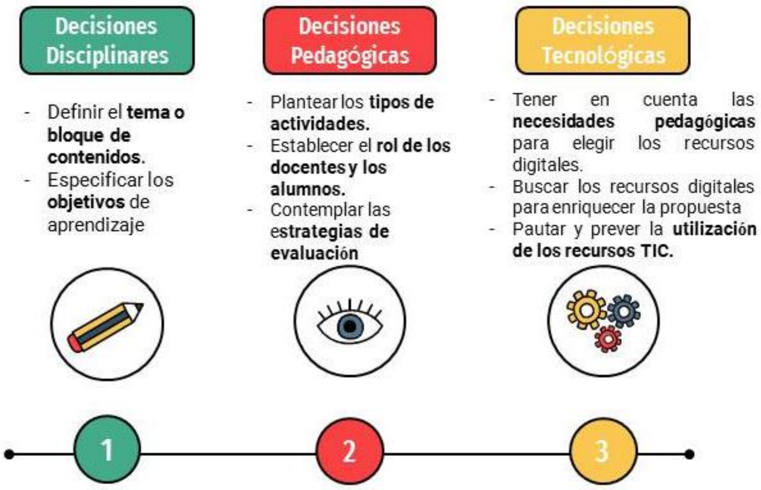


Figura 2: Tipos de decisiones bajo el modelo TPACK.
Esquema de elaboración propia basado en Magadán, C. (2012).

En este sentido, el marco de entendimiento en la enseñanza de la Estadística Descriptiva bajo el modelo TPACK puede describirse, sucintamente, como se muestra en la Tabla 1.

TK Conocimiento Tecnológico	El conocimiento acerca de como utilizar las Herramientas Digitales (HD) en el estudio de la Estadística Descriptiva.
PK Conocimiento Pedagógico	El conocimiento sobre como usar la metodologia de Aprendizaje en Acción Colaborativo en el nivel universitario.
CK Conocimiento del Contenido	El conocimiento profundo acerca de temas relacionados con el análisis de datos y la inferencia a través de la Estadística.
PCK Conocimiento Pedagógico del Contenido	El conocimiento didáctico a fin de incorporar sucesivas transposiciones didácticas para la enseñanza de Estadistica Descriptiva.
TPK Conocimiento Tecnológico Pedagógico	La noción de creación de Mapas Mentales y Webquest utilizando HD como herramientas cognitivas para el aprendizaje colaborativo.
TCK Conocimiento Tecnológico del Contenido	El conocimiento y empleo de software especificos como GeoGebra, R-Studio o Infostat para el procesamiento de la información.
TPACK Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido	El conocimiento sobre como incorporar distintas HD que propicien el intercambio y la comunicación que favorezcan el aprendizaje colaborativo en el área de Probabilidad y Estadistica.

Tabla 1: Marco de entendimiento en la enseñanza de la Estadística Descriptiva bajo el modelo TPACK. Fuente: tabla de elaboración propia

Planificación y análisis de la propuesta de enseñanza

A continuación, se presenta la secuenciación del esquema de actividades de enseñanza (Figura 3):

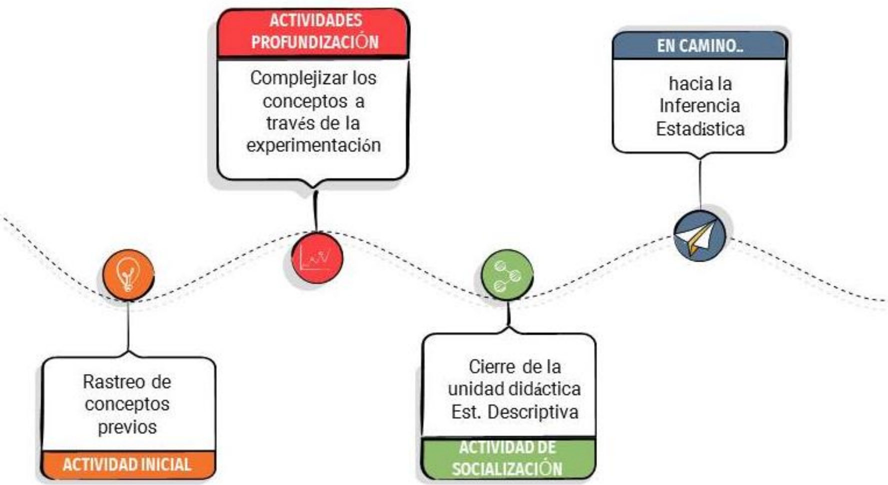


Figura 3: Esquema de elaboración propia que describe las actividades propuestas

El **primer momento** planificado involucrará un trabajo previo que tendrá por objetivo otorgar el marco cognitivo necesario para desarrollar la primera actividad. Para esto se les solicitará a los estudiantes que:

- exploren y analicen el material propuesto por la cátedra (video-clase, apuntes propios y libros online) disponible en el aula virtual de Moodle.

- seleccionen 20 temas musicales a través de la aplicación Spotify y los registren en un archivo compartido llamado Temas Musicales.

Luego, el desarrollo de la propuesta comenzará planteando la siguiente actividad inicial.

Actividad inicial

¡A todo ritmo!…

Se utilizará la base de datos, construida previamente en forma colaborativa por todos los participantes de la cátedra, y se presentará una actividad disparadora de carácter experimental que brindará el marco de referencia esencial para recuperar los conocimientos previos necesarios en el desarrollo del contenido relacionado con la unidad de estadística descriptiva. En el desarrollo de esta actividad se propondrá un trabajo de indagación donde se realizarán preguntas tales como: *¿Cuál será la intención de armar esta gran lista musical colaborativa? ¿Qué se les ocurre que podemos hacer con estos datos? ¿Cuál sería la población objeto de estudio?, ¿y la muestra? ¿Qué conocimientos estadísticos previos podemos utilizar?*

A continuación, se requerirá a los estudiantes que participen en la creación de una nube de palabras incorporando entre tres y cinco palabras que represente el contenido abordado, utilizando el recurso digital Mentimeter, de los conceptos relacionados con estadística que reconozca el alumnado en sus respuestas.

Esta actividad permitirá al alumnado:

- recuperar y resignificar los conceptos trabajados con anterioridad, como población y muestra, a través del diálogo dirigido.

- reconocer la interrelación entre el contenido trabajado y la cotidianeidad, involucrando una visión más general del mismo.

- movilizar procesos mentales de orden superior como el análisis y la síntesis del contenido a fin de seleccionar las palabras claves que conformarán la nube de palabras.

- desarrollar la capacidad argumentativa y la exposición de sus ideas.

En el **segundo momento**, con el objetivo de intensificar y complejizar los conceptos trabajados a través de la experimentación, se propondrán las siguientes actividades de profundización.

Actividades de profundización

Primera actividad

¡Investiguemos acerca de la Estadística Descriptiva!

En esta instancia los estudiantes trabajarán tanto con los recursos propuestos por la cátedra disponibles en el aula virtual de Moodle (apuntes, libros online, video-clase, etc.), como con aquellos provenientes de distintas fuentes de internet dando prioridad a los Recursos Educativos Abiertos (REA), para establecer una primera aproximación de los conceptos básicos de Estadística Descriptiva. Como producto resultante de este trabajo de investigación cada estudiante elaborará un documento, a través de la herramienta digital Google Docs, denominado *"Notas de Estadística Descriptiva"* que les servirá como fundamento para la realización de las actividades sucesivas.

La intención de esta actividad será movilizar el interés del estudiantado en la investigación y profundización de los conceptos: variables cuantitativas vs cualitativas, medidas de resumen: centralización, dispersión y posición, y la representación gráfica de los datos, permitiéndoles así:

- describir matemáticamente un concepto, asistido por la tecnología en el proceso de descripción o documentación del mismo,

- generar un texto, a partir de la selección y secuenciación de la información existente, donde quedará demostrado su nivel de comprensión del tema, e

- iniciar la investigación en acción del alumnado en Estadística Descriptiva.

Segunda actividad

Análisis de Datos Reales

Esta actividad se compondrá de dos pasos: el *primer paso* consistirá en la participación activa en un cuestionario dinámico, realizado con Kahoot! para consolidar los fundamentos teóricos de Estadística Descriptiva y el *segundo paso* en el análisis estadístico de un conjunto de datos reales, seleccionados desde la página web Gapminder[3], que derivará en la elaboración de un informe y una presentación dinámica[4] donde los estudiantes compartirán con sus compañeros cuál es la naturaleza de los datos, el contexto donde fueron recolectados, cuáles fueron las fuentes de consulta, si solicitaron o no el

[3] https://www.gapminder.org/
[4] Para esta presentación deberán incorporar alguna de las herramientas digitales disponibles como, por ejemplo: Genial.ly, Canva, Venngage, Prezi, Visme y Powtoon, entre otros.

asesoramiento de algún especialista en el tema elegido, qué análisis estadístico han realizado y cuáles son las conclusiones obtenidas, entre otras cuestiones que consideren relevantes. En esta instancia será imprescindible la incorporación de un software específico relacionado con cálculos estadísticos como por ejemplo Geogebra, R, Infostat y/o Excel.

En el desarrollo de esta la actividad los alumnos podrán:

- vivenciar el trabajo con una base de datos en primera persona reconociendo sus fortalezas y limitaciones,

- experimentar con la herramienta digital propuesta valorando su versatilidad para realizar un trabajo empírico con las diferentes variables aleatorias,

- reconocer la importancia de la interpretación y contextualización de un problema a fin de establecer conclusiones, y

- resignificar los conocimientos de Estadística Descriptiva trabajados previamente.

Para finalizar, se planteará un **tercer momento** como cierre de esta unidad didáctica que abrirá la puerta para avanzar en el estudio de la Estadística Inferencial. A tal fin se propone la siguiente actividad de socialización

Actividad de socialización

Participación y socialización a través de "El Muro ¿Qué nos dicen los datos?"

Se incorporará un espacio colaborativo a través de la creación de un muro con la herramienta digital *Padlet*. Las entradas en este sitio permitirán tanto socializar los avances relacionados con el trabajo de investigación y las conclusiones obtenidas a partir del análisis de los datos, como emitir una opinión fundamentada de los avances y retrocesos del resto de los compañeros de la clase.

El formato de estos aportes será realizado en alguna de las siguientes modalidades: un video-corto (2-5 min.), un podcast, un documento o simplemente texto en línea.

Finalmente, con esta actividad los estudiantes podrán:

- resignificar los conceptos desarrollados previamente en clase,

- utilizar adecuadamente el lenguaje estadístico para comunicar los resultados,

- desarrollar la argumentación matemática en la exposición de sus intervenciones y/o conclusiones, y

- adquirir compromiso en la construcción colectiva del conocimiento.

Estrategias de enseñanza

Con el objetivo de llevar adelante la implementación y puesta en marcha de las actividades diseñadas se considerarán las siguientes estrategias de enseñanza:

- la incorporación de herramientas digitales para: integrar la teoría con la práctica, estimular a los estudiantes a desafiar sus conocimientos previos y construir nuevos marcos conceptuales,

- la selección de herramientas tecnológicas accesibles desde diferentes dispositivos como computadoras, celular y/o tableta, que no requieran grandes recursos de hardware ni de conectividad, y

- el diseño de materiales flexibles e interactivos, que faciliten el acceso y/o descarga de textos y otros materiales.

IV. Conclusiones

El recorrido por esta secuencia de actividades permitirá amalgamar la teoría y la práctica, potenciándose las habilidades intelectuales y superando la capacidad de memorización. La metodología propuesta facilitará una enseñanza vivencial, que permita a los alumnos la posibilidad de experimentar distintos recursos digitales y la manipulación de los datos, mientras relacionan, reconstruyen y resignifican los conceptos estadísticos. El trabajo con datos reales y simulaciones permitirá que el tratamiento de los contenidos no sea una simple secuencia lineal, sino que dé lugar a conceptualizaciones provisorias y a conocimientos no acabados. En este sentido, incorporar las TIC bajo los principios del modelo TPACK brindará a cada estudiante la posibilidad real de “experimentar” las nociones y fundamentos de la Estadística Descriptiva, enriqueciendo el campo perceptual y las operaciones mentales involucradas en los procesos de construcción, estructuración y análisis de información.

Como propuesta a futuro, el desafío es claro: avanzar en esta realidad compleja atravesada por las nuevas tecnologías, favoreciendo el aprendizaje colaborativo y empleando soportes telemáticos tendientes a vincularnos y enriquecer el proceso educativo. Por ello resulta fundamental continuar diseñando metodologías de trabajo para que el estudio de la Estadística Descriptiva se constituya en el andamiaje matemático que nos lleve al estudio de la Estadística Inferencial a través de verdaderos “laboratorios virtuales de investigación”. En este contexto creemos que el modelo TPACK proporcionará herramientas didácticas invaluables para el diseño de propuestas que incrementen la motivación y favorezcan el desarrollo de un rol activo en el aprendizaje por parte del alumnado.

Bibliografía

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada. Grupo de Investigación en Educación. http://www.ugr.es/local/batanero

Burbules, N. (2012). El aprendizaje ubicuo y el futuro de la enseñanza. *Encounters on Education* (13), 3-14. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4100463

Cabero Almenara, J., Marín Díaz, V.,Castaño Garrido, C. (2015). Validación de la aplicación del modelo TPACK para la formación del profesorado en TIC. *@tic. revista d'innovació educativa*, (14), 13-22. https://ojs.uv.es/index.php/attic/article/view/4001/6235

Furió Más, C., Solbes, J., Carrascosa, J. (2006). Las ideas alternativas sobre conceptos científicos: tres décadas de investigación. *Revista Alambique* (48), 64-77. https://www.uv.es/jsolbes/documentos/Alambique2006%20Furio,Solbes,Carrascosa.pdf

Latapie Venegas, I. Acercamiento al aprendizaje multimedia. (2007). *Investigación Universitaria Multidisciplinaria*, *6*, 7-14. http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx:8080/jspui/bitstream/123456789/1243/1/Acercamiento%20al%20aprendizaje%20multimedia.pdf

Magadán, C. (2012). *Clase 4: El desafío de integrar actividades, proyectos y tareas con TIC, Enseñar y aprender con TIC*. [Especialización docente de nivel superior en educación y TIC, Buenos Aires, Ministerio de Educación de la Nación. https://postitulosecundaria.infd.edu.ar/archivos/repositorio/750/994/EyAT_clase4.pdf

Mishra, P., y Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A new framework forteacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054. http://punya.educ.msu.edu/publications/journal_articles/mishra-koehler-tcr2006.pdf

Rocha Salamanca, P. (2013). La educación estadística en la formación de ingenieros. *Revista Científica*, *17*(1), 33–45. https://doi.org/10.14483/23448350.4563

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15* (2), 4-14.

Alcances y limitaciones de estudiantes universitarios al abordar la prueba de hipótesis desde un enfoque informal

Eleazar Silvestre Castro[1] y Manuel Alfredo Urrea Bernal[2]

Resumen

En este trabajo se analizan los alcances y dificultades en el aprendizaje de un conjunto de estudiantes universitarios que hizo frente a una serie de tareas que introducen las pruebas de hipótesis desde un enfoque informal a la inferencia estadística. Utilizamos una perspectiva teórica que interpreta los aciertos y obstáculos de los estudiantes en términos de su coordinación entre una perspectiva real e hipotética de la situación inferencial bajo estudio, así como entre los niveles de abstracción en los que se ubican distintos conceptos estadísticos y probabilísticos implicados en la prueba. Mostramos los avances graduales de los estudiantes mientras resuelven las tareas y, en particular, las grandes dificultades que les emergen cuando algún componente de la prueba es modificado.

Palabras clave: prueba de hipótesis, enfoque informal a la inferencia estadística, distribución muestral empírica.

Abstract

This paper analyzes the learning achievements and difficulties of a group of university students who faced a series of tasks that introduce hypothesis tests from an informal approach to statistical inference. We use a theoretical perspective that interprets the successes and obstacles of the students in terms of their coordination between a real and hypothetical perspective of the inferential situation under study, as well as between the levels of abstraction in which different statistical and probabilistic concepts involved in the test are located. We show the gradual progress of the students while solving the tasks and, in particular, the great difficulties that emerge when any component of the test is modified.

Keywords: hypothesis testing, informal approach to statistical inference, empirical sampling distribution.

Modalidad: Ponencia

[1] Universidad de Sonora, México. eleazar.silvestre@unison.mx
[2] Universidad de Sonora, México. manuel.urrea@unison.mx

I. Introducción

El aprendizaje y enseñanza de la inferencia estadística han probado ser de los mayores retos tanto para profesores, estudiantes e investigadores en ejercicio [8]. A pesar de su amplia utilización en la investigación científica dentro de diversos campos disciplinares [1], así como su inclusión en las asignaturas de estadística de prácticamente cualquier programa del nivel universitario, técnicas estándares de la inferencia frecuentista como las pruebas de hipótesis y los intervalos de confianza son consideradas como de alta complejidad epistémica y cognitiva, puesto que involucran una gran cantidad de conceptos estadísticos y probabilísticos que son en sí mismos toda una fuente de retos para el aprendizaje de estudiantes de niveles educativos diversos.

Para el caso de la prueba de hipótesis, errores ampliamente documentados se relacionan con la interpretación de sus componentes clave, como los conceptos de hipótesis nula y alternativa, el nivel de significancia, el p-valor y el mismo resultado de la prueba. Por ejemplo, estudiantes del nivel superior tienden a asumir la hipótesis nula como aquella que se desea probar y a interpretar el nivel de significancia como la probabilidad de que la hipótesis nula sea verdadera cuando ha sido rechazada [2]; también confunden el concepto de p-valor con el nivel de significancia y llegan a concebir el concepto de la prueba como un mecanismo que ofrece una prueba probabilística (i.e., al estilo bayesiano) o determinista (i.e., que permite probar la veracidad o falsedad) acerca de alguna de las hipótesis involucradas [9,10].

Este tipo de dificultades también han sido reportadas para el caso de profesores de bachillerato y del nivel superior [8]. Por ejemplo, Liu y Thompson [11] evidenciaron que una muestra de profesores de bachillerato fue incapaz de asumir una perspectiva distributiva para evaluar la atipicidad de un resultado muestral; mientras que López-Martín et al. [12] identificaron que profesores de secundaria y bachillerato en formación, dieron más peso al aspecto procedimental en la realización de las pruebas de hipótesis por parte de sus estudiantes, lo cual abona a una comprensión incipiente respecto a sus múltiples aspectos conceptuales. Dificultades relacionadas se han encontrado en investigadores en ejercicio; Nickerson [13] reporta que investigadores a menudo adolecen de una comprensión plena de las ideas de significancia estadística y del concepto de p-valor; en tanto que Wasserstein y Lazar [16] señalan que la alta presencia de prácticas e interpretaciones incorrectas de las técnicas de inferencia llegan a impactar negativamente en distintas esferas de la investigación científica y de la vida pública.

En respuesta a esta problemática, distintos investigadores han abogado por un enfoque alternativo de enseñanza para técnicas como la prueba de hipótesis e intervalos de confianza, denominado *enfoque informal* a la inferencia estadística [2, 14]. Para el caso de las pruebas de hipótesis, esta aproximación se caracteriza fundamentalmente por el uso de simulaciones aleatorias para generar distribuciones muestrales empíricas a partir de las cuales se mide la fuerza del resultado experimental. De esta forma, el aparato matemático que soporta la prueba es más accesible para los estudiantes – quienes suelen presentarse a cursos de estadística con un bagaje limitado en conocimientos estadísticos y probabilísticos –, lo cual permite al profesor centrarse en sus aspectos conceptuales y no tanto así en los procedimentales.

A la fecha, distintas investigaciones han evidenciado que el enfoque informal para la enseñanza de la prueba de hipótesis ofrece ventajas favorables y significativas para el aprendizaje del concepto. Por ejemplo, además de ser un enfoque que puede implementarse con estudiantes de distintos niveles educativos [5], Case y Jacobbe [3] argumentan que el uso de simulaciones para generar distribuciones muestrales empíricas facilita cambiar con relativa facilidad el estadístico de interés, de manera que el proceso de la prueba se puede generalizar a una variedad considerable de escenarios; también argumentan que este enfoque hace un uso significativo de medios computacionales poderosos actualmente disponibles, lo cual en algunos casos ayuda a dar concreción a una representación tangible de conceptos clave como muestra, población y distribución muestral.

Desde luego, investigaciones recientes (ver por ejemplo [5]) continúan evidenciando que la enseñanza apoyada fuertemente en el uso del enfoque informal “no elimina todas las dificultades asociadas con la enseñanza de la inferencia” (p.2, [3]). Por ejemplo, para el caso de las pruebas de hipótesis, los estudiantes no solo deben relacionar apropiadamente grandes ideas o conceptos estadísticos que operan en distintos niveles de abstracción (i.e., muestra, población y distribución muestral), sino que también deben coordinarlos alternadamente desde una perspectiva real e hipotética.

En nuestra revisión de la literatura especializada, identificamos que aun quedan esfuerzos importantes por realizar para comprender cabalmente cuáles son las potencialidades y limitaciones del uso del enfoque informal a la inferencia estadística; este trabajo es un esfuerzo en esta dirección; en particular, centramos nuestra mirada en el caso de las pruebas de hipótesis. Estamos interesados en conocer y caracterizar las dificultades y alcances de estudiantes universitarios cuando desarrollan conocimiento sobre pruebas de hipótesis abordadas desde un enfoque informal a la inferencia estadística. Con este objetivo en mente, presentamos resultados de un estudio en el que un conjunto de estudiantes universitarios mexicanos hizo frente a una serie de tareas sobre pruebas de hipótesis abordadas desde un enfoque informal a la inferencia estadística, cuyo planteamiento didáctico introduce el concepto de la prueba vía la lógica frecuentista de Fisher y el uso de simulaciones computarizadas, y utilizando una perspectiva teórica que interpreta las dificultades y aciertos de los estudiantes en términos del tránsito entre una perspectiva real e hipotética de la situación bajo estudio y entre niveles de abstracción involucrados en el mecanismo de la prueba.

II. Perspectiva teórica

Por una parte, de acuerdo con Batanero y Díaz [2], una propuesta para realizar la prueba de hipótesis desde un enfoque informal se caracteriza por abordarla desde la lógica de Fisher, que consiste en conceptualizarla como un procedimiento que permite refutar de manera empírica una determinada hipótesis nula. Rossman [14] señala que este planteamiento es apropiado para introducir a los estudiantes novatos al mecanismo de la prueba y sugiere iniciar con el tratamiento de situaciones en las que la hipótesis nula es la de "no diferencia" o "modelo 50-50". Otra característica importante de este planteamiento es el uso de simulaciones que permitan generar la distribución muestral del estadístico de manera computacional, evitando así el uso de modelos probabilísticos que suelen abordarse desde una perspectiva formal en cursos de estadística y la probabilidad; este recurso apunta a privilegiar, además, la interpretación frecuentista de Fisher sobre el mecanismo de la prueba.

Por otra parte, Case y Jacobbe [3] mencionan que la realización de la prueba de hipótesis requiere la coordinación entre dos perspectivas, una hipotética y otra real, y entre múltiples conceptos estadísticos y probabilísticos que operan en tres niveles de abstracción:

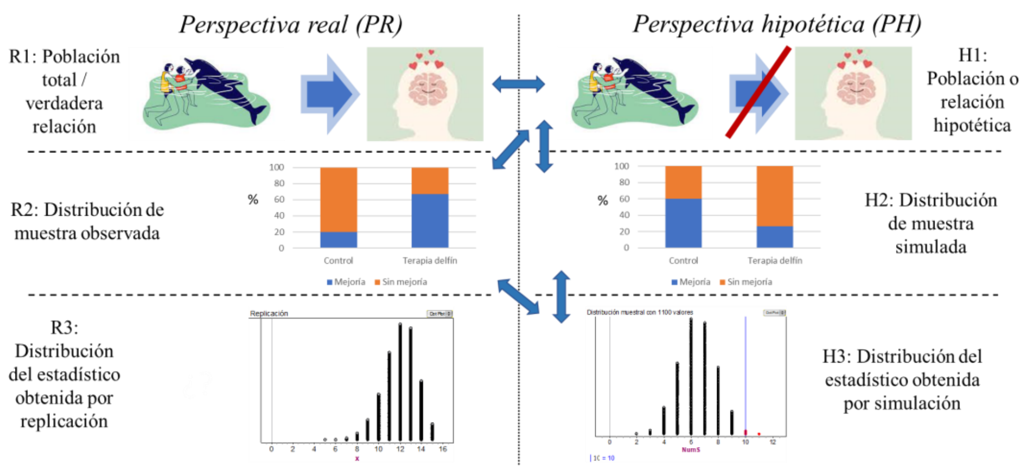


Figura 1. Perspectivas y niveles implicados en la prueba de hipótesis (adaptado de Case y Jacobbe)

Por ejemplo, en la figura 1 se ilustran las perspectivas y niveles en el contexto del efecto benéfico que puede tener la terapia con delfines. Si bien en determinado experimento se observa que un grupo experimental arroja mayor número de pacientes con reducción de estrés y ansiedad, a raíz de participar en la terapia con delfines (R2), ello no garantiza que la verdadera relación entre el beneficio y la terapia sea de esta naturaleza (como se muestra en R1); es posible que la terapia no tenga efecto benéfico alguno en los pacientes y ello se asume como la hipótesis nula a refutarse (H1).

Para evaluar dicha hipótesis nula, los estudiantes deben considerar el comportamiento de resultados muestrales (empíricos) generados por dicho modelo, transitando entonces a una perspectiva hipotética de la situación bajo estudio. El resultado experimental mostrado en H2 se produce por un modelo probabilístico que representa la hipótesis nula y que aproxima la variabilidad de los resultados muestrales considerando únicamente la aleatoriedad del muestreo o la de una asignación aleatoria entre dos grupos. Haciendo uso de dispositivos físicos o computarizados, el proceso de generación de resultados muestrales (empíricos) generados por el modelo de la hipótesis nula se repite una gran cantidad de veces, resultando en una distribución del estadístico mostrada en H3. A partir de esta distribución es que se evalúa la fuerza del resultado experimental obtenido en la perspectiva (o dimensión) real de la situación bajo estudio (R2), en este caso mediante la estimación e interpretación del p-valor.

De los seis elementos mostrados en la figura 1, solo se dispone del resultado experimental (H2) y aunque la hipótesis nula llegue a ser rechazada, no puede probarse con total veracidad que sea falsa o verdadera. Y dado que en rara ocasión se trabaja con una distribución del estadístico producida por replicación (R3), es importante considerar que los estudiantes pueden llegar a confundirse con este y otros elementos estadísticos y probabilísticos implicados en la prueba, así como la coordinación entre las perspectivas real e hipotética.

III. Método

La aproximación metodológica de este estudio es cualitativa y se conceptualiza como un experimento de diseño [4]. Respecto a los participantes del estudio, fueron 39 estudiantes de la Licenciatura en Finanzas de la Universidad de Sonora, México. En el semestre previo habían completado un curso de Estadística Descriptiva y poco menos de la mitad había completado otro de Probabilidad. Al momento de participar en el experimento, los estudiantes se encontraban al inicio de su curso de Estadística Inferencial, el cual se realizó de agosto a diciembre del 2021. Tanto el experimento como el curso completo fueron llevados a cabo de manera virtual, utilizando la plataforma Microsoft Teams, con el primer autor de este reporte como el profesor responsable de impartir la materia. Los estudiantes realizaron las tareas del experimento, que se describirán a continuación, trabajando en equipos de tres personas cada uno, los cuales se mantuvieron bajo la misma configuración durante la realización de las actividades y utilizando el software *Fathom*.

Respecto a los instrumentos y su implementación, se diseñó y aplicó una trayectoria hipotética de aprendizaje de seis tareas cuyo objetivo era introducir la inferencia estadística desde un enfoque informal; para este reporte nos enfocamos en las primeras tres, que versaron sobre la introducción a las pruebas de hipótesis. La aplicación de las tareas se realizó durante cinco sesiones de una hora cada una.

La tarea 1 se constituyó de dos momentos; en el primero, los estudiantes analizaron el experimento realizado por Hamlin et al. [7], en el cual un grupo de psicólogos analizaron si infantes preverbales son capaces de considerar a un sujeto como aversivo o simpático basándose en la observación de su interacción con otros. En uno de los componentes del experimento, 16 infantes de diez meses de edad vieron "interactuar" por separado a dos objetos con un tercero, para después elegir alguno de los primeros con cual jugar. Dado que uno de los objetos mostró un comportamiento aversivo con el tercero y el otro no, 14 de los 16 infantes eligieron al segundo como juguete tras observar las interacciones. Tras analizar este planteamiento, se hicieron las siguientes preguntas a los estudiantes para que las respondieran de manera libre y en equipo: *Considerando lo sucedido en el estudio, ¿te parece que la hipótesis nula "los infantes no tienen preferencia, dan la misma probabilidad de elegir a cada juguete", es correcta? Y si consideras que es incorrecta, ¿qué procedimiento o experimento harías para argumentarlo?*

En el segundo momento de la tarea 1, por situaciones ajenas a nuestro control, se presentaron 12 de los 13 equipos de estudiantes. En esta tarea, los estudiantes evaluaron nuevamente la mencionada hipótesis nula, pero disponiendo de la distribución muestral empírica (con modelo probabilístico binomial de parámetros n=16 y p=.5) que la modeliza (figura 2, izquierda). La distribución fue planteada y generada por el profesor utilizando Fathom y se solicitó a los estudiantes, organizados en los mismos equipos, responder a los cuestionamientos de: *Con base en esta información, ¿qué puedes decir sobre la hipótesis nula "los niños eligen al juguete ayudante con probabilidad de .5"? Si la consideras incorrecta, ¿qué puede concluirse sobre ella tras realizar este procedimiento?* En este reporte nos enfocaremos en la primera de estas preguntas.

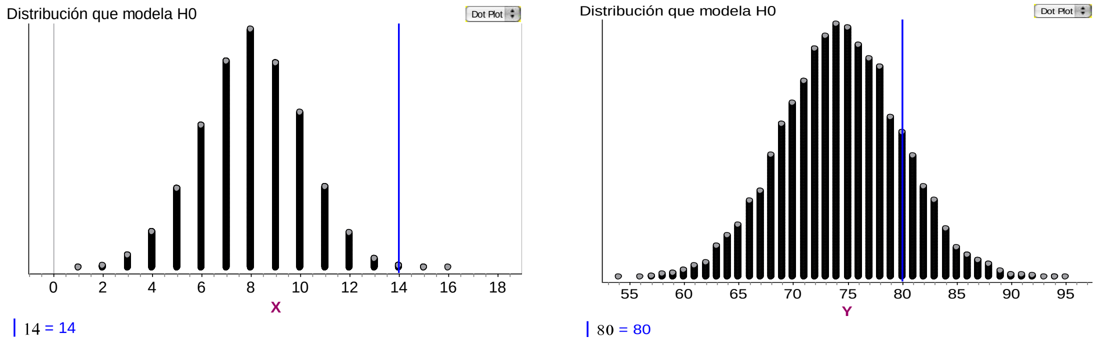


Figura 2. Distribuciones muestrales empíricas involucradas en las tareas (elaboración propia)

La tarea 2 se realizó en el contexto de esta misma situación y se exploró qué sucedería con el mecanismo de la prueba y su resultado si se modificaran dos de sus componentes, a saber, el resultado experimental y el tamaño de muestra que se utilizaron en el estudio de Hamlin et al [7]. La exploración de esta situación se realiza de acuerdo con la sugerencia de Batanero y Díaz [2] y la de Rossman [14]; se desea que el estudiante pueda ser capaz de identificar que la alteración en al menos uno de estos componentes puede llegar a producir un resultado distinto en la prueba. Así, en esta tarea los estudiantes dieron respuesta en equipo a los cuestionamientos de: *¿Qué pasaría con el procedimiento y resultado de la prueba si, al finalizar la etapa de experimentación, 10 de los 16 infantes hubieran elegido al juguete ayudante? ¿Y qué pasaría con el procedimiento y resultado de la prueba si hubieran participado 140 infantes y 84 eligieron al juguete ayudante?* Es importante considerar que, al momento de enfrentarse a esta tarea, los estudiantes manipularon Fathom por cuenta propia y ya contaban con el procedimiento institucionalizado para realizar la prueba (que incluye la manera de estimar el p-valor vía la distribución muestral empírica).

Finalmente, en la tarea 3 se abordó una situación ambientada en un contexto distinto. Los estudiantes analizaron el experimento reportado en Güntürkün [6], en el cual el investigador realizó un experimento en el que observó a 124 parejas besarse en espacios públicos (aeropuertos, estaciones de tren, playas o parques) para entonces documentar hacia qué lado inclinaban su cabeza al efectuar dicha acción. Al concluir sus observaciones, Onur contabilizó que 80 de estas parejas se inclinaron hacia la derecha. A partir de esta situación, los estudiantes respondieron cuestionamientos como los atendidos en las tareas previas; en particular, para este reporte nos enfocamos en el último de ellos, que consistió en: *¿Puede considerase que esta evidencia es, en general, indicativo de que más del 60% de las parejas se inclinan a la derecha?* Los estudiantes, organizados en equipos, utilizaron nuevamente Fathom (ver figura 2, derecha) para dar respuesta al cuestionamiento. Es importante considerar que esta tarea también atiende la sugerencia de Rossman [14], quien señala que los estudiantes también deberían ser capaces de investigar situaciones en las que el modelo de la hipótesis nula difiere del de no diferencia (en este caso, modelándola con la distribución binomial de parámetros $n=124$ y $p=.6$)

Respecto a las evidencias del experimento y su análisis, en este reporte nos enfocamos en las respuestas escritas de los estudiantes a las tareas de la trayectoria, que fueron capturadas en formato electrónico utilizando Excel. Para analizar las respuestas, cada autor de este reporte realizó primero una codificación abierta de las respuestas que luego fueron contrastados y refinados. Posteriormente, el análisis de los códigos se interpretó según el tránsito entre las perspectivas real e hipotética y las relaciones conceptuales implicadas en el modelo de Case y

Jacobbe [3] que describimos en la sección previa. Para la ilustración de los tipos de respuesta, en la siguiente sección, utilizamos respuestas que consideramos prototípicas de cada categoría.

IV. Resultados

Tarea 1, momento 1: confrontación a la evaluación de la hipótesis nula de no diferencia

Al evaluar la hipótesis nula de que los infantes del estudio no tienen preferencia por algún juguete, 11 de los 13 equipos argumentaron que había o no relación causa-efecto entre la decisión de los infantes respecto y su exposición ante la interacción de los juguetes; en particular, ocho equipos consideraron que la hipótesis nula "no es correcta" debido a que, desde su perspectiva, los infantes eligieron al juguete ayudante por haberse comportado de manera empática o no aversiva. Así, estos equipos se ubicaron únicamente en la perspectiva real de la situación bajo estudio (R1 y R2), como es evidenciado por la respuesta del equipo 1 (E1), que argumentó que la hipótesis nula "es correcta" de la siguiente manera: "…son niños de 10 meses de edad y son curiosos al elegir al juguete, no demuestra si [la preferencia] es [por] lo simpático o agresivo…es razonable que elijan al azar, no por análisis previo".

Los dos equipos restantes argumentaron desde una perspectiva hipotética; es decir, asumieron que, si la hipótesis nula fuese verdadera, lo obtenido en el experimento distaría demasiado del valor esperado de acuerdo con dicha expectativa (i.e., muy lejano de los 8 infantes que escogerían al juguete ayudante si no tuvieran preferencia). Al hacerlo, estos equipos realizaron un pase hacia la dimensión hipotética de la situación bajo estudio (R1, R2 y H1), pues consideraron que la relación que busca probarse en el estudio (los infantes tienen preferencia genuina por el juguete ayudante) no era verdadera y desde esa perspectiva juzgaron la fuerza del resultado experimental sin el cálculo de un p-valor. Esto se evidencia en la respuesta del equipo 6:

> E6: Es muy evidente la diferencia que hay entre las elecciones de ambos juguetes, ya que 14 de 16 fueron los que eligieron el juguete ayudante, si se hubiera elegido aleatoriamente como lo plantea la 'hipótesis nula', hubiera más equilibrio en cuanto a qué juguete eligieron.

Acto seguido, los diez equipos que rechazaron la hipótesis nula propusieron realizar una nueva experimentación que probara su falsedad. En las diferentes propuestas de los equipos se evidenció una intención de replicación del experimento, de manera que se pudieran controlar algunas variables de la situación y así obtener una conclusión que goce de total certeza respecto a la naturaleza de la hipótesis nula. De esta manera, estos equipos exhibieron adoptar nuevamente una perspectiva real de la situación (R1, R2 y R3), en donde la nueva experimentación se concibe como un tipo de replicación del experimento ya realizado y que brindaría resultados “certeros” sobre la hipótesis nula. La respuesta del equipo 5 evidencia esta situación:

> E5: Se realizarían alteraciones en el experimento, específicamente en las características físicas del juguete, por ejemplo, presentar un juguete ayudante de color verde a cierto número de niños y a otros un juguete ayudante de color rojo, esto con el fin de determinar que la característica de ser ayudante o no es lo que realmente influye en la elección del niño.

Tarea 1, momento 2: evaluación de la hipótesis nula de no diferencia vía su distribución muestral empírica

Al realizar la evaluación de la hipótesis nula de no diferencia con base en su distribución muestral empírica (ver figura 2, izquierda), cuatro de los 12 equipos mantuvieron la estrategia de argumentar a favor o en contra de la hipótesis nula con base en la existencia de una relación causa-efecto entre la decisión de los infantes y su exposición a la interacción de los juguetes. Esto es, tales equipos parecen haber ignorado la distribución muestral empírica a la mano y se mantuvieron únicamente en la perspectiva real de la situación (R1 y R2), como es evidenciado por la respuesta del equipo 7: “…diversos factores sí podrían influir al momento de la toma de decisiones…”; y la del equipo 8: “…sí [es correcta], se puede deber a las preferencias individuales de cada niño…”.

Los siguientes cuatro equipos sí tomaron en cuenta la distribución muestral empírica que modeliza la hipótesis nula para realizar su evaluación, pero lo hicieron, nuevamente, de tal forma que la interpretaron como una especie de modelo de replicación del experimento con los infantes. Por ejemplo, el equipo 1 declaró que “…un lado es un juguete y el otro lado es otro juguete, se puede ver que casi tienen los mismos resultados…”; mientras que el equipo 2 señaló que “…con base a las pruebas matemáticas y cálculo se puede ver que la hipótesis nula muestra un cambio en las elecciones de los niños…”. Así, estos equipos evidenciaron adoptar una perspectiva real de la situación que, de nuevo, atraviesa los tres niveles conceptuales implicados en la prueba de hipótesis hasta llegar a una supuesta distribución del estadístico obtenida por replicación (R1, R2 y R3).

Los cuatro equipos restantes interpretaron la distribución muestral empírica como vehículo para evaluar cualitativamente la atipicidad del resultado experimental; aunque no realizaron cálculo alguno del p-valor correspondiente, estos equipos evidenciaron un tránsito apropiado entre las perspectivas real e hipotética de la prueba y a través de sus niveles conceptuales. Por ejemplo, el equipo 10 argumentó que “son 28 posibilidades [ocurrencias] de 10 mil [ensayos] para el [X=]14, el cual creemos poco probable…consideramos que fue un acto de preferencia ya que teniendo estadísticas fue muy improbable de suceder"; mientras que el equipo 5 señaló que "el resultado en la muestra fue de 14 y si hubiera sido con la probabilidad de .5 como se muestra en el enunciado, el resultado hubiera sido de alrededor ocho casos de éxito, como lo muestra la gráfica".

Tarea 2: exploración de la prueba de hipótesis vía la modificación de sus componentes

En esta tarea, los estudiantes realizaron nuevamente la prueba de hipótesis considerando el escenario en el que resultaron diez infantes escogiendo al juguete ayudante. Seis de los 13 equipos recurrieron a la estrategia de argumentar desde una perspectiva hipotética, asumiendo que la hipótesis nula de no diferencia era verdadera, para argumentar, en general, que el resultado experimental no coincidía con el esperado y por ello debía ser rechazada. Ninguno de estos equipos utilizó la distribución muestral empírica para calcular un p-valor, por lo que sus respuestas evidencian un tránsito incipiente entre la perspectiva hipotética y real y los niveles de abstracción de la prueba (R1, R2 y H1). Como ejemplo de estas respuestas, el equipo E3 mencionó que "no la aceptamos [la hipótesis nula de no diferencia,] porque si se fueran a guiar con el .5 sería un resultado [esperado] entre el 7, 8 y 9".

Otros dos equipos realizaron el procedimiento de la prueba de manera correcta y concluyeron (correctamente) que la hipótesis nula no podía ser rechazada; pero al hacerlo, también evidenciaron una tendencia al sincretismo entre la perspectiva hipotética y la real al interpretar la distribución muestral empírica que la modeliza (i.e., sincretismo entre R3 y H3). Por ejemplo, el equipo 9 sugiere que para tener mayor certeza en su conclusión acerca de la hipótesis nula, necesitaría realizar una nueva experimentación en la que participase un mayor número de infantes (i.e., aumentar el tamaño de muestra):

> E9: el [p-]valor que nos dio a nosotros está muy lejos del 0.05, ya que nos dio 0.2106 la suma de los valores [de la frecuencia relativa] del [X=]10 al 15, la parte del procedimiento a cambiar es la muestra, ya que siento que ocupamos más niños para tener un resultado más conciso y correcto.

Los cinco equipos restantes realizaron correctamente el procedimiento de la prueba y concluyeron que no podía ser rechazada. Estos equipos realizaron un tránsito apropiado entre las perspectivas real e hipotética y los niveles de abstracción de la prueba, como lo evidencia la respuesta del equipo 5:

> E5: La parte del procedimiento que hay que cambiar es la del cálculo del p valor, esta vez se realizará a partir del intervalo de 10 a 16 infantes. El nuevo p valor que se obtuvo es un resultado de 0.2204, podemos concluir en que la hipótesis nula debe ser

> aceptada ya que este p valor es mayor que el nivel de significancia (α=.05). El tipo de error que se podría cometer sería el número 2, el cual es aceptar la hipótesis como verdadera cuando en realidad los infantes sí tenían una preferencia genuina por el juguete ayudante y no había forma de saberlo.

Para finalizar esta tarea, los estudiantes realizaron nuevamente la prueba de hipótesis considerando el escenario en el que se aumenta el tamaño de muestra, pero manteniendo una proporción de éxitos similar a la de la situación original; es decir, considerando que participaron 140 infantes y 84 eligieron al juguete ayudante. Siete de los 13 equipos brindaron respuestas variadas entre rechazar y aceptar la hipótesis nula de no diferencia, y se caracterizaron por adoptar solamente una perspectiva real de la situación y transitar por todos sus niveles (R1, R2 y R3) al asumir que el planteamiento de la nueva situación bajo análisis podía ser considerada realmente como una replicación del experimento. Estos equipos evidenciaron varias dificultades en el dominio de los conceptos involucrados entre los niveles de abstracción implicados en la prueba, pues no generaron una distribución muestral empírica para modelizar la hipótesis nula de no diferencia y confundieron el concepto de probabilidad con el de p-valor. Por ejemplo, la respuesta del equipo 4 ilustra esta situación:

> E4: …con estos dos experimentos nos podemos guiar en que la probabilidad de elección del juguete ayudante es mayor a 0.05%, esto tal vez porque los infantes aun teniendo 10 meses saben distinguir entre lo malo y lo bueno y la mayoría elige al juguete ayudante, por lo que se puede cambiar la hipótesis a que no es tanto al azar sino que tenemos que tomar en cuenta que los infantes cuentan con cierto tipo de inteligencia y la mayoría elegirá la mejor opción.

En cambio, los seis equipos restantes fueron capaces de realizar correctamente el procedimiento de la prueba en esta situación hipotética, evidenciando así un tránsito apropiado entre las perspectivas y niveles involucrados en la prueba. Como ejemplo de estas respuestas se tiene la del equipo 8:

> E8: …se transforma la hipótesis nula en modelo probabilístico binomial ya que el tamaño pasa a ser n=140 & p=0.5”. El p-valor queda como .0108 porque el [X=]84 [en adelante] apareció 216 de 20,000 simulaciones. Podemos determinar después de estos resultados que la probabilidad de que 84 infantes elijan al juguete ayudante es muy baja en comparación con los demás posibles resultados, por lo tanto se debe rechazar la hipótesis nula en la cual se establece que .05 sea el nivel de significancia. Podríamos caer en el error tipo 1.

Tarea 3: exploración de la prueba de hipótesis más allá del modelo 50-50

En esta tarea, los estudiantes realizaron una prueba de hipótesis en un escenario distinto (situación de parejas que se inclinan a la derecha al besarse) y considerando, en particular, que desea investigarse si el resultado muestral refuta o no la hipótesis nula de que la proporción de éxitos es de máximo .6. Esto es, ocho de los 13 equipos brindaron respuestas incorrectas; tres fueron incapaces de elaborar respuesta alguna en tanto que cinco adoptaron, de manera similar a lo mostrado en el primer momento de la tarea 1, únicamente una perspectiva real para elaborar sus respuestas y sin el uso del razonamiento hipotético deductivo que lleva a considerar que la hipótesis que interesa indagar debe ser negada. Recurrieron, más bien, a la estrategia de comparar de manera idiosincrática la proporción muestral con el .6 declarado en la situación problema; además, aunque tres equipos generaron una distribución muestral empírica, la interpretaron como un modelo de replicación del estudio. De esta manera, la mayoría de estos equipos atravesó por la perspectiva real y los tres niveles de abstracción de la prueba (R1, R2 y R3), como lo evidencia la respuesta del equipo 3, que mencionó que “no aceptamos la hipótesis nula, ya que se presenta más del 60 % [en la muestra]”, y la del equipo 7:

> E7: Pues en principio y respondiendo a la primera pregunta, ciertamente sí, esto porque si 124 representa un 100%, pues estaríamos hablando sencillamente que un 50% representa a 62 parejas, por lo que el 10% es algo así como 12 parejas, entonces sí, representa más de un 60%.

Tres equipos brindaron respuestas clasificadas como parcialmente correctas. Estos equipos, aunque hicieron un tránsito apropiado entre las perspectivas real e hipotética y los niveles de abstracción de la prueba, manifestaron diversos errores en el manejo de los conceptos involucrados en la realización de la prueba, tales como el cálculo incompleto del p-valor, una lectura parcialmente correcta de la distribución muestral empírica que modeliza la hipótesis nula, o la confusión entre los tipos de errores que pueden cometerse al interpretar el resultado de la prueba. La respuesta del equipo 13 evidencia esta situación:

> E13: No [es correcta la hipótesis nula], consideramos que más del 60% de las parejas se inclinan hacia la derecha, al realizar la probabilidad binomial en Fathom obtenemos como media 74 parejas inclinándose a la derecha, por lo que más del 60% de las parejas se inclinan a la derecha. La probabilidad dentro de una muestra [simulación] de 1000 [ensayos], que de 124 parejas 80 se inclinen a la derecha aumenta ahora tenemos una probabilidad binomial de 41/1000= 0.041[,] mucho mayor que la probabilidad de 0.001, por lo que podríamos caer en un error tipo II, rechazar la hipótesis pero aceptando que puede ser verdadera.

Los dos equipos restantes realizaron correctamente el procedimiento de la prueba, evidenciando que realizaron un tránsito correcto por las perspectivas y niveles conceptuales de la prueba. Como ejemplo, se muestra la respuesta del equipo 6:

> E6: En este caso, el p valor es igual a 0.173, este valor es mayor al nivel de significancia (0.05) lo que significa que se acepta la hipótesis nula ("un máximo de 60% de las parejas se inclinan a la derecha"). El tipo de error que se podría cometer seria tipo II, ya que la hipótesis nula se acepta cuando en realidad era falsa.

V. Discusión y conclusiones

En general, las dificultades y alcances de los estudiantes respecto a su desarrollo de conocimiento acerca de la prueba de hipótesis abordadas desde un enfoque informal pueden ser descrita en términos de dos grandes retos. Primero, nuestros estudiantes evidenciaron que, por lo menos inicialmente, la coordinación entre la perspectiva real e hipotética es de alta complejidad y esperar que ocurra de manera espontánea es algo más bien improbable. Este reto aparece nuevamente a la hora de modificar algún componente de la prueba como el tamaño de muestra o el resultado experimental, y sobre todo cuando el modelo de la hipótesis nula difiere del de no diferencia o no efecto.

En nuestro caso, solo una cantidad minoritaria de estudiantes logró ser consistente al transitar entre ambas perspectivas mientras realizaban las tareas de la trayectoria, y también fueron los que espontánea pero atípicamente adoptaron una perspectiva hipotética para evaluar la hipótesis nula en la tarea inicial. Estos resultados son consistentes con los de Inzunsa y Jiménez [9] y los de Case y Jacobbe [3]; estos últimos también observaron que, inicialmente, sus estudiantes tendieron a adoptar una perspectiva más bien determinista (o real) sobre las pruebas de hipótesis. No obstante, a diferencia de sus sujetos participantes, destacamos que, en nuestro caso, dichas dificultades persistieron durante toda la aplicación de las tareas; en particular, la tendencia a asumir que la distribución muestral es un modelo de replicación fue evidenciado de maneras diversas y en distintos momentos de la realización de la prueba.

Un segundo reto para el aprendizaje de los estudiantes proviene de la coordinación entre los niveles de abstracción implicados en la prueba. Un conflicto notorio para los estudiantes, que se nos revela ahora, proviene del momento en el que deben interpretar la distribución muestral empírica que modeliza la hipótesis nula. Como hemos señalado, nuestros estudiantes tendieron a interpretarla como un modelo de replicación de la situación bajo análisis, patrón que también ha sido observado en las investigaciones de Case y Jacobbe [3] y la de Rossman y Chance [15]. En nuestro caso, también observamos que la confusión entre simulación y replicación puede darse no solamente al momento de comprender el papel de la distribución muestral en el mecanismo de la prueba, sino también en momentos en los que se desea analizar una nueva situación en la que se asume hipotéticamente que algún componente de la prueba ha sido modificado. Esto sugiere, en general, que alternar el razonamiento deductivo con el hipotético deductivo tipo *modus tollens* es de considerable complejidad para los estudiantes universitarios. Otro conflicto que destacamos en este tipo de retos fue la dificultad para apropiarse, por parte de los estudiantes, de la manera correcta de estimar el p-valor a partir de la distribución muestral empírica. Varios equipos de estudiantes tomaron una decisión incorrecta respecto a rechazar o no la hipótesis nula solo a raíz de haber hecho un cálculo incompleto del p-valor, pues consideraron que su estimación involucraba únicamente al resultado muestral exacto obtenido en el estudio (i.e., no en forma de intervalo). Este patrón no ha sido reportado en nuestra literatura de referencia.

Como reflexión final, destacamos que, si bien nuestros estudiantes experimentaron múltiples dificultades durante su paso por las tareas, también encontramos que la mayoría realizó progresos importantes en su desarrollo de conocimiento acerca de la prueba de hipótesis. Básicamente, todos los equipos realizaron avances de manera gradual a través de las tareas, al establecer progresivamente relaciones conceptuales entre las perspectivas real e hipotética y los procedimientos implicados en la prueba. Las mayores dificultades se presentaron siempre que algún componente importante de la prueba fuese modificado, y sin duda que alterar el modelo de la hipótesis nula a uno diferente del de no diferencia representó un reto mayúsculo para la mayoría de los estudiantes, dado que recurrieron a estrategias utilizadas al inicio de la trayectoria de aprendizaje.

En general, estos patrones sugieren, desde nuestra perspectiva, que la enseñanza del concepto de la prueba de hipótesis desde un enfoque informal requiere del cuidado y atención a muchas sutilezas conceptuales y procedimentales, especialmente cuando algún elemento de la prueba es modificado y debe darse sentido a lo que ello implica en el procedimiento y resultado de la prueba. En este sentido, sugerimos que el abordaje informal del concepto de la prueba puede llegar a ser fructífero siempre que se invierta suficiente tiempo a la planeación y ejecución de diseños didácticos que identifiquen y atiendan pausada y sistemáticamente los progresos y dificultades de los estudiantes sobre el tema. Por lo tanto, los resultados de nuestro estudio sugieren que deben dedicarse mayores esfuerzos a investigar estrategias didácticas de acompañamiento, dentro del enfoque informal, que contribuyan a que los estudiantes se desprendan de razonamientos fuertemente deterministas sobre el mecanismo de la prueba y a darles soporte en el cálculo e interpretación correcta del concepto de p-valor.

Bibliografía

[1] Batanero, C.,«Controversies around significance tests», *Mathematical Thinking and Learning*, 2000, **2**(1-2), p.75-98, ISSN:1532-7833

[2] Batanero, Carmen; Díaz, Carmen, «Aproximación informal al contraste de hipótesis», en Contreras, José M.; Batanero, Carmen; Godino, Juan; Cañadas, Gustavo R.; Arteaga, Pedro; Molina, E.; Gea, María M.; López, María M. (eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria 2* (Granada, 2015 Abril), España: SEIEM, pp. 207-214. ISSN:2386-5520

[3] Case, Catherine; Jacobbe, Tim, «A framework to characterize student difficulties in learning inference from a simulation-based approach», *Statistics Education Research Journal*, 2018, **17**(2), p.9-29, ISSSN:15701824

[4] Cobb, P.; Confrey, J.; diSessa, A.; Lehrer, R.; Schauble, L., «The role of design in educational research», *Educational Researcher*, 2003, **32**(1), p.9-13, ISSSN:0013-189X

[5] Garfield, Joan; delMas, Robert; Zieffler, Andrew, «Developing statistical modelers and thinkers in an introductory, tertiary-level statistics course», *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*, 2012, **44**(7), p.883-898, ISSN:1863-9690

[6] Güntürkün, O., «Adult persistence of head-turning asymmetry», *Nature*, **421**, p.711-712, ISSN:0028-0836

[7] Hamlin, Kiley J.; Wynn, Karen; Bloom, Paul, «Social evaluation by preverbal infants», *Nature*, 2007, **450**, p.557-559, ISSN:0028-0836

[8] Harradine, Anthony; Batanero, Carmen; Rossman, Allan, «Students and teachers' knowledge of sampling and inference», en Batanero, Carmen; Burrill, Gail; Reading, Chris (eds.), *Teaching Statistics in SchoolMathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A joint ICMI/IASE Study*, 2011, p.235-246, Nueva York: Springer, ISBN:978-94-007-1130-3

[9] Inzunsa, S.; Jiménez, José V., «Caracterización del razonamiento estadístico de estudiantes universitarios acerca de las pruebas de hipótesis», *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 2013, **16**(2), p.179-211, ISSN:1665-2436

[10] Lane-Getaz, S.J., «Is the p-value really dead? Assessing inference learning outcomes for social science students in an introductory statistics course», *Statistics Education Research Journal*, 2017, **17**(1), p.357-399, ISSSN:15701824

[11] Liu, Yan; Thompson, Patrick W., «Mathematics teachers' understandings of protohypothesis testing», *Pedagogies*, 2009, **4**(2), p.126-138, ISSN:1554-480X

[12] López, María D. M.; Batanero, Carmen; Gea, María M., «¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en la inferencia estadística?», *Bolema*, 2019, **33**(64), p.672-693, ISSN:1980-4415

[13] Nickerson, R.S., «Null hypothesis significance testing: A review of an old and continuing controversy», *Psychological Methods*, 2000, **5**(2), p.241-301, ISSN:1082-989X

[14] Rossman, Allan, «Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view», *Statistics Education Research Journal*, 2008, **7**(2), p.5-19, ISSSN:15701824

[15] Rossman, Allan; Chance, Beth, «Using simulation-based inference for learning introductory statistics», *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 2014, **6**(4), p.211-221, ISSN: 1939-0068

[16] Wasserstein, Ronald L.; Lazar, Nicole A., «The ASA's statement on p-values: Context, process, and purpose», *The American Statistician*, 2016, **70**(2), p.129-133, ISSN: 1537-2731

Uso de Kaggle en la Enseñanza de Estadística Descriptiva: Una Experiencia de Clase

Gladys Denisse Salgado Suárez [1], José Rubén Conde Sánchez[2], Guillermina Sánchez López[3]
[1]Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México. gladys.salgado@udlap.mx
[2] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México. rconde@fcfm.buap.mx
[3]Preparatoria Regional "Simón Bolivar", Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Atlixco, Puebla, México. guillermina.sanchez@correo.buap.mx

Resumen

Los modelos didácticos tradicionales cada día se transforman con las nuevas corrientes educativas, es recurrente en los nuevos modelos considerar la participación del alumno como eje central de la enseñanza-aprendizaje. La permanente búsqueda de metodologías de enseñanza determina que los alumnos son los actores principales de un sistema educativo que transforma el tradicional paradigma donde el docente es el centro del conocimiento. De esto, las experiencias de clase son una forma de exponer los logros de los alumnos a través de actividades en que ellos sean el eje central y no el docente. En este trabajo, se expone una experiencia de clase en la enseñanza de la estadística descriptiva, a través del uso de *datasets* de *Kaggle*.

Palabras clave: Estadística, kaggle, tecnología.

Abstract

The traditional didactic models are transformed every day with the new educational currents, it is recurrent that the new models consider the participation of the student as the central axis of teaching-learning. The permanent search for teaching methodologies determines that students are the main actors in an educational system that transforms the traditional paradigm where the teacher was the center of knowledge. From this, class experiences are a way of exposing the achievements of students through activities in which they develop. In this work, class experience in the teaching of descriptive statistics is exposed, using Kaggle datasets.

Keywords: Statistics, kaggle, technology.

Modalidad: Ponencia.

I. Introducción

Parte importante del quehacer docente está enfocado en la búsqueda del logro de los aprendizajes esperados en los estudiantes. Por otro lado, el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TICs), se ha convertido en un aliado en la práctica de enseñanza. Las herramientas tecnológicas representan una oportunidad para complementar los temas teórico-prácticos en el aula [4], y ahora en el tiempo que estamos viviendo, también a distancia o modalidad híbrida. El uso en clase de dispositivos electrónicos por parte del docente y del estudiante, es cada vez una necesidad que requiere de una conectividad estable al internet y de buena tasa de transferencia de datos para el acceso a plataformas educativas alojadas en el internet o en la nube.

La tecnología es un referente para usarse cada vez más como herramienta en clase, en el caso del alumno, se aprovecha el momento tecnológico en el que está inmerso, por ende, se valoran y aprovechan las habilidades tecnológicas adquiridas; y, para el docente, es una oportunidad para explorar en la diversidad de metodologías existentes. A la par, la tecnología educativa reconoce el uso de las TICs en el aula, para acercarse poco a poco a casi todas las materias curriculares en particular en las matemáticas promoviendo mejores emociones y actitudes hacia ellas, además de ayudar a desarrollar el razonamiento matemático y habilidades del pensamiento [5]. Con esto proponemos y organizamos una experiencia de clase para la enseñanza de la estadística descriptiva que cree una necesidad al alumno de usar y aplicar conceptos que son parte de sus conocimientos previos.

La experiencia de clase presentada en este trabajo busca generar un ambiente en donde el docente incentive la curiosidad o necesidad por parte del alumno a través de preguntas de conocimiento general sobre sus intereses personales, como: deportes, juegos, ciencia, películas, redes sociales, entre otros temas. Los datos o conjunto de datos, *datasets*, son descargados de la empresa *Kaggle*[1]. En *Kaggle* "encontrará los datos que necesita para hacer su trabajo de ciencia de datos. Utilice más de 50 000 conjuntos de datos públicos y 400 000 cuadernos públicos para conquistar cualquier análisis en poco tiempo." Los datos versan en categorías como: Ciencia Computacional, Educación, Clasificación, Visión Computacional, Procesamiento de Lenguaje Natural, Visualización de Datos, Modelo de Datos Pre Entrenados, Pronósticos, etc. Es una fuente vasta de *datasets* para analizar, se podría considerar que existen categorías para cualquier área de interés, lo que permite a cada alumno analizar los datos que son realmente de su interés. El termino *dataset* aparece con la llegada de las emergentes tecnologías como el Big Data, son conjuntos de datos estructurados accesibles desde cualquier lenguaje de programación (diccionarios de Python, formatos *json* , etc.), se refiere a una única base de datos autorelacionada o relacionada con otras bases de datos, cada columna del *dataset* representa una variable y cada fila corresponde a cualquier dato. Su utilidad se ha vuelto importante ya que diversos centros de investigación científica, instituciones financieras, centros médicos y muchos más ofrecen *dataset* públicos o privados con la finalidad de que cualquier investigador o estudiante los utilice para probar algoritmos, practiquen con ellos sin la necesidad de preocuparse por la calidad de los datos[2], etc.

---

[1] https://www.kaggle.com/

[2] A Beginner's Guide to Sentiment Analysis with Python, 2020)

II. Fundamento de la experiencia de clase

El objetivo de la experiencia de clase está basado en emplear los estándares ISTE[3] (Sociedad Internacional para la Tecnología en la Educación), se busca que el docente ayude a los estudiantes e impulsar su propio aprendizaje con el uso de la tecnología, así, lograr justificar el uso y experiencia del alumnado; además, aprovechar la disposición de los datos libres en el internet y utilizarlos en la enseñanza de los conceptos básicos de estadística descriptiva en nivel de licenciatura.

En esta experiencia de clase, se ve reflejado, el proceso de metacognición, que en la literatura de investigación educativa otorga definiciones diversas sobre los procesos (conocimiento, regulación y experiencia), que giran en torno a lo siguiente: "capacidad de una persona de pensar en su pensamiento de conocer sus conocimientos, de ser consciente de su conciencia"[4]. La metacognición está apoyada con las metodologías de enseñanza orientadas a fortalecer los aprendizajes esperados planteados. Un punto importante que se resalta es el proceso reflexivo sobre lo que ha logrado el estudiante al utilizar los *dataset* en el estudio que requieren en esta experiencia de clase, y se orienta hacia el interés en abarcar otro tipo de *dataset*, ya que se vale de las herramientas que le ofrece la estadística descriptiva para lograr analizar otras áreas de la ciencia.

III. Diseño e implementación de la planeación

Para este estudio, se considera y selecciona el programa de la materia Adquisición y Procesamiento de Datos Experimentales (APDE) correspondiente al plan de la licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). Para mostrar la experiencia de clase, se seleccionó este programa, ADPE, porque el plan de la materia lo permite al contener el tema de análisis de datos. Esto da la oportunidad de enriquecerla la materia con herramientas de Tecnología Educativa; abordando así, estrategias de enseñanza aprendizaje que tienen detrás toda una base pedagógica conceptual en cada uno de los momentos educativos y favorecer la práctica docente. Se espera fortalecer los aprendizajes por parte del alumnado. Es importante considerar que la materia seleccionada corresponde a séptimo semestre de la carrera, los alumnos han aprobado la materia de Física Computacional y han tenido experiencia en programación básica en lenguaje de programación Python, lo que infiere que conocen de cierto modo un lenguaje de programación. El desarrollo de esta experiencia de clase es desarrollado en el tiempo de retorno hibrido a la universidad toda vez que los alumnos han sido vacunados contra el COVID-19, esto quiere decir que el curso se lleva acabó en forma síncrona y asíncrona. El alumnado contaba con las grabaciones de las reuniones.

La Tabla 1 describe la planeación de las actividades, que en sí es la metodología propuesta para desarrollar la experiencia de clase. En la sección de objetivos, se muestra una parte de importancia para este trabajo, la conjunción entre el tema central de la materia APDE con la asociación de programación en un lenguaje de programación sugerido como Python, lo que permite emplear recursos como implementación de funciones, ciclos, procesamiento y visualización de la

[3] https://www.iste.org/es/
[4] https://www.ceupe.com/blog/que-son-los-procesos-metacognitivos.html

información. Python les ofrece la característica de poder realizar programación que es considerada como computo en la nube, si ésta es realizada desde *Google Colabatory*[5].

Tabla 1 Planeación de la experiencia de clase

Experiencia de Clase	Uso de *dataset* para la enseñanza de Estadística Descriptiva
Objetivo	Aprovechar la experiencia acumulada de los estudiantes en el uso de las herramientas tecnológicas como la computadora, laptop o teléfonos inteligentes y la accesibilidad a la información dispuesta en el internet. Utilizar datasets de diversas áreas con la idea de captar un mayor interés en los alumnos. Entrenarse con los datos en el aprendizaje de los conceptos básicos de estadística descriptiva Utilizar los recursos de la estadística descriptiva para procesar, analizar *dataset* ofrecidos *Kaggle* para estimular el aprendizaje significativo en el alumnado. Aprender la secuencia básica para realizar computo en la nube.
Temas transversales	Estadística descriptiva Física Computacional, Programación Python – estructura de datos; además, del área que corresponde a la categoría del *dataset* que elige el alumno (Medicina, Sociología, Arte, etc.)
Estándares ISTE	**2.6 Facilitador** Los educadores facilitan el aprendizaje con el uso de la tecnología para apoyar el logro académico de los estudiantes. Para esto, los educadores: Crean oportunidades de aprendizaje que desafían a los estudiantes a utilizar un proceso de diseño y de pensamiento computacional para innovar y solucionar problemas. **2.6.b** Gestionan el uso de la tecnología y las estrategias de aprendizaje de los estudiantes en plataformas digitales, entornos virtuales, espacios de creación prácticos o en el campo.
Metodología	Trabajo colaborativo / Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) (La experiencia de clase forma parte del proyecto de clase, por esto se considera la metodología el ABP).
Nivel de inserción de la tecnología	______ Sustitución ______ Argumento ___X_ Modificación ______ Redefinición
Secuencia didáctica	**Materiales**
Sesión 1-2 (2hrs/sesión) Que el estudiante: 1. Conozca la plataforma de *Kaggle* 2. Identificar categoría del *dataset* de su interés 3. Repace las estructuras básicas de Python para manejo de diccionarios y formato de datos tipo *json*. 4. Explore las características del *dataset* en cuanto a número de datos, curar datos. 5. Acondicione el *dataset* en el drive de Google toda vez que el proyecto se realiza, de preferencia, en *Google Colab* **Sesión 3-4 (2hrs/sesión)** Que el Estudiante: 1. Una vez que haya agregado el *dataset* en el drive, abra el archivo en *Google Colab*. 2. Que conozca el archivo, haciendo uso de operaciones básicas como: cuántas características tiene el archivo (columnas), salidas (*outputs*), tamaño de características, tipo de datos, etc. 3. Segmentar el archivo, graficar grupos de características. 4. Implementar las funciones de la estadística descriptiva: suma, promedio, correlaciones, desviación standard, etc. 5. Comparar las funciones implementadas con las funciones desarrolladas con módulos como: *numpy*, *scipy* u otro 6. Construya gráficas de los resultados que vaya generando. **Sesión 5 (2hrs/sesión)** Que el estudiante: 1. Comparta con otros compañeros sus códigos e ilustraciones para recibir retroalimentación. 2. Una vez que ha realizado las correcciones necesarias, comience a realizar el reporte de su proyecto entregable. 3. Presente su trabajo con el resto del grupo. 4. Cargue su proyecto en Tareas de Teams.	IDE de Python Computadora Conectividad a Internet

[5] https://colab.research.google.com/?utm_source=scs-index

Evaluación	Producción gráfica, escrita y oral.	**Transversalidad**	Tecnología Ciencias Ingeniería

El desarrollo de la experiencia de clase es mostrado en la Tabla 2, en ella se muestran fases como planteamiento, seguimiento, evaluación, retroalimentación, entre otros.

Tabla 2 Implementación y Evaluación de experiencia de clase con trabajo síncrono y asíncrono para el aprendizaje.

Campo de formación académica	Pensamiento matemático-computacional a través de la manipulación y procesamiento de *dataset* en la enseñanza de la estadística descriptica	**Semana**	5 sesiones
Aprendizajes esperados	1. Reconocer y emplear los conceptos y fórmulas básicas de la estadística descriptiva. 2. Proponer una acción que conduzca a alguna mejora en los datos basado en los resultados arrogados.	**Competencias**	Conocer los conceptos básicos de la estadística descriptica como población, muestra, promedio, desviación estándar moda, estos datos, son bien representados en tablas de frecuencias y mostrados en diversos gráficos que muestran adecuadamente la tipología de datos procesados.
Ejes	2. Desarrollo de Habilidades del Pensamiento Complejo (DHPC) 3. Desarrollo de Habilidades en el uso de la Tecnología, la Información y la Comunicación (DHTIC) 4. Lenguas Extranjeras 5. Educación para la Investigación	**Tema:**	Estadística Descriptiva
Estándar ISTE	Los educadores facilitan el aprendizaje con el uso de la tecnología para apoyar el logro académico de los estudiantes, mediante la puesta en práctica de los Estándares ISTE • 2.6.b Gestionan el uso de la tecnología y las estrategias de aprendizaje de los estudiantes en plataformas digitales, entornos virtuales, espacios de creación prácticos o en el campo.	**Metodología Educativa**	• ABP
Sesiones distribuidas			
Clase sincrónica		**Clase asincrónica**	
Que el estudiante: 1. Revise y repase los materiales de programación en lenguaje Python para agilizar el uso de sus recursos a la hora de implementar los algoritmos para calcular las operaciones involucradas. 2. Una vez que el profesor haya expuesto algún caso de uso en que el alumno se pueda guiar en el transcurso de la actividad por realizarse. 3. El alumno indaga en la página web de *Kaggle*, elije el *dataset* de su interés. 4. Se descarga y aloja el *dataset* en su sesión de la nube en el entorno de *Google Colab*, o en el entorno de desarrollo que prefiera. 5. Realizar las operaciones de la estadística descriptica con los datos seleccionados.		Que el estudiante: 1. Vea nuevamente el video del caso de uso expuesto por el docente y rehaga el proyecto empleando su *dataset*. 2. Asociarse con algún compañero de clase, aclarar dudas, además de fomentar la colaboración entre compañeros. 3. Redactar una experiencia sobre el uso de los recursos a través de los *dataset*.	

6. Exponer sus resultados .			
Evaluación	**Recursos y materiales**	**Herramientas tecnológicas**	**Adecuaciones curriculares**
Comprobar los resultados arrogados de la Implementación de los programas en Python con programas basados en el uso de funciones, como MATLAB, R o el mismo Python con módulos como: *scipy*, *numpy*, etc.	• Laptop, celular, tablet • Sesión en *Google colab* • Código cargado en la nube • Libro de texto	• Microsoft Teams • Libreta digital de One note • *Google Colab*	• El profesor hace el planteamiento de la actividad a través de TEAMs, y muestra un ejemplo de uso del *dataset* desde *Kaggle*.
Nivel de inserción de la tecnología	____ Sustitución ____ Argumento ____ Modificación _X__ Redefinición		
Consideraciones para el día siguiente Repasar los conceptos y las ecuaciones de la estadística descriptiva			

Al alumno se le muestra un *Caso de Uso* que le sirve como referencia, se expone una situación que sirva para guiarse en una metodología ordenada en una serie de pasos. De esta forma el alumno tiene un ejemplo que le sirve como referencia; una vez comprendido por parte del alumno, hará lo necesario para seguir lo requerido en la Tabla 2.

IV. Resultados

Se muestra solo un caso de varios presentados en clase por parte de los alumnos, el cual ilustra los resultados al emplear los conceptos de estadística descriptiva bajo la experiencia de clase aquí presentada.

De la base de datos *Pima Indians Diabetes*[6] del *National Institute of Diabetes and Digestive and Kidney Diseases*, "el objetivo del *dataset* es predecir de manera diagnóstica si un paciente tiene o no diabetes, en función de ciertas medidas de diagnóstico incluidas en el conjunto de datos. Se impusieron varias restricciones a la selección de estas instancias de una base de datos más grande. En particular, todos los pacientes aquí son mujeres de al menos 21 años de herencia indígena pima"[6]. Para este caso, se involucra al estudiante en una aplicación directa de la descripción de los datos usando la estadística directamente sobre ellos.

Los datos están en términos de nueve características:

I. *Embarazos*: número de veces embarazadas.
II. *Glucosa*: concentración de glucosa en plasma a las 2 horas en una prueba de tolerancia oral a la glucosa.
III. *Presión arterial*: presión arterial diastólica (mm Hg).
IV. *Grosor de la piel*: Grosor del pliegue cutáneo del tríceps (mm).
V. *Insulina*: insulina sérica de 2 horas (mu U/ml).
VI. *IMC*: Índice de masa corporal (peso en kg/(altura en m)^2).
VII. *DiabetesPedigreeFunction*: función de pedigrí de diabetes.
VIII. *Edad*: Edad (años).
IX. *Resultado*: variable de clase (0 o 1).

La Ilustración 1 muestra los primeros datos del archivo, las operaciones que se realizan a continuación están referenciadas a cuestiones más técnicas como la operatividad del lenguaje de programación que permite conocer elementos que son parte del grupo de datos como: tamaño de datos, tipo de datos, variables, dimensión de la tabla, tamaño de dato.

[6] https://data.world/data-society/pima-indians-diabetes-database

Pregnancies	Glucose	BloodPressure	SkinThickness	Insulin	BMI	DiabetesPedigreeFu	Age	Outcome
6	148	72	35	0	33.6	0.627	50	1
1	85	66	29	0	26.6	0.351	31	0
8	183	64	0	0	23.3	0.672	32	1
1	89	66	23	94	28.1	0.167	21	0
0	137	40	35	168	43.1	2.288	33	1

Ilustración 1 Primeros datos del dataset diabetes.

De la tabla de datos se hace estadística descriptiva, calculando promedio, moda, desviación stantard, o incluso ajuste de datos e interpretando los resultados de acuerdo al tema. Por otro lado, realizar estas operaciones le permite o le exige también al alumno, utilizar operaciones de selección de rangos sobre una matriz para segmentar y procesar los datos. Por ejemplo: graficar sólo una característica como edad en función de la glucosa, etc.

Existen herramientas que permiten hacer un resumen analítico de los datos, con herramientas como *pandas_profiling*[7], que, si bien este módulo está basado en *pandas*, utilizarlo representa una considerable ayuda para cotejar los resultados de las ecuaciones con los valores mostrados por *pandas_profiling*.

Overview | Reproduction | Warnings 5

Dataset statistics

Number of variables	9
Number of observations	768
Missing cells	0
Missing cells (%)	0.0%
Duplicate rows	0
Duplicate rows (%)	0.0%
Total size in memory	54.1 KiB
Average record size in memory	72.2 B

Variable types

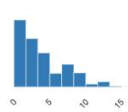
NUM	8
BOOL	1

Ilustración 2 import pandas_profiling as pp, pp.ProfileReport(df)

El recurso de *pandas_profiling* es de enorme ayuda a la hora de cotejar los resultados de las funciones creadas con Python con los datos mostrados en el reporte *profiling*, de igual manera permite hacer el perfil a través de un reporte de cada una de las variables.

Pregnancies
Real number ($\mathbb{R}_{\geq 0}$)
ZEROS

Distinct count	17	Mean	3.84505208333
Unique (%)	2.2%	Minimum	0
Missing	0	Maximum	17
Missing (%)	0.0%	Zeros	111
Infinite	0	Zeros (%)	14.5%
Infinite (%)	0.0%	Memory size	6.0 KiB



Toggle details

Ilustración 3 Perfil de la característica Pregnancies.

7 https://pandas-profiling.ydata.ai/docs/master/index.html

De esta forma se realiza la exploración de cada una de las variables, permitiendo posteriormente graficar varias variables en un mismo gráfico, y explorar cuestiones como la correlación entre variables.

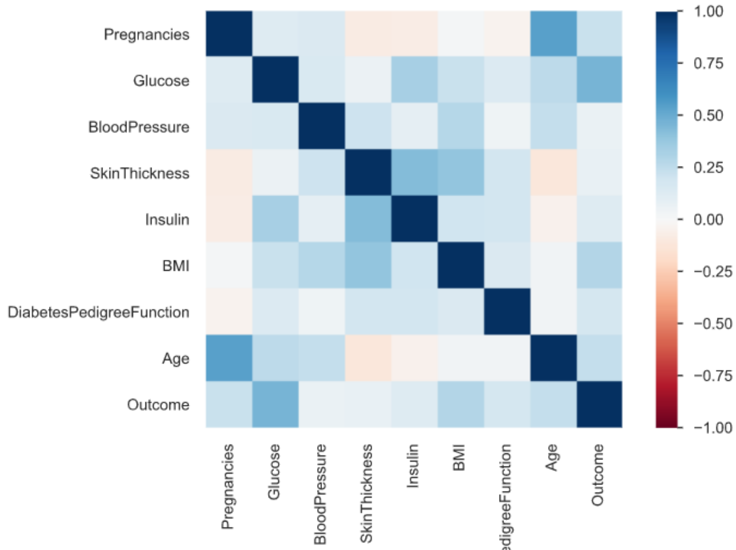


Ilustración 4 Correlación entre variables.

V. Conclusiones

Cada alumno presenta *dataset* diferentes, lo que denota que sus intereses son diferentes, esto fortalece los conceptos teóricos expuestos por el docente a través de la atención natural de estudiante en analizar datos de su propia elección.

Revisar el tema de la estadística descriptiva a través de Tecnología Educativa representa un reto para el docente, ya que logra el dominio no sólo de los conceptos sino también de la tecnología.

Se utilizan diversas herramientas para favorecer el pensamiento crítico computacional que permitan expresar ideas y experiencia en el proceso de aprendizaje.

VI. Bibliografía

[1] Todd L. Pittinsky, Science, Technology, and Society: New Perspectives and Directions; Cambridge Handbooks in Psychology, Cambridge University Press. 2019.
[2] García, F. “Los modelos didácticos como instrumento de análisis y de intervención en la realidad educativa”. En: Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales. Universidad de Barcelona . Nº 207, 18 de febrero 2000.

[3] Homero, G., Sosa, M.R., y Martínez, F. "Modelos didácticos en la educación superior: una realidad que se puede cambiar". Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 22(2), 447-469, 2018.

[4] UNESCO (2021). (20 de septiembre, 2021) *Las TIC en la Educación*. UNESCO. https://es.unesco.org/themes/tic-educacion

[5] Orozco, C. y Labrador, M. E. (2006). La tecnología digital en educación: Implicaciones en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. *Theoria.* 15(2), 81-89.

El Muestreo sí sirve

Luis Rojas Torres[1]

Resumen

El uso de las muestras aleatorias simples es un tema muy común en los noticieros, no obstante, muchos espectadores desconfían de su efectividad. El objetivo de este taller es presentar una metodología para la enseñanza del muestreo simple aleatorio, enfocada en mostrar la efectividad de esta técnica. El taller consistirá en usar el software Excel para seleccionar muestras aleatorias de una base de datos y verificar cómo el promedio de las muestras se "acerca" al promedio poblacional. También se utilizarán estas muestras aleatorias para introducir los conceptos de margen de error y nivel de confianza. Por último, se analizará el problema de cuál es el tamaño de muestra necesario para algunos estudios.

Palabras claves: Muestreo aleatorio simple, metodología de enseñanza, nivel de confianza, error de muestreo

Resumen

The use of simple random sampling is a very common topic in news broadcasts, however, many viewers are suspicious of its effectiveness. The objective of this workshop is to present a methodology for teaching simple random sampling, focused on showing the effectiveness of this technique. The workshop will consist of using Excel software to select random samples from a database and verify how the average of the samples is "close" to the population average. These random samples will also be used to introduce the concepts of margin of error and confidence level. Finally, the problem of what sample size is necessary for some studies will be discussed.

Key words: simple random sampling, teaching methodology, confidence level, sampling error

Modalidad: Taller [3 horas]

[1] Universidad de Costa Rica, luismiguel.rojas@ucr.ac.cr

Introducción

El auge de las redes sociales ha puesto en evidencia que un grupo de personas tiende a desconfiar de los resultados de las encuestas. En los comentarios de los reportajes de las encuestas es normal encontrar comentarios como: “la casa encuestadora manipuló los datos” o “la persona favorecida financió la encuesta”. En [2] se menciona que en dos encuestas de finales de los setentas, un tercio de las personas reportaron que no confiaban en los resultados de las encuestas, ya que consideraban que las empresas manipulaban los resultados o las personas no eran sinceras en el momento de responder.

Otro comentario común sobre las encuestas es el siguiente: “es imposible hacer conclusiones sobre todo el país con solo 1000 personas”. A diferencia de otros comentarios, éste tiene la apariencia de ser objetivo, no obstante, dista de la realidad ya que la estadística inferencial permite, por ejemplo, usar la información de una muestra aleatoria para generar un intervalo de confianza de una proporción poblacional de interés.

Para contrarrestar esta situación, el Programa de estudios de Matemática de Costa Rica considera objetivos de aprendizaje como “reconocer la importancia del muestreo en el análisis de datos” e “identificar la importancia del azar en los procesos de muestreo estadístico” [3]. Además, en el Programa se indica que una persona egresada de secundaria debe ser capaz de comprender las ideas básicas de muestreo. No obstante, en las aulas costarricenses el tema de Estadística y Probabilidad ha mostrado menores niveles de aprendizaje que las otras áreas de la matemática [5]. Por otro lado, durante el 2020 esta área fue la más perjudicada del “apagón educativo debido a la pandemia”, ya que se dejó de lado en primaria y en secundaria [6]. Estos resultados señalan que la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad sigue sin afianzarse en las instituciones costarricenses.

Debido a lo anterior, resulta relevante que las personas docentes conozcan nuevas formas de abordar los distintos temas de Estadística y Probabilidad, ya que para muchas de estas personas estos temas y su didáctica son tópicos bastantes nuevos. En particular, la importancia del muestreo puede ser un tema complejo de enseñar, debido a que se basa en matemáticas avanzadas, es por esto, que es importante crear espacios de discusión para que las personas docentes aclaren sus dudas y puedan dictar sus clases con mayor confianza.

Ahora bien, el objetivo de este trabajo es construir una estrategia didáctica para la enseñanza del muestreo, que permita que el estudiantado valore el potencial de esta técnica estadística.

Descripción de la estrategia didáctica

La estrategia didáctica que se propone en este trabajo consiste en realizar un laboratorio dirigido a que la persona estudiante descubra por sí misma que el muestreo aleatorio con tamaños relativamente pequeños presenta promedios de una variable de interés muy cercanos al promedio en la población. Este laboratorio se desarrollará con el software

Excel y la persona estudiante no necesitará conocer de fórmulas, ya que se le dará una hoja de cálculo con la base de datos de trabajo y los comandos escritos.

El laboratorio presenta los siguientes momentos:

- Acercamiento a una base de datos de una población: En este paso la persona estudiante analizará los estadísticos descriptivos de las variables de una población de interés (mínimo, máximo, promedio y desviación estándar). Dado que se utilizará una hoja de Excel prediseñada, la persona solo debe interpretar los estadísticos seleccionados.

  Se puede utilizar una base de datos de los estudiantes del nivel de interés, la cual puede ser recolectada por medio de un formulario de Google. Esta base puede tener 3 variables: una dicotómica, una cuantitativa discreta y una cuantitativa, por ejemplo, juega fútbol (1=sí o 0=no), número de hermanos y nota en el último examen de matemática.

  La base de datos que se utilizará en este laboratorio es una base ficticia con 200 casos y las variables mencionadas en el ejemplo.

- Selección y estudio de muestras aleatorias: En este momento, se le enseñará a la persona estudiante que la función “aleatorio.entre” de Excel genera números aleatorios en un rango determinado y se le indicará que esta función es útil para generar muestras.

  Luego, se mostrará que en una sección de la hoja asignada hay una columna con 35 espacios con esta función digitada y se les hará ver que cada vez que oprimen el botón *enter* se generan nuevos números aleatorios (la justificación de este tamaño de muestra se presenta en la sección de tamaño de muestra). Esta columna es el conjunto de casos que conforma una muestra aleatoria. Luego de este paso, las personas deberán realizar una leve manipulación de la hoja, la cual consiste en copiar los casos aleatorios y pegarlos con formato *valores* en el espacio correspondiente para la muestra aleatoria definitiva. Esta manipulación deberán hacerla cinco veces, ya que en la hoja de excel hay 5 segmentos dedicados a la construcción de 5 muestras aleatorias de 35 casos.

  Posteriormente, en cada una de estas muestras la persona estudiante observará el promedio de cada una de las tres variables de la base de datos. Estos promedios serán generados automáticamente por la hoja de Excel utilizada.

- Comparación de promedios: En este paso se analizará la diferencia de los promedios obtenidos en las muestras con el verdadero promedio.

  Además, se les pedirá a los estudiantes que determinen cuántas diferencias en la variable 1, 2 y 3 son menores al 10%, a 0,5 y a 5, respectivamente (se considerará este valor como el límite para una diferencia pequeña).

- Socialización de los resultados de la variable 1 y conclusión general sobre variables dicotómicas: En este momento, el docente puede indicarles a sus estudiantes que al estudiar variables dicotómicas, como en las encuestas, la selección de 35 personas de 200, permite obtener en aproximadamente el 80% intentos diferencias de promedios menores al 10%.

Luego, se procede a contar cuántos estudiantes obtuvieron 0, 1, 2, 3, 4 y 5 muestras con diferencias menores al 10% y se determina el porcentaje de muestras estimadas en las que la diferencia fue menor al límite establecida. Se espera que la mayoría del estudiantado obtengan 4 o 5 muestras con diferencias pequeñas.

Con base en este proceso, se concluye que el muestreo aleatorio permite obtener, con un grado de certeza preestablecido, estimaciones del promedio cercanas al real. Por último, se menciona que las casas encuestadoras, por lo general, escogen un tamaño de muestra para que la diferencia de los promedios en variables dicotómicas sea menor al 3% en 95 de cada 100 intentos. Para fortalecer esta conclusión se puede presentar un artículo como el de [4].

- Análisis del resto de variables: En la última fase de la estrategia se le puede pedir a un estudiante que exponga las diferencias observadas en las otras variables y se analiza en conjunto con el grupo si estas diferencias fueron pequeñas o grandes. En este parte, se debe indicar al estudiantado que el tamaño de muestra utilizado permite obtener diferencias pequeñas de los promedios en gran cantidad de muestras aleatorias, siempre y cuando las variables estudiadas tengan una “variabilidad baja”. En el caso de la base de datos de estudio se sabe que habrá diferencias pequeñas (en la sección de tamaño de muestra se indicará por qué se puede hacer esta conclusión).

Para ejemplificar los momentos del laboratorio, en la tabla 1 se presentan los promedios que pudo haber obtenido un estudiante en las cinco muestras aleatorias. Se puede observar que en las 5 muestras estudiadas, las diferencias del promedio de la variable “juega fútbol” con el promedio verdadero fueron inferiores al 10%.

En la variable número de hermanos, la cual presenta un intervalo de variación de 0 a 4, la diferencia de promedios en las muestras seleccionadas fue a lo más de 0,14 unidades, es decir, un 3,5% del intervalo observado. Mientras que en la nota de matemática la mayor diferencia fue de 2,42 unidades, es decir, un 2,42% del rango posible de variación de la nota (de 0 a 100) y un 7,11% del rango real observado (de 51 a 85). Por lo cual, en este caso en particular, este tamaño de muestra parece ayudar a obtener resultados cercanos al promedio real.

Tabla 1

Promedios de las variables de interés en 5 muestras aleatorias de 35 personas

Num. muestra	**Juega fútbol**		**Num. Hermanos**		**Nota en Matem.**	
	Prom	Dif	Prom	Dif	Prom	Dif
1	0,77	-0,09	1,09	0,02	68,45	0,16
2	0,63	0,05	1,23	-0,12	66,19	2,42
3	0,77	-0,09	1,00	0,11	68,02	0,59
4	0,71	-0,03	0,97	0,14	70,24	-1,63
5	0,74	-0,06	1,11	0,00	68,61	0,00
Población	0,68		1,11		68,61	

El uso de Excel en la estrategia didáctica

Para poder implementar la estrategia didáctica expuesta es necesarios describir dos elementos esenciales: la hoja de trabajo y la estrategia para la construcción de la muestra.

La hoja de trabajo

La hoja de trabajo de Excel viene preparada previamente para que la persona estudiante la complete. La estructura es la siguiente:

- Filas 1-201: Base de datos.
- Filas 203-212: Espacio para los análisis descriptivos.

	A	B	C	D	E	F	G
203	**Estadístico**	**Fútbol**	**Hermanos**	**Matem.**	**Dif Fút**	**Dif Her**	**Dif Mat**
204	**Mínimo Pob**	=Min(B2:B201)	=Min(C2:C201)	=Min(D2:D201)			
205	**Máximo Pob**	=Max(B2:B201)	=Max(C2:C201)	=Max(D2:D201)			
206	**Desv. Est. Pob**	=Desvest(B2:B201)	=Desvest(C2:C201)	=Desvest(D2:D201)			
207	**Promedio Pob**	=Promedio(B2:B201)	=Promedio(C2:C201)	=Promedio(D2:D201)			
208	**Prom. Muestra 1**	=Promedio(B216:B250)	=Promedio(C216:C250)	=Promedio(D216:D250)	=B208-B$207	=C208-C$207	=D208-D$207
209	**Prom. Muestra 2**	=Promedio(B256:B290)	=Promedio(C256:C290)	=Promedio(D256:D290)	=B209-B$207	=C209-C$207	=D209-D$207
210	**Prom. Muestra 3**	=Promedio(B296:B230)	=Promedio(C296:C230)	=Promedio(D296:D230)	=B210-B$207	=C210-C$207	=D210-D$207
211	**Prom. Muestra 4**	=Promedio(B336:B370)	=Promedio(C336:C370)	=Promedio(D336:D370)	=B211-B$207	=C211-C$207	=D211-D$207
212	**Prom. Muestra 5**	=Promedio(B376:B410)	=Promedio(C376:C410)	=Promedio(D376:D410)	=B212-B$207	=C212-C$207	=D212-D$207

- Filas 215-250: Espacio para la muestra 1.
- Filas 255-290: Espacio para la muestra 2.
- Filas 295-330: Espacio para la muestra 3.
- Filas 335-370: Espacio para la muestra 4.
- Filas 375-410: Espacio para la muestra 5.

El muestreo con Excel

Para generar los casos de una muestra aleatoria y recuperar los datos de los casos seleccionados se utilizará la siguiente guía de comandos:

	A	B	C
215	**Casos definitivos**	**Futbol**	**Hermanos**
216	Pegar valores	=INDIRECTO(DIRECCION(A216;2;;;))	=INDIRECTO(DIRECCION(A216;3;;;))
217	…	…	…

	D	E
215	**Matemática**	**Casos iniciales**
216	=INDIRECTO(DIRECCION(A216;4;;;))	=aleatorio.entre(2;201)
217		…

En la columna E se utilizará la función "=aleatorio.entre(2;201)" para determinar la fila en la que se encuentran los casos seleccionados en la muestra aleatoria. Los valores 2 y 201 indican el rango de filas en el que se ubican los casos estudiados. Luego, se copiarán estos valores y se pegarán en la columna A en formato "valores", con lo cual se tendrán los números de casos definitivos. Este paso será la única manipulación de la hoja que los estudiantes deberán realizar durante el taller.

La función de la columna B viene escrita en la hoja de Excel, esta llama al valor de la variable "Fútbol" obtenido por el caso seleccionado aleatoriamente. En el caso del dato que iría en la casilla B216, el número de fila se indica en la casilla A216 y el número de columna es la 2 (número asignado a la columna B). De igual manera, se realizará en la columna C y D para llamar a los valores de las variables "Hermanos" y "Matemática".

El tamaño de muestra

Otro aspecto que se debe considerar para el desarrollo de la estrategia es el cálculo del tamaño de muestra, ya que si el docente va a utilizar una base distinta a la propuesta, el tamaño de muestra requerido puede variar.

Para determinar el tamaño de muestra de un estudio se deben considerar cuatro elementos: el error muestral permitido (ε), el nivel de confianza $(1-\alpha)*100\%$, la desviación estándar poblacional de la variable (σ) y el tamaño de la población (N).

El error muestral indica cuál es la máxima diferencia entre el promedio muestral y el poblacional que se desea observar. El nivel de confianza indica la probabilidad de que el promedio de la muestra se ajuste al límite de error establecido.

La fórmula para determinar el tamaño de muestra para obtener un error muestral menor a ε, en aproximadamente un $(1-\alpha)*100\%$, equivale a

$$n=\frac{NZ_\alpha^2\sigma^2}{\varepsilon^2(N-1)+Z_\alpha^2\sigma^2}$$

con Z_α el cuantil α de la función de densidad acumulada por la derecha de la función normal, cuyos valores más comunes son 1,28; 1,64 y 1,96 para niveles de confianza de 80%, 90% y 95%, respectivamente [1].

Para determinar el tamaño de muestra requerido para la variable "juega fútbol", considerando $\varepsilon=0{,}1$ y una confianza del 80% ($\alpha=0{,}20$), el tamaño requerido es de

$$n=\frac{200(1{,}28)^2(0{,}47)^2}{(0{,}1)^2(200-1)+(1{,}28)^2(0{,}47)^2}=30{,}77<31$$

Con lo cual se concluiría que el tamaño de muestra debería ser 31, ya que es el número natural mínimo con el que se cumplen las propiedades deseadas.

Para las otras variables estudiadas en el taller y los errores muestrales máximos considerados, el tamaño de muestra de 35 personas fue mucho superior al requerido. En el caso del número de hermanos el tamaño muestral requerido era

$$n = \frac{200(1{,}28)^2(0{,}90)^2}{(0{,}5)^2(200-1)+(1{,}28)^2(0{,}90)^2} = 5{,}19 < 6$$

mientras que en el de nota de matemática era

$$n = \frac{200(1{,}28)^2(9{,}16)^2}{(5)^2(200-1)+(1{,}28)^2(9{,}16)^2} = 5{,}37 < 6$$

El tamaño de muestra sin información a priori

La desventaja con las estimaciones del tamaño de muestra utilizadas previamentes es que demandan información poblacional de la variable (la desviación estándar), la cual es poco esperable que se maneje antes de que se realice un estudio.

Ahora bien, en variable dicotómicas no es necesario conocer la desviación estándar de las variables debido a que tienen un máximo conocido: 0,5 [7]. Por lo cual, cuando se realizan estudios con variables dicotómicas, se utiliza el máximo de la desviación estándar de la variable. En el caso de la variable “juega fútbol”, el tamaño de muestra considerando un error de $\varepsilon = 0{,}1$ y una confianza del 80% ($\alpha = 0{,}20$), implica que el tamaño de muestra sea:

$$n = \frac{200(1{,}28)^2(0{,}5)^2}{(0{,}1)^2(200-1)+(1{,}28)^2(0{,}5)^2} = 34{,}14 < 35$$

Con base en el resultado anterior es que en este estudio se decidió utilizar un tamaño de muestra de 35 personas.

Por otro lado, es importante mencionar que si el tamaño de la población es suficientemente grande, la fórmula de cálculo de tamaño de muestra se simplifica a

$$n = \frac{Z_\alpha^2\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Discusión

Este documento presenta una propuesta de taller para la enseñanza del muestreo en secundaria, la cual demanda de un conocimiento básico de Excel. La razón por la cual se brinda una hoja con todas las funciones escritas es que el objetivo de la estrategia es que la lección se dedique al estudio del muestreo, en lugar de a las funciones. Si alguna persona estudiante presenta problemas con la copia de los casos seleccionados en la muestra, la persona docente puede proporcionarle una hoja prediseñada con los casos seleccionados, para evitar la pérdida de tiempo en un detalle irrelevante.

Se considera que esta estrategia es apropiada para la enseñanza del muestreo, porque permite explorar una base de datos original y observar claramente que las muestras aleatorias son subconjuntos de estas poblaciones. Esta relación de subconjunto, aparentemente tan trivial, es una idea difícil de comprender cuando no hay una verdadera manipulación de datos.

Por otro lado, el contraste de los estadísticos muestrales con los parámetros poblacionales es el principal argumento para justificar la relevancia del uso del muestreo, la observación de estos contrastes le brindará al estudiante una experiencia real con la verdadera importancia del muestreo.

Esta estrategia también brinda una oportunidad para estudiar otros conceptos adicionales, como el margen de error o el nivel de confianza. No obstante, el objetivo principal de la estrategia es que el estudiantado comprenda que el muestreo adecuado permite, "en la mayoría de los casos" (referencia a la confianza), obtener aproximaciones "precisas" (referencia al error muestral) del promedio muestral.

Finalmente, hay que mencionar que esta estrategia es una propuesta que no ha sido experimentada, por lo cual, debe evaluarse su pertinencia. Se espera que la implementación apropiada de esta estrategia provoque que el estudiantado comprenda la relevancia y el funcionamiento del muestreo aleatorio.

Referencias

[1] Kish, L. Muestreo de Encuestas. Editorial Trillas. 1965.

[2] López, R. "Opinión pública y encuestas de opinión en España". Revista mexicana de opinión pública (2020) 28, 149-179.

[3] Ministerio de Educación Pública. Programa de Estudios de Matemática. MEP. 2012.

[4] ODI UCR. "Encuesta: costarricenses muestran opiniones favorables sobre el desempeño del presidente". En https://www.ucr.ac.cr/noticias/2022/08/03/encuesta-costarricenses-muestran-opiniones-favorables-sobre-el-desempeno-del-presidente.html (consultada el 16 de setiembre, 2022).

[5] Programa Estado de la Nación. Séptimo Estado de la Educación Costarricense. PEN. 2019.

[6] Programa Estado de la Nación. Octavo Estado de la Educación Costarricense. PEN. 2021.

[7] Wackerly, D. D., Mendenhall, W. y Scheaffer. R. L. Estadística matemática con aplicaciones. Cengage Learning. 2008.

Formación Docente A Partir De Un Cuento Histórico Para La Enseñanza De La Probabilidad En La Escuela Primaria

Ailton Paulo de Oliveira Júnior[1], Fátima Aparecida Kian[2] & Ana Meire de Oliveira Morais[3]

Resumen

Creemos que los cuentos agudizan la imaginación y despiertan a mundos extraordinarios, además del interés por la lectura en el proceso escolar que ayuda en la formación de la personalidad, pues cada personaje presentado viene con la capacidad de identificar y discernir entre lo real y lo imaginario. Por lo tanto, el presente taller tiene como objetivo estudiar el potencial del aprendizaje de la probabilidad, teniendo en cuenta situaciones que involucran conceptos básicos de probabilidad a través de la narrativa utilizada en un cuento histórico llamado: "¿Sabías que los niños jugaban al juego de las fichas hace mucho tiempo en Francia?". El taller abordará los conceptos de: azar; espacio muestral; eventos aleatorios; enfoque clásico y frecuencial de la probabilidad.

Palabras clave: Enseñanza de la Probabilidad, Educación Primaria, Formación docente.

Abstract

We believe that stories sharpen the imagination and awaken extraordinary worlds, in addition to the interest in reading in the school process that helps in the formation of personality, since each character presented comes with the ability to identify and discern between the real and the imaginary. Therefore, this workshop aims to study the potential of learning probability, taking into account situations that involve basic concepts of probability through the narrative used in a historical story called: "Did you know that children played the game of the chips a long time ago in France?". The workshop will address the concepts of: chance; sample space; random events; classical and frequential approach to probability.

Keywords: Teaching of Probability, Primary Education, Teacher Training.

Modalidad: Taller (hora y media, tres horas o cuatro horas y media)

[1] Universidade Federal do ABC, Brasil. ailton.junior@ufabc.edu.br
[2] Universidade Federal do ABC, Brasil. fatima.kian@ufabc.edu.br
[3] Universidade Federal do ABC, Brasil. moraisanameire@gmail.com

I. Introducción

Creemos que los cuentos agudizan la imaginación y despiertan a mundos extraordinarios, además del interés por la lectura en el proceso escolar que ayuda en la formación de la personalidad, pues cada personaje presentado viene con la capacidad de identificar y discernir entre lo real y lo imaginario. Además, creemos que la historia tiene un gran valor cultural y social.

Pero, sobre todo, su principal habilidad se basa en que sigue siendo un recurso potente para mejorar el aprendizaje. Este valor se puede trabajar en el aula, permitiendo mostrar a los estudiantes que el contenido no es un campo de conocimiento estático y prefabricado, sino que está en constante cambio de acuerdo con las necesidades de cada nación y región a lo largo de la historia.

Así, con base en nuestras lecturas y reflexiones, pensamos en asociar la historia de las probabilidades a la enseñanza de los contenidos probabilísticos en la Educación Primaria a través de un juego histórico presentado en forma de cuento.

Para Gancho (2006), un cuento es una narración corta, cuya característica central es condensar conflicto, tiempo, espacio y reducir el número de personajes. El cuento es un tipo de narrativa tradicional. Partiendo de la consideración de que un cuento es una narrativa, para Jervis (2017), los géneros narrativos más comunes de los cuentos son: hada, ficción científica, terror, aventura, misterio, realista, infantil e histórico. Según su género, los cuentos históricos son la narración de hechos históricos, es decir, de hechos reales, pero que ocurrieron en diferentes tiempos y lugares y que son interpretados según el pensamiento del historiador. Por lo tanto, la narración partió de un hecho histórico que se basó en el uso de un juego, de esta forma lo llamamos juego histórico.

Todavía nos basamos en Gal (2005) y Batanero (2002), cuando justificaron la necesidad de incluir el estudio de la probabilidad en las escuelas, presentando varias razones, tales como: (1) el papel instrumental en la comprensión de conceptos de otras disciplinas; (2) la utilidad de la probabilidad para la vida diaria de las personas; (3) la necesidad de leer e interpretar datos estadísticos y probabilísticos en muchas profesiones; (4) el papel del razonamiento probabilístico en el análisis de riesgos y la toma de decisiones.

Creemos que la historia tiene un gran valor cultural y social. Este valor debe calcularse en el aula, ya que permite a los estudiantes mostrar lo que está contenido en el campo de conocimiento estático y enumerado, pero cambia constantemente según las necesidades de cada área y región.

El desafío de este taller es mostrar la posibilidad de desarrollar un trabajo pedagógico para los primeros años de la Educación Primaria (6 a 10 años), basado en la historia de las matemáticas que involucre contenidos probabilísticos, creando subsidios teórico-metodológicos que favorezcan repensar los métodos estratégicos, redimensionándolos para minimizar la brecha entre las actividades lúdicas diarias realizadas por los estudiantes, de forma espontánea, y el trabajo desencadenado en el aula. A partir de este principio, las situaciones problemáticas propuestas son contextualizadas y basadas en situaciones reales que formaron parte de la construcción de la teoría de la probabilidad.

Al contar una historia, podemos hacer que el oyente comprenda las cosas rápidamente, estimulando el razonamiento, la memoria y el deseo de expresarse. Por eso, escuchar cuentos puede hacer que los niños sean más reflexivos, porque encuentran un mensaje que los lleva a entender cómo pueden actuar y comportarse, aprenden a escuchar con atención y son pacientes, fomentando la empatía o la capacidad de adelantarse en lugar del otro.

El tiempo para contar o escuchar la historia puede y debe ser un tiempo útil, ya que además de la narración, se pueden incluir actividades nada más terminar la historia, haciendo que estas historias sean aún más importantes y fijadas en ideas más importantes. Contar una historia se considera un recurso socializador, que puede abrir las puertas de la lectura y la escritura e incluso de la convivencia y la tolerancia. Pero, sobre todo, su principal habilidad se basa en que sigue siendo capaz de mejorar el aprendizaje.

II. Marco Teórico

Coutinho (2007) discutió el papel de la historia en la elección de contextos para presentar los primeros conceptos probabilísticos en la escuela primaria. Para realizar un estudio epistemológico, describió la aprehensión del azar en relación con el contexto en el que se inserta, considerando los posibles resultados de manipulaciones de un generador de azar, como los juegos de azar (manipulación de monedas, dados, etc.).

Complementando estas ideas, Oliveira Júnior, Delalíbera y Cardoso (2017), consideraron importante los argumentos que refuerzan las potencialidades pedagógicas y cuestionadoras de la Historia de las Matemáticas, según Miguel (1997), apoyado en la investigación bibliográfica sobre Historia de la Probabilidad y desarrollo de actividades para el uso en las aulas de Educación Primaria hasta Educación Secundaria haciendo referencia a conceptos probabilísticos básicos.

Oliveira Júnior y Cardoso Barão (2021) investigaron el aprendizaje probabilístico con un grupo de estudiantes del cuarto año de la escuela primaria en Brasil, teniendo en cuenta situaciones que involucran conceptos básicos de probabilidad, como el espacio muestral y sus eventos, a través de la narrativa utilizada en un cuento: "¿Sabes que los niños solían jugar con el juego de las baldosas hace mucho tiempo en Francia?". La Teoría de Situaciones Didácticas - TSD fue el soporte para la evaluación de la actividad de intervención, visando el desarrollo de competencias y habilidades relacionadas con la probabilidad. Los resultados indican que los estudiantes lograron identificar los elementos históricos traídos a la narración y que la propuesta de juego propuesta por el Conde de Buffon, presentando conceptos elementales de probabilidad, sirvió como proceso motivador y elemento para la aprehensión del conocimiento probabilístico. En respuesta a la pregunta de investigación, los resultados obtenidos arrojaron fuerte evidencia de que las actividades contribuyeron a la enseñanza-aprendizaje de la Probabilidad. Además, los resultados mostraron las dificultades experimentadas por algunos estudiantes en la adquisición de conocimientos, y los errores cometidos llevaron a pensar en diferentes enfoques para la apropiación de conocimientos.

De esta forma, creemos que el uso de la historia puede potenciar el aprendizaje de determinados contenidos probabilísticos, ya que los alumnos abordan los contenidos de forma globalizada con otros alumnos, con los contenidos de lectura relacionados con el entorno emocional y afectivo. Esto facilita que los alumnos se pongan en contacto con situaciones probabilísticas, ajenas al mundo infantil, si las abordamos de forma contextualizada.

Además de los aspectos enumerados anteriormente, los juegos educativos ofrecen una oportunidad para integrar aspectos cognitivos, afectivos y sociales del aprendizaje (Pulos y Sneider, 1994). Considerando la enseñanza de la probabilidad, Vásquez y Alsina (2014) proponen para el estudio de conceptos probabilísticos el uso de materiales concretos como fichas, dados y juegos de azar, ya que serán de gran ayuda en la realización de experimentos aleatorios que reforzarán conceptos probabilísticos.

Oliveira Júnior y Cardoso Barão (2021) creen que los juegos se pueden utilizar con estudiantes de una amplia gama de habilidades. Esta flexibilidad se debe a la naturaleza motivacional de los juegos y la atracción que los estudiantes tienen naturalmente por los juegos y el trabajo con materiales prácticos. Ofrecen a los estudiantes oportunidades para aprender conceptos específicos, como probabilidad, y para sacar conclusiones en sus respectivos niveles.

También creamos historias, contamos las nuestras, creamos juegos y las vivimos, como si su desarrollo, sus tramas y reglas, acompañaran nuestro propio desarrollo, en el que necesitamos adaptarnos a lo que nos imponen. Interpretamos los cuentos según nuestros sentidos (Estés, 2005), y los entendemos, según nuestras vivencias, la misma relación que se da en los juegos (Freire y Scaglia, 2003). Somos seres culturales y sociales, por lo que el entorno influye y está influenciado por quiénes somos.

Por lo tanto, consideramos el cuento como un recurso que puede promover el trabajo probabilístico durante el proceso de enseñanza-aprendizaje (Mateus et al., 2013) porque el cuento se convierte en un recurso que puede brindar múltiples beneficios a los estudiantes, ya que permite aprender en un entorno globalizador y significativo para el niño (Ministerio de Educación, 2018).

III. Descripción del taller

Los cuentos abren un abanico de posibilidades al niño que en su vivencia cotidiana no podía imaginar la variedad de temas, situaciones, ambientes y personajes que pueden aparecer, ya que a partir del cuento el niño conocerá la bondad. De algunos, la vida difícil de ciertas personas, las luchas por la existencia entre hombres, animales, diferentes tipos de vida según ambientes, sociedades, cómo se pueden ver las cosas con otros ojos.

El cuento tiene la propuesta didáctica de centrarse en el desarrollo de contenidos probabilísticos, utilizando como disparador, un juego que fue estudiado por primera vez en 1733 por el naturalista y matemático francés Georges-Louis Leclerc, el Conde de Buffon, presentado por Badizé, Jacques, Petitpas y Pichard (1996) como propuesta para introducir la enseñanza de la probabilidad.

El juego, según Coutinho (2002), consiste en lanzar una moneda sobre un piso de baldosas de forma cuadrada donde los jugadores apostarían por la posición final desde la que caería la moneda, es decir, quedaría completamente inmóvil en una sola baldosa (posición denominada “franco-carreau”) o en una junta entre dos baldosas o en más juntas.

A continuación, indicamos a través de un diagrama (Figura 1) la estructura del taller, así como los objetivos didácticos asociados a cada módulo (1 a 3) de trabajo.

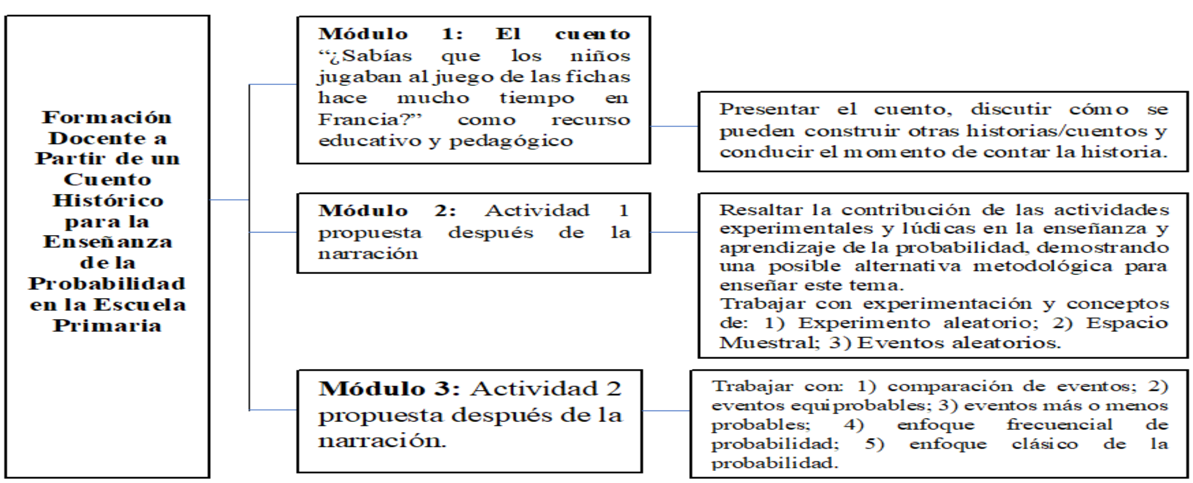


Figura 1. Estructura del taller

Módulo 1: El cuento “¿Sabías que los niños jugaban al juego de las fichas hace mucho tiempo en Francia?” **como recurso educativo y pedagógico**

Dadito y las hermanas Clara y Cora estudian por las mañanas en la misma escuela, pero en aulas diferentes, y se reúnen todas las tardes en la casa de las niñas Clara y Cora para trabajar en los trabajos que se envían a casa. Son vecinos.

Al llegar a la casa de las niñas Clara y Cora, Dadito recordó la historia del Conde de Buffon que la Profesora les contó a los alumnos en su salón de clases.

Dadito, recordando la historia, les dice a las niñas Clara y Cora:

- Cuenta la historia que un abogado, médico y que todavía amaba estudiar la naturaleza, conocido en ese momento como el Conde de Buffon, en la corte de Luis XV, rey de Francia en el siglo XVIII, fue nombrado en 1733 director de la Jardín del Rey, hoy en día el Jardín de las Plantas, ubicado en el famoso París.

- Un buen día, paseando por el jardín, Buffon sufrió una caída y tuvo que permanecer con las piernas en el aire durante varios meses. Además de hacer muchas cosas, a Buffon le gustaban mucho las matemáticas.

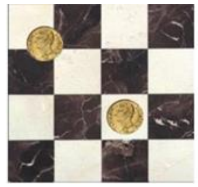
- Entonces, mientras sus piernas estaban inmovilizadas, para "pasar el tiempo", observó el piso del jardín formado por baldosas y comenzó a tirar al piso la varilla con la que limpiaba su pipa. Observó que el tallo, que tenía la misma longitud que el ancho de las baldosas, a veces cruzaba (o tocaba) las líneas de los tabiques entre las baldosas y, en otras ocasiones, esto no sucedía.

- Además, hay que recordar que en ese momento a los franceses les gustaban los juegos y el Conde de Buffon creó el juego de las baldosas.

- El juego de las baldosas (o franc-carreau) fue ampliamente jugado por los niños franceses en el siglo XVIII.

- El juego fue el siguiente: Cogiste una moneda que fue lanzada al azar en un piso cubierto por baldosas cuadrados. Los niños apostaron a que la moneda caería completamente en una baldosa (franc-carreau) o que la moneda caería o tocaría el lado de una baldosa.

Luego de que Dadito contara la historia del Conde de Buffon y recordando que, históricamente, estaba de moda suelos de baldosas en los castillos y jardines, los niños no perdieron el tiempo y pronto pensaron que estas baldosas serían un gran tablero como el que podemos ver en la siguiente figura:



Así, pensaron en repetir el juego de las baldosas, tirar monedas al azar al suelo y apostar al tope de monedas dentro de una baldosa (cuadrado de un tablero).

Pero los niños se detuvieron a pensar: ¿Qué factores contribuyeron para que uno de ellos pudiera ganar la apuesta y ver su moneda enteramente dentro de una baldosa, en un tiro al azar, sin tocar ninguno de los bordes de los cuadrados de la baldosa?

- ¿Vamos a ayudar a los niños a tomar una decisión?

Módulo 2: Actividad 1 propuesta después de la narración

La primera actividad propuesta después de la presentación del cuento y antes de realizar el experimento “tirar la moneda al tablero o simular las baldosas de un palacio y observar dónde caería la moneda”, se indica la siguiente secuencia:

1. Cada participante del curso lanzará la moneda en el tablero 20 veces.

2. Contesta la siguiente pregunta: ¿Qué crees que es más fácil que suceda antes de lanzar la moneda?

3. Al tirar la moneda en el tablero, cada participante deberá rellenar la tabla 1.

Tabla 1. Marcar lo sucedido en cada uno de los lanzamientos

Lanzamiento	**Fue franc-carreau (cayó dentro de los cuadrados)**	**No era franc-carreau (se cayó con alguna parte en los bordes de los cuadrados)**
1		
...		
20		

4. Luego de llenar la tabla 1, debes organizar los datos del lanzamiento de la moneda en la en la siguiente tabla (tabla 2).

Tabla 2. Organizar los datos

Número de movimientos que fueron franc-carreau (cayeron dentro de los cuadrados)	**Número de movimientos que no son franc-carreau (cayeron con alguna parte en los bordes de los cuadrados)**	**Lanzamientos totales**

- ¿Respondemos algunas preguntas?

1) ¿Hubo alguna diferencia entre lo que pensó que sucedería antes de lanzar la moneda y lo que realmente sucedió después de lanzar la moneda? Explique.

2) ¿Qué posibilidades observaste al lanzar la moneda?

3) ¿Cuántas repeticiones del experimento realizó usted?

4) ¿Cuál es el número de movimientos que fueron franc-carreau (cayó dentro de los cuadrados)?

5) ¿Cuál es el número de jugadas que no fueron franc-carreau (cayeron con alguna parte de los bordes de los cuadrados)?

6) ¿Qué observó que es más probable que suceda después de lanzar la moneda?

7) ¿Cuál era la probabilidad de que ocurrieran los movimientos franc-carreau (cayó dentro de los cuadrados)?

8) ¿Cuál era la probabilidad de que ocurrieran movimientos que no fueran franc-carreau (cayeron con alguna parte en los bordes de los cuadrados)?

Módulo 3: Actividad 2 propuesta después de la narración

La segunda actividad propuesta es una continuación de lo discutido en la actividad 1. Se indica la siguiente secuencia:

1. El trabajo se realizará en grupos, debiendo recogerse todos los resultados indicados en la tabla 3 del módulo 3 y cumplimentar la tabla 3.

- Reunamos los resultados de todos los alumnos después de realizar el experimento: “tirar la moneda en la pizarra y observar si cae dentro de un cuadrado o si toca una de las caras del cuadrado” usando la tabla 3.

Tabla 3. Organiza más los datos

Estudiante participante	**Número de movimientos que fueron franc-carreau (cayeron dentro de los cuadrados)**		**Número de movimientos que no son franc-carreau (cayeron con alguna parte en los bordes de los cuadrados)**		**Lanzamientos totales**	
	Frecuencia observada	Frecuencia acumulada	Frecuencia observada	Frecuencia acumulada	Frecuencia observada	Frecuencia acumulada
1						
...						
TOTAL						

Y finalmente, ¿puedes responder los siguientes problemas?

1) ¿Hubo alguna diferencia entre lo que observaste en tu experimento y lo que sucedió después de combinar todos los experimentos de los estudiantes? Explique.

2) ¿Cuántas repeticiones del experimento realizaron todos los estudiantes?

3) ¿Cuál es el número de movimientos que fueron franc-carreau (cayó dentro de los cuadrados)?

4) ¿Cuál es el número de jugadas que no fueron franc-carreau (cayeron con alguna parte en los bordes de los cuadrados)?

5) ¿Qué observó que es más probable que suceda después de que todos los estudiantes arrojaron la moneda?

6) ¿Cuál era la probabilidad de que ocurrieran los movimientos franc-carreau (cayó dentro de los cuadrados)?

7) ¿Cuál era la probabilidad de que ocurrieran movimientos que no fueran franc-carreau (cayeron con alguna parte en los bordes de los cuadrados)?

8) ¿Pudiste observar que hubo una estabilización de la frecuencia observada en los movimientos de franc-carreau? Explique.

IV. Consideraciones Finales

Se espera que, al finalizar el taller, los participantes sean conscientes de que es importante que, al inicio del estudio de probabilidad, se considere el desarrollo de las primeras nociones y elementos de acercamiento para la adquisición y desarrollo del lenguaje probabilístico.

En otras palabras, los conceptos de probabilidad son complejos con un alto grado de abstracción; por tanto, es necesario avanzar paulatinamente hacia una comprensión adecuada del lenguaje específico de la probabilidad, para abordar la cuantificación de la incertidumbre y, finalmente, el cálculo de probabilidades en los últimos años de la educación primaria.

Creemos que jugar es un recurso que puede ayudar a estudiantes y docentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en los primeros años de la escuela primaria.

Además, buscamos evaluar cómo el uso de la narrativa del juego histórico puede orientar la propuesta después del abordaje del tema: 1) ¿Se pueden trabajar las narrativas del juego histórico en la enseñanza de la probabilidad en los primeros años de la Enseñanza Fundamental? 2) ¿Es posible trabajar el contenido de probabilidad en los primeros años de la Enseñanza Fundamental a través de cuentos? 3) ¿Es posible asociar la historia de la probabilidad con la enseñanza de contenidos probabilísticos en los primeros años de la Educación Primaria?

Bibliografía

[1] Badizé, M.; Jacques, A.; Petitpas, M.; Pichard, J.-F. Le jeu du franc-carreau – une activité probabiliste au Collège. IREM de Rouen (1996).
[2] Batanero, C. Significado y comprensión de las medidas de posición central. UNO: Revista de didáctica de las matemáticas (2002) 25, 41-58.
[3] Coutinho, C. Q. S. Probabilidade Geométrica: um contexto para a modelização e a simulação de situações aleatórias com Cabri. En 25ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPED). Caxambu, Minas Gerais, Brasil. 2002. En http://www.anped.org.br/app/webroot/files/probabilidade.pdf
[4] Coutinho, C. Q. S. Conceitos probabilísticos: Quais contextos a história nos aponta. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática (2007) 2(3), 50-67. En https://doi.org/10.5007/%25x
[5] Estés, C. P. A terapia dos contos. São Paulo: Rocco (2005).
[6] Freire, J. B. y Scaglia, A. J. Educação como prática corporal. São Paulo: Scipione. 2003.
[7] Gal, I. Towards 'probability literacy' for all citizens. Jones. Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning. Kluwer Academic Publishers (2005), 43-71.
[8] Gancho, C. V. Como Analisar Narrativas. Ática (2006).
[9] Jervis, T. M. Clasificación de los Cuentos: Los Géneros Principales. 2017. En https://www.lifeder.com/clasificacion-cuentos/

[10] Mateus, A. N. B. et al. A importância da contação de história como prática educativa na educação infantil. Pedagogia em Ação (2013) 5(1), 54-69. En http://periodicos.pucminas.br/index.php/pedagogiacao/article/view/8477/7227
[11] Miguel, A. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. Zetetiké (1997) 5(8), 73-105. En https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646848/13749
[12] Ministério de Educación. Brasil. Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Educação é a Base. Brasília, Brasil. 2018. En http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf
[13] Oliveira Júnior, A. P.; Delalíbera, B. C. S.; Cardoso, K. M. Potencialidades pedagógicas da história da matemática para o ensino de estatística na educação básica. Revista Cocar (2017) 11(22), 13-34. En https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/1593
[14] Oliveira Júnior, A. P.; Cardoso Barão, K. M. El cuento histórico para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria en Brasil. Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (2021) 1(1), 1-35. En https://doi.org/10.54541/reviem.v1i1.3
[15] Pulos, S.; Sneider, C. Designing and evaluating effective games for teaching science and mathematics: an illustration form coordinate geometry. Focus on Learning Problems in Mathematics (1994) 16(3), 23-42. En https://eric.ed.gov/?id=EJ495462
[16] Vásquez, C.; Alsina, A. Enseñanza de la probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado. Números (2014) 85, 5-23. En http://www.sinewton.org/numeros/numeros/85/Articulos_01.pdf

Un Marco de Análisis de Procesos de Enseñanza y Aprendizaje en Correlación y Regresión Mediante Criterios e Indicadores de Idoneidad

María M. Gea[1]

Resumen

La literatura en educación estadística aporta resultados que orientan la labor docente, pero es útil sistematizar el análisis de dichos resultados y ofrecer herramientas teóricas al profesorado que faciliten el diseño de procesos de enseñanza y aprendizaje, así como su reflexión sobre la práctica. En base a las facetas que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico organiza la Teoría de Idoneidad Didáctica para contribuir en este propósito. El objetivo de esta conferencia es presentar un marco de análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en el tema de correlación y regresión en la etapa de secundaria, como guía organizada en criterios e indicadores, fundamentada en la literatura de investigación en el tema y en dicho nivel educativo según el marco teórico propuesto.

Palabras clave: Idoneidad Didáctica, Correlación y Regresión, Procesos de Enseñanza y Aprendizaje.

Abstract

The statistical education literature provides results that guide the teaching work, but it is useful to systematize the analysis of these results and offer to teachers theoretical tools for facilitating the design of the teaching and learning processes, as well as their reflection on practice. Based on the facets that intervene in the teaching and learning processes, the ontosemiotic approach provides the theory of didactic suitability to contribute to this purpose. The objective of this conference is to present a guide organized into criteria and indicators based on the research literature on the subject, according to the proposed theoretical framework for the analysis of teaching and learning processes in correlation and regression.

Keywords: didactic suitability, correlation and regression, teaching and learning processes.

Modalidad: Conferencia

[1] Universidad de Granada, España. mmgea@ugr.es

I. Introducción

La enseñanza de la estadística se inicia en la educación primaria, en la mayoría de los países, mediante la recogida, clasificación y recuento de datos. En las indicaciones curriculares sobre los métodos de enseñanza se suele sugerir que el estudiante elabore y analice diferentes representaciones para responder a las preguntas que previamente se haya formulado, en base al estudio de investigación que realiza. Pero no es habitual encontrar indicaciones, en dichos lineamientos curriculares para las primeras etapas educativas, en los que se considere el análisis de la asociación entre las variables que se recoja, como ocurre en España (MEFP, 2022a). Estas recomendaciones se establecen en documentos internacionales de referencia en educación estadística, como en Batanero y Borovcnik (2016) y el proyecto GAISE (Bargagliotti et al., 2020):

> El pensamiento multivariable debe comenzar a una edad temprana, ya que es natural que los estudiantes cuestionen y razonen con más de dos variables a la vez, especialmente explorando asociaciones entre variables. Los estudiantes en las primeras edades pueden observar múltiples evidencias en una misma unidad de observación, tales como en ellos mismos y las personas de su clase, y registrar estos datos. Hay que animar a todos los estudiantes, incluso a los más jóvenes, a establecer comparaciones entre grupos. A medida que los alumnos avanzan en su aprendizaje estadístico, desarrollarán las herramientas estadísticas para formalizar dichas comparaciones y asociaciones. (Bargagliotti et al., 2020, p. 10).

En España, el estudio de la dependencia estadística se inicia en cuarto curso de la educación secundaria (15 a 16 años), mediante la recogida y organización de datos bidimensionales en tablas y gráficos estadísticos. El estudiante hace uso de la tecnología (calculadora, hoja de cálculo o aplicaciones) para analizar e interpretar la dependencia entre dos variables estadísticas mediante gráficas y, con ello, valorar la pertinencia de ajustar un modelo lineal a los datos (MEFP, 2022b).

En primer curso de bachillerato (16 a 17 años), en cualquier modalidad en la que se enseña matemáticas (MECD, 2022c), los estudiantes profundizan en los contenidos de cuarto curso de educación secundaria mediante el estudio de la distribución conjunta de los datos bidimensionales y la determinación de las distribuciones unidimensionales asociadas a dicha distribución bidimensional (marginales y condicionadas). Se menciona, explícitamente, la necesidad de diferenciar la causalidad de la correlación, y se calculan los coeficientes de correlación lineal y de determinación, este último para cuantificar la bondad de ajuste del modelo de regresión. El modelo se utiliza para realizar predicciones, que se interpretan en base a la fiabilidad de dicho modelo de ajuste. Además, se recomienda el análisis de la regresión cuadrática mediante herramientas tecnológicas para el estudio de la relación entre dos variables y, con ello, emitir juicios adecuados en la toma de decisiones.

El objetivo de este trabajo es ofrecer una guía de análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en correlación y regresión, mediante criterios e indicadores de idoneidad que faciliten la labor docente tanto para el diseño de situaciones de aprendizaje como para servir de instrumento de reflexión guiada sobre los procesos implementados o programas curriculares. Se continúan líneas de investigación que venimos desarrollando en el grupo de investigación en Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística de la Universidad de Granda. Por una parte, en la aplicación de la Teoría de Idoneidad Didáctica en otros contenidos matemáticos como la probabilidad (Beltrán-Pellicer et al., 2018; Hernández-Solís y Batanero, en prensa), geometría (Cruz et al., 2017a; 2017b) o proporcionalidad (Aroza et al., 2016; Castillo et al., 2022a, 2022b, Esqué y Breda, 2021), entre otros. Asimismo, continuamos la línea de investigación en torno a la correlación y regresión en estudiantes (Cañadas, 2012; Estepa, 1994; Sánchez Cobo, 1999), bachillerato (Estepa, 2008) y futuros profesores de enseñanza secundaria y bachillerato (Batanero et al., 2018; Gea et al., 2019); en estos últimos, también, se ha analizado el conocimiento para la enseñanza del tema, así como los recursos educativos en torno a su enseñanza (Gea et al., 2014b; 2015a; 2015b).

II. Fundamentación teórica

El marco teórico que estructura este estudio es el Enfoque Ontosemiótico (EOS), que se viene desarrollando desde hace más de 30 años por Godino y colaboradores (Godino, 2002; 2022; Godino y Batanero, 1994; Godino et al., 2007; 2019; 2021; 2022), con objeto de articular diferentes teorías, nociones teóricas y modelos sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje y, con ello, lograr diseños instruccionales idóneos. A continuación, se describen los elementos del EOS que se emplean en este trabajo, junto al modelo de sentido de la correlación y regresión (Gea et al., 2014a) que fundamenta la aplicación de dichos elementos del EOS, así como los antecedentes más directos de este estudio, en torno a la aplicación de la Teoría de Idoneidad Didáctica.

Practica, objeto matemático y significado

En el EOS, el significado de un objeto matemático se describe en función de los sistemas de prácticas, operativas y discursivas, que se realizan al resolver una situación problema donde cobra sentido (Godino et al., 2007). El significado de un objeto matemático se interpreta según dichas prácticas se realicen en el seno de una institución (significado institucional) o por una persona (significado personal). En dichas prácticas, los objetos intervinientes y emergentes se relacionan entre sí dando lugar a configuraciones, que pueden ser epistémicas (institucionales), cognitivas (personales) o instruccionales (red de objetos que concretan la enseñanza). Estas tres configuraciones juntas conforman la configuración didáctica, que estructura el proceso estudio.

Los objetos matemáticos elementales, definidos en el EOS, son: situaciones-problemas; lenguajes; reglas: conceptos o definiciones, proposiciones y procedimientos; y argumentos. Cada uno implica procesos matemáticos específicos, y entre ellos se generan otros procesos que se contemplan desde diferentes facetas del conocimiento matemático (Godino et al., 2007; 2019). De este modo, la noción de configuración ontosemiótica (de prácticas, objetos y procesos) responde a la necesidad de identificar los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas, cuando se resuelve una situación problema. En su utilidad, permite al docente prever conflictos semióticos potenciales de aprendizaje en el estudiante, evaluar sus competencias matemáticas e identificar los objetos que deben ser recordados e institucionalizados en determinados momentos de los procesos de estudio (Godino et al., 2007; 2019).

Conocimiento profesional del profesor de matemáticas

Tomando en consideración el carácter multidimensional del conocimiento del profesor en el camino hacia su desarrollo (Brown et al., 2019), el EOS aporta un modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) del profesor de matemáticas, que se conforma en tres dimensiones: matemática (no necesariamente orientada a la enseñanza); didáctico-matemática (dirigida a la planificación e implementación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas); y meta didáctico-matemática (meta-cognitiva y reflexiva sobre la práctica docente, normas, metanormas y restricciones contextuales).

La dimensión matemática del conocimiento del profesor incluye el conocimiento matemático común, relativo al nivel educativo donde se imparte la docencia, y un conocimiento ampliado del contenido matemático, que permite articularlo con los niveles superiores y otras áreas de conocimiento (Godino, 2009; Godino et al., 2011; 2017, Pino-Fan y Godino, 2015; Scheiner et al., 2019).

La dimensión didáctico-matemático del conocimiento del profesor se interpreta desde las distintas facetas que intervienen en el proceso de instrucción (Godino, 2013): epistémica (conocimientos institucionales), ecológica (aspectos curriculares, contextuales, etc.), cognitiva (conocimientos personales, referidos al aprendizaje), afectiva (actitud, emociones, creencias y valores), mediacional (recursos, medios y distribución temporal) e interaccional (negociación de significados).

El conocimiento del profesor en la dimensión meta didáctico-matemática promueve la actividad analítico-reflexiva orientada a la valoración y detección de mejoras sobre la práctica. En esta dimensión se amplía el conocimiento puesto en juego en las distintas facetas del proceso de instrucción; en particular, en la faceta interaccional, pues se atiende a las normas que regulan dicho proceso y los criterios de idoneidad didáctica, como parte de su evaluación (Pino-Fan y Godino, 2015).

Finalmente, el modelo CDM se completa al considerar la competencia del profesor en el análisis e intervención didáctica (Godino et al., 2017), dando lugar al modelo de Competencias y Conocimiento Didáctico Matemático del profesor de matemáticas (CCDM), que se relaciona con la competencia docente de observar con sentido situaciones de enseñanza (Fernández et al., 2013; Fortuny y Rodríguez, 2012; Groenwald y Llinares, 2019). Como se muestra en la Figura 1, se organiza en torno a cinco subcompetencias que se describen a continuación (Godino et al., 2017):

- Competencia de análisis de significados globales: se reconocen los diversos significados del contenido y su interconexión.

- Competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas: se identifican los objetos y procesos implicados en la práctica matemática (configuración didáctica) para los diversos significados en el tema (configuración ontosemiótica).
- Competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas: en el transcurso del proceso de instrucción se pone en juego un sistema articulado de roles docentes y discentes, a propósito de la configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación problema. Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas consideran las distintas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático (epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica) y determinan el conocimiento didáctico-matemático del profesor.
- Competencia de análisis normativo: conocer, comprender y valorar las condiciones y normas que regulan el proceso de estudio para usarlas de manera competente es parte de la reflexión del profesor para detectar mejoras en el proceso de estudio.
- Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica: el análisis de los factores que condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje se basa en la noción de idoneidad didáctica, con utilidad tanto en la valoración de propuestas didácticas como documentos curriculares y libros de texto.

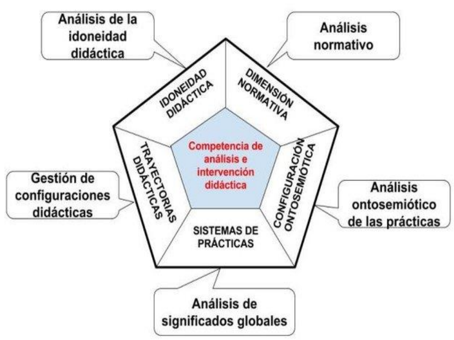


Figura 1. Componentes de la competencia del profesor (Godino et al., 2017, p. 103)

Teoría de Idoneidad Didáctica

Este trabajo se centra en la noción de idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje que establece el EOS (Godino, 2009; 2013; 2021; Godino et al., 2006; Godino et al., 2012). Esta teoría organiza criterios e indicadores para optimizar el aprendizaje de un contenido (en nuestro estudio, de la correlación y regresión) a modo de guía para orientar la función docente (Wilhelmi et al., 2005; Godino, et al., 2006):

> Se trata de una guía de orientación para la mejora de los procesos de instrucción […]. Los criterios de idoneidad son reglas de corrección útiles en dos momentos de los procesos de estudio matemáticos. A priori, los criterios de idoneidad son principios que orientan «cómo se deben hacer las cosas». A posteriori, los criterios sirven para valorar el proceso de estudio efectivamente implementado (Godino, et al., 2009, p. 61).

De este modo, supone una herramienta que resulta útil al docente para identificar el grado en que un proceso de enseñanza y aprendizaje (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permitan calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno) (Beltrán-Pellicer et al., 2018; Godino, 2013; Godino et al., 2012).

En la Figura 2 se muestran las seis facetas en que se articula la idoneidad didáctica, que se explican a continuación:

- Idoneidad epistémica. Representatividad de los significados institucionales del contenido, en relación a su significado de referencia. Supone acomodar dichos significados, según la transposición didáctica (Chevallard, 1991) elaborada para su enseñanza.
- Idoneidad cognitiva. Proximidad entre el significado personal del estudiante, previo a la instrucción, y el significado implementado (institucional). Es decir, corresponde al ajuste entre dichos significados, teniendo en cuenta las restricciones cognitivas.
- Idoneidad emocional. Predisposición e implicación del estudiante ante la actividad matemática. Una ayuda para potenciar la percepción de la utilidad de la matemática es enfatizar las conexiones de las matemáticas con la realidad, y presentar los conocimientos dentro de contextos donde cobren sentido.
- Idoneidad mediacional. Disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales en el proceso de instrucción. A modo de ejemplo, las situaciones de juego o de aprendizaje por proyectos, a veces, no se realizan por falta de tiempo.
- Idoneidad interaccional. Referida a la interacción del estudiante tanto consigo mismo, a favor de su autonomía en el aprendizaje, como con el docente y resto de alumnado, ya que debe permitir identificar y resolver los conflictos semióticos potenciales (Godino et al., 2009).
- Idoneidad ecológica. Adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo de centro, directrices curriculares, las condiciones del entorno social y cultural, etc.

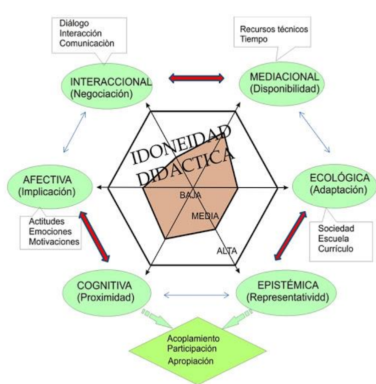


Figura 2. Facetas de la Idoneidad Didáctica

Todas estas facetas, de modo integrado, explican la complejidad de factores que intervienen en el diseño, desarrollo y evaluación de cualquier proceso de estudio matemático (Godino et al., 2007). El objetivo de este trabajo es analizar dichas facetas en torno a la correlación y regresión, en base a sus componentes y descriptores, según el sentido del tema en la etapa de educación secundaria, como se describe a continuación.

Sentido de la correlación y regresión

En Gea et al. (2014a) se adapta la idea de sentido estadístico, definida por Batanero et al. (2013), para aportar un modelo de sentido de la correlación y regresión útil para promover el desempeño y comprensión del tema. Los conceptos fundamentales son:

- Datos y distribución. Los datos bivariados proceden de una misma unidad muestral, según dos variables estadísticas unidimensionales, por lo que su estudio aborda no sólo la distribución conjunta, sino otros tipos de distribuciones como las marginales o condicionadas.
- Representación tabular y gráfica. Las tablas y gráficos estadísticos son esenciales para la visualización de la información (Pallauta, 2022). La representación de datos más utilizada en correlación y regresión es el diagrama de dispersión o nube de puntos, pero también es necesario comprender otros tipos de representación, para contribuir al desarrollo de la transnumeración (Wild y Pfankuch, 1999), muchos de ellos disponible en applets, como los diagramas de burbujas para representar hasta cuatro variables a la vez.
- Variabilidad. La dispersión de los datos se observa, fácilmente, en representaciones como en la nube de puntos, donde se visualizan conceptos como la covarianza y su relación con el modelo de ajuste lineal de los datos. También, el cuadrado del coeficiente de correlación lineal informa de la variabilidad explicada por el modelo de regresión lineal y, utilizando herramientas tecnológicas, podemos obtener el coeficiente de determinación de otros modelos.
- Dependencia (funcional, aleatoria e independencia). La dependencia perfecta entre dos variables se denomina funcional, y difiere de la aleatoria, donde a cada valor de la variable independiente corresponde una distribución de valores de la variable dependiente. Conviene diferenciar los tipos de dependencia de los casos donde exista independencia, pues se suele confundir con correlación lineal nula.
- Covarianza y correlación. Estos conceptos permiten medir la intensidad y dirección de la dependencia entre dos variables. El coeficiente de correlación lineal, a diferencia de la covarianza, está acotado en el intervalo [-1,1].
- Regresión. El concepto de regresión es mucho más amplio que el de regresión lineal. Cuando la dependencia entre dos variables es intensa, conviene modelizar los datos, según diferentes modelos, y escoger el que asegure buenas predicciones de una variable en función de la otra.
- Modelos de regresión y parámetros. Es importante el dominio de conceptos como variable dependiente e independiente en la determinación del modelo de ajuste, así como valorar la influencia de datos atípicos en dicho ajuste.

- Estimación y bondad de ajuste. La posibilidad de aplicar el modelo de ajuste para predecir valores de la variable dependiente requiere del dominio de conceptos como fiabilidad (del modelo) y centro de gravedad de la distribución de datos.

En cuanto al razonamiento con datos bivariados, es necesario interpretar conjuntamente el signo y la intensidad del coeficiente de correlación lineal; integrar la información que aportan diferentes representaciones (gráfica, tabular, textual o numérica); disponer una actitud crítica ante los datos y su contexto, siendo consecuentes con que nuestras teorías y concepciones pueden no concordar con los datos del estudio (sobrevalorando o infravalorando la dependencia, según Chapman, 1967); reconocer la utilidad de manejar buenos datos para no limitar la toma de decisiones a un subconjunto de los mismos (o parte de la información); ser conscientes de la posibilidad de encontrar otras situaciones de dependencia entre las variables, diferentes a la causalidad; determinar el mejor modelo de ajuste a los datos, considerando criterios de simplicidad del modelo; e interpretar los parámetros que conforman el modelo de ajuste a los datos.

Por último, es necesario disponer una posición crítica ante la información que se analiza (Gal, 2002), tanto para evitar utilizar teorías personales o creencias equivocadas (Chapman, 1967) como para valorar la posible existencia de otras variables que afecten a la dependencia de las variables de estudio, por ejemplo, al presentarse la paradoja de Simpson (Engel y Sedlmeier, 2011; Saari, 2001).

Antecedentes

La agenda de investigación en educación matemática está sujeta a tendencias, aunque las problemáticas se pueden reducir a dos cuestiones generales en torno a qué matemáticas enseñar y cómo enseñarlas (Godino et al., 2021). Godino et al. (2021) presentan un esquema operativo con el que definir los problemas de investigación en educación matemática, teniendo en cuenta herramientas del EOS, y plantean cuestiones para abordar dichas problemáticas. En su trabajo, la Teoría de Idoneidad Didáctica se interpreta como el nexo de unión entre la investigación teórica y práctica, en este campo de investigación.

Godino (2021) compara el EOS con las tres teorías más ampliamente utilizadas en la investigación en educación matemática, como son la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986; 1997), Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992; 1999), y la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1973; 1983; Van Den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014) y sugiere que la Teoría de Idoneidad Didáctica, dentro de las teorías de diseño o ingeniería didáctica en educación matemática, ofrece al docente la mejor herramienta para establecer un puente entre las cuestiones de diseño y la investigación-acción (Godino, 2021).

Diferentes investigaciones muestran la potencialidad de la Teoría de Idoneidad Didáctica en el desarrollo de la competencia y conocimiento didáctico matemático de profesores y futuros profesores mediante cursos formativos (Arteaga, 2011; Breda et al., 2017; Gea y Begué, 2021, entre otros):

> Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias, y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. (Breda et al., 2017, p. 1897)

En otras investigaciones encontramos resultados de la aplicación de la Teoría de Idoneidad Didáctica mediante la elaboración de criterios e indicadores específicos en forma de Guía de Valoración de procesos de estudio, en diferentes contenidos matemáticos (Alsina y Domingo, 2010; Arguedas et al., 2017; Aroza et al., 2016; Beltran et al., 2018 Castillo et al., 2022a, 2022b; Cruz et al., 2017a; 2017b; Parra y Ávila, 2015).

Una guía de análisis de procesos de estudio en correlación y regresión

En esta sección, se presenta una guía de análisis de procesos de estudio en torno a la correlación y regresión, según los fundamentos teóricos descritos en la sección previa, que parten de la revisión de trabajos de síntesis de investigación en correlación y regresión (Estepa, 2004; Engel y Sedlemeir, 2011; Gea et al., 2016), así como de investigaciones presentadas en congresos destacados en el área (International Conference on Teaching Statistics) y principales revistas.

Idoneidad epistémica

Los elementos que caracterizan la representatividad del significado de referencia en correlación y regresión, a nivel de secundaria y bachillerato, se presentan en la Tabla 1. Estos elementos determinan los sistemas de prácticas operativas y discursivas que el estudiante requiere desarrollar durante el estudio del tema.

Tabla 1. Criterios e indicadores para la idoneidad epistémica en correlación y regresión.

Criterio	Indicadores
Significado	Situaciones-problema
	- Recoger, organizar y representar datos bidimensionales en contextos diversos que refieran a problemáticas reales y globalizadas, desde los propios intereses del estudiante. - Analizar la dependencia entre variables: Interpretar las distribuciones unidimensionales que conforman la distribución bidimensional (datos, según escala y unidad de medida); Interpretar la distribución bidimensional; Determinar el tipo de dependencia que presentan las variables; Cuantificar la intensidad de la relación entre las variables; Determinar el sentido (dirección) de la relación entre las variables. - Analizar la regresión y predecir con el modelo: Interpretar diferentes modelos de ajuste a los datos bidimensionales (variable dependiente e independiente); Escoger el mejor modelo de ajuste en base a criterios de optimización.
	Procedimientos
	- Identificar situaciones de asociación entre variables, con la consecuente recogida y organización de datos para validar conjeturas sobre su dependencia. - Representación tabular de datos bidimensionales mediante listado y tabla de doble entrada; Representación gráfica de datos bidimensionales mediante

	diagrama de barras, histograma, líneas, puntos o dispersión y burbuja; Representación de distribuciones unidimensionales (marginales y condicionadas) asociadas a la distribución bidimensional mediante tablas y gráficas; Leer e interpretar de manera relacionada dichas representaciones. - Determinar la intensidad y sentido (dirección) de la correlación lineal de manera verbal, tabular, gráfica y simbólica, mediante una interpretación relacionada. Por ejemplo, haciendo uso de cambios de escala. Argumentar la presencia o ausencia de situaciones causales en el análisis de la dependencia. - Modelizar la función de ajuste a los datos de modo gráfico y algebraico, según diferentes modelos, haciendo uso de herramientas tecnológicas. Interpretar los parámetros del modelo (por ejemplo, la pendiente en la recta de regresión informa de la variación de la variable dependiente cuando la variable independiente varía una unidad) y valorar la bondad del ajuste del modelo a los datos. - Calcular predicciones con el modelo de ajuste, diferenciando las variables dependiente e independiente en dicho modelo, y asociando a dichas predicciones su fiabilidad.
	Lenguaje
	Verbal, simbólico (notacional y numérico), tabular y gráfico. Interpretación conjunta de diferentes registros de representación.
	Conceptos
	Variable (unidimensional y bidimensional); Distribución (frecuencia marginal, condicionada y conjunta; tabla y gráfica estadística; medidas estadísticas); Dependencia (funcional, estadística o aleatoria e independencia; covarianza y coeficiente de correlación lineal); Regresión (variable dependiente e independiente; modelo de regresión y parámetros en el modelo; bondad de ajuste y coeficiente de determinación).
	Propiedades
	- Todas las frecuencias relativas suman 1 y todas las absolutas coinciden con el total de datos que conforman la distribución de la variable. - La media es el centro de gravedad de la distribución de una variable. - La intensidad y sentido de la correlación lineal se mide con el coeficiente de correlación de Pearson, que es adimensional y está acotado entre -1 y 1. - Las variables dependiente e independiente en el modelo de ajuste de regresión no se deben intercambiar (interpretar como inversas). - La recta de regresión lineal de mínimos cuadrados minimiza la distancia de los datos bidimensionales a su valor medio, al considerar las distribuciones condicionadas en la variable independiente. - El coeficiente de determinación mide la varianza explicada por el modelo de ajuste y determina su fiabilidad para realizar predicciones. - Ambas rectas de regresión son perpendiculares cuando el coeficiente de correlación es nulo. - Cualquier predicción con el modelo de regresión debe acompañarse de su fiabilidad o bondad de ajuste del modelo de regresión empleado.
	Argumentos
	Uso de gráficos auxiliares para mostrar tendencias y relaciones de cambio en el análisis de la dependencia y regresión; Uso de ejemplos y contraejemplos para

	validar razonamientos de dependencia y regresión en el análisis de datos bidimensionales; Razonamiento verbal deductivo en el análisis de la dependencia entre variables y determinación del mejor modelo de ajuste a los datos bidimensionales; Razonamiento deductivo y expresión algebraica en el análisis de la dependencia y determinación del modelo de ajuste de regresión; Razonamiento por reducción al absurdo.
Relaciones (conexiones)	- Interpretación conjunta de diferentes distribuciones (unidimensionales y bidimensionales) según tablas y gráficas estadísticas, y las relaciones que se establecen entre sus diferentes representaciones. - El signo de la covarianza informa del sentido (dirección) de la correlación lineal. La pendiente en la recta de regresión informa del sentido (dirección) de la dependencia entre las variables. - Las rectas de regresión se cruzan en el centro de gravedad de la distribución. - Las predicciones con el modelo de regresión serán más fiables cuanto más cercanas se encuentren al centro de gravedad de la distribución bidimensional. - El tamaño de la muestra o conjunto de datos empleado en el ajuste del modelo de regresión influencia la bondad del ajuste de dicho modelo. - El producto de los coeficientes de la recta de regresión mínimo-cuadrática coincide con el cuadrado del coeficiente de correlación lineal de Pearson. - El coeficiente de correlación lineal de Pearson al cuadrado informa de la bondad del ajuste de la recta de regresión mínimo-cuadrática.
Procesos	Problematización: La recogida de datos bidimensionales responde a la problemática de analizar la dependencia entre dos variables. Su organización y representación en tablas y gráficas estadísticas es esencial en el análisis exploratorio de datos, en el que se suceden diferentes cuestionamientos para los que se toman decisiones en base al proceso de transnumeración realizado. Con el cálculo de la correlación, también se resuelven cuestiones sobre si modelizar dicha dependencia para hacer predicciones mediante una función de regresión, por lo que se tomarán decisiones en torno a la intensidad de la correlación y sobre el mejor modelo de ajuste. Algoritmización: En el estudio de la correlación y regresión se responde a interrogantes que conllevan diferentes tipos de procedimientos, unos más algorítmicos que otros; por ejemplo, las distintas representaciones de las distribuciones de frecuencias, el manejo de fórmulas, así como el de expresiones algebraicas en el análisis funcional, entre otros. Estos procedimientos han de interiorizarse para responder de manera significativa a las situaciones-problema que se resuelven. Definición y enunciación: Los procesos de definición y enunciación organizan el conocimiento y ponen en marcha la competencia de resolución de la situación-problema. Los objetos matemáticos en el tema se manejan de manera ostensiva, fundamentalmente, mediante diferentes representaciones (textuales, tabulares, gráficas y simbólico-algebraicas) que se estructuran en una red conceptual, con reglas funcionales específicas (escala, unidad de medida, etc.). Por otra parte, también destaca la idealización de dichos objetos, sobre todo cuando se ajusta la función de regresión, pues en el proceso de transnumeración se regulan nuestras decisiones; por ejemplo, en torno al coeficiente de determinación y su relación con el conjunto de familias de funciones que se ajusten a los datos de la

	situación-problema. Comunicación y argumentación: Identificar la asociación entre variables conlleva dominar el lenguaje de sus diferentes representaciones. También, requiere emitir juicios sobre su dependencia, lo que conlleva estructurar con claridad y coherencia argumentaciones que serán más formales en la medida que se disponga de conocimiento más profundo del tema. Estas argumentaciones evidencian la comprensión de los diferentes objetos matemáticos implicados, cuya significación debe estar en consonancia con su expresión y uso. Particularización y Generalización: Determinar el modelo de regresión y realizar predicciones con el mismo corresponde a la última fase del estudio de correlación y regresión, en la que se manejan contenidos con distinto grado de generalidad. Por ejemplo, el cálculo de los coeficientes de regresión de la recta de ajuste mínimo-cuadrática conlleva manejar distintos grados de generalidad en su interpretación y su relación con otros objetos matemáticos implicados en el tema. En este sentido, se transita entre procesos de abstracción progresiva en la teoría de correlación y regresión, y se manejan objetos extensivos e intensivos en diferentes momentos. Materialización e Idealización: La modelización se realiza, fundamentalmente, con el uso de herramientas tecnológicas que facilitan la visualización y cálculo de la función de ajuste y su fiabilidad en la predicción. Al mismo tiempo, se requiere interpretar y relacionar los objetos matemáticos que intervienen en dicho proceso de modelización, pues regulan nuestras decisiones en el proceso de transnumeración. Significación y Representación: El razonamiento covariacional conlleva manejar e interpretar diferentes representaciones, lo que permite responder a interrogantes y resolver situaciones-problema. Este tipo de razonamiento se fundamenta en la proporcionalidad, al establecer relaciones multiplicativas en comparaciones múltiples en términos relativos, para lo que se requiere una adecuada significación de los objetos matemáticos implicados en dicho razonamiento, puesto que la incertidumbre se encuentra latente en dichas interpretaciones. Finalmente, los procesos de personalización e institucionalización, así como los de reificación y descomposición se realizan de manera continua en el desarrollo del tema, a medida que se profundiza en sus contenidos y se extienden a otras aproximaciones de la estadística como el cálculo de probabilidades y el análisis multidimensional (Gea, 2014).

Idoneidad cognitiva

Los criterios e indicadores específicos para reconocer el grado en que se adaptan los significados institucionales y personales en el desarrollo de un proceso de estudio en correlación y regresión se presentan en la siguiente Tabla 2.

Tabla 2. Criterios e indicadores para la idoneidad cognitiva en correlación y regresión.

Criterio	Indicadores
Conocimientos previos	- Se tienen en cuenta los conocimientos de estadística unidimensional: población, muestra y unidad muestral; variable estadística (tipos, valor o modalidad de la variable y tipos de frecuencia); tipos de distribuciones y distribuciones de datos agrupados en intervalos (extremos, marca de clase); representaciones estadísticas tabulares y gráficas (listados y tablas de frecuencia, diagrama de sectores, de barras, de líneas, histograma, de caja y bigote); medidas de centralización (media, mediana, moda), posición (percentiles) y medidas de dispersión (desviación típica y varianza). Se considera la interpretación relacionada de medidas estadísticas en el contexto de los datos y la transnumeración. - Coordenadas cartesianas en la representación gráfica; análisis funcional (crecimiento/decrecimiento y tendencia; interpolación y extrapolación; variable dependiente/independiente en una función; rango y dominio de la función; imagen de un valor y ordenada en el origen; pendiente de una función lineal) y representación de funciones sencillas (polinómica, exponencial, logarítmica); distancia y proyección de un punto a una recta. - Manejo de hojas de cálculo, como por ejemplo la hoja Excel, o software específico en el análisis de datos estadísticos, para el cálculo de funciones sencillas y la producción de gráficos.
Diferencias individuales	Las situaciones problema han de permitir establecer conexiones y graduar la abstracción o reflexión del estudiante sobre el contenido. De este modo, es necesario que el estudiante comprenda los contenidos en el tema relacionando e integrando lo que se conoce. Se omiten indicaciones explícitas de adaptaciones curriculares y el aspecto evaluativo asociado a las mismas, según diferencias individuales, pues refieren a casuísticas particulares del alumnado. En cualquier caso, se deben considerar situaciones de ampliación y refuerzo para asegurar el aprendizaje del estudiante en los saberes fundamentales del tema. Asimismo, se deberá adaptar la dificultad de cualquier tarea a las necesidades del estudiante o plantear variantes a las tareas para atender a la diversidad del alumnado.
Significado personal y aprendizaje	Las situaciones problema han de permitir que el estudiante adquiera comprensión de los distintos objetos y competencia en su manejo, así como de los procesos matemáticos implicados en el aprendizaje del tema, tanto para ser valorados por el docente como para ser reflexionados por el propio estudiante en un proceso metacognitivo de aprendizaje. Por tanto, se han de contemplar variedad de situaciones para valorar su desempeño en torno a los contenidos y también al logro de las capacidades y disposiciones asociadas a la correlación y regresión. Ejemplos de objetos y procesos (modelización, algoritmización, etc.) se detallan en la concreción de criterios e indicadores de la idoneidad epistémica.

Idoneidad emocional

Los aspectos afectivos en el estudio de la correlación y regresión se presentan en la Tabla 3, según los criterios e indicadores que atienden a su valoración en el proceso de enseñanza y aprendizaje del tema.

Tabla 3. Criterios e indicadores para la idoneidad emocional en correlación y regresión.

Criterio	Indicadores
Interés, motivación y valor	Las situaciones problema han de estar contextualizadas en datos reales, que respondan a las necesidades de los estudiantes, para convertirse en verdaderos retos que tengan interés por resolver haciendo uso de la correlación y regresión. De este modo, la situación problema ofrecerá datos en diferentes variables para que el estudiante problematice el análisis de la dependencia, en variables de su interés, para su posterior ajuste, en caso de mostrarse una correlación intensa. También es importante que los datos estén contextualizados en problemáticas reales, para que las soluciones obtenidas permitan valorar la utilidad de las matemáticas en nuestra vida, en particular, de la correlación y regresión. Las situaciones deben basarse en la indagación, donde se evidencie el sentido, valor y utilidad de los objetos y procesos matemáticos asociados al tema; en particular, merece atención las representaciones tabulares y gráficas, porque se pierde totalmente el enfoque del análisis de la correlación y regresión si solo se realiza un proceso algorítmico de cálculo, sin desempeñar la transnumeración.
Actitud	En todo momento se requiere el compromiso, iniciativa y responsabilidad del estudiante. Por un lado, su implicación es decisiva para tomar decisiones en torno a la problemática que se resuelve. Por otro lado, forma parte del trabajo colaborativo del grupo que resuelve la situación problema, en la que se contemplan momentos de trabajo grupal y autónomo. De este modo, es necesario comenzar por interpretar los datos y la fuente de donde se obtienen, las variables y cómo se miden, para que al organizar y representar la información se tome conciencia del alcance de las inferencias y conclusiones que se obtengan. Además, cabe destacar la necesidad de disponer de posicionamiento crítico en el análisis de la dependencia de las variables, por ejemplo, ante la posible presencia de variables latentes o situaciones de dependencia diferentes a la causalidad (Barbancho, 1992).
Emociones	En todo el proceso se espera que el estudiante desarrolle su perseverancia, una buena disposición a validar enunciados, gusto por el trabajo limpio y bien acabado y ponga en marcha su creatividad. De ahí que el empleo de la tecnología sea entendido como herramienta útil, más que un esfuerzo añadido al estudio del tema, tanto en el uso de hojas de cálculo como en el empleo de applets. Se espera, además, que se sienta curiosidad e inquietud por aprender matemáticas, generando un autoconcepto positivo del aprendizaje donde el error no se convierta en miedo sino en posibilidad de progreso hacia el conocimiento.

Idoneidad interaccional

En la siguiente Tabla 4 se resumen los criterios e indicadores específicos en la gestión de las interacciones que sucedan en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el tema.

Tabla 4. Criterios e indicadores para la idoneidad interaccional en correlación y regresión.

Criterio	Indicadores
Interacción docente-discente	Las interacciones entre el docente y discente alcanzan su pleno valor cuando se han considerado los criterios e indicadores de la Tabla 1, para diseñar el proceso de enseñanza y aprendizaje, y se gestionan según los criterios e indicadores de la idoneidad cognitiva (Tabla 2) para lograr la adaptación de los significados personales e institucionales. El propósito con este tipo de interacciones es identificar los conflictos cognitivos de los estudiantes y ponerles remedio. Las situaciones de discusión y debate en esta gestión son fundamentales, donde merece especial atención el discurso del profesor, porque debe ser dinámico y cercano al estudiante, pues este debe sentirse cómodo y confiado para expresar sus ideas y no sentir rechazo. El profesor estará atento a las producciones de los estudiantes durante el desarrollo del tema. En algunos casos se podrá evaluar su progreso haciendo uso de la discusión en gran grupo (visualizando con el proyector respuestas correctas haciendo uso de la tecnología como, por ejemplo, corrigiendo procedimientos con la hoja de cálculo Excel o mostrando la utilidad de applets, así como haciendo uso de la pizarra), pero en muchos otros casos se tendrá que acudir a la mesa del estudiante para observar sus producciones particulares y atender a sus conflictos.
Interacción entre estudiantes	El aprendizaje constructivista es uno de los principios que fundamenta el marco teórico EOS, así como el componente social del mismo. La interacción se favorece con el trabajo en grupo, donde se espera que los estudiantes discutan sobre diferentes conflictos que puedan emerger, identificados en la literatura como persistentes en cuanto a la comprensión de la correlación y regresión; por ejemplo, en torno a las concepciones o diferentes interpretaciones de la dependencia (Gea et al., 2016). Las interacciones se espera que sucedan tanto en pequeño grupo de trabajo como durante los momentos de discusión en gran grupo.
Autonomía	Los estudiantes son responsables de la toma de decisiones sobre las problemáticas que abordan, donde se contemplan momentos de trabajo individual que, también, repercuten en las decisiones grupales que se tomen sobre dichas situaciones. Por ejemplo, al realizar la transnumeración, o al considerar el efecto de otras variables en el análisis de la dependencia. También, al elegir el modelo de ajuste según un uso crítico de optimización del mismo, por ejemplo, valorando su simplicidad en un margen de calidad aceptable.
Evaluación formativa	Es necesario implicar al estudiante en momentos de discusión y debate para que emerjan sus concepciones y teorías. De este modo, el docente puede acompañarle en el desarrollo de su aprendizaje y ayudarle a superar los conflictos en un proceso continuo. Por tanto, es esencial que las cuestiones que plantee el profesor se centren en los conflictos cognitivos identificados por la literatura, como la causalidad, el determinismo o la concepción local, entre otras (Gea et al., 2016).

Idoneidad mediacional

Los medios empleados en la enseñanza de la correlación y regresión adquieren relevancia en la medida que favorecen el aprendizaje del estudiante. En el análisis sobre recursos en Internet para la enseñanza y aprendizaje del tema, Rodríguez (2019) encuentran diferentes tipologías de recursos, según se enfoquen al desarrollo de unos u otros objetos y procesos matemáticos, por lo que resulta útil disponer de criterios e indicadores para su enseñanza y aprendizaje, como se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5. Criterios e indicadores para la idoneidad mediacional en correlación y regresión.

<table>
<tr><th>Criterio</th><th>Indicadores</th></tr>
<tr><td>Recursos materiales</td><td>- Acceso a recursos de visualización (por ejemplo, los accesibles desde la web de Gapminder: https://www.gapminder.org/) donde se represente información multivariante con gráficos interactivos y dinámicos.
- Acceso a recursos manipulativos que visualicen objetos y procesos matemáticos cuya exploración interactiva favorezca el aprendizaje del tema y potencie la capacidad de argumentación de enunciados (por ejemplo, la propuesta en Holmes, 2001).
- Acceso a bases de datos (en contextos reales), con descarga en hoja de cálculo o software específico, para promover diferentes investigaciones.
- Uso de hoja de cálculo (por ejemplo, Excel) o software específico para el análisis (por ejemplo, CODAP: https://codap.concord.org/) en donde se representen diferentes funciones junto a su coeficiente de determinación de ajuste a los datos.</td></tr>
<tr><td>Condiciones del aula</td><td rowspan="3">Los indicadores a estos criterios dependen, en gran medida, de las posibilidades del centro educativo y su gestión organizativa. En cualquier caso, se destaca:
- Disponer de recursos tecnológicos con acceso a Internet (para empleo de applets, acceso a bases de datos, uso de hojas de cálculo, etc.) en el aula.
- Planificar tareas mediante trabajo colaborativo y cooperativo en pequeño grupo.
- Considerar momentos de discusión en gran grupo en el aula, donde la comunicación y argumentación, en base a la definición y enunciación, promuevan el aprendizaje del tema. Es fundamental dar tiempo suficiente a la discusión.</td></tr>
<tr><td>Número de estudiantes</td></tr>
<tr><td>Tiempo</td></tr>
</table>

Idoneidad ecológica

El proceso de enseñanza y aprendizaje se debe ajustar al proyecto educativo del centro y su contexto socio cultural, que son el entorno inmediato del estudiante. En este sentido, la diversidad del alumnado y la apertura a la innovación educativa en el diseño de dicho proceso de estudio merecen especial atención, que son valores que impregnan las directrices curriculares de la mayoría de los países. En la Tabla 6 se concretan los criterios e indicadores para la idoneidad ecológica del proceso de estudio del tema.

Tabla 6. Criterios e indicadores para la idoneidad ecológica en correlación y regresión.

Criterio	Indicadores
Adaptación curricular	El estudiante asimilará los contenidos en el tema relacionando e integrando lo que se conoce, mediante un enfoque constructivista. Por tanto, es necesario considerar todas las adaptaciones curriculares que sean precisas para garantizar su aprendizaje. En el sistema educativo español, el tema se introduce en cuarto curso de secundaria (15 a 16 años) haciendo uso de la tecnología para interpretar la correlación y el mejor modelo de ajuste. Se profundiza en el cálculo de coeficientes y del modelo de ajuste en bachillerato (16 a 17 años), en las tres modalidades donde se imparte matemáticas (MEFP, 2022c).
Apertura a la innovación	La innovación se caracteriza por aportar novedad y mejora en el método de enseñanza, por lo que la enseñanza por proyectos responde a estas dos características fundamentales (Batanero y Díaz, 2011). Por una parte, considerando los criterios e indicadores de idoneidad epistémica para el diseño del proceso de enseñanza y aprendizaje, se destaca prestar atención al contexto de los datos y que se ofrezca la posibilidad de escoger diferentes variables para realizar el análisis de la dependencia y regresión. También destaca la importancia de utilizar la tecnología como recurso en la enseñanza, como se indicó en los criterios e indicador en la idoneidad mediacional; por ejemplo, las experiencias implementadas en Gea (2014). Por otra parte, en la idoneidad emocional se destaca la implicación del estudiante en el desempeño de su imaginación y creatividad, cuando razona en la transnumeración o escoge el mejor modelo de ajuste, entre otros procesos a desarrollar.
Adaptación socio-profesional	Es necesario proyectar la formación del estudiante hacia el día a día y sobre su futuro profesional, donde muchas profesiones hacen uso de la estadística. De ahí que la interdisciplinariedad del contenido cobre sentido en este indicador, al indagar en los fenómenos que representan el contexto de los datos que se analizan. Se remarca la necesidad de trabajar con fuentes de información que ofrezcan bases de datos reales en problemáticas actuales (salud, política, economía, etc.).
Conexiones inter e intra disciplinares	- El proceso de enseñanza debe contribuir a mostrar la utilidad del tema, como herramienta para otras disciplinas, para analizar la variabilidad y determinar relaciones entre variables, diseñar estudios y experimentos, y tomar decisiones fundamentadas en el contexto de los datos. - Su estudio se fundamenta, en particular, en el análisis de la proporcionalidad, del álgebra y análisis funcional. Pero, dentro de la propia estadística, se necesita relacionar con el análisis de la dependencia en tablas de contingencia (variables cualitativas) y el análisis de comparación de muestras (variable cuantitativa y cualitativa). También, con la probabilidad condicionada, puesto que dos variables son independientes si la distribución de una de ellas no cambia cuando la condicionamos por valores de la otra variable.

Consideraciones finales

En este trabajo se presenta un marco de análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en correlación y regresión, dirigido a educación secundaria y bachillerato, haciendo uso de la

Teoría de Idoneidad Didáctica que establece el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico. Como resultado, se aporta una herramienta teórico-metodológica que sintetiza los aportes de la literatura en educación estadística en torno al estudio del tema, organizados según criterios e indicadores que estructuran las distintas facetas que intervienen en dichos procesos de enseñanza y aprendizaje.

Esta herramienta se muestra útil en la investigación sobre diseño en educación matemática y en torno a la reflexión del profesor en procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino et al., 2021), como se pone de manifiesto en diversas investigaciones en relación a otros contenidos matemáticos (Alsina y Domingo, 2010; Arguedas et al., 2017; Aroza et al., 2016; Beltran et al., 2018 Castillo et al., 2022a, 2022b; Cruz et al., 2017a; 2017b; Hernández-Solís y Batanero, en prensa; Parra y Ávila, 2015). Asimismo, continuamos la línea de investigación en torno a la enseñanza y aprendizaje en correlación y regresión (Batanero et al., 2018; Estepa, 2008; Gea et al., 2014b; 2015a; 2015b; 2019) desarrollada en el grupo de investigación en Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística de la Universidad de Granda.

La reflexión sobre la propia experiencia matemática y sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje experimentados es necesaria para la apropiación y adaptación de los conocimientos didácticos por parte del profesor (Arteaga, 2011; Breda et al., 2017; Gea y Begué, 2021, entre otros), por lo que este trabajo será de interés tanto a profesores como formadores de profesores en torno a la enseñanza y aprendizaje de la correlación y regresión.

Agradecimientos

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 y Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía).

Bibliografía

[1] Alsina, Á.; Domingo, M. “Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2010) 13(1), 7-32.
[2] Arguedas, C.; Concari, S.; Giacomone, B. “La idoneidad didáctica de los laboratorios remotos como recursos para la enseñanza y aprendizaje de la física”. Revista de Enseñanza de la Física, Córdoba, Argentina (2017) 29(extra), 511-517.
[3] Aroza, C. J.; Godino, J. D.; Beltrán-Pellicer, P. “Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad”. AIRES (2016) 6(6), 1-29.
[4] Arteaga, P. Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. 2011.
[5] Barbancho, A. G. Estadística elemental moderna. Barcelona: Ariel. 1992

[6] Bargagliotti, A.; Franklin, C.; Arnold, P.; Gould, R.; Johnson, S.; Perez, L.; Spangler, D. A. Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II). American Statistical Association. 2020.
[7] Batanero, C.; Borovcnick, M. Statistics and probability in high school. Sense Publishers. 2016.
[8] Batanero, C.; Díaz, C. Estadística con proyectos. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. 2011.
[9] Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. "El sentido estadístico y su desarrollo". Números (2013) 83, 7-18.
[10] Batanero, C., Gea, M. M., Arteaga, P. Contreras J. M. y Díaz, C. "Conocimiento del contenido de correlación y regresión en futuros profesores". Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Relime (2018) 21(3), 325-348. ISBN: 978-607-95306-6-2. DOI: 10.12802/relime.18.2134.
[11] Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D. y Giacomone, B. (2018). "Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente". Bolema (2018) 32(61),526-548
[12] Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. "Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice". EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education (2017) 13(6), 1893-1918. DOI 10.12973/eurasia.2017.01207a.
[13] Brousseau, G. "Fondements et methods de la didactique des mathématiques". Recherches en Didactique des Mathématiques (1986) 7(2), 33-115.
[14] Brousseau, G. Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990. London: Kluwer. 1997.
[15] Brown, L., Fernández, C., Helliwell, T. y Llinares, S. Prospective mathematics teachers as learners in university and school contexts: From university-based activities to classroom practice. En G. Lloyd y O. Chapman (Eds.) 2019. International handbook of mathematics teacher education: Volume 3 (pp. 343–366). Brill Sense.
[16] Cañadas, G. Comprensión intuitiva y aprendizaje formal de las tablas de contingencia en alumnos de psicología. Tesis doctoral. Universidad de Granada. 2012
[17] Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. "Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad". Uniciencia (2022a), 36(1), e15399.
[18] Castillo, M. J. Burgos, M. y Godino, J. D. "Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica". Educação e Pesquisa, São Paulo (2022b) 48, e238787.
[19] Chapman, L. J. y Chapman, J. P. (1967). "Genesis of popular but erroneous psychodiagnostic observations". Journal of Abnormal Psychology (1967) 72(3), 193-204.
[20] Chevallard, Y. La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique. 1991

[21] Chevallard, Y. “Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique”. Recherches en Didactique des Mathématiques (1992) 12(1), 73-112.

[22] Chevallard, Y. “L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique”. Recherches en Didactique des Mathématiques (1999) 19(2), 221-266.

[23] Cruz, A.; Gea, M.M.; Giacomone, B. Criterios de idoneidad epistémica para el estudio de la geometría espacial en educación primaria. En J. M. Contreras et al. (Eds.) 2017a. Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Granada, España: CIVEOS, p. 1-10.

[24] Cruz, A.; et al. Criterios de idoneidad cognitiva para el estudio de la geometría espacial en educación primaria. Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Madrid, España: CIBEM, 2017b, 1-8.

[25] Esqué, D y Breda, A. “Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad, utilizando la herramienta”. Uniciencia (2021) 35(1), 38-54.

[26] Estepa, A. Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores. Tesis doctoral. Universidad de Granada. 1994.

[27] Estepa, A. Investigación en educación estadística. La asociación estadística. En R. Luengo (Ed.) 2004. Líneas de investigación en Educación Matemática, (pp. 227-255). Badajoz: Servicio de Publicaciones. Universidad de Extremadura.

[28] Estepa, A. (2008). “Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de Bachillerato”. Enseñanza de las Ciencias (2008) 26 (2), 257-270.

[29] Engel, J. y Sedlmeier, P. Correlation and Regression in the Training of Teachers. En C. Batanero, G. Burrill, and C. Reading (Eds.) 2011. Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study, DOI 10.1007/978-94-007-1131-0_25, © Springer Science+Business Media B.V.

[30] Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. Primary school teacher’s noticing of students’ mathematical thinking in problem solving. The Mathematics Enthusiast (2013) 10(1), 441–468.

[31] Fortuny, J. M. y Rodríguez, R. “Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula”. Avances de Investigación en Educación Matemática (2012) 1, 23–37.

[32] Freudenthal, H. Mathematics as an educational task. Reidel Publishing, Dordrecht, 1973.

[33] Freudenthal, H. Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel Publishing, Dordrecht, 1983.

[34] Gal, I. (2002). “Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities”. International Statistical Review (2002) 70(1), 1-25.

[35] Gea, M. M. La correlación y la regresión en bachillerato: análisis de libros de texto y del conocimiento de los futuros profesores. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. 2014
[36] Gea, M. M., Batanero, C., Arteaga, P. y Estepa, A. "Conocimiento especializado de la correlación y regresión en futuros profesores de secundaria", Profesorado (2019) 23(2), 397-419. ISSN: 1138-414X. Universidad de Granada. DOI: https://doi.org/10.30827/profesorado.v23i2.9693
[37] Gea, M. M., Batanero, C., López-Martín, M. M. y Arteaga, P. "Research on the perception and learning of correlation and regression". Boletín de estadística e investigación operativa – BEIO (2016) 32(3), 234-256. ISSN 1889-3805. Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa.
[38] Gea, M. M., Batanero, C., y Roa, R. "El sentido de la correlación y regresión". Números (2014) 87, 25-35.
[39] Gea, M. M. y Begué, N. "Una experiencia de formación para futuros profesores en correlación y regresión". Realidad y Reflexión (2021) 53(53), 118–135. https://doi.org/10.5377/ryr.v53i53.10892.
[40] Gea, M. M., Díaz-Levicoy, D., López-Martín, M. M. y Cañadas, G. R. (2015a). Recursos virtuales para el estudio de la correlación y regresión. En P. A. Sánchez (Ed.) 2015a. Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas: Educación matemática, un mar de posibilidades (JAEM 17). Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial (UPCT). Cartagena, Murcia. p. 1-14. ISBN 978-84-606-9748-0.
[41] Gea, M. M., Gómez-Torres, E. y Cañadas, G. R. Adquisición del sentido de la correlación a partir de recursos virtuales. En L. Andrade (Ed.) 2014b. Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica (pp. 220 - 225). Bogotá, Colombia: Asociación Colombiana de Educación Estocástica. ISSN: 2390-0172.Comunicación referida.
[42] Gea, M. M., López-Martín, M. M., Roa, R. "Conflictos semióticos sobre la correlación y regresión en los libros de texto de Bachillerato". Avances de Investigación en Educación Matemática (2015b) 8, 29-49. ISSN: 2254-4313. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. DOI: https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.113
[43] Godino, J. D. "Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática". Recherches en Didactique des Mathématiques (2002) 22(2-3), 237-284.
[44] Godino, J. D. "Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas". UNION (2009) 20, 13-31.
[45] Godino, J. D. "Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas". Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática (2013) 11, 111–132.
[46] Godino, J. D. De la ingeniería a la idoneidad didáctica en educación matemática. Revemop (2021) 3, e202129, p. 1-26. DOI: 10.33532/revemop.e202129
[47] Godino, J. D. "Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática". Revista Venezolana de Investigación en

Educación Matemática (2022) 2(2), e202201-e202201. https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.25.

[48] Godino, J. D. y Batanero, C. "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos". Recherches en Didactique des Mathématiques (1994) 14 (3), 325-355.

[49] Godino, J. D., Batanero, C., Burgos, M. y Gea, M. M. "Una perspectiva ontosemiótica de los problemas y métodos de investigación en educación matemática". Revemop (2021) e202107, 1-30.

[50] Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. "The onto-semiotic approach to research in mathematics education". ZDM. The International Journal on Mathematics Education (2007) 39(1-2), 127-135.

[51] Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. "The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics". For the Learning of Mathematics (2019) 39(1), 37- 42

[52] Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. "Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática". Recherches en Didactiques des Mathématiques (2006) 26(1), 39-88.

[53] Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. "Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de las Matemáticas desde un enfoque ontosemiótico". Enseñanza de las Ciencias (2009) 27(1), 59-76.

[54] Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. "Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas". Bolema: Boletim de Educação Matemática (2017) 31(57), 90–113. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05.

[55] Godino, J. D.; Giacomone, B.; Font, V. y Pino-Fan, L. "Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM". Avances de Investigación en Educación Matemática (2018) 13, 63 - 83.

[56] Godino, J. D., Ortiz, J. J., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. Models for statistical pedagogical knowledge. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds,) 2011. Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education (pp. 271–282). Springer.

[57] Godino, J.D., Rivas, H. y Arteaga, P. "Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares". Práxis Educativa (2012) 7(2), 331–354.

[58] Groenwald, C. L. y Llinares, S. "Competencia docente de observar con sentido situaciones de enseñanza". Paradigma (2019) 40(1), 29–46.

[59] Hernández-Solís, L.; Batanero, C. "Indicadores de idoneidad epistémica de los contenidos de probabilidad del currículo de matemática Costarricense". PädiUAQ (en prensa).

[60] Holmes, P. "Correlation: From picture to formula". Teaching Statistics (2001) 23 (3), 67-71.

[61] Ministerio de Educación y Formación Profesional. "Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria". Boletín Oficial del Estado (2022a) núm. 52, pp. 24386-24504. Ministerio de Educación y Formación Profesional – MEFP.

[62] Ministerio de Educación y Formación Profesional. "Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria". Boletín Oficial del Estado (2022b) 76, 41571-41789. Ministerio de Educación y Formación Profesional – MEFP.

[63] Ministerio de Educación y Formación Profesional. "Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato". Boletín Oficial del Estado (2022c) 82, 46047-46408. Ministerio de Educación y Formación Profesional – MEFP.

[64] Pallauta, J. D. Análisis de las tablas estadísticas en textos escolares y su comprensión por estudiantes de educación básica. Tesis doctoral. Universidad de Granada. 2022

[65] Parra, F. J. y Ávila, R. "Hacia una idoneidad didáctica en una clase de Física". Latin American Journal of Physics Education (2015) 9(S1), 1-7.

[66] Pino-Fan, L. R. y Godino, J. D. "Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor". Paradigma (2015) 36(1), 87–109.

[67] Rodríguez, A. Análisis de recursos en Internet para la enseñanza de correlación y regresión. Tesis de Máster en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. 2019.

[68] Saari, D. Decisions and elections. explaining the unexpected. Cambridge: University Press. 2001.

[69] Sánchez Cobo, F. T. Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios. Tesis doctoral. Universidad de Granada. 1999

[70] Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. R. "What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views". International Journal of Science and Mathematics Education (2019) 17(1), 153–172. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6.

[71] Van Den Heuvel-Panhuizen, M.; Drijvers, P. Realistic mathematics education. En S. Lerman (Ed.) 2014. Encyclopedia of Mathematics Education. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8

[72] Wild, C. J., y Pfannkuch, M. "Statistical thinking in empirical enquiry". International Statistical Review (1999) 67(3), 223-265.

[73] Wilhelmi, M. R., Font, V. y Godino, J. D. Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques: réflexions sur la théorie de situations didactiques et le point de vue ontologique et sémiotique. Trabajo presentado en el Colloque International Didactiques: quelles references epistemologiques? (2005). Paris; Association Francophone Internationale de Recherche Scientifique en Education. Disponible en www.ugr.es/local/jgodino/