



Memorias

VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

Cartago, Costa Rica, del 3 al 7 de diciembre de 2018

ISBN 978-9930-541-30-2

Editores: Greivin Ramírez Arce y Jennany Ortiz Mata.

1. Presentación

La Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica (TEC) organizó la Semana VI EDEPA 2018 del 3 al 7 de diciembre de 2018 en Costa Rica, sede del TEC ubicada en Cartago. Dentro de esta semana se realizó el VI **Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos** (VI EDEPA) los días 5, 6 y 7 de diciembre, y los días anteriores (3 y 4 de diciembre) se realizaron algunas actividades previas a este evento.

El propósito central del evento fue rescatar, a través de conferencias, talleres, ponencias, reportes de investigación y charlas, entre otras actividades, la importancia que tienen la enseñanza de estos tópicos en un mundo cada vez más competitivo e informatizado. Se contó con aportes pedagógicos sobre probabilidad y estadística, particularmente relacionados con los temas propuestos en los nuevos programas del Ministerio de Educación de Costa Rica.

Al VI EDEPA asistieron 140 participantes y contó con ponentes de los siguientes países de Iberoamérica: España, Chile, Brasil, Portugal, México. Además se contó con la participación de México y el Salvador.

Las actividades académicas fueron: 6 conferencias, 27 ponencias, 6 talleres y una actividad de integración que incluía resolución de problemas.

2. Comité organizador

M.Sc. Giovanni Sanabria Brenes, Instituto Tecnológico de Costa Rica (co-coordinador).

M.Sc. Félix Núñez Vanegas, Instituto Tecnológico de Costa Rica (co-coordinador).

M.Sc. Greivin Ramírez Arce, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Dr. Jorge Monge Fallas, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Dr. Jesús Humberto Cuevas Acosta, Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México.

3. Comité científico

Comité científico internacional

- Dra. Carmen Batanero Bernabeu. Universidad de Granada. España
- Dra. María Magdalena Gea Serrano. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.
- Dr. Jesús Humberto Cuevas Acosta. Tecnológico Nacional de México.
- Dr. Ernesto Sánchez Sánchez. Investigador en el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Dra. Carolina Carvalho. Investigadora en el Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal.

- Dra. Silvia Azucena Mayén Galicia. Instituto Politécnico Nacional. México.
- Dr. Sergio Hernández González. Universidad Veracruzana, México.
- Dr. Mario Olguin Scherffig. Universidad San Sebastian. Chile.
- Dr. Hugo Alejandro Alvarado Martínez. Universidad Católica de la Santísima Concepción. Chile
- Dra. Claudia Alejandra Vásquez Ortiz, Pontificia Universidad Católica de Chile, Campus Villarrica.
- Dr. Ailton Paulo de Oliveira Júnior. Universidad Federal del ABC. Brasil.
- Dr. José Alexandre dos Santos Vaz Martins. Instituto Politécnico da Guarda. Portugal.
- M.Sc. Jairo Andrés Díaz Rodríguez. Universidad de Ginebra. Candidato a doctorado, Universidad de Ginebra.
- M.Sc. Jesús Guadalupe Lugo Armenta. Estudiante del Doctorado en Educación Matemática. Universidad de Los Lagos. Chile.
- M.Sc. Ingrith Álvarez Alfonso. Universidad Pedagógica Nacional. Colombia.
- M.Sc. Pedro Ramos. Universidad de El Salvador. El Salvador.

Comité científico local

- Dr. Javier Trejos Zelaya. Universidad de Costa Rica.
- Dr. Edwin Chaves. Universidad Nacional. Costa Rica
- Dr. Luis Gerardo Meza Cascante. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Dr. Erick Chacón Vargas. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Dra. Tania Elena Moreira Mora. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Dra. Marcela Alfaro Córdoba. Profesora Invitada, Escuela de Estadística, Universidad de Costa Rica.
- M.Sc. Giovanni Sanabria Brenes. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- M.Sc. Félix Núñez Vanegas. Instituto Tecnológico de Costa Rica
- M.Sc. Greivin Ramírez Arce. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- MSc. Luis Acuña Prado. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- MSc. Cindy Calderón Arce. Instituto Tecnológico de Costa Rica.

4. Información del VI EDEPA

Se contó con los siguientes medios de comunicación:

Página web: http://tecdigital.tec.ac.cr:8088/congresos/index.php/edepa/6_edepa

Facebook: <https://www.facebook.com/EDEPA-341307349313857/>

Correo: edepa@itcr.ac.cr

Avisos mediante correo electrónico a personas que han participado en ediciones anteriores del EDEPA (Ver anexo #1)

Teléfono: (506) 2550-2225

5. Objetivos Generales del V EDEPA

1. Evidenciar los esfuerzos realizados para el mejoramiento de la enseñanza de la estadística, probabilidad y análisis de datos, en primaria, secundaria y nivel universitario.
2. Incentivar al participante a realizar investigaciones cuantitativas utilizando la estadística, la probabilidad y el análisis de datos.
3. Constituir un espacio de crítica, debate y comunicación sobre el estado actual y desarrollo reciente de la investigación en Didáctica de la Estadística, de la Probabilidad y del Análisis de Datos a nivel nacional e internacional.
4. Establecer un grupo de trabajo interesado en fomentar el mejoramiento de la enseñanza de la estadística y probabilidad en primaria y secundaria.

6. Temática del evento

La temática del V EDEPA incluye los temas propuestos en los nuevos programas del **Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. Además se incluyen temas a nivel universitario.** Los temas son:

- La resolución de problemas en la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística.
- Generación de una cultura estadística en la comunidad educativa nacional.
- El papel del contexto y de la evaluación en la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística.
- Las creencias y mitos sociales sobre probabilidad y estadística.
- Didáctica de la Estadística.
- Didáctica de la Probabilidad.
- Didáctica del Análisis de Datos.
- Experiencias docentes y propuestas de trabajo en la enseñanza de la probabilidad, la estadística y el análisis de datos.
- Aplicaciones prácticas de la probabilidad, la estadística y el análisis de datos.
- Uso de la tecnología y manejo de paquetes estadísticos.

Idioma oficial: Español

CRONOGRAMA

	Lunes 3 de diciembre	Martes 4 de diciembre	Miércoles 5 de diciembre	Jueves 6 de diciembre	Viernes 7 de diciembre
8:00 - 8:50			Inscripción (Centro de Artes)	Conferencia C-3	Ponencias P-07 P-13 (8:00-8:30) P-08 P-22 (8:30-9:00)
9:00 - 9:30				Ponencias P-04 P-09 P-10	Ponencias P-06 P-01 P-14
9:40 - 10:10	Pre-edepa Conferencia C-2	Pre-edepa Conferencia C-6	Inauguración Conferencia C-1 Auditorio Centro de Artes	Ponencias P-05 P-23 P-11	Ponencias P-02 P-03
10:10 - 10:40				Refrigerio	Refrigerio
10:40 - 11:10				Ponencias P-17 P-24	Ponencias P-12 P-15
11:20 - 11:50			Ponencias P-25 P-26 P-18		Ponencias P-20 P-21
12:00 - 1:30	Almuerzo				Almuerzo
1:30 - 3:00			Talleres T-3 T-5 T-6 T-4	Actividad de integración	Conferencias C-4 C-5
3:00 - 3:30	Inscripción extranjeros	Inscripción extranjeros	Refrigerio		Entrega certificados
3:30 - 5:00			Talleres T-1 T-2 continuación T-5 T-6		



Ponencias

	Autores	País	Título	Lugar
P-01	Freddy Steven Ulate Agüero	Costa Rica	Olimpiadas costarricenses de matemática y la estadística: una comparación a nivel evaluativo	Auditorio Biblioteca
P-02	José Andrés Delgado Solano	Costa Rica	Ingeniería didáctica en la enseñanza de la estadística y probabilidad en 8 año de colegio	Auditorio D3
P-03	Mónica Mora Badilla, Graciela Ordoñez Gutiérrez	Costa Rica	Asociación del razonamiento cuantitativo con el rendimiento académico en cursos introductorios de matemática de carreras STEM	Auditorio Biblioteca
P-04	Jesús Guadalupe Lugo Armenta, Blanca Rosa Ruíz Hernández, Jaime Israel García García	Chile, México	Desarrollo de la Investigación en el Razonamiento Inferencial Informal	Auditorio D3
P-05	Elizabeth Hernández Arredondo, Jaime Israel García García, César López Calvario	Chile, México	Niveles de lectura de estudiantes de licenciatura: el caso de una tabla y una gráfica de líneas	Auditorio D3
P-06	Maynor Jiménez Castro, Carmen Batanero, Pedro Arteaga	Costa Rica, España	Contexto de los gráficos estadísticos en libros de texto de la educación primaria en Costa Rica	Auditorio D3
P-07	Yolanda Pérez Rodríguez, Enrique Hugues Galindo, Blanca Rosa Ruíz Hernández	México	Análisis de actividades estadísticas en libros de textos de nivel básico y medio superior en México	Auditorio D3
P-08	Guillermo Enrique Ramírez Montes, Ana Cláudia Correia Batalha Henriques	Costa Rica, Portugal	Aprendizaje de la aleatoriedad y conceptos asociados al espacio muestral: un estudio de la probabilidad en secundaria con apoyo de Geogebra	Auditorio D3
P-09	José Manuel Coto Alcázar, Paulina Quesada Abarca Fiorela Franco Garbanzo	Costa Rica	Estudio de la ansiedad matemática en estudiantes de segundo ciclo, tercer ciclo y educación diversificada del colegio científico interamericano CATIE, durante el tercer periodo del 2017	Auditorio Biblioteca
P-10	Danny Esteban Ramírez Lobo, Erick Ángel Pizarro Carrillo	Costa Rica	Propuesta didáctica para habilidades de estadística en educación diversificada utilizando PSPP	Aula B2-03
P-11	Danny Esteban Ramírez Lobo, Erick Ángel Pizarro Carrillo	Costa Rica	Kahoot para habilidades de probabilidad en décimo año	Aula B2-03
P-12	Rebeca Paola Chaves, Uriel Gómez, Melissa Luna	Costa Rica	Propuesta didáctica para la enseñanza de la estadística y probabilidad para noveno (9º) y décimo (10º) año	Auditorio D3
P-13	Carlos Alberto Monge Madriz, Natalie Reyes Riotte	Costa Rica	Elaboración de un instrumento de medición de las creencias de los docentes hacia los nuevos programas de estudio de matemáticas en secundaria	Auditorio Biblioteca
P-14	Giovanni Martínez, Pablo García, Juan Carlos Barrero, Yenny Paola Sierra, Maria Isabel González, Ana Rosa Rodríguez	Colombia, Costa Rica	Reflexiones sobre la enseñanza de la estadística en pregrados profesionales de ingeniería	Aula B2-03
P-15	Mónica Mora Badilla	Costa Rica	Enseñanza de la estadística a través de proyectos de investigación, una experiencia de su aplicación como estrategia didáctica con futuros docentes de primaria	Auditorio Biblioteca
P-17	Jose Armando Albert	México	El papel del parámetro en la construcción escolar de ideas estadística	Auditorio D3
P-18	Giovanni Sanabria Brenes	Costa Rica	La enseñanza determinista de la probabilidad	Auditorio D3
P-20	Ana Magali Salazar Avila, Sandra Rodríguez Herrera	Costa Rica	Enseñanza de la estadística para la carrera de informática, descripción de una experiencia	Auditorio D3
P-21	Randall Alberto Brenes Gómez	Costa Rica	Ondas Probabilísticas: Una aplicación de la Probabilidad a la Mecánica Cuántica	Auditorio Biblioteca
P-22	Didier Alberto Castro Méndez	Costa Rica	La necesidad del empoderamiento docente en Costa Rica, desde un enfoque socioepistemológico	Auditorio Biblioteca

P-23	Gladys Denisse Salgado Suárez, José Dionicio Zacarías Flores, Hugo Adán Cruz Suárez	México	El sistema de inventarios. Una aplicación de los procesos de decisión de Markov	Auditorio Biblioteca
P-24	Mónica Pérez García, José Dionicio Zacarías Flores	Costa Rica	Iniciación a la estadística: representaciones semióticas en el primer ciclo de primaria	Auditorio Biblioteca
P-25	Félix Núñez Vanegas	Costa Rica	Algunos aspectos relacionados con la didáctica de la probabilidad y de la estadística en secundaria en Costa Rica	Auditorio Biblioteca
P-26	Armando Gabriel Solís Zúñiga, Adrián Gerardo Vega	Costa Rica	Propuestas de enseñanza sobre estadística y probabilidad para 5° y 6° grado de primaria en Costa Rica	Aula B2-03

Conferencias

	Autores	País	Título	Lugar
C-1	Gabriele Kaiser	Alemania	Competencias profesionales de profesores de matemática (prospectiva): aproximaciones cognitivas versus situadas	Aud. Centro de Artes
C-2	Gabriele Kaiser	Alemania	Investigación basada en videos para estudios comparativos y transferencia de metodologías de una cultura a otra	Auditorio D3
C-3	Claudia Vásquez Ortiz	Chile	Enseñanza de la probabilidad en Educación Primaria: Un análisis a partir de sus significados	Aud. Centro de Artes
C-4	Blanca Ruiz Hernández	México	Modelos, cálculo y aleatoriedad en la educación superior	Auditorio Biblioteca
C-5	David Cardoza Rodríguez y Marlon Molina Corella	Costa Rica	Los efectos de la política fiscal en Costa Rica. Una aproximación con shocks fiscales.	Auditorio D3
C-6	Jorge Monge Fallas	Costa Rica	Visualización y análisis estadístico de datos	Auditorio D3

Talleres

	Autores	País	Título	Lugar
T-01	Gabriele Kaiser	Alemania	Modelado basado en datos	Laboratorio C1-03
T-02	Rebeca Paola Chaves, Uriel Gómez, Melissa Luna	Costa Rica	Propuesta didáctica para la enseñanza de la estadística y probabilidad para undécimo (11°) y duodécimo (12°) año.	Electrónica
T-03	Grace Dayana Calderón Prado, Alexander Borbón Alpizar	Costa Rica	El Juego, herramienta de apoyo para la enseñanza de la estadística y probabilidad	Laboratorio Laimi 2
T-04	Siony Ulloa Araya, Jenny Romero Boniche	Costa Rica	Propuestas Didácticas para el Análisis de Datos y Probabilidad para las Etapas 9-12 de la NCTM	Laboratorio C1-03
T-05	José Armando Albert Huerta, Blanca Ruiz Hernández	México	Herramientas de simulación para el diseño de actividades de aprendizaje de Probabilidad y Estadística	Laboratorio H Rojo
T-06	Welman Rosa Alvarado	El Salvador	Modelos de Pérdida Esperada y No Esperada en Riesgo de Crédito con nociones de Scoring	Laboratorio C1-06

CONFERENCIAS

Competencias profesionales de profesores de matemática (prospectiva): aproximaciones cognitivas versus situadas

Gabriele Kaiser¹

Resumen

La presente investigación sobre las competencias profesionales de profesores de matemática, llevado a cabo durante la última década, está caracterizada por diferentes acercamientos teóricos sobre las competencias profesionales de conceptualización y evaluación del profesor; llamadas aproximaciones cognitivas versus situadas. Construida sobre la internacional IEA “Teacher Education and Development Study in Mathematics” (TEDS-M) y su estudio siguiente TEDS-FU, la lectura compara aproximaciones cognitivas y situadas sobre competencias profesionales de profesores. En TEDS-FU el marco de TEDS-M ha sido enriquecido por una orientación situada incluyendo el marco de novato-experto y el concepto de notar como acercamientos teóricos sobre el análisis de situaciones de clase. Correspondientemente, los instrumentos de evaluación fueron extendidos utilizando video-viñetas para evaluar la percepción de los profesores, competencias de interpretación y toma de decisiones en adición a pruebas de conocimiento cognitivo orientado. La lectura discute los diferentes tipos de marcos teóricos y las consecuencias para los métodos de evaluación, las fortalezas y debilidades de ambos enfoques. Además, conectar los resultados de TEDS-FU con TEDS-M permite una visión integral de la estructura y el desarrollo de competencias profesionales de profesores de matemática, la compleja interacción entre las diferentes facetas de competencias de los profesores y la alta relevancia de la práctica de enseñanza para el desarrollo de esas competencias. Especialmente se presentarán en detalle los análisis sobre la naturaleza de las competencias de los docentes. En general, los análisis muestran por un lado que ambos acercamientos –cognitivos y situados – son necesarios para una descripción comprensión de las competencias profesionales de los profesores. Y por otro lado, se muestra que ambos acercamientos pueden ser integrados de manera productiva.

¹ University of Hamburg, Germany & Australian Catholic University, Australia. Alemania.
gabriele.kaiser@uni-hamburg.de

Investigación basada en videos para estudios comparativos y transferencia de metodologías de una cultura a otra

Gabriele Kaiser¹

Resumen

La investigación basada en videos está jugando un importante crecimiento en el papel de la investigación en educación matemática y cómo está yendo más allá de la evaluación clásica de métodos basados en pruebas de papel y lápiz u observaciones de clase. La presentación se enfocará sobre investigación basada en videos para la educación y desarrollo profesional del profesor.

En principio, existen varios caminos para investigación basada en videos en esta área, entre otros están las grabaciones en video de la práctica en el aula de los docentes o la evaluación basada en video que requieren que los maestros perciban las situaciones típicas del aula presentadas en video-clips. Estos últimos juegan un papel especial en los estudios a gran escala en el desarrollo profesional de los profesores. Surge la pregunta, si estos acercamientos son culturalmente invariantes, es decir el mismo acercamiento metodológico con el mismo video-clips puede ser usado en diferentes culturas o si las adaptaciones tienen que realizarse para cumplir con las características culturales específicas.

Basados en los resultados del estudio de seguimiento de Educación de Profesores y Estudio de Desarrollo (TEDS-M), en los cuáles los métodos de evaluación basados en videos son adaptados de Alemania a China, los desafíos de esta adaptación serán descritos con sus limitaciones.

¹ University of Hamburg, Germany & Australian Catholic University, Australia. Alemania.
gabriele.kaiser@uni-hamburg.de

Enseñanza de la probabilidad en Educación Primaria: Un análisis a partir de sus significados

Claudia Vásquez Ortiz¹

Resumen

el propósito de este estudio es analizar cómo el profesorado de Educación Primaria considera y aborda en sus prácticas de aula los significados de la probabilidad establecidos por Batanero (2005), considerando para ello los objetos matemáticos que permiten describir los conocimientos puestos en juego en la resolución de un problema matemático (Godino, 2002): situaciones-problema, elementos lingüísticos, conceptos-definición, procedimientos, proposiciones-propiedades y argumentos. Para la obtención de datos, se videograbaron 63 clases del eje de datos y probabilidades de 12 profesores de la región de La Araucanía, Chile, que abarcan los distintos niveles (1° a 8°). Se seleccionaron las clases en que se abordan contenidos vinculados al tema de azar y probabilidad, correspondiendo a un total de 23 clases de entre 45 y 90 minutos de duración cada una, que se transcribieron y fueron codificadas por una terna de codificadores externos, especialistas en Didáctica de la Matemática para la Educación Primaria. Los primeros resultados obtenidos dibujan una trayectoria de significados que se caracteriza por una fuerte presencia del significado intuitivo en los tres primeros niveles, junto con una presencia mucho inferior del significado frecuencial y la ausencia del resto de significados. A medida que se avanza de nivel va descendiendo la presencia del significado intuitivo, y su lugar lo ocupan los significados frecuencial, subjetivo y clásico. Se concluye que estos datos van a ser de utilidad para poder aportar nuevo conocimiento que permita fortalecer la formación docente en relación con la probabilidad y su enseñanza.

¹ Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile. cavasque@uc.cl

Modelos, cálculo u aleatoriedad en la educación superior

Blanca Ruiz Hernández¹

Resumen

La formación escolar en matemáticas y estadística suelen estar poco relacionadas. Sin embargo, a través de la modelación encuentran lugares comunes donde se refuerzan y contribuyen una a otra. En esta conferencia se muestran dos casos, uno desde la perspectiva aleatoria y el otro de la modelación determinística, donde sus vínculos surgen de manera natural y esclarecedora, pero que no le hemos dado énfasis ni en la enseñanza de la estadística, ni en la del cálculo.

¹ Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, México. bruiz@itesm.mx

Los efectos de la política fiscal en Costa Rica. Una aproximación con shocks fiscales

David Cardoza Rodríguez¹ & Marlon Molina Corella²

Resumen

Este trabajo tiene por objetivo analizar la interdependencia de algunas variables macroeconómicas que se ven afectadas ante un cambio fiscal. Se analiza la recaudación tributaria y el gasto primario de Costa Rica en términos reales. Se utiliza la metodología de Vectores Autorregresivos Estructurales (SVAR), que permiten observar los efectos dinámicos de los shocks provocados por cambios en la política fiscal mediante el empleo de funciones impulso respuesta. Este tipo de modelos aplicados, consiste en relacionar ciertas variables económicas siguiendo un proceso estocástico y ver los impactos que tienen en el sistema, además para respetar la lógica económica se realizan ciertas restricciones en los parámetros de las ecuaciones. Se analizan los impactos de las políticas públicas exógenas en la producción real, las políticas públicas se analizan desde dos vertientes, por el lado de los ingresos tributarios o gasto corriente. Los resultados describen que los choques de gasto tienen un efecto positivo en el PIB, mientras los choques de impuestos presentan una contracción del PIB.

¹ Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica. david.cardoza.rodriguez@una.ac.cr

² Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica. marlonmolina00@hotmail.com



Visualización y Análisis Estadístico de Datos

Jorge Monge Fallas¹

Resumen

La idea es brindar un panorama de la evolución del papel de la visualización en la estadística. Clarificación de procesos de data cleaning, tipos de visualización y principios fundamentales de la visualización. Además de conocer algunas herramientas para el análisis, visualización y exploración de datos.

¹ Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. jomonge@itcr.ac.cr

PONENCIAS



Olimpiadas Costarricenses de Matemática y la Estadística: Una comparación a nivel evaluativo

Freddy Steven Ulate Agüero¹

Resumen

Se pretende hacer un análisis crítico - comparativo entre las competencias de Olimpiadas Costarricenses de Matemática (OLCOMA) y la Competición Estadística Europea (ESC) a nivel de España enfocados en la evaluación del razonamiento estadístico. Además se espera justificar la necesidad de la inclusión de la Estadística en las pruebas de OLCOMA y cómo lograrlo.

¹ Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. freddy5594@gmail.com



Ingeniería Didáctica en la enseñanza de la estadística y probabilidad en 8 año de colegio

José Andrés Delgado Solano¹

Resumen

El siguiente artículo abarcará un pequeño análisis sobre los programas de estudio para el octavo grado de colegio en Costa Rica, seguidamente se definirá el concepto de ingeniería didáctica, además de conceptos básicos sobre la estadística y probabilidad, para finalmente abarcar una propuesta de enseñanza de la estadística y probabilidad utilizando la ingeniería didáctica

¹ Itskatzú Educación Integral, Costa Rica. andresdelgadosolano@gmail.com

Asociación del Razonamiento Cuantitativo con el Rendimiento Académico en Cursos Introdutorios de Matemática de Carreras STEM

Mónica Mora Badilla¹ & Graciela Ordoñez Gutiérrez²

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo encontrar evidencia que respalde la hipótesis de que el razonamiento cuantitativo es un predictor relevante del rendimiento en cursos introductorios de matemática en carreras de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemática (STEM por sus siglas en inglés) controlando variables relevantes en la predicción de este rendimiento. El estudio se realizó en grupos de carreras, determinados por el curso de matemática introductoria compartido: a. Física, Meteorología y Química (n=132), b. Estadística (n=64) y c. Matemática y Ciencias Actuariales (n=87); con n igual a la cantidad de estudiantes por grupo. En cada agrupación se estimó un modelo de regresión lineal con medidas remediales apropiadas para el cumplimiento de los supuestos; la variable dependiente de los modelos fue la nota en el curso introductorio de matemática y las variables independientes fueron: el nivel de razonamiento cuantitativo, un indicador de las notas de secundaria y el examen de admisión, el sexo y la dependencia del tipo de colegio. En todos los modelos se obtuvo que la variable más relevante fue el nivel de razonamiento cuantitativo. Los coeficientes de determinación de los modelos fueron relevantes, ya que fueron superiores a 0.20.

¹ Universidad de Costa Rica, Costa Rica. monica.morabadilla@ucr.ac.cr

² Universidad de Costa Rica, Costa Rica. graciela.ordonez@ucr.ac.cr

Desarrollo de la Investigación en el Razonamiento Inferencial Informal

Jesús Guadalupe Lugo Armenta¹ & Jaime Israel García-García² & Blanca Rosa Ruíz Hernández³

Resumen

La Didáctica de la Estadística es un área de investigación que recientemente ha cobrado gran interés, esto por la importancia que tiene no sólo en la vida profesional de las personas sino en la vida cotidiana. Frecuentemente podemos observar en los diversos medios de comunicación una gran variedad de información que se apoya en estudios estadísticos, por lo tanto los ciudadanos debemos ser capaces de analizar, evaluar y valorar críticamente dicha información para poder tomar decisiones.

Centrándonos en la Estadística Inferencial, diversos investigadores (e.g., Watson, 2004; Bakker y Gravemeijer, 2004; Carver, 2006) han reportado las dificultades que se tienen los estudiantes para comprender la variabilidad del muestreo, las distribuciones muestrales y otros conceptos fundamentales, así como la intolerancia que éstos tienen a la ambigüedad. No obstante, en correspondencia a las dificultades que se han puesto de manifiesto, se han estado proponiendo algunas ideas acerca de cómo investigar y trabajar en el aula de clases el Razonamiento Inferencial Informal (RII), con el objeto de integrar y dar sentido a las ideas estadísticas, así como de generar un acercamiento temprano a la Estadística Inferencial por parte de los estudiantes.

Con respecto a lo anterior, en este trabajo se presenta un estudio del arte sobre el RII que tiene como objetivo recuperar y trascender el conocimiento acumulado en las investigaciones que se han abordado en los últimos años por las diferentes comunidades de investigación. De manera general, se puede mencionar que aún no existe un consenso de las comunidades acerca de cómo abordar el RII, algunas lo proponen mediante una visión global (e.g., Zieffler, Garfield, delMas y Reading, 2008; Reading, 2009; Makar, Bakker y Ben-Zvi, 2011) y otras a partir de un tópico específico de la inferencia como son los intervalos de confianza, el valor-p y las pruebas de hipótesis (Batanero y Díaz, 2015); incluso en ambas visiones, algunos destacan el uso de la tecnología para promover el desarrollo del RII. También se rescata la diferencia que realiza Makar et al., 2011 acerca del RII y la Inferencia Estadística Informal (ISI).

¹ Universidad de los Lagos, Chile. lupita_lugo@icloud.com

² Universidad de los Lagos, Chile. jaime.garcia@ulagos.cl

³ Universidad de los Lagos, Chile. bruiz@itesm.mx

Niveles de lectura de estudiantes de licenciatura: el caso de una tabla y una gráfica de líneas

Elizabeth H. Arredondo¹ & Jaime I. García-García² & César López Calvario³

Resumen

Actualmente, en la enseñanza de la Estadística es de vital importancia que el estudiante desarrolle una cultura estadística que le permita participar y desenvolverse en nuestra sociedad; por ejemplo, los medios de comunicación con los que tiene contacto, hacen uso de tablas y gráficas estadísticas para divulgar información política, deportiva, social, cultural, entre otra. La investigación en esta disciplina reconoce este hecho en actividades tan cotidianas como la lectura de la prensa (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013) o la interpretación de información estadística que se puede encontrar en diversos contextos (Gal, 2002), más aún, se enfatiza que esta debe ser evaluada con una mirada crítica para tomar decisiones y entender nuestro entorno (Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín, 2015). Lo anterior nos motivó a explorar la interpretación que realizan treinta y seis estudiantes de licenciatura cuando leen información estadística sobre la matrícula escolar de nivel básico en tres ciclos escolares en México, representada de manera tabular y gráfica; además de establecer las siguientes preguntas que guiaron nuestra investigación: ¿Qué niveles de lectura exhiben los estudiantes de licenciatura cuando realizan la interpretación de información representada en una tabla y una gráfica de líneas? ¿Qué tipo de representación, bajo el mismo contexto, promueve niveles superiores de lectura en los estudiantes?

Nuestro trabajo se fundamenta bajo dos marcos de referencia, los niveles de lectura de Curcio (1989) y Friel, Curcio y Bright (2001) para el análisis de la comprensión gráfica, y la jerarquía propuesta por Aoyama (2007) para la valoración crítica de la información, por parte de los estudiantes. El análisis de las interpretaciones evidencia que la mayoría de los estudiantes alcanzan el nivel 2, leer dentro de los datos, al enfocarse en la comparación de los datos; pocos jóvenes pudieron alcanzar los niveles superiores 3 y 4, leer más allá de los datos y leer detrás de los datos, respectivamente, al dar una predicción sobre una tendencia de los datos, o bien, al proporcionar hipótesis explicativas en términos de los datos que se muestran en la tabla o gráfica. Se observa que la valoración crítica de la información por parte del estudiante, se encuentra directamente relacionada con su conocimiento sobre el contexto, siendo este el que determina y caracteriza el nivel superior 4. Además, con base en nuestro análisis, podemos mencionar que el tipo de representación gráfica favorece en la interpretación de los estudiantes participantes para alcanzar niveles superiores de lectura.

¹ Universidad de los Lagos, Chile. elizabeth.hernandez@ulagos.com

² Universidad de los Lagos, Chile. jaime.garcia@ulagos.com

³ Universidad Autónoma de Guerrero, México. nass1_2012@hotmail.com

Contexto de los gráficos estadísticos en libros de texto de la educación primaria en Costa Rica

Maynor Jiménez Castro¹ & Carmen Batanero Bernabeu & Pedro Arteaga

Resumen

Los gráficos estadísticos juegan un papel importante en el análisis y la comunicación de información estadística y son ampliamente utilizados en los medios de comunicación escrita; por lo tanto, es necesario que los ciudadanos alcancen suficiente competencia gráfica que permita una actitud crítica y responsable ante los sucesos que se presentan en el diario vivir (Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas, 2012). Estas razones llevan a países como Costa Rica a introducir gráficos estadísticos en la educación primaria. Más específicamente, se solicita a los niños que recopilen y registren datos para responder preguntas estadísticas sobre ellos y su entorno, usando gráficos de barras, tablas y pictogramas, así como para leer e interpretar estas representaciones desde los primeros grados de escolaridad (MEP, 2012). Un elemento importante en este objetivo es el estudio de los libros de texto como recurso didáctico, pues constituyen un paso intermedio entre las directrices curriculares oficiales y la enseñanza implementada en el aula (Herbel, 2007), la cual cada día recibe más atención de la comunidad de investigadores educativos.

El libro de texto seleccionado por el maestro generalmente proporciona la base principal por la cual se enseña el tema (Shield y Dole, 2013), por lo que, el objetivo de este artículo es describir el análisis de las tareas que incluyen gráficos estadísticos en dos de las series de libros de texto más utilizados en la educación primaria en Costa Rica. Para lograr este propósito, realizamos un análisis de contenido de todas las actividades ($n = 167$) relacionadas con gráficos estadísticos en las dos series de libros (grados 1° a 6°) que son los más utilizados en Costa Rica. El estudio de los gráficos en los libros de texto contempla en análisis de varios constructos que han sido abordados por expertos en investigaciones a nivel internacional, como son: los niveles de lectura, los niveles de complejidad semiótica, el tipo de gráfico, tarea solicitada, propósito del gráfico y contexto en el que se utiliza el gráfico estadístico.

En este artículo se dan a conocer los resultados del análisis del contexto gráfico, teniendo en cuenta las categorías propuestas en las pruebas PISA (OCDE 2015), que han contribuido al renovado interés en la educación contextualizada. Al analizar esta variable, utilizamos las siguientes categorías:

- Contexto personal: Estos gráficos (23.4% del total de gráficos analizados) se enfocan en actividades que pueden ser llevadas a cabo por el estudiante, miembros de su familia o compañeros, por ejemplo, el consumo familiar de electricidad;

¹ Universidad de Costa Rica, Costa Rica. maynorj@correo.ugr.es



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

- Contexto educativo (38.3% de los gráficos): se centra en el mundo de la escuela. Por ejemplo, actividades o tareas escolares o cantidad de libros en la biblioteca;
- El contexto social (22.2%) considera la comunidad del estudiante (ya sea local, nacional o global) y también incluye juegos de azar en esta categoría. Otros ejemplos son encuestas o votaciones;
- Contexto científico (15.2%): los problemas clasificados en la categoría científica se relacionan con la aplicación de las matemáticas al mundo natural y con los temas relacionados con la ciencia y la tecnología;

Esta distribución no fue uniforme en las dos series de libros de texto analizados, uno de los cuales solo incluía el 3,6% de contextos personales. También hubo variación entre los diferentes años escolares, donde el contexto personal fue más frecuente en el 1° grado y el contexto educativo del 2° al 5° grado. Del 1° al 3° grado escolar, el contexto científico es casi nulo, mientras que a partir del 4° grado constituye cerca de un cuarto de todos los gráficos. Estos resultados son útiles para los docentes que deben tener en cuenta la relevancia del contexto en la educación estadística y seleccionar contextos adecuados al presentar a sus estudiantes los gráficos estadísticos.

Análisis De Actividades Estadísticas En Libros De Textos De Nivel Básico Y Medio Superior En México

Yolanda Pérez Rodríguez¹ & Enrique Hugues Galindo² & Blanca Rosa Ruíz Hernández³

Resumen

A pesar de que los nuevos currículos de enseñanza básica y medio superior han incluido temas referidos a Probabilidad y Estadística, la enseñanza aún no les ha dado la suficiente importancia (Batanero, 2001). En los reportes de investigación sobre enseñanza de la estadística es frecuente encontrar descontento por el escaso tiempo escolar que se les dedica a estos temas o, incluso, porque no se llegan a impartir en clase por la falta de tiempo. También hay referencias que aluden a una enseñanza rutinaria, que enfatiza fórmulas y definiciones con problemas sin contexto (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013). De alguna forma, la enseñanza de la estadística ha recibido un gran impulso al ser incluida en prácticamente todos los niveles educativos, sin embargo, para hacerla real, los profesores requieren de recursos didácticos para la preparación de su clase. Uno de los documentos oficiales más socorridos por los profesores para auxiliarse en esto, son los libros de texto (Díaz-Levicoy, Gaicomone y Arteaga, 2017). En el presente trabajo, nos preguntamos por la forma como los libros de texto mexicanos proponen enseñar estadística en los niveles educativos básico y medio superior, en particular, nos enfocamos en los tiempos que sugieren dedicarle a estos temas y el tipo de actividades que recomiendan para enseñarlos.

Para el desarrollo del trabajo se utilizó una metodología cualitativa, mediante el análisis de contenido. Se identificó el porcentaje de tiempo sugerido para dedicarle a la enseñanza de la Estadística siguiendo a Ruiz (2014). Las actividades se analizaron de acuerdo con tres criterios: tipo de técnicas estadísticas propuestas (tablas de frecuencia, gráficas y medidas estadísticas), tipo de prácticas que se solicita desarrollar y los niveles de lectura que se promueven de acuerdo con Curcio (1989). Los resultados obtenidos se compararon con lo que marca la reforma educativa, particularmente alrededor de las competencias estadísticas pretendidas.

Dentro de los resultados se destacan: Las actividades están planteadas con un predominio de los gráficos de barras y circulares; en tanto que otro tipo de gráficos como los de líneas y barras múltiples no tienen el énfasis requerido; las prácticas más frecuentes son leer el gráfico, calcular, responder y registrar. Mientras que mínimamente se plantea: interpretar, argumentar, comparar e inferir. Las prácticas de lectura se ubican fundamentalmente en los niveles leer los datos y leer entre los datos. Con referencia a los tiempos sugeridos para el estudio de la Estadística, es el

¹ Universidad de Sonora, México. yoly.perezrodriguez@gmail.com

² Universidad de Sonora, México. ehugues@mat.uson.mx

³ Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, México. bruiz@itesm.mx



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

nivel básico el que presenta el mayor porcentaje de tiempo sugerido, pero aun así resulta insuficiente.

Finalmente se percibe que los libros de texto son una directriz de lo que planes y programas de estudio proponen para estos renglones educativos o como una guía para ello y, en cierta medida, esto permite esclarecer y valorar su alcance potencial (pues son editado por la subsecretaría de educación básica de la Secretaría de Educación Pública y el libro de nivel medio superior es una propuesta de este organismo). Sin embargo, dicho alcance se ve comprometido por la falta de actividades que promuevan prácticas asociadas a: contrastar, elegir, inferir, estimar, argumentar e interpretar; que comparados con lo habitual (identificar o calcular), se reconocen como las de mayor complejidad cognitiva, ya que tratan de construir juicios fundados en información, caracterizados por la utilización de un tipo de razonamiento, lo cual ayudaría al aprendizaje y enseñanza de la Estadística, como en sus posibles resultados.

Aprendizaje de la Aleatoriedad y Conceptos Asociados: un Estudio en Secundaria con Apoyo de Geogebra

Guillermo Enrique Ramirez Montes¹ & Ana Cláudia Correia Batalha Henriques²

Resumen

En este trabajo presento una de las tareas que conforman una experiencia de enseñanza apoyada con TICs para el estudio de la Probabilidad en décimo año del contexto costarricense. La tarea forma parte de una secuencia de aprendizaje conformada por cinco tareas, las cuales hacen parte de una investigación de maestría que visa reforzar el aporte de las TICs en la enseñanza de conceptos probabilísticos, y como tal, dar al actual y futuro profesor de matemática de secundaria, como también al investigador en Educación Matemática, un panorama de los beneficios y dificultades a que se enfrenta el alumno al trabajar con software matemático, específicamente, con utilización de Geogebra.

El objetivo general de la investigación fue comprender cómo los alumnos costarricenses de 10.º año aprenden los conceptos básicos de Probabilidad con tareas exploratorias apoyadas con Geogebra, y cuáles son las contribuciones de este software como recurso didáctico para el aprendizaje de estos conceptos. En particular, se abordan los aprendizajes en referencia a los conceptos trabajados en la primera tarea, específicamente, los conceptos de aleatoriedad, casos favorables, casos totales y eventos, y las contribuciones de Geogebra al trabajar dichos conceptos.

El estudio fue realizado durante el 1.º semestre del año lectivo 2017 con alumnos costarricenses de 10.º año de un colegio científico del valle central, durante las clases de la unidad de Probabilidad. La metodología utilizada fue de tipo cualitativa e interpretativa, siendo utilizados como instrumentos de recolección de datos la observación participante, la recolección documental, y el cuestionario.

Los resultados evidencian que la mayor parte de los alumnos tienen noción de lo que representa la aleatoriedad, asociando el concepto con experiencias de su día a día, sin embargo, presentan dificultades para utilizar dicho concepto en el cálculo de probabilidades. Por su lado, los conceptos de casos favorables, casos totales y eventos, aunque son conocidos por la mayor parte de los alumnos, no son identificados correctamente al inicio del trabajo de la tarea, confundiendo dichos conceptos entre sí al trabajar con experiencias aleatorias compuestas. En cuanto a las contribuciones de la tecnología, el trabajo con Geogebra permitió detectar, por un lado, que la mayor parte de los alumnos no están acostumbrados a trabajar con software matemático, demorando algunos más que otros para entender cómo utilizar Geogebra en la simulación de la experiencia aleatoria propuesta del lanzamiento de dos dados, no obstante, el trabajo con Geogebra representó una fuente de motivación

¹ Universidad de Costa Rica, Costa Rica. grm1905@gmail.com

² Universidad de Lisboa, Portugal. chenriques@ie.ulisboa.pt



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

de aprendizaje para toda la clase. Además, el trabajo con Geogebra permitió detectar que los alumnos infieren patrones incorrectos al explorar la simulación de la experiencia aleatoria del lanzamiento de dos monedas y repetirla un número grande de veces, evidenciando así dificultades en la comprensión del concepto de aleatoriedad. Por último, Geogebra contribuyó positivamente para que, a partir de la simulación de la experiencia, el alumno reflexionase sobre los conceptos trabajados, encontrando relaciones entre ellos que ayudaron a superar así las dificultades iniciales asociadas a diferenciar un concepto de otro.

De esta forma, los resultados obtenidos permiten hacer una evaluación positiva del uso de tareas exploratorias con recurso a Geogebra para la enseñanza y aprendizaje de conceptos de Probabilidad en secundaria. Durante la ponencia del trabajo se busca presentar estos resultados y mostrar la simulación de Geogebra utilizada en la tarea.

Estudio de la ansiedad matemática en estudiantes de segundo ciclo, tercer ciclo y educación diversificada del Colegio Científico Interamericano CATIE, durante el tercer periodo del 2017.

José Manuel Coto Alcázar¹ & Paulina Quesada Abarca² & Fiorela Franco Garbanzo³

Resumen

La enseñanza de la estadística va más allá de solo la transmisión de conocimientos teóricos. La enseñanza de esta debe estar enfocada en la aplicabilidad, siendo la investigación cuantitativa, el principal escenario para poder aplicarle.

El colegio científico interamericano CATIE, conociendo la importancia de la estadística en la formación básica de los estudiantes, adjuntó el curso de ESTADÍSTICA en su maya curricular, dando oportunidad a que los estudiantes puedan realizar investigaciones donde se aplique el uso de la estadística.

Apoyados en investigaciones realizadas en el Tecnológico de Costa Rica, replicamos con éxito los estudios sobre ansiedad matemática en la comunidad educativa; siendo los estudiantes los principales actores en el planteamiento, ejecución, análisis y desarrollo de la investigación.

¹ Colegio Científico Interamericano CATIE, Costa Rica. josemcatri@gmail.com

² Colegio Científico Interamericano CATIE, Costa Rica. poli.qa@hotmail.com

³ Colegio Científico Interamericano CATIE, Costa Rica. fiorela.felipe@live.com

Propuesta Didáctica para Habilidades de Estadística en Educación Diversificada utilizando PSPP

Danny Esteban Ramírez Lobo¹ & Erick Ángel Pizarro Carrillo²

Resumen

La implementación de la Reforma Matemática Costarricense en 2012 ha planteado un reto a los educadores nacionales, pues genera la necesidad de reinventarse en la preparación de estrategias de mediación que permitan responder a las necesidades educativas de las nuevas generaciones, más aún cuando la temática ha sufrido modificaciones, como lo es el caso de Estadística en Secundaria.

Esta propuesta pretende que, mediante el trabajo con una base de datos, dada por el docente, el estudiante profundice en la utilización de medidas estadísticas de posición y variabilidad, para así favorecer la capacidad de análisis de datos y no en el cálculo algorítmico mecánico. El estudiante calcula medidas de posición y variabilidad, confecciona diagramas de cajas y estandarizaciones. Se trabaja en lograr las habilidades de décimo y undécimo año.

El propósito al utilizar el programa libre PSPP es enlazar la Estadística con uno de los ejes transversales propuestos por el Ministerio de Educación Pública, el uso inteligente de la tecnología, para una clase más dinámica, que los estudiantes se interesen y despierten las competencias necesarias para ser mejores ciudadanos en la era digital.

¹ Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica. danny.ramirez.lobo@una.cr

² Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica. erick.pizarro.carrillo@una.cr

Kahoot para Habilidades de Probabilidad en Décimo Año

Danny Esteban Ramírez Lobo¹ & Erick Ángel Pizarro Carrillo²

Resumen

La Reforma Matemática Costarricense incorpora en sus planteamientos la necesidad de nuevas y mejores estrategias de mediación que permitan responder a las necesidades educativas de las nuevas generaciones. Este trabajo es una propuesta para Probabilidad, recientemente incluida en el currículo de Secundaria.

Pensando en esto y en busca de clases más dinámicas, se crea una aplicación con Kahoot la cual permite que el docente pueda evaluar las habilidades que los estudiantes deben lograr durante las lecciones del tema de Probabilidad. La misma se enmarca como parte del trabajo cotidiano, el cual tiene un peso mayor en la evaluación sumativa según las nuevas directrices ministeriales.

La interfaz de usuario que presenta Kahoot es intuitiva y agradable, permite que el docente interactúe fácilmente con la aplicación, manipule los diferentes comandos y genere diferentes instrumentos o herramientas didácticas, que le darán un enfoque diferente a la evaluación sumativa tradicional. La implementación de esta herramienta tecnológica es un elemento atractivo que motiva a los estudiantes a aprender matemática.

¹ Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica. danny.ramirez.lopez@una.cr

² Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica. erick.pizarro.carrillo@una.cr

Propuesta didáctica para la Enseñanza de la Estadística y Probabilidad para Noveno (9°) y Décimo (10°) año

Rebecca Paola Chaves Morales¹ & Uriel Gómez Castro² & Melissa Luna Fonseca³

Resumen

El Ministerio de Educación Pública (MEP) propone una serie de actividades para los temas de Estadística y Probabilidad para abarcar las habilidades que desean que los estudiantes alcancen. Resulta de gran importancia verificar si estas actividades realmente cumplen con las características necesarias para alcanzar los objetivos, ya que, como tal la Estadística y la Probabilidad son materias que hasta hace algunos años se comenzaron a impartir de manera profunda en los centros educativos costarricenses, por esto, existen pocas guías para los docentes en las cuales se explique cómo impartir dichas lecciones. Así que, en el presente trabajo se exploran las habilidades para Noveno y Décimo año, se proponen alternativas didácticas a las presentadas por el MEP, donde se aplican diversas metodologías de modo que los estudiantes puedan no sólo entender, sino aplicar los conceptos aprendidos a situaciones de la vida cotidiana y toma de decisiones.

¹ Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. rechavmor@gmail.com

² Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. urielgc1995@gmail.com

³ Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. melissaluna96@gmail.com

Elaboración de un instrumento de medición de las creencias de los docentes hacia los nuevos programas de estudio de matemáticas en secundaria

Carlos Alberto Monge Madriz¹ & Natalie Reyes Riotte²

Resumen

Lo presentado en esta ponencia corresponde a los resultados obtenidos en el trabajo final de graduación para optar por el grado de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos del Instituto Tecnológico de Costa Rica realizado en el 2017.

En el año 2012 el Consejo Superior de Educación aprobó nuevos programas de matemática para la educación primaria y secundaria. Con el objetivo de caracterizar los sistemas de creencias de los/as profesores/as de matemática de la educación media sobre estos nuevos programas, en la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica se formuló el proyecto de investigación “REMEyC: Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica: Evaluación de avance a tres años de aplicación y sistemas de creencias de los profesores sobre la reforma” a cargo del equipo de investigación integrado por el Dr. Luis Gerardo Meza Cascante, la Dra. Evelyn Agüero Calvo y la Dra. Zuleyka Suárez Valdés-Ayala.

Como objetivo específico de esa investigación se propuso “Identificar creencias que sobre los nuevos programas de matemática sustentan los/as profesores de matemática de la educación media”, lo que requiere de la elaboración de un instrumento de medida técnicamente diseñado y validado. Esta tesis responde precisamente a ese cometido: se ha elaborado y validado un instrumento para la medición de las creencias de los profesores y las profesoras de matemática de la educación media costarricense sobre la reforma educativa que se deriva de la aprobación de los nuevos programas de matemática por parte del Consejo Superior de Educación en el año 2012.

El diseño del instrumento se realizó mediante la ejecución de dos etapas secuenciales. En la primera se procedió a la redacción de 70 ítems a partir de la revisión de instrumentos de medida, de temáticas similares, y que habían sido utilizados en otras investigaciones; además del análisis de planteamientos de docentes obtenidos de grabaciones que el proyecto REMEyC generó para el logro de otro de sus objetivos. Este listado original fue reducido a uno de 30 ítems gracias a un primer filtro realizado por el Director de la tesis Dr. Luis Gerardo Meza Cascante, y con los ítems así seleccionados se conformó la primera versión del instrumento. Esta primera versión fue sometida al juicio de 15 expertos, dentro de los cuales destacaron profesionales en educación matemática de la Universidad Estatal a Distancia, la Universidad de Costa Rica, el Instituto Tecnológico de Costa Rica y asesores del Ministerio de Educación Pública, los cuales colaboraron en la etapa de evaluación de ítems, conservando, eliminando y modificando el contenido del instrumento que se tenía. Como resultado de esta etapa el instrumento quedó integrado por 25 ítems.

¹ Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. camonge@itcr.ac.cr

² Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. natyreyes.88@gmail.com



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

En la segunda etapa se realizó una prueba piloto con la participación de 51 docentes de matemáticas de 24 instituciones públicas distintas. Con los datos recabados se realizó un estudio psicométrico del instrumento tomando en cuenta los siguientes parámetros:

- Cálculo del índice de discriminación de los ítems

Después de realizar el cálculo de este parámetro para cada uno de los ítems, 5 de ellos discriminaban poco, por ende se procedió a eliminarlos. Se calculó nuevamente el índice de discriminación para los 20 ítems restantes, obteniendo resultados aceptables que permitieron concluir que todos los ítems discriminan muy bien.

- Confiabilidad del instrumento

La versión final del instrumento muestra una confiabilidad excelente al tener un “Alfa de Cronbach” de 0,932.

- El análisis de la unidimensionalidad de la escala por medio del análisis factorial

Primero se procedió a calcular los índices de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) y la prueba de esfericidad de Bartlett para evidenciar la adecuación de la muestra para realizar el análisis factorial. El índice de KMO que se obtuvo fue de 0.810, interpretándose como una buena adecuación muestral.

Con base en los resultados del estudio psicométrico se conformó la versión definitiva del instrumento de medida, que consta de 20 ítems.

Enseñanza de la Estadística a través de Proyectos de Investigación, una Experiencia de su Aplicación como Estrategia Didáctica con Futuros Docentes de Primaria

Mónica Mora Badilla¹

Resumen

Se ha señalado en repetidas ocasiones que la enseñanza de la estadística a través de proyectos de investigación es una estrategia didáctica altamente recomendada, en medida que ofrece grandes beneficios a nivel de apropiación, fortalecimiento y aplicación de contenidos estadísticos, así como en cuanto que permite un acercamiento con la realidad y la forma en las que los conocimientos se pueden aplicar a ésta. Además se fomentan, entre otras, las competencias de investigación y análisis de información, permitiendo al mismo tiempo promover el uso de las TIC, incluir temas transversales o incluso realizar trabajos interdisciplinarios. Es por ello que se decidió aplicar esta estrategia en un curso universitario creado para formar a futuros docentes de primaria en las áreas de estadística y probabilidad. En el presente trabajo se pretende mostrar la fundamentación de la elección de la estrategia, la metodología de aplicación de la misma, algunos resultados referentes a las apreciaciones de los alumnos participantes en el curso, algunos ejemplos de resultados de los trabajos elaborados por los mismos, así como un análisis de las bondades de la estrategia. El objetivo principal representa facilitar un ejemplo de la utilización de esta estrategia didáctica y evidenciar sus beneficios para promover su uso en grupos de distintos niveles educativos al trabajar el tema de estadística.

Palabras Clave

¹ Universidad de Costa Rica, Costa Rica. monica.morabadilla@ucr.ac.cr

El papel del parámetro en la construcción escolar de ideas estadística

Jose Armando Albert¹

Resumen

El parámetro juega un papel protagónico en la Estadística, pero una serie de dificultades con este concepto limitan a los estudiantes de apropiarse de las ideas importantes de la estadística. En esta investigación se muestran algunas de las más importantes dificultades cognitivas, epistemológicas y didácticas que se presentan alrededor del concepto de parámetro a lo largo de un curso de probabilidad y estadística.

¹ Tecnológico de Monterrey, México. alber@itesm.mx

La Enseñanza Determinista de la Probabilidad

Giovanni Sanabria Brenes¹

Resumen

El presente trabajo analiza las respuestas de docentes en formación, que ya cursaron un curso sobre probabilidad y son estudiantes del TEC de Costa Rica, en un test de situaciones problema de probabilidad con el fin de valorar el manejo que hacen de la aleatoriedad. En las respuestas se evidencia que algunos: no saben hacer explícito el espacio muestral ni la experiencia aleatoria, descuidan las hipótesis que se necesitan para utilizar la probabilidad como un modelo y dan respuestas deterministas a situaciones aleatorias, es decir piensan que hay una única respuesta correcta. ¿Será que se enseña la probabilidad de forma determinista?

¹ Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. gsanabria@itcr.ac.cr



Enseñanza de la Estadística para la Carrera de Informática, descripción de una experiencia

Ana Magali Salazar Avila¹ & Sandra Rodríguez Herrera²

Resumen

En el presente trabajo se describe la experiencia vivida en el curso de Estadística y Probabilidad impartido para la carrera de Ingeniería de Informática, durante el II Cuatrimestre del 2018. Como proyecto de aplicación, se propuso interrelacionar conceptos de la carrera con los de la estadística; enfocándose en la aprehensión de los conceptos de la disciplina estadística. Por ello, en esta investigación se destacan aspectos generales en cuanto a la importancia que tiene la Estadística, no sólo en la sociedad actual, sino como necesidad de formación para, específicamente, futuros profesionales de la Ingeniería en Informática. Se resalta, además, la trascendencia y necesidad de la implementación de proyectos atractivos y aplicados, basándose en la formación por competencias, para la enseñanza de la Estadística en la Educación Superior; lo que lleva a un reflexionar sobre un cambio en el desarrollo y evaluación del curso de Estadística.

¹ Universidad Técnica Nacional, Costa Rica. asalazaravila@gmail.com

² Universidad Técnica Nacional, Costa Rica. slu2935@yahoo.com

Ondas Probabilísticas: Una aplicación de la Probabilidad a la Mecánica Cuántica

Randall Alberto Brenes Gómez¹

Resumen

A diferencia del comportamiento que suelen tener lo que Newton llamaba: “cuerpos comunes” y que se rigen por sus tres leyes para el movimiento y que son objeto de estudio de la Mecánica Clásica, las partículas subatómicas muestran un comportamiento menos predecible, algunas ocasiones como partículas y otras como una onda. Probabilísticamente hablando, se ha estudiado ese comportamiento con lo que se conoce como un “Campo de Born”, ya que para tratar de aclarar algunas cuestiones físicas esto se vuelve muy importante.

Este trabajo tiene como uno de sus objetivos, dar una explicación simple al fenómeno del movimiento en Mecánica Cuántica, para finalizar haciendo un abordaje probabilístico del mismo.

¹ Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. ranbrenes@gmail.com



La necesidad del Empoderamiento docente en Costa Rica, desde un enfoque socioepistemológico

Didier Alberto Castro Méndez¹

Resumen

En esta investigación se analiza y explica el fenómeno de empoderamiento docente desde la perspectiva de la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, recordando la profesión docente como la más importante en la sociedad pues es la encargada de formar en distintas áreas a sus estudiantes. Es a partir del Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente (CINVESTAV, México) que se crean guías de trabajo en el área de la probabilidad y estadística para ser aplicadas en docente de matemáticas de educación secundaria en Costa Rica. Las cuales buscan generar un rediseño en el discurso Matemático Escolar y a su vez le permita afrontar nuevos retos de la disciplina y logre apropiarse del saber que enseña mediante la problematización del mismo y generar las interacciones didácticas con sus discentes creando significados del saber matemático escolar de ese momento. A través del empoderamiento docente se busca desarrollar dicha innovación educativa, la cuál es necesaria para los procesos educativos del país y específicamente en la enseñanza de las matemáticas.

¹ Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. dcastro@itcr.ac.cr



El sistema de inventarios. Una aplicación de los proceso de decisión de Markov

Gladys Denisse Salgado Suárez¹ & José Dionicio Zacarías Flores² & Hugo Adán Cruz Suárez³

Resumen

Dentro del área de la probabilidad, nacieron los Procesos de Decisión de Markov (PDM) quienes desde sus inicios han sido relevantes por la diversidad de aplicaciones a las que da solución, una de ellas es en el área de finanzas en la optimización de un sistema de inventarios. En un sistema de inventarios el problema consiste en determinar cuál es la cantidad óptima de artículos a producir (o comprar) en cada periodo de observación de tal manera que se generen los menores costos, considerando que existe incertidumbre en la demanda de los productos llevándonos así a buscar respuesta dentro de la probabilidad. En este trabajo mostramos la solución del problema mediante la teoría de PDM y el uso de la técnica de programación dinámica que determinará una estrategia óptima de operación.

¹ Universidad Autónoma de Puebla, México. gladys008@hotmail.com

² Universidad Autónoma de Puebla, México. jzacarias@cfm.buap.mx

³ Universidad Autónoma de Puebla, México. hcs@cfm.buap.mx

Iniciación a la estadística: representaciones semióticas en el primer ciclo de primaria

Mónica Pérez García¹ & José Dionicio Zacarías Flores²

Resumen

Uno de los propósitos de la educación básica en primaria es: Buscar, organizar, analizar e interpretar datos con un propósito específico, y luego comunicar la información que resulte de este proceso, este propósito se encuentra estructurado desde el primer ciclo de educación primaria, en el eje temático Análisis de datos, el cual responde a un contenido curricular del campo de formación: Pensamiento Matemático.

Con frecuencia, la escuela primaria es más severa que su antecesor, el jardín de niños, por esta razón se suele pensar que quienes asisten a ella son alumnos cuyas únicas acciones válidas son la obligación de aprender y cumplir con sus tareas. Bajo esta premisa, las escuelas, algunas veces, no tienen en cuenta que estos “estudiantes” aún son niños para quienes el juego es un vehículo importante de sus aprendizajes.

Si bien la intervención del docente desempeña un papel fundamental para impulsar el aprendizaje de los niños, es importante reconocer que, a sus escasos seis años, al comenzar la educación primaria, los alumnos ya cuentan con vastos conocimientos, los cuales pueden haber adquirido en una diversidad de ambientes (en el preescolar, la familia o en su comunidad) y por múltiples vías, como la escolaridad formal, el diálogo informal, los medios de comunicación, entre otros.

Para identificar el nivel cognitivo que tiene el alumno del primer ciclo de educación primaria (primero y segundo grado) con respecto al eje temático de Análisis de Datos, se plantea el uso del marco teórico de la Representaciones semióticas expuesta por Duval, de esta manera se pretende describir la transición entre varios registros de Estadística (figuras, gráficas, escritura simbólica, etc.), así como la organización y coordinación con la que cuenta en cada uno de los registros propuestos.

¹ Universidad Autónoma de Puebla, México. snepe@cfm.buap.mx

² Universidad Autónoma de Puebla, México. jzacarias@cfm.buap.mx

Algunos aspectos relacionados con la didáctica de la probabilidad y de la estadística en secundaria en Costa Rica.

Félix Núñez Vanegas¹

Resumen

En los nuevos programas de matemática de secundaria en Costa Rica se incluyeron contenidos de probabilidad y estadística, y además una metodología nueva para el abordaje de tales temas, en la que el estudiante es protagónico en este enfoque, pues se espera que él descubra el conocimiento a partir de la solución a una situación problema que se le propone. Es importante por tanto que el docente cuente con ideas teóricas acerca de cómo un estudiante piensa una vez enfrentado a una situación. Concretamente, se brindan algunas ideas de la Teoría de Campos Conceptuales explicados en el contexto de la probabilidad y de la estadística. Por tanto, con el fin de comentar los cambios que se han generado en los programas de estudio en secundaria, comentar los resultados en bachillerato en estos temas de estocástica del año 2017 y de generar conocimiento teórico acerca de cómo un estudiante procede una vez que se enfrenta a una situación problema, se ha realizado este trabajo. Veremos que los resultados en bachillerato en estos temas son deficitarios en general, por lo que es importante conocer propuestas que aporten en la mejora de esta problemática, por lo que también se comentan algunos trabajos realizados recientemente en Costa Rica sobre la didáctica de la probabilidad y la estadística.

¹ Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. fnunez@itcr.ac.cr



Propuestas de Enseñanza sobre Estadística y Probabilidad para 5° y 6° grado de Primaria en Costa Rica

Armando Gabriel Solís Zúñiga¹ & Adrián Gerardo Vega Flores²

Resumen

En este trabajo, se realizan propuestas de enseñanza para el tema de Estadística y Probabilidad en quinto y sexto año del Segundo Ciclo de la Educación General Básica de Costa Rica. Las propuestas se realizaron de acuerdo a los conocimientos y habilidades que se encuentran en el plan de estudio de Matemática del Ministerio de Educación Pública (MEP). Sin embargo, se presentan otras ideas para guiar a los profesores, ya que al ser temas que hasta hace poco tiempo se imparten en Costa Rica, no cuentan como mucho material didáctico. También esto ayudará a fomentar que las clases sean diferentes, dinámicas y no tan magistrales.

¹ Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. armalis98@gmail.com

² Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. . adrivega698@hotmail.com

TALLERES

Modelado basado en datos

Gabriele Kaiser¹

Resumen

La modelación está jugando un papel creciente en educación matemática debido a su gran importancia para la vida actual y futura de los estudiantes. Modelar es especialmente importante para educar, a los estudiantes, a convertirse en ciudadanos responsables.

El desarrollo de un modelo puede iniciar de reflexiones teóricas sobre cómo caracterizar mejor una situación dada del mundo real, entonces el modelo matemático se desarrolla a partir de consideraciones teóricas. Por otro lado, un modelo puede ser desarrollado por situaciones, las cuales son descritas principalmente por datos que luego refieren al conocimiento estadístico.

El taller iniciará con una descripción de varios tipos de modelos enfocados sobre modelos basados en datos y su importancia para la educación matemática. Posteriormente, se describirán varios ejemplos integrados en actividades de modelado, las cuales son adecuadas para fomentar las competencias de modelación. Por último, los participantes del taller tendrán la oportunidad de llevar a cabo ejemplos propios de modelado dentro de actividades desarrolladas en grupos pequeños.

¹ University of Hamburg, Germany & Australian Catholic University, Australia. Alemania.
gabriele.kaiser@uni-hamburg.de

Propuesta didáctica para la Enseñanza de la Estadística y Probabilidad para Undécimo (11^o) y Duodécimo (12^o) año

Rebecca Paola Chaves Morales¹ & Uriel Gómez Castro² & Melissa Luna Fonseca³

Resumen

El Ministerio de Educación Pública (MEP) propone una serie de actividades para los temas de Estadística y Probabilidad para abarcar las habilidades que desean que los estudiantes alcancen. Resulta de gran importancia verificar si estas actividades realmente cumplen con las características necesarias para alcanzar los objetivos, ya que, como tal la Estadística y la Probabilidad son materias que hasta hace algunos años se comenzaron a impartir de manera profunda en los centros educativos costarricenses, por esto, existen pocas guías para los docentes en las cuales expliquen cómo impartir dichas lecciones. Así que, en el presente trabajo se exploran las habilidades para Undécimo y Duodécimo año, se proponen alternativas didácticas a las presentadas por el MEP, donde se aplican diversas metodologías de modo que los estudiantes puedan no sólo entender, sino aplicar los conceptos aprendidos a situaciones de la vida cotidiana y toma de decisiones.

¹ Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. rechavmor@gmail.com

² Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. urielgc1995@gmail.com

³ Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. melissaluna96@gmail.com

El juego, herramienta de apoyo para la enseñanza de la estadística y probabilidad

Alexander Borbón Alpizar¹ & Grace Dayana Calderón Prado²

Resumen

En este taller se realizará una propuesta didáctica utilizando diferentes alternativas de juego como herramienta para la enseñanza de contenidos en el área de estadística y probabilidad. Las actividades serán dirigidas a los niveles de I y II ciclos de educación general básica y estas involucran utilización de material concreto que facilite la comprensión del estudiante de las situaciones y además la tecnología que permitirá hacer experimentos más complejos, creando un ambiente de aprendizaje diferente a la clase tradicional o bien complementándola. Algunas de las actividades serán juegos donde los estudiantes podrán manipular la situación y mediante estas se aplicarán conceptos sobre estadística y probabilidad, otras serán páginas web creadas por diferentes autores, donde se encuentran recursos didácticos que los estudiantes pueden manipular para el aprendizaje de estos contenidos.

¹ Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. aborbon@itcr.ac.cr

² Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. gdayanacp@gmail.com



Propuestas Didácticas para el Análisis de Datos y Probabilidad para las Etapas 9-12 de la NCTM

Siony Ulloa Araya¹ & Jenny Romero Boniche²

Resumen

El objetivo de este trabajo es mostrar propuestas didácticas de enseñanza, sobre el tema de Análisis de Datos y Probabilidad de las Etapas de 9 -12 de la secundaria del sistema educativo estadounidense. Esta propuesta está basada en el programa “National Council of Teachers of Mathematics” (NCTM). Además mediante este trabajo se busca motivar la implementación de distintas propuestas didácticas tomando en cuenta la visión, los principios y estándares para la enseñanza de la matemática de la propuesta curricular NCTM. Teniendo en cuenta que la NCTM no sugiere una guía de momentos para el desarrollo de la clase, nuestras propuestas son adaptadas a los momentos de clase que propone el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP), pero pueden ser aplicables en otros currículos.

¹ Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. julloa96@gmail.com

² Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. jenboniche@gmail.com

Herramientas de simulación para el diseño de actividades de aprendizaje de Probabilidad y Estadística

José Armando Albert Huerta¹ & Blanca Ruiz Hernández²

Resumen

Últimamente la estrategia de la Simulación está mostrando ser muy eficiente para el desarrollo de ideas probabilísticas y de mostrar la vinculación esencial entre probabilidad y Estadística. El taller permitirá explorar algunas técnicas de simulación así como de su incorporación a actividades de aprendizaje por parte del profesor participante.

¹ Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, México. alber@itesm.mx

² Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, México. bruiz@itesm.mx

Modelos de Pérdida Esperada y No Esperada en Riesgo de Crédito con nociones de Scoring

Welman Rosa Alvarado¹

Resumen

La principal actividad de la industria bancaria es la intermediación financiera, la misma que por sus características le genera mayores beneficios y por ende mayores riesgos. La actividad bancaria es sujeta a una serie de riesgos financieros destacándose el riesgo de crédito como parte de la gestión integral de riesgos. El ente regulador de cada país adapta normas para la gestión del riesgo de crédito propias de cómo se desarrolla la actividad bancaria, según el Comité de Basilea, organismo normativo mundial principal para la regulación prudencial de las entidades financieras. Dichas normas tienen como objeto establecer los elementos mínimos que deben observar las entidades para administrar los riesgos de conformidad con las leyes aplicables y estándares internacionales, acordes con la naturaleza y escala de sus actividades. En especial para la gestión del riesgo crediticio, existen normas en la que proporcionan los lineamientos para la adecuada gestión, adoptando políticas y procedimientos relacionados con el desarrollo de metodologías que permitan la identificación y medición, así como, el establecimiento de límites y mecanismos de monitoreo, control y mitigación de los niveles de exposición a este riesgo. En ese sentido, las entidades financieras se ven en la necesidad de cuantificar el riesgo de crédito, utilizando diferentes enfoques y metodologías desarrolladas en este ámbito, la utilización de modelos estadísticos y matemáticos para obtener una mejor calificación crediticia de parte de los deudores al momento de adquirir un préstamo, así como también, en el seguimiento de la administración del crédito. De la diversidad de modelos existentes, se presentan los modelos paramétricos, en donde, buscan calcular probabilidades de incumplimiento utilizando la información de un conjunto de variables que caracterizan a los deudores, pretender conocer las causas que los generan. Se tienen, los modelos scoring como el análisis discriminante y logit; además, la metodología Credimetric, en la que mide el riesgo de un portafolio, como un valor en riesgo, esto, a consecuencia de cambios en el valor de la deuda causados por variaciones de la calificación crediticia de cierto deudor. Según esta premisa mediante Credimetric, es posible estimar la probabilidad de incumplimiento utilizando matrices de transición por Cadenas de Markov en tiempo continuo, todo para estimar las pérdidas esperadas y no esperadas, en la que la entidad bancaria esperaría sufrir en su cartera de créditos durante cierto horizonte elegido. Los métodos de estimación para las pérdidas esperadas son: el modelo de simulación Montecarlo, el Binomial y la diversificación. El primero, considera como supuestos del modelo a la probabilidad de incumplimiento y la pérdida dado el incumplimiento, ajustándolo a una distribución de probabilidad como la Bernoulli y PERT. El segundo método, asume que el proceso es de la forma Binomial, donde la probabilidad de incumplimiento se explica con la desviación estándar, es decir, toma en cuenta la esperanza matemática y varianza de una distribución Binomial. El tercero, considera la correlación de segmentos dentro de un portafolio crediticio, estimando la pérdida no esperada de una manera diversificada. Estos métodos son aplicados utilizando el software @Risk y Risk Simulator.

¹Universidad del Salvador, Salvador. welman_16@hotmail.com

ARTICULOS COMPLETOS

Desarrollo de la Investigación en Razonamiento Inferencial Informal

Jesús Guadalupe Lugo Armenta¹ & Jaime I. García-García² & Blanca Rosa Ruíz Hernández³

Resumen

En este trabajo se informa sobre una Revisión Sistemática de la Literatura (SLR) basada en la búsqueda automatizada en WoS, Scopus, MathEduc y, adicionalmente, en el SERJ de forma manual. El objetivo es proporcionar un panorama general del desarrollo de la investigación en el Razonamiento Inferencial Informal (RII) para investigadores en Educación Estadística. De los resultados de la búsqueda, se seleccionaron 57 estudios primarios, identificando el énfasis, el contexto y la metodología de las investigaciones; así como los autores y artículos más citados. Se encontró que en los últimos años, el desarrollo de la investigación en RII se ha enfocado en la modelación y el uso de software dinámico; los resultados están dirigidos a investigadores y profesores. Cabe destacar que los artículos con mayor impacto, en cuestión del número de citas o promedio de citas por año, son aquellos estudios previos que se consideran íconos dentro de la Educación Estadística, ya que proponen un marco de trabajo enfocado en la integración de conceptos o ideas estadísticas como un sistema para el desarrollo del RII.

Palabras clave: Razonamiento Inferencial Informal, Inferencia Estadística, Educación Estadística, Revisión Sistemática de Literatura

Abstract

This paper reports on a Systematic Literature Review (SLR) based on the automated search in WoS, Scopus, MathEduc and, additionally, manually in SERJ. The aim is to provide an overview of the development of research in Informal Inferential Reasoning (IIR) for researchers in Statistical Education. From the search results, 57 primary studies were selected, identifying the emphasis, context and methodology; as well as the most cited authors and articles. It was found that in recent years, the development of research in the IIR has focused on the modeling and use of dynamic software; the results are aimed at researchers and professors. It should be noted that the articles with the greatest impact, in terms of the number of citations or average citations per year, are those previous studies that are considered essential within Statistical Education, since they propose a framework focused on integration of concepts or statistical ideas as a system for the development of the RII.

Keywords: Informal inferential reasoning, Statistical Inference, Statistical Education, Systematic literature review

¹ Universidad de Los Lagos, Chile. lupitalugo@hotmail.com

² Universidad de Los Lagos, Chile. jaime.garcia@ulagos.cl

³ Tecnológico de Monterrey, México. bruiz@itesm.mx



I. Introducción

La inferencia se considera un tópico de estudio relativamente nuevo dentro de la investigación en Educación Estadística; sin embargo, existen numerosas obras en la literatura que proporcionan elementos, bases conceptuales e interrogantes para nuevos estudios del Razonamiento Inferencial Informal (RII).

La inferencia estadística es considerada la meta de la Estadística, dada su relevancia para realizar análisis, emitir juicios y tomar decisiones en estudios estadísticos. Sin embargo, en diversas investigaciones (e.g., Watson, 2004; Bakker y Gravemeijer, 2004; Carver, 2006) se han reportado dificultades de los estudiantes para comprender la variabilidad del muestreo, las distribuciones muestrales y otros conceptos fundamentales para la inferencia estadística, así como la intolerancia a la ambigüedad. En correspondencia con las dificultades que se han puesto de manifiesto, han surgido algunas propuestas de cómo investigar y trabajar el RII en el aula de clases con el objeto de integrar y dar sentido a las ideas estadísticas, así como de desarrollar un acercamiento temprano a la Estadística Inferencial por parte de los estudiantes.

De acuerdo con Zieffler, Garfield, DelMas y Reading (2008), el RII se define como “la forma en la cual los estudiantes usan su conocimiento estadístico informal para plantear argumentos que apoyen inferencias sobre poblaciones desconocidas basándose en muestras observadas” (p.44), en donde el conocimiento estadístico informal es aquel conocimiento informal que poseen los estudiantes previamente a su contacto con la Estadística Inferencial.

Dada la relevancia que tienen los resultados y propuestas de las investigaciones del RII en la Educación Estadística, tanto para llevar al aula como para sentar las bases o precedentes para futuros estudios, es necesario conocer el estado actual y su desarrollo en la investigación. En este sentido, presentamos los resultados de una Revisión Sistemática de la Literatura (SLR, por sus siglas en inglés) sobre RII.

II. Acerca de la revisión de literatura

La SLR es una forma de estudio secundario que utiliza una metodología bien definida para identificar, analizar e interpretar todas las evidencias relacionadas con una pregunta de investigación, de manera imparcial y hasta cierto punto repetible (Kitchenham y Charters, 2007).

Para complementar la SLR se utiliza la técnica de mapeo sistemático, la cual se caracteriza por ofrecer una amplia revisión de estudios primarios de un tema específico, con el objetivo de identificar las evidencias que hay disponibles sobre él (Kitchenham y Charters, 2007); en este estudio, el RII. Para ello realizamos búsquedas automáticas en las siguientes bases de datos electrónicas: MathEduc (zentralblatt-math), Web of Science (WoS), Scopus y, adicionalmente, buscamos en el Statistics Education Research Journal (SERJ) de forma manual. La incorporación de la última revista se consideró por su relevancia en el campo de la enseñanza de la estadística y porque sólo hasta tiempos muy recientes (2013) se incorporó a las bases de datos electrónicas (Scopus).

A diferencia de una revisión bibliográfica, la SLR pretende vislumbrar el desarrollo de la investigación, en este estudio en particular, sobre RII, enfocándose en el énfasis, el contexto y la



metodología de las investigaciones actuales; así como en los autores y artículos más citados. Ofrece un panorama general sobre la investigación, no uno particular y, al basarse en criterios automatizados para la búsqueda, pretende ser un tanto imparcial y reproducible.

III. Método

Este estudio se realizó bajo las orientaciones propuestas por Kitchenham y Charters (2007) para llevar a cabo una SLR. Este trabajo comprendió tres fases: planeación, proceso y reporte de resultados. En la fase de planeación se realizó un protocolo para la revisión de literatura, en el cual se establece la interacción que deben tener los investigadores, se define el procedimiento para realizar la revisión, se formulan las preguntas de investigación, así como las estrategias de búsqueda, los criterios de inclusión y exclusión, la recopilación de datos y el análisis. En la segunda fase, el proceso se enfocó a la ejecución del protocolo de revisión. Finalmente, en la tercera fase, reporte de resultados, se elaboró un informe final.

3.1 Pregunta de investigación

La pregunta de investigación es *¿Cómo se ha desarrollado la investigación en RII?* De ella subyacen cuatro preguntas específicas (PE), que recogen, organizan y presentan información relevante sobre el desarrollo de la investigación en RII.

PE1: ¿A qué se le ha dado énfasis?

PE2: ¿Cuál es la metodología que siguen?

PE3: ¿Cuál es el contexto en el que se desarrollan?

PE4: ¿Cuáles son los autores y artículos más citados?

3.2 Bases de datos y estrategias de búsqueda

Se realizó la búsqueda de estudios primarios en el SERJ y en las bases de datos electrónicas MathEduc, WoS y Scopus. Inicialmente, se consideraron las palabras clave ‘inferencia estadística’ y ‘razonamiento inferencial’ para la búsqueda en las bases de datos electrónicas; después, se realizaron algunos pilotajes adaptando las palabras de búsqueda de acuerdo a las especificaciones de cada base de datos. Para almacenar y analizar la información recopilada, ésta se organizó en una hoja de Excel. A continuación, se muestran las especificaciones de las búsquedas:

- MathEduc
 1. ut: statistical inference & ut: inferential reasoning
 2. ti: inferential & ut: statistics

Periodo de tiempo: 2010-2018

Tipo de documento: Journal, libro y artículo

Definición de los operadores:

ut: term, kw, keyword



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

ti: title

&: and

- Web of Science (WoS)

TS= (statis* AND reas* NEAR infer*)

Redefinida por las categorías de WoS: (education educational research or psychology experimental or mathematics applied or social sciences interdisciplinary or social sciences mathematical methods or multidisciplinary sciences)

Índices: SCI-EXPANDED, SSCI, A&HCI, ESCI

Periodo de tiempo: 2010-2018

Definición de los operadores:

TS: topic

AND: y

NEAR: cerca de

- Scopus

TITLE-ABS-KEY(informal AND inferen*) AND (LIMIT-TO (SUBJAREA,"SOCI"))

Redefinida por revistas: (EXACTSRCTITLE) Educational Studies In Mathematics OR Mathematical Thinking And Learning OR Statistics Education Research Journal OR Teaching Statistics OR Journal Of Adolescent And Adult Literacy OR Child Development OR Cognition OR Informal Learning Perspectives Challenges And Opportunities OR Journal Of Science Teacher Education OR Journal Of Statistics Education OR Teaching And Learning Of Statistics International Perspectives OR Zdm International Journal On Mathematics Education OR Bolema Mathematics Education Bulletin OR Handbook Of Research On Educational Communications And Technology Fourth Edition

Definición de los operadores:

TITLE: título

ABS: abstract

KEY: palabras clave

AND: y

OR: o

LIMIT-TO: limitado a

SUBJAREA: sub-área

EXACTSRCTITLE: título exacto

3.3 Criterios de inclusión y exclusión

Los estudios primarios que se encontraron durante la búsqueda se evaluaron de acuerdo a los



criterios de inclusión y exclusión (ver Tabla 1) en el título, palabras claves y resumen. Como resultado se excluyeron aquellas publicaciones que no estaban vinculadas con el tema de investigación en que se enfoca el presente estudio. En esta SLR, se identificaron los documentos que abordan el RII desde 2010 a junio de 2018, así como estudios previos que se consideran íconos dentro de la Educación Estadística.

Tabla 1. Criterios de inclusión y exclusión

Criterios de inclusión	Criterios de exclusión
Tipo de publicación: capítulo de libro y artículo	Tipo de publicación: editorial
Razonamiento Inferencial Informal (RII)	Pertenece a otra área (e.g. medicina, sociología, biología, química, antropología)
Inferencia Estadística Informal (ISI)	Dentro de Educación Estadística, pero con una temática diferente a RII o ISI

3.4 Recolección de datos y análisis de datos

Se recuperaron los siguientes datos de los estudios primarios seleccionados: la base de datos electrónica de donde se obtuvieron, el año de publicación, título, autor(es), el resumen y el número de citas. Posteriormente, se procedió a analizar los datos para obtener información (énfasis, metodología y contexto) que nos ayude a responder las preguntas específicas declaradas en el apartado 3.1.

El *énfasis de la investigación* se refiere a los tópicos sobre los cuáles los investigadores proponen desarrollar el RII. De manera sucinta, hemos agrupado los diversos tópicos, de acuerdo a los aspectos comunes, en categorías, partiendo de la clasificación de Park (2013). En la Tabla 2 se presentan las categorías que emergen del análisis de los datos sobre el énfasis del estudio.

Tabla 2. Énfasis de la investigación

Código	Categoría	Tópicos
E01	Muestreo	Muestreo, muestra y tamaño de la muestra
E02	Modelación	Modelo, modelo de probabilidad y modelación
E03	Contexto	Contexto
E04	Gráficos	Boxplots
E05	Distribuciones	Distribución muestral a través de la noción de distribución y de la binomial
E06	Software dinámico	TinkerPlots, software, simulación
E07	Variabilidad	Variabilidad, incertidumbre y aleatoriedad en el muestreo
E08	Pruebas	Prueba de hipótesis, prueba t, intervalos de confianza, correlación y regresión lineal, análisis de varianza y contraste de hipótesis
E09	Medidas estadísticas	Medidas de tendencia central
E10	Análisis de datos	Análisis de datos, datos, recolección de datos y manejo de los datos
E11	Incertidumbre	Incertidumbre de una decisión
E12	Variabilidad del	Variabilidad del muestreo



VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos

	muestreo	
E13	Probabilidad	Variable aleatoria, variable estadística, probabilidad teórica y probabilidad experimental
E14	Integración	Integra varias categorías

Otro aspecto de interés fue el tipo de *metodología de la investigación* que se utiliza en cada uno de los estudios analizados. En la Tabla 3 se presentan las categorías consideradas del análisis de los datos sobre el método del estudio, éstas fueron tomadas de Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio (2014).

Tabla 3. Metodología de la investigación

Código	Categoría
M01	Cualitativo, no experimental, transaccional, descriptivo
M02	Cualitativo, no experimental, transaccional, exploratorio
M03	Mixto, no experimental, longitudinal, diseño de análisis evolutivo

El *contexto de la investigación* describe tres aspectos primordiales: 1) el nivel educativo donde se realizó el estudio (primaria, secundaria, medio superior, pregrado, postgrado); 2) los participantes que fueron sujetos de observación del estudio (estudiantes, profesores en formación, profesores en servicio y ciudadanos); y las personas a quienes van dirigidos los resultados de la investigación (profesores o investigadores). En la Tabla 4 se muestran las categorías consideradas sobre el contexto del estudio.

Tabla 4. Contexto de la investigación

Código	Nivel educativo	Código	Participantes	Código	Dirigido
CN01	Primaria (6-12 años)	CP01	Estudiantes	CD01	Investigadores
CN02	Secundaria (12-15 años)	CP02	Profesores en formación	CD02	Profesores
CN03	Medio superior (15-18 años)	CP03	Profesores en servicio		
CN04	Superior	CP04	Ciudadanos		
CN05	Postgrado				

Con respecto a los *estudios primarios* y a los *autores más citados*, el análisis se realiza por base de datos (WoS, Scopus, MathEduc, SERJ), enfocándonos a los que ocupan los primeros diez lugares. En el caso de los estudios primarios que se obtuvieron de MathEduc y SERJ, se realizó la búsqueda de número de citas por medio de Researchgate, debido a que la base de datos MathEduc no proporciona esta información y la revista SERJ se añadió a Scopus en el 2013, así que no se cuentan con índices previos. La intención de este estudio no es realizar comparaciones entre los números de citas de las diferentes bases, ya que no son equiparables; sin embargo, dan indicios del impacto que tienen estas publicaciones.

IV. Resultados

A continuación, se presentan los resultados del análisis de las referencias obtenidas por la SLR para dar respuesta a las cuatro preguntas específicas (PE) que guiaron la pesquisa, enfocándonos en el énfasis, el contexto y la metodología de los estudios primarios, así como en los autores y artículos más citados, para brindar un panorama general del desarrollo de la investigación en RII.

Bajo los criterios de inclusión y exclusión declarados, y con la cadena de búsqueda de las diferentes bases, se encontraron 57 artículos que han tocado el tema de RII del año 2010 a julio de 2018. Su referencia junto con la clave que se les asignó, en orden cronológico, se encuentra en el Anexo 1.

4.1 PE1: ¿A qué se le ha dado énfasis?

Uno de los aspectos importantes que se destaca en la SLR es el énfasis en el que se han enfocado las investigaciones en RII. Al analizar y clasificar los estudios primarios con las categorías que se presentan en la Tabla 2, encontramos que las pesquisas han puesto más énfasis en el tópico E08, pruebas (8/57), y E02, modelación (6/57), de manera exclusiva; así como en el E14 (11/57), en el que se incluyen investigaciones que no se enfocan en una categoría, sino que parten de una integración de varias de ellas. Por otro lado, el uso de software dinámico, E06 (11/57), también se encuentra presente en las investigaciones, aunque generalmente acompañando de alguna otra categoría. En la Tabla 5 se detalla esta clasificación.

Tabla 5. Clasificación enfocada en el énfasis de la investigación

Énfasis	Estudio primario	Énfasis	Estudio primario
E14	EP04, EP06, EP10, EP11, EP12, EP15, EP16, EP23, EP30, EP32, EP56	E06	EP09
E08	EP05, EP13, EP14, EP24, EP28, EP36, EP38, EP45	E09	EP33
E02	EP27, EP49, EP50, EP52, EP53, EP55	E11	EP47
E01	EP08, EP34, EP43	E01-E05	EP35
E10	EP01, EP44, EP46	E01-E07	EP41
E13	EP19, EP21, EP40	E03-E12	EP18
E02-E06	EP03, EP29, EP42	E05-E06	EP48
E01-E06	EP26, EP31	E06-E10	EP7
E01-E12	EP21, EP37	E09-E10	EP54
E03-E06	EP20, EP39	E11-E13	EP25
E03	EP17	E01-E06-E07	EP57
E04	EP02	E02-E03-E09	EP51

4.2 PE2: ¿Cuál es la metodología que siguen?

El 56.14% de los estudios analizados siguen una metodología cualitativa con un diseño no experimental, transeccional y descriptivo, M01; mientras que el 42.11%, sigue la misma



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

metodología anterior, pero enfocada en lo exploratorio, M02. De estos últimos, en su mayoría se presentan reflexiones teóricas, propuestas de marcos de trabajo, ideas y tipos de tareas para desarrollar el RII. De acuerdo con Hernández Sampieri et al. (2014) lo anterior indica que, dentro de la Educación Estadística, el RII es un área de investigación novedosa, puesto que la mayoría de los estudios primarios únicamente ha medido o recogido información con la finalidad de describir el fenómeno y sus características. En la Tabla 6 se presenta la clasificación de acuerdo a tipo de metodología.

Tabla 6. Clasificación enfocada en la metodología de la investigación

Metodología	Estudio primario
M01	EP01, EP07, EP08, EP09, EP12, EP13, EP14, EP17, EP19, EP21, EP24, EP25, EP27, EP28, EP31, EP32, EP33, EP34, EP35, EP38, EP39, EP40, EP41, EP42, EP44, EP47, EP48, EP49, EP51, EP52, EP53, EP54
M02	EP02, EP03, EP04, EP05, EP06, EP10, EP11, EP15, EP16, EP18, EP20, EP22, EP23, EP26, EP29, EP30, EP36, EP37, EP43, EP45, EP46, EP50, EP55, EP57
M03	EP56

4.3 PE3: ¿Contexto en el que se desarrollan?

Otro aspecto de interés en la presente pesquisa es el contexto en el que se han desarrollado los estudios primarios. Al clasificar las investigaciones por nivel educativo, se destaca que un número considerable se han llevado a cabo en el nivel básico: primaria, CN01, y secundaria, CN02, 22/57 y 8/57, respectivamente. Al analizar el tipo de sujetos que participaron en los estudios, se observó que la mayoría de las investigaciones se realizaron sólo con estudiantes, CP01 (61.4%); cabe destacar que 11/57 estudios se ubicaron en la categoría ‘No aplica’, ya que son propuestas de marcos de trabajo o reflexiones teóricas. Asimismo, dentro del contexto se analizó hacia quién están dirigidos los estudios: el 87.72% de las investigaciones en RII está dirigido tanto a profesores (CD01) como investigadores (CD02), mientras que los demás únicamente a investigadores. En las Tablas 7, 8 y 9, se presentan las clasificaciones de los estudios primarios de acuerdo al nivel educativo, a los participantes, y a quienes están dirigidos.

Tabla 7. Clasificación enfocada en el nivel educativo donde se desarrolla la investigación

Nivel educativo	Estudio primario
CN01	EP01, EP07, EP08, EP11, EP12, EP14, EP16, EP17, EP23, EP25, EP27, EP33, EP34, EP39, EP40, EP46, EP48, EP49, EP50, EP52, EP54, EP55
CN02	EP9, EP15, EP18, EP20, EP21, EP22, EP29, EP51
CN03	EP2, EP24, EP26, EP32
CN04	EP19, EP28, EP35, EP38, EP53, EP56
CN01-CN02	EP31
CN01-CN02-CN03	EP44
CN01-CN02-CN03-CN04	EP4
CN02-CN03	EP3, EP41, EP47



VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos

CN03-CN04	EP13, EP36, EP42
CN04-CN05	EP45
No aplica	EP5, EP06, EP10, EP30, EP37, EP43, EP57

Tabla 8. Clasificación enfocada en los participantes de la investigación

Trabaja con	Estudios primarios
CP01	EP01, EP07, EP08, EP09, EP13, EP14, EP16, EP17, EP18, EP21, EP22, EP23, EP24, EP25, EP27, EP28, EP29, EP31, EP33, EP34, EP35, EP38, EP39, EP40, EP41, EP42, EP46, EP47, EP48, EP49, EP50, EP51, EP52, EP54, EP55
CP02	EP12, EP19, EP53, EP56
CP03	EP20, EP32
CP04	EP05
CP01-CP03	EP2, EP11, EP44
CP01-CP02-CP03	EP45
No aplica	EP3, EP4, EP6, EP10, EP15, EP26, EP30, EP36, EP37, EP43, EP57

Tabla 9. Clasificación enfocada hacia quien está dirigida la investigación

Trabaja con	Estudios primarios
CD01-CD02	EP01, EP02, EP03, EP04, EP07, EP08, EP09, EP10, EP11, EP12, EP13, EP14, EP15, EP16, EP17, EP18, EP19, EP20, EP21, EP22, EP24, EP25, EP26, EP27, EP28, EP29, EP31, EP33, EP34, EP35, EP36, EP37, EP38, EP39, EP40, EP41, EP42, EP43, EP44, EP45, EP46, EP47, EP48, EP49, EP50, EP51, EP52, EP54, EP55, EP57
CD01	EP05, EP06, EP23, EP30, EP32, EP53, EP56

4.4 PE4: ¿Cuáles son los autores y artículos más citados?

Otro punto de interés que surgió fue identificar el autor y los artículos más citados. Esto con miras a destacar el impacto que han tenido en las investigaciones en RII. En la Tabla 10 se presentan los autores más citados de los estudios primarios analizados en cada una de las bases de datos, que son: Dani Ben-Zvi, Arthur Bakker, Katie Makar y Maxine Pfannkuch.

Tabla 10. Autor más citado en WoS, Scopus y Researchgate

Lugar	WoS		Scopus		Researchgate	
	Autor	Promedio de citas/año	Autor	Número de Citas	Autor	Número de Citas
1	Dani Ben-Zvi	4,51	Arthur Bakker	122	Katie Makar	266
2	Arthur Bakker	4,26	Dani Ben-Zvi	72	Arthur Bakker	181
3	Maxine Pfannkuch	3,88	Katie Makar	62	Dani Ben-Zvi	178
4	Katie Makar	2,78	Jan Derry	54	Andee Rubin	106



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

5	Chris J. Wild	2,5	Maxine Pfannkuch	45	Andrew Zieffler, Joan Garfield	75
6	Sandra R. Madden	2,25	Chris J. Wild	26	Robert C. DelMas	72
7	Adri Dierdorp	1,88	Lyn D. English	23	Allan J. Rossman	71
8	Harrie Eijkelhof	1,88	Keren Aridor-Berger	20	Maxine Pfannkuch	70
9	Jan van Maanen	1,88	Clifford Konold	18	Chris Reading	64
10	Alexander Pollatsek, Clifford Konold, Efi Paparistodemou, Ilze Ziedins, Maria Meletiou-Mavrotheris, Nicholas J. Horton, Sibel Kazak, William Finzer	1,75	Adri Dierdorp, Harrie Eijkelhof, Jan van Maanen, Sandra R. Madden	17	Efi Paparistodemou, Maria Meletiou-Mavrotheris	54

El detalle de los diez estudios primarios que tienen un mayor promedio de citas o número de citas, según sea el caso, se encuentran en la Tabla 11. Los artículos más citados por base de datos son: en WoS, *The reasoning behind informal statistical inference* (EP16), de Makar, Bakker y Ben-Zvi; en Scopus, *Lessons from inferentialism for statistics education* (EP23), de Bakker y Derry; y en Researchgate, *A framework for thinking about informal statistical inference* (EP11), de Makar y Rubin.

Tabla 11. Artículo más citado en WoS, Scopus y Researchgate

Lugar	WoS		Scopus		Researchgate	
	Artículo	Promedio de citas por año	Artículo	No. citas	Artículo	No. citas
1	EP16	2,38	EP23	54	EP11	106
2	EP24	1,88	EP16	27	EP04	64
3	EP22, EP34	1,75	EP27	21	EP16	62
4	EP18	1,38	EP18	19	EP03	51
5	EP17	1,13	EP24	17	EP25	41
6	EP37, EP55	1	EP25	16	EP17, EP08	40
7	EP41	0,75	EP17	13	EP12	34
8	EP20	0,5	EP21	12	EP18	32
9	EP33	0,4	EP22	10	EP24	31
10	EP40	0,33	EP43, EP44	8	EP34, EP09	28



V. Reflexiones finales

El análisis de las investigaciones mostradas en el anexo, producto de una Revisión Sistemática de la Literatura, deja evidencia cómo se ha desarrollado la investigación en el Razonamiento Inferencial Informal. Se identificaron 57 estudios primarios que permiten vislumbrar el desarrollo que ha tenido el RII desde 2010 hasta la actualidad; se identificó, organizó y clasificó la información que se obtuvo mediante la búsqueda automatizada en las bases de datos WoS, Scopus y MathEduc y, de forma manual en el SERJ; para poder dar respuesta a nuestra pregunta de investigación.

El orden cronológico que se empleó en la clave de los artículos encontrados permitió evidenciar que, en los inicios del RII, la temática de los estudios vertía principalmente sobre reflexiones teóricas y propuestas del tipo de tareas que permitieran su desarrollo en el estudiante, enfocados en categorías como: análisis de datos, gráficos, contexto, pruebas e integración de conceptos y/o ideas estadísticas. Actualmente, las investigaciones tienen mayor énfasis en la modelación y el uso de software dinámico; éste último acompañado de categorías como muestreo, contexto, y la modelación misma. Cabe destacar que, independientemente de que el énfasis de las investigaciones haya cambiado, se siguen desarrollando estudios donde se realizan reflexiones teóricas, aunque en menor proporción, y proponiendo marcos de trabajo derivados de sus resultados de investigación. Lo que es bastante coherente con los diseños metodológicos que se siguen en casi todas las investigaciones: experimental y descriptivo.

Particularmente, los estudios primarios EP16, EP23 y EP11 (artículos más citados en WoS, Scopus y Researchgate, respectivamente) presentan un diseño metodológico exploratorio, en el cual cada uno reporta una propuesta de marco de trabajo para desarrollar el RII; todos con énfasis en la categoría de integración (E14).

Por otro lado, aunque a lo largo del desarrollo del RII en su mayoría se ha trabajado con estudiantes, en los últimos tres años se detectó un incremento en las publicaciones que tienen como sujetos de estudio a profesores (en formación y en servicio) dirigidas principalmente a investigadores y profesores. Aunque esta SLR se encuentra limitada por las palabras clave utilizadas en la búsqueda, las bases de datos incluidas y el periodo de tiempo en que fueron publicados los estudios primarios, el mapeo es una de las metodologías con mayor confiabilidad cuando se busca una visión general del desarrollo de la investigación en un área (Cooper, 2016). El proceso de selección fue lo más riguroso posible y se realizó en dos etapas, donde los estudios primarios dudosos fueron evaluados más profundamente para ser aceptados o rechazados en una segunda etapa. El presente estudio brinda información útil sobre la identificación de temas y desafíos relevantes en la investigación en RII.

Bibliografía

- [1] Bakker, A. y Gravemeijer, K. P. (2004). Learning to reason about distribution. En *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 147-168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.



- [2] Carver, R. (2006). Ambiguity intolerance: An impediment to inferential reasoning. En *ASA Section on Statistical Education*, (pp. 2248-2245).
- [3] Cooper, D. (2016). What is a mapping study? *Journal of the Medical Library Association*, 104(1), 76-78.
- [4] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.
- [5] Kitchenham, B. y Charters, S. (2007). Guidelines for performing systematic literature reviews in software engineering. Keele University and Durham University Joint Report.
- [6] Park, J. (2013). Designing an Assessment to Measure Students Inferential Reasoning in Statistics: The First Study, Development of a Test Blueprint. *Research in Mathematical Education*, 17(4), 243-266.
- [7] Watson, J. M. (2004). Developing reasoning about samples. En *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 277-294). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- [8] Zieffler, A., Garfield, J. B., DelMas, R. y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40-58.

Referencias de los artículos obtenidos por la SLR

Código	Artículo
EP01	Watson, J. M. y Callingham, R. A. (1997). Data cards: An introduction to higher order processes in data handling. <i>Teaching Statistics</i> , 19, 12-16.
EP02	Pfannkuch, M. (2006). Informal inferential reasoning. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), <i>Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics</i> . Salvador, Bahia, Brazil: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education.
EP03	Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 7(2), 5-19.
EP04	Zieffler, A., Garfield, J. B., DelMas, R. y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 7(2), 40-58.
EP05	Bakker, A., Kent, P., Derry, J., Noss, R. y Hoyles, C. (2008). Statistical inference at work: Statistical process control as an example. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 7(2), 130-145.
EP06	Beyth-Marom, R., Fidler, F. y Cumming, G. (2008). Statistical cognition: towards evidence-base practice in statistics and statistics education. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 7(2), 20-39.
EP07	Paparistodemou, E. y Meletiou-Mavrotheris, M. (2008). Developing young students' informal inference skills in data analysis. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 7(2), 83-106.
EP08	Pratt, D., Johnston-Wilder, P., Ainley, J. y Mason, J. (2008). Local and global thinking in statistical inference. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 7(2), 107-129.
EP09	Watson, J. M. (2008). Exploring beginning inference with novice grade 7 students. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 7(2), 59-82.
EP10	Reading, C. (2009). Cognitive development of informal inferential reasoning. <i>57th Session of the International Statistical Institute</i> , Durban South Africa.



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

EP11	Makar, K. y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 8(1), 82-105.
EP12	Leavy, A. M. (2010). The challenge of preparing preservice teachers to teach informal inferential reasoning. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 9(1), 46-67.
EP13	Weinberg, A., Wiesner, E. y Pfaff, T. J. (2010). Using informal inferential reasoning to develop formal concepts: Analyzing an Activity. <i>Journal of Statistics Education</i> , 18(2), 1-24.
EP14	Stohl Lee, H., Angotti, R. L. y Tarr, J. E. (2010). Making comparisons between observed data and expected outcomes: student's informal hypothesis testing with probability simulation tools. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 9(1), 68-96.
EP15	Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. In <i>Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education</i> (pp. 235-246). Springer, Dordrecht.
EP16	Makar, K., Bakker, A. y Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. <i>Mathematical Thinking and Learning</i> , 13(1-2), 152-173.
EP17	Gil, E. y Ben-Zvi, D. (2011). Explanations and context in the emergence of students' informal inferential reasoning. <i>Mathematical Thinking and Learning</i> , 13(1-2), 87-108.
EP18	Pfannkuch, M. (2011). The role of context in developing informal statistical inferential reasoning: A classroom study. <i>Mathematical Thinking and Learning</i> , 13(1-2), 27-46.
EP19	Ruiz, B., Batanero, C. y Arteaga, P. (2011). Vinculación de la variable aleatoria y estadística en la realización de inferencias informales por parte de futuros profesores. <i>Bolema, Rio Claro (SP)</i> , 24 (39), 431-449.
EP20	Madden, S. R. (2011). Statistically, technologically, and contextually provocative tasks: Supporting teachers' informal inferential reasoning. <i>Mathematical Thinking and Learning</i> , 13(1-2), 109-131.
EP21	Arnold, P., Pfannkuch, M., Wild, C. J., Regan, M. y Budgett, S. (2011). Enhancing students' inferential reasoning: from hands-on to "movies". <i>Journal of Statistics Education</i> , 19(2).
EP22	Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W., Horton, N.J. y Kazak, S. (2011). Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. <i>Mathematical Thinking and Learning</i> , 13(1-2), 68-86.
EP23	Bakker, A. y Derry, J. (2011). Lessons from inferentialism for statistics education. <i>Mathematical Thinking and Learning</i> , 13(1-2), 5-26.
EP24	Dierdorff, A., Bakker, A., Eijkelhof, H. y van Maanen, J. (2011). Authentic practices as contexts for learning to draw inferences beyond correlated data. <i>Mathematical Thinking and Learning</i> , 13(1-2), 132-151.
EP25	Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K. & Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. <i>ZDM</i> , 44(7), 913-925.
EP26	Watson, J. y Chance, B. (2012). building intuitions about statistical inference based on resampling. <i>Australian Senior Mathematics Journal</i> , 26(1), 6-18.
EP27	English, L. D. (2012). Data modelling with first-grade students. <i>Educational Studies in Mathematics</i> , 81(1), 15-30.
EP28	Trumpower, D. L. (2013). Formative use of intuitive analysis of variance. <i>Mathematical Thinking and Learning</i> , 15(4), 291-313.



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

EP29	Prodromou, T. (2013). Informal inferential reasoning using a modelling approach within a computer-based simulation. En <i>Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education</i> , 4, 57-64.
EP30	Park, J. (2013). Designing an Assessment to Measure Students Inferential Reasoning in Statistics: The First Study, Development of a Test Blueprint. <i>Research in Mathematical Education</i> , 17(4), 243-266.
EP31	Watson, J. M. (2012). Resampling with TinkerPlots. <i>Teaching Statistics: an international journal for teachers</i> , 35(1), 32-36.
EP32	Duarte, J. A. J. y Cazares, S. I. (2014). Comprensión y razonamiento de profesores de Matemáticas de bachillerato sobre conceptos estadísticos básicos. <i>Perfiles educativos</i> , 36(146), 14-29.
EP33	Makar, K. (2014). Young children's explorations of average through informal inferential reasoning. <i>Educational Studies in Mathematics</i> , 86(1), 61-78.
EP34	Meletiου-Mavrotheris, M. y Papanastasiou, E. (2015). Developing students' reasoning about samples and sampling in the context of informal inferences. <i>Educational Studies in Mathematics</i> , 88(3), 385-404.
EP35	Noll, J., & Hancock, S. (2015). Proper and paradigmatic metonymy as a lens for characterizing student conceptions of distributions and sampling. <i>Educational Studies in Mathematics</i> , 88(3), 361-383.
EP36	Batanero, C. y Díaz, C. (2015). Aproximación informal al contraste de hipótesis. <i>Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria</i> , 2, 207-214.
EP37	Garfield, J., Le, L., Zieffler, A. y Ben-Zvi, D. (2015). Developing students' reasoning about samples and sampling variability as a path to expert statistical thinking. <i>Educational Studies in Mathematics</i> , 88(3), 327-342.
EP38	Trumpower, D. L. (2015). Aspects of first year statistics students' reasoning when performing intuitive analysis of variance: effects of within-and between-group variability. <i>Educational Studies in Mathematics</i> , 88(1), 115-136.
EP39	Ben-Zvi, D. y Aridor-Berger, K. (2016). Children's wonder how to wander between data and context. En <i>The Teaching and Learning of Statistics</i> (pp. 25-36). Springer, Cham.
EP40	Hourigan, M. y Leavy, A. (2016). What do the stats tell us? Engaging elementary children in probabilistic reasoning based on data analysis. <i>Teaching Statistics</i> , 38(1), 8-15.
EP41	Pfannkuch, M., Arnold, P. y Wild, C. J. (2015). What I see is not quite the way it really is: Students' emergent reasoning about sampling variability. <i>Educational Studies in Mathematics</i> , 88(3), 343-360.
EP42	Noll, J., Gebresenbet, M. y Glover, E. D. (2016). A modeling and simulation approach to informal inference: Successes and challenges. En <i>The teaching and learning of statistics</i> (pp. 139-150). Springer, Cham.
EP43	Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. <i>Educational Studies in Mathematics</i> , 88(3), 291-303.
EP44	Konold, C., Higgins, T., Russell, S. J. y Khalil, K. (2015). Data seen through different lenses. <i>Educational Studies in Mathematics</i> , 88(3), 305-325.
EP45	Dolor, J. y Noll, J. (2015). Using guided reinvention to develop teachers' understanding of hypothesis testing concepts. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 14(1), 60-89.
EP46	Makar, K. (2016). Developing young children's emergent inferential practices in



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

	statistics. <i>Mathematical Thinking and Learning</i> , 18(1), 1-24.
EP47	Henriques, A. y Oliveira, H. (2016). Students' expressions of uncertainty in making informal inference when engaged in a statistical investigation using Tinkerplots. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 15(2), 62-80.
EP48	Kazak, S., Fujita, T. y Wegerif, R. (2016). Students' informal inference about the binomial distribution of "bunny hops": A dialogic perspective. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 15(2), 46–61.
EP49	Aridor, K. y Ben-Zvi, D. (2017). The Co-Emergence of Aggregate and Modelling Reasoning. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 16(2), 38-63.
EP50	Braham, H. y Ben-Zvi, D. (2017). Students' emergent articulations of statistical models and modeling in making informal statistical inferences. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 16(2), 116-143.
EP51	Büscher, C. y Schnell, S. (2017). Students' emergent modelling of statistical measures – A case study. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 16(2), 144-162.
EP52	Doerr, H. M., Delmas, R. y Makar, K. (2017). A modeling approach to the development of students' informal inferential reasoning. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 16(2), 86-115.
EP53	Kazak, S. y Pratt, D. (2017). Pre-service mathematics teachers' use of probability models in making informal inferences about a chance game. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 16(2), 287-304.
EP54	Watson, J. y English, L. (2017). Reaction time in Grade 5: Data collection within the Practice of Statistics. <i>Statistics Education Research Journal</i> , 16(1), 262-293.
EP55	English, L. D. y Watson, J. (2018). Modelling with authentic data in sixth grade. <i>ZDM</i> , 50(1-2), 103-115.
EP56	de Vetten, A., Schoonenboom, J., Keijzer, R., & van Oers, B. (2018). The development of informal statistical inference content knowledge of pre-service primary school teachers during a teacher college intervention. <i>Educational Studies in Mathematics</i> , 99, 217-234.
EP57	Dinov, I. D., Palanimalai, S., Khare, A., & Christou, N. (2018). Randomization-based statistical inference: A resampling and simulation infrastructure. <i>Teaching Statistics</i> , 40(2), 64-73.

Niveles de lectura de estudiantes de licenciatura: el caso de una tabla y una gráfica de líneas

Elizabeth-H. Arredondo¹ & Jaime I. García-García² & César López Calvario³

Resumen

La enseñanza de la estadística ha cobrado auge en los últimos años, debido a ser considerada en las actuales políticas educativas como la promotora de una competencia necesaria en la sociedad. Esta competencia destaca entre sus puntos la capacidad de leer e interpretar información, de manera adecuada y crítica, presentada en cualquier tipo de representación. Se presenta un reporte de investigación cuyo objeto de estudio es la interpretación que realizan 36 estudiantes de licenciatura que llevaron a cabo la tarea de leer e interpretar una tabla y una gráfica de líneas. Esto con el objetivo de analizar el nivel de lectura que muestran al realizar dicha tarea, e identificar si el tipo de representación promueve niveles superiores de lectura; considerando dos marcos de referencia: los niveles de lectura de Curcio (1989) y Friel, Curcio y Bright (2001) para el análisis de la comprensión gráfica, y la jerarquía propuesta por Aoyama (2007) para la valoración crítica de la información y su integración con el contexto. El análisis de las interpretaciones evidencia que la mayoría de los estudiantes alcanzan el nivel 2, *leer dentro de los datos*, al enfocarse en la comparación de los datos; pocos jóvenes pudieron alcanzar los niveles superiores 3 y 4, *leer más allá de los datos* y *leer detrás de los datos*, respectivamente, al dar una predicción sobre una tendencia de los datos, o bien, al proporcionar hipótesis explicativas en términos de los datos que se muestran en la tabla o gráfica. Se observa que la valoración crítica de la información por parte del estudiante, se encuentra directamente relacionada con su conocimiento sobre el contexto, siendo este el que determina y caracteriza el nivel superior 4. Además, con base en nuestro análisis, podemos mencionar que la representación gráfica favorece en la interpretación de los estudiantes participantes para alcanzar niveles superiores de lectura.

Palabras clave: niveles de lectura, interpretación, tabla estadística, gráfica de líneas.

Abstract

The teaching of statistics has become increasingly relevant in recent years since current teaching policies consider it promotes a much needed competence in society. This competence involved the ability to read and interpret information in a suitable and

¹ Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos, Chile.
elizabeth.hernandez@ulagos.cl

² Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos, Chile.
jaime.garcia@ulagos.cl

³ Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.
nass1_2012@hotmail.com



critical way, regardless of the type of representation. A research report is presented whose object of study is the interpretation that 36 college students provide after completing a task involving reading and interpretation of a table and a line graph. Our objective was to analyze the reading level shown by the students when completing the task and identify whether the type of representations promotes higher levels of reading. To do so, we considered two frameworks: the reading levels by Curcio (1989) and Friel, Curcio, and Bright (2001) for the analysis of graph comprehension and the hierarchy proposed by Aoyama (2007) to critically evaluate information and its integration to the context. The analysis of the interpretations evidenced that most of the students reached level 2, read within the data, by focusing on data comparison. Only a few reached levels 3 and 4, read beyond the data and read behind the data, respectively, by providing a prediction on data trend or explanatory hypotheses regarding the data in the chart or graph. We observed that the students' critical evaluation is directly related to their knowledge of the context, which determines and characterizes the higher level 4. In addition, based on our analysis the type of graphic representation promotes the participants' interpretation to reach higher reading levels.

Keywords: reading levels, interpretation, statistical table, line graph.

I. Introducción

Actualmente, en la enseñanza de la Estadística es importante que el estudiante desarrolle una *cultura estadística* que le permita participar y desenvolverse en nuestra sociedad; por ejemplo, los medios de comunicación con los que tiene contacto, hacen uso de tablas y gráficas estadísticas para divulgar información política, deportiva, social, cultural, entre otras. La investigación en esta disciplina reconoce este hecho en actividades tan cotidianas como la lectura de la prensa (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013) o la interpretación de información estadística que se puede encontrar en diversos contextos (Gal, 2002), más aún, se enfatiza que esta debe ser evaluada con una mirada crítica para tomar decisiones y entender nuestro entorno (Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín, 2015). En particular, la interpretación de datos estadísticos, representados en gráficas y tablas, es parte esencial de la cultura estadística, que Gal (2002) considera como la asociación de dos capacidades:

- a) interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, y b) discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante (p. 2-3).

El objetivo del estudio es explorar la interpretación que realizan 36 estudiantes de licenciatura cuando leen información estadística representada en una tabla y una gráfica de líneas, así como identificar si el tipo de representación promueve niveles superiores de lectura. Esto sin que se guíe al alumno en su lectura a través preguntas, ya que en su cotidianidad este se enfrenta a la lectura de información divulgada en libros, revistas, periódicos, televisión o internet. Con base en lo anterior, se establecieron las siguientes preguntas que guiaron nuestra investigación: ¿Qué niveles de lectura exhiben los estudiantes de licenciatura cuando realizan la interpretación de información



representada en una tabla y una gráfica de líneas? ¿Qué tipo de representación, bajo el mismo contexto, promueve niveles superiores de lectura en los estudiantes?

II. Algunos estudios sobre lectura de tablas y gráficas estadísticas

Son escasos los estudios empíricos que informan sobre la lectura e interpretación de tablas y gráficas estadísticas por estudiantes de licenciatura. A continuación, en la Tabla 1 se presentan, de manera conjunta, algunas investigaciones relacionadas con nuestro trabajo que poseen participantes con características similares a los nuestros.; esto con el fin de facilitar la lectura e interpretación de los resultados.

Tabla 1. Estudios empíricos sobre lectura de gráficos estadísticos

Investigaciones	Autores	Tipos de problemas planteados y Resultados
Profesores en formación	Burgess (2002) Monteiro y Ainley (2007) Batanero, Arteaga y Ruiz (2010)	Problemas abiertos para construcción y en contexto Dificultades en producción e interpretación de gráficos en contextos. Bajos niveles de lectura.
	Rodríguez y Sandoval (2012) Díaz-Levicoy, Sepúlveda, Vásquez y Opazo (2016)	Problemas con preguntas dirigidas Bajos niveles de lectura en gráficos
	García-García, López y Arredondo (2018) Gea, Arteaga y Cañadas (2017) Arteaga (2011)	Problemas abiertos para solo la lectura del gráfico y situados en un contexto. Bajos niveles de lectura en gráficos
En estudiantes de educación media o básica (jóvenes o adultos)	Eudave (2009)	Problemas con preguntas dirigidas Bajos niveles de lecturas de gráficos.

La Tabla 1 evidencia que la investigación que se realiza en gran parte de América Latina se centra en el análisis de la formación de profesores, al inferirles a estos la responsabilidad de formar una cultura estadística en los estudiantes; esta situación responde a las políticas educativas de los países pertenecientes a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) que se alinean a los saberes solicitados por el Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA) (Pedró, 2012). Enseguida se amplía la información respecto a los resultados de investigaciones anteriores.

Burgess (2002) realizó un estudio con 30 estudiantes, que cursaban el primer año, en formación para profesores de educación primaria, encontrando que únicamente 20% fue capaz de producir gráficos adecuados y el 50% interpretó la gráfica considerando el contexto del estudio. Monteiro y Ainley (2006) realizaron una investigación con 218 estudiantes de pedagogía en educación básica, observando que la mayoría de ellos presentaba dificultad para leer algunos gráficos tomados de la prensa -no leían correctamente el gráfico, o bien, lo leían pero no interpretaban adecuadamente con el contexto de la noticia- por lo que no llegaban alcanzar un nivel de lectura



crítico de los datos. Eudave (2009) efectuó un estudio con 28 estudiantes, de distintas edades, que cursaban nivel básico en alguna de las modalidades de educación para adultos que se imparte en México, reportando que sólo cinco sujetos alcanzan los tres primeros niveles de Curcio, realizando una lectura completa y adecuada de la tabla de frecuencias y de la gráfica de líneas; cabe destacar que ambas representaciones contenían la misma información, como también se considera en nuestro estudio.

En Batanero, Arteaga y Ruiz (2010) se analizan los gráficos producidos por 93 estudiantes de formación profesional básica, observando errores en su construcción; además, se evalúan los niveles de lectura, reportando que pocos participantes alcanzan el nivel más alto. Arteaga (2011), en su tesis doctoral, realiza un estudio con 207 estudiantes que cursaban el segundo año de formación docente en educación primaria, indicando que la mayoría alcanza los primeros tres niveles de lectura, pero pocos llegan al nivel superior. Rodríguez y Sandoval (2012) analizan la construcción y lectura de tablas y gráficas estadísticas por 44 estudiantes en formación inicial docente y por 47 profesores de educación básica en ejercicio, encontrando que ambas muestras de participantes presentan dificultades en la lectura de estas representaciones, alcanzando el nivel 1 según la clasificación de Curcio, es decir, muestran habilidades básicas o iniciales del análisis de datos.

Díaz-Levicoy, Sepúlveda, Vásquez y Opazo (2016) reportan los niveles de lectura de tablas estadísticas que alcanzan 121 estudiantes para maestras de educación infantil, observando que la mayoría de las respuestas, a preguntas relacionadas con lectura de las tablas, los niveles “leer los datos” y “leer entre los datos”, se asociaban a la lectura literal de información y al desarrollo de procesos matemáticos sencillos. Gea, Arteaga y Cañadas (2017) evalúan la interpretación de tres gráficos estadísticos por 65 estudiantes de máster de formación para profesorado de educación secundaria y bachillerato, encontrando que la mayoría de las interpretaciones son correctas, sin embargo, se pertenecen a un nivel inferior o intermedio de lectura. Por su parte, García-García, López y Arredondo (2018) analizan las interpretaciones de 36 estudiantes universitarios de una tabla y una gráfica circular, encontrando que la mayoría presenta el nivel intermedio de lectura de Curcio; y sólo alrededor de la cuarta parte de los participantes alcanza niveles superiores en la lectura de ambas representaciones.

Los estudios anteriores nos muestran que la mayoría de los estudiantes presentan un nivel de lectura inferior o intermedio, es decir, pueden describir el contenido de la tabla o gráfica, realizar comparaciones de datos o cálculos matemáticos con ellos, o bien, dar alguna predicción; sin embargo, son muy pocos los jóvenes que integran el contexto en sus interpretaciones. En este estudio se pretende presentar una distinción en la valoración crítica en la interpretación del estudiante cuando lee la misma información estadística representada en una tabla y una gráfica de líneas.

III. Fundamentos del estudio

Nuestro trabajo se fundamenta bajo dos marcos de referencia que establecen niveles de lectura para gráficas estadísticas, con el objetivo de analizar la interpretación de información representada en una tabla y una gráfica de líneas por estudiantes de licenciatura. Para ello en este trabajo se



retoman las jerarquías de Curcio (1989) y Aoyama (2007), para presentar una propuesta de red de relaciones. El uso de estas jerarquías responde a que siguen estando presentes en la mayoría de las investigaciones de educación estadística, pues se han mostrado su vasto potencial. Sin embargo, se han hecho modificaciones y adaptaciones que buscan ampliar el espectro de análisis como evidencian diferentes investigaciones (Batanero, Díaz-Levicoy y Arteaga, 2018; Díaz-Levicoy, Arteaga y Batanero, 2017; Gea, Arteaga y Cañadas, 2017).

Curcio (1989) postula tres niveles para clasificar la evidencia de la comprensión gráfica de los estudiantes:

- *Nivel 1: Leer los datos.* Lectura de la información representada en el gráfico –el lector responde preguntas explícitas para las cuales la respuesta está en el gráfico–.
- *Nivel 2: Leer dentro de los datos.* Interpretación e integración de la información que se presenta en un gráfico –el lector completa al menos un paso de inferencia lógica o pragmática para responder preguntas–.
- *Nivel 3: Leer más allá de los datos.* Extender, predecir o inferir de la representación para contestar preguntas –el lector da una respuesta que requiere conocimiento previo sobre una pregunta que está relacionada con el gráfico–.

Friel, Curcio y Bright (2001) definen un nuevo nivel superior ampliando la clasificación anterior:

- *Nivel 4: Leer detrás de los datos.* Valoración crítica de la información representada en el gráfico –el lector integra su conocimiento del contexto para dar conclusiones, se cuestiona sobre la forma en que fueron obtenidos los datos–.

Inicialmente, Curcio y colaboradores establecieron estos niveles para gráficas; no obstante, Batanero (2001) menciona que pueden aplicarse para la lectura de tablas, tal como Eudave (2009) lo realiza en su estudio sobre niveles de comprensión de información con estudiantes, jóvenes y adultos, de educación básica.

Por su parte, Aoyama (2007) identifica cinco niveles diferentes de interpretación de gráficas:

- *Nivel 1: Idiosincrático.* Los estudiantes en este nivel no pueden leer valores o tendencias en las gráficas, proporcionan valores incorrectos al leer la gráfica o dejan de contestar la pregunta. No pueden conectar algunas características extraídas de los gráficos con el contexto. Por lo general, sus respuestas se basan en su limitada experiencia individual o en perspectivas personales.
- *Nivel 2: Lectura básica de la gráfica.* Los estudiantes de este nivel pueden leer valores y tendencias en gráficos, pero no pueden explicar los significados contextuales de las tendencias o características que ven, ni contextualizar los eventos presentados.
- *Nivel 3: Racional/Literal.* Los estudiantes de este nivel pueden leer valores y tendencias particulares. Explican los significados contextuales literalmente en términos de los rasgos mostrados en un gráfico, pero no pueden sugerir ninguna interpretación alternativa; sólo utilizan los significados presentados. Por lo general, no pueden cuestionar la fiabilidad de la información.



- *Nivel 4: Crítico.* Los estudiantes de este nivel pueden leer gráficos y comprender las variables contextuales presentadas. Más aún, pueden evaluar la fiabilidad del significado contextual descrito en el gráfico y cuestionar la información presentada.
- *Nivel 5: Elaboración de hipótesis y modelos.* Los estudiantes de este nivel pueden leer gráficos, y aceptar y evaluar alguna información presentada. Pueden formar sus propias hipótesis o modelos explicativos. En este nivel, los estudiantes actúan como investigadores y no sólo como receptores de información.

Cuando surge la necesidad de considerar la valoración crítica de la información, los tres niveles superiores de Aoyama (2007) pueden considerarse como subcategorías del nivel 4 de Friel, Curcio y Bright (2001).

IV. Método

Nuestro estudio es tipo descriptivo-cualitativo, ya que se enfoca en analizar las interpretaciones de estudiantes de licenciatura cuando realizan la lectura de información estadística representada en una tabla y una gráfica de líneas.

Sujetos

La muestra se compone de 36 estudiantes que cursaban el primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, y el profesor titular quien colaboró con la aplicación de los instrumentos. Los estudiantes, cuyas edades oscilaban entre 18 y 31 años, no recibieron información alguna del propósito del estudio.

Instrumentos

Dos tareas de lectura de información estadística representada en una tabla y una gráfica de líneas. Como rasgo particular, ambas representaciones contienen los mismos datos: la cantidad de matrícula escolar (número de estudiantes inscritos) en los niveles educativos básicos en México (preescolar, primaria, secundaria) durante tres ciclos escolares (2012/2013, 2013/2014, 2014/2015). En las indicaciones de las tareas, se les solicitó a los estudiantes leer e interpretar la información estadística, comparar datos, observar tendencias, generar conclusiones y realizar críticas; plasmando sus interpretaciones en hojas de trabajo.

El tipo de tareas elegidas para este trabajo se acercan al análisis que en su práctica profesional se deben enfrentar los profesores en México, esto al cierre de un ciclo escolar en su institución de trabajo; también se aclara que los datos son reales, pero la elaboración de la gráfica es propia y que esta busca englobar las características que exponen comúnmente los informes de las escuelas y en los medios de comunicación, en donde generalmente no es un experto en estadística quien hace este tipo de gráficos, así que identificamos que se hace por momentos, un abuso semiótico de algunos referentes presentes en esta. Esto de antemano nos lleva a considerar en las conclusiones la anexión de posibles limitaciones de este estudio.

Además, se consideró abordar las tareas sin preguntas, de manera abierta, debido a que comúnmente el estudiante se enfrenta de esta manera a la interpretación de información estadística presentada por diversos medios de comunicación en tablas o gráficas. En la Figura 1 se presentan ambas tareas del estudio:

Tarea 1. Lectura de la tabla

Matrícula escolar por nivel educativo						
Nivel educativo	Ciclo escolar					
	2012/2013		2013/2014		2014/2015	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
Preescolar	2,405,057	2,356,409	2,419,755	2,367,201	2,428,623	2,375,442
Primaria	7,552,382	7,237,024	7,444,001	7,136,378	7,322,782	7,028,255
Secundaria	3,201,483	3,138,749	3,317,740	3,254,118	3,444,599	3,380,447

Fuente: SEP. Sistema Interactivo de Consulta de Estadística Educativa.

Tarea 2. Lectura de la gráfica de líneas

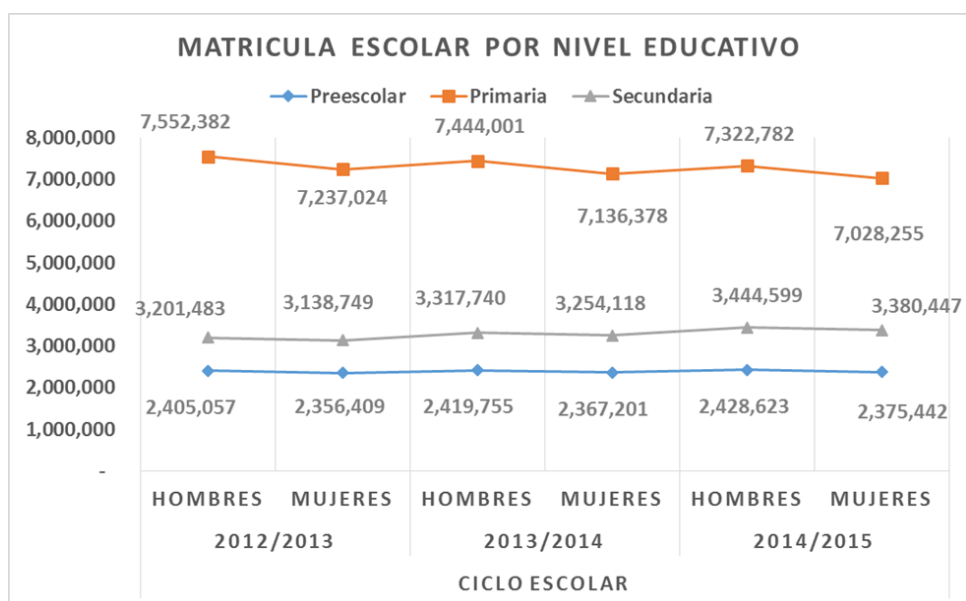


Figura 1. Tareas del estudio

Procedimiento de aplicación

Cada tarea se aplicó en una sesión de 20 minutos. En la primera sesión, los estudiantes realizaron la lectura de la tabla; y en la segunda, una semana después, la lectura de la gráfica de líneas. Se consideraron dos sesiones, con objetivo de evitar la influencia de la lectura de la tabla sobre la del gráfico, e identificar si el tipo de representación -con los mismos datos estadísticos- promueve niveles superiores de lectura en los estudiantes.

Procedimiento de análisis de datos

El proceso de análisis de datos es de tipo cualitativo; consiste en una revisión sistemática de todas de las interpretaciones de los estudiantes para formar un sistema de categorías y luego clasificarlas en los niveles de lectura de Curcio y colaboradores (*leer los datos, leer dentro de los datos, leer*

más allá de los datos, leer detrás de los datos), considerando la jerarquía de Aoyama para el nivel 4 (*racional/literal, crítico, elaboración de hipótesis y modelos*), en función de los elementos o rasgos característicos que presentan. Se definen subcategorías para cada nivel de lectura, obteniendo una nueva jerarquía.

V. Resultados

A continuación, se presentan los resultados del análisis de las interpretaciones de ambas tareas: primero se incluye una tabla que exhibe la jerarquía obtenida con el tipo de respuestas que caracterizan a cada nivel; después, ejemplos representativos de cada subcategoría; posteriormente, se muestran de manera sucinta los resultados en una tabla de frecuencias; y finalmente, la clasificación de las lecturas de manera conjunta a través de una tabla de doble entrada.

En la Tabla 1 se presenta la jerarquía obtenida con el análisis de los resultados, que incluye los niveles de lectura expuestos en los fundamentos del estudio, y las subcategorías que la forman, así como la descripción de la respuesta típica escrita acerca de elementos característicos encontrados.

Tabla 1. Jerarquía obtenida con los datos del estudio

Nivel de lectura	Subcategoría	Descripción
Nivel 0. Lectura idiosincrática (N0)	Perspectiva personal (PP)	No se leen valores o tendencias; la lectura se basa en la experiencia individual o perspectivas personales de lector, sin conectar características extraídas de la tabla o gráfica de líneas con el contexto.
Nivel 1. Leer los datos (N1)	Título (T)	Se lee el título de la tabla o gráfica de líneas, sin realizar interpretaciones ni cálculos adicionales.
	Título y variable(s) (TV)	Se lee el título y la(s) variable(s) de la tabla o gráfica de líneas, sin realizar interpretaciones ni cálculos adicionales.
Nivel 2. Leer dentro de los datos (N2)	Comparación horizontal/fila (H/F)	Se presentan comparaciones con los datos: en la gráfica de líneas de manera horizontal, y en la tabla por filas, tomando como base la variable ciclo escolar.
	Comparación vertical/columna (V/C)	Se presentan comparaciones con los datos: en la gráfica de líneas de manera vertical, y en la tabla por columnas, tomando como base la variable nivel educativo.
	Ambas comparaciones (A)	Se presentan comparaciones con los datos de ambas maneras.
Nivel 3: Leer más allá de los datos (N3)	Predicción de tendencia (PT)	Se presentan tendencias del comportamiento de los datos, considerando la información que se puede observar.
	Predicción de valores (PV)	Se presentan predicciones de valores, considerando la información que se puede observar.
Nivel 4: Leer detrás de los datos (N4)	Racional (R)	Se leen valores, se realizan comparaciones, se detectan tendencias particulares, y se explican significados contextuales literalmente en términos de las características

	que muestra la tabla o gráfica de líneas, pero no se sugieren interpretaciones alternativas.
Hipotético (H)	Se lee, acepta y evalúa la información representada en la tabla o gráfica, formando hipótesis explicativas.

Enseguida, en la Tabla 2, se presentan ejemplos de cada nivel y subcategoría definidas anteriormente.

Tabla 2. Ejemplos de lecturas clasificadas por nivel y subcategoría

Nivel de lectura	Categoría	Tipo de representación y respuesta del estudiante a su lectura	Descripción
Nivel 0. Lectura idiosincrática (N0)	Perspectiva personal (PP)	Gráfica de líneas: <i>La mayoría de los adolescentes ya no quieren estudiar, incluso hasta lo pequeños ya no quieren saber de escuelas, por la situación de problemas de drogas u otros tipos de problemas, en su mayor parte las escuelas hay pocos estudiantes.</i>	El estudiante no conecta la información de la gráfica de líneas en su lectura; esta sólo se basa en su perspectiva personal.
Nivel 1. Leer los datos (N1)	Título (T)	Gráfica de líneas: <i>En esta grafica se observa el número de alumnos (matrícula escolar) que asisten según el nivel educativo.</i>	El estudiante describe el contenido de la tabla sin interpretarla; sólo observa el título.
	Título y variable(s) (T-V)	Tabla: <i>Aquí se puede ver que en los años 2012/2015 de cómo esta ordenada la matrícula escolar en cada nivel educativo y tiene sus propios matriculados así mismo los otros niveles y es la tabla que se lleva a cabo la cifra de control.</i>	El estudiante describe el contenido de la tabla sin interpretarla; observa el título y la variable ciclo escolar.
Nivel 2. Leer dentro de los datos (N2)	Comparación horizontal/fila (H/F)	Gráfica de líneas: <i>En nivel preescolar, el número de niños en el país se mantiene casi estable. En nivel primaria, la población de niños disminuye cada vez más. En nivel secundaria, la población de jóvenes aumenta.</i>	El estudiante realiza comparaciones entre los datos de la matrícula, observando variaciones por nivel educativo; la comparación la realiza de manera horizontal tomando como base el ciclo escolar.
	Comparación vertical/columna (V/C)	Tabla: <i>Se muestra que en los ciclos escolares, en el nivel secundaria los alumnos son menos que en</i>	El estudiante realiza comparaciones entre los datos por columnas, identifica que un nivel educativo tiene una

	Ambas comparaciones (A)	<p><i>primaria.</i></p> <p>Gráfica de líneas: <i>La población femenina disminuye por año en primaria. La población de primaria es la mayor. La población de preescolar es menor.</i></p>	<p>mayor matrícula que otro.</p> <p>El estudiante realiza comparaciones de ambas maneras: horizontal, al indicar que disminuye matrícula femenina de primaria por año escolar, y vertical, a mencionar que la matrícula de cierto nivel es mayor o menor.</p>
Nivel 3: Leer más allá de los datos (N3)	Predicción de tendencia (PT)	<p>Tabla: <i>En el ciclo 2013 – 2014, en el nivel educativo primaria se observa que bajo tanto en hombres como mujeres, si sigue estando así los próximos años será menos y así sucesivamente. Hubo un aumento en el nivel secundaria del 2012 a 2015, aumentaron el número de personas estudiando.</i></p>	<p>El estudiante proporciona una tendencia del comportamiento de los datos referentes a la matrícula del nivel primaria; también, menciona variables involucradas en la gráfica y realiza una comparación al identificar el aumento de la cantidad de alumnos en nivel secundaria.</p>
	Predicción de valores (PV)	<p>Gráfica de líneas: <i>Nos muestra una gráfica de matrículas escolares por nivel educativo. Notamos que hay menos y aun disminuirá un 3.7% por año la matrícula a nivel primaria, también nos da a conocer que son muy poca la matrícula a nivel preescolar y secundaria.</i></p>	<p>El estudiante realiza una predicción del porcentaje que disminuirá la matrícula del nivel primaria por ciclo escolar; además, menciona una de las variables involucradas en la gráfica y realiza una comparación al identificar los niveles con menor cantidad de alumnos.</p>
Nivel 4: Leer detrás de los datos (N4)	Racional (R)	<p>Gráfica de líneas: <i>Para nivel primaria se observa una descendencia de la cantidad de matrículas por lo que concluyo que el alumnado deja la escuela. Para el nivel secundaria se observa que la cantidad de matrículas aumenta por lo que deduzco que el alumnado vuelve a ascender a la misma cantidad.</i></p>	<p>El estudiante realiza comparaciones, por ejemplo indica que la matrícula de nivel primaria aumenta, detecta una tendencia de los datos de nivel secundaria, y proporciona una conclusión (significado contextual) en términos de una característica observada en la gráfica.</p>
	Hipotético (H)	<p>Tabla: <i>En el nivel primaria los estudiantes empiezan a darse de baja durante los años, ya sea por la economía u otras cosas, en el nivel secundaria la cantidad de alumnos aumenta</i></p>	<p>El estudiante proporciona hipótesis sobre el comportamiento de los datos; es decir, justifica el por qué la matrícula de secundaria es menor que la de primaria.</p>

poco y vemos que es menos que en primaria ya que los jóvenes ya no quieren estudiar o por recursos.

Una vez detallada la manera en cómo se realizó la clasificación, en la Tabla 3 se exponen las frecuencias de las interpretaciones que fueron clasificadas en cada nivel y subcategoría.

Tabla 3. Frecuencia de respuestas por subcategoría

Tipo de representación	N0		N1		N2		N3		N4		Total
	PP	T	T-V	H/F	V/C	A	PT	PV	R	H	
Gráfica	3	1	0	10	4	8	0	1	3	6	36
Total	3	1			22		1		9		
Tabla	3	1	1	6	6	10	2	0	1	6	36
Total	3	2			22		2		7		

Las frecuencias de respuestas nos indican que la mayoría de los participantes (22 en cada caso) alcanzan el nivel 2, leer dentro de los datos, al realizar comparaciones con los datos, primordialmente de manera horizontal (en la gráfica) o por ambas formas (en la tabla). El nivel 4, leer detrás de los datos, es el segundo con mayor frecuencia (9 y 7 en la lectura de la gráfica y tabla, respectivamente), los estudiantes integran la información estadística con el contexto formando hipótesis explicativas o proporcionando significados contextuales. Pocas son las respuestas clasificadas en los otros niveles; sin embargo, es preocupante identificar interpretaciones basadas en experiencias, o perspectivas, esencialmente personales, sin considerar la información estadística representada.

En la Tabla 4 se organizan, analizan y clasifican las interpretaciones de los estudiantes a las dos tareas de lectura, de manera conjunta, considerando los niveles de lectura expuestos en la tabla 1.

Tabla 4. Niveles de lectura alcanzados en cada actividad de manera conjunta

Lectura		Tabla					Total
		Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	
Gráfica de líneas	Nivel 0	3	0	0	0	0	3
	Nivel 1	0	0	1	0	0	1
	Nivel 2	0	1	18	2	1	22
	Nivel 3	0	1	0	0	0	1
	Nivel 4	0	0	3	0	6	9
Total		3	2	22	2	7	36

Las frecuencias de respuestas de ambas tareas organizadas de manera conjunta nos indican que la mayoría de los participantes fueron consistentes en los niveles de lecturas que presentan: 18 alcanzan el nivel intermedio 2, 6 el nivel superior 4, y 3 el nivel inferior 0. Además, podemos identificar que la lectura de la gráfica de líneas, en este estudio, mostro una mayor frecuencia en



el nivel superior 4.

VI. Conclusiones y limitaciones del estudio

Los resultados arrojados por este estudio muestran que los estudiantes se quedan en el nivel 2 de lectura, leer dentro de los datos, correspondiente a una comparación de datos para ambos casos propuestos, lo que significa que los estudiantes solo son capaces de operar horizontal o verticalmente las frecuencias de las representaciones de la tabla y la gráfica. Esto es una situación preocupante debido a que la lectura de estas representaciones es una habilidad que se considera debe poseer un ciudadano crítico y reflexivo del mundo. Este tipo de resultados coinciden con investigaciones como las citadas en los antecedentes; sin embargo, destacamos una distinción en la valoración crítica dentro de las interpretaciones de los estudiantes apoyándonos de los niveles jerárquicos de Aoyama.

Otra observación que tenemos, es que el tipo de representación (tabla o gráfica con los mismos datos estadísticos) no influyó de manera significativa en la mejora de los resultados, es decir, en favorecer en los estudiantes alcanzar niveles superiores de lectura.

El tipo de error más frecuente en las lecturas de los estudiantes es aquel que se relaciona a la sobre valoración que dan estos a la frecuencia de la variable, en otras palabras, estos establecen conclusiones o predicciones apoyados en el valor de la variable. Este trabajo deja un evento que consideramos interesante analizar con mayor profundidad, que es el caso del contexto del problema; que si bien es conocido por los estudiantes, no es algo tan familiar como el reportado en García-García, López y Arredondo (2018), donde el contexto (tendencias electorales en las pasadas elecciones en México) influyó para que los estudiantes presentaran rasgos de niveles superiores de lectura.

Por otro lado, identificamos dos aspectos que han limitado el presente trabajo. Uno de ellos se puso de manifiesto en los elementos del gráfico de líneas, ya que al sólo poseer tres periodos de tiempo, obstaculiza identificar de manera nítida tendencias presentes en los datos. El segundo aspecto corresponde al abuso de líneas y la gran cantidad de datos numéricos sobre la imagen, lo cual dificulta la lectura e interpretación de la gráfica.

Agradecimientos

Este trabajo se ha llevado a cabo en el contexto del Proyecto de Mejoramiento Institucional PMI-ULA: 1503, bajo la tutela de los Postgrados en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos, Chile.

Bibliografía

- [1] Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2 (3), 298-318.
- [2] Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis de Doctorado. Universidad de Granada, España.



- [3] Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 141-154.
- [4] Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 83, 7-18.
- [5] Batanero, C., Díaz-Levicoy, D. y Arteaga, P. (2018). Evaluación del nivel de lectura y la traducción de pictogramas por estudiantes chilenos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 14, 49-65.
- [6] Burgess, T. (2002). Investigating the “data sense” of preservice teachers. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6). Cape Town: IASE.
- [7] Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: NCTM.
- [8] Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2017). Lectura de pictogramas por estudiantes chilenos de Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 217-226). Zaragoza: SEIEM.
- [9] Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y López-Martín, M. (2015). Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de educación primaria chilena. *Educação Matemática Pesquisa*, 17 (4), 715-739.
- [10] Díaz-Levicoy, D., Sepúlveda, A., Vásquez, C. y Opazo, M. (2016). Lectura de tablas estadísticas por futuras maestras de Educación Infantil. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3), 1099-1115.
- [11] Eudave, D. (2009). Niveles de comprensión de información y gráficas estadísticas en estudiantes de centros de educación básica para jóvenes y adultos de México. *Educación Matemática*, 21 (2), 5-37.
- [12] Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, 32 (2), 124-158.
- [13] Gal, I. (2002). Adult’s statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70 (1), 1-25.
- [14] García-García, J.I., López, C y Arredondo, E-H. (2018). Interpretación de una tabla y una gráfica circular por estudiantes de licenciatura. *Tangram, Revista de Educação Matemática*, 1 (3), 24-39.
- [15] Gea, M., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2017). Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de Educación Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 12, 19-37.
- [16] Monteiro, C. y Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2 (3), 188-207.
- [17] Pedró, F. (2012). Deconstruyendo los puentes de PISA: del análisis de resultados a la prescripción política. *Revista Española de Educación Comparada*, 19, 139-174.
- [18] Rodríguez, F. y Sandoval, P. (2012). Habilidades de codificación y descodificación de tablas y gráficos estadísticos: un estudio comparativo en profesores y alumnos de pedagogía en enseñanza básica. *Avaliação: Revista de la avaliação da Educação Superior*, 17 (1), 207-235.

Análisis De Actividades Estadísticas En Libros De Textos De Nivel Básico Y Medio Superior En México

Yolanda Pérez Rodríguez¹, Blanca Ruiz Hernández², & Enrique Hugues Galindo³

Resumen

El presente trabajo muestra los resultados de una investigación sobre el análisis de las actividades estadísticas propuestas en seis libros de texto mexicanos de: nivel primaria (impartida en seis grados, incorpora a niños de 6 a 12 años), nivel secundaria (se imparte en tres grados, da cobertura a jóvenes de 13 a 15 años) y nivel medio superior (nivel bachillerato, impartida generalmente en tres grados, incorpora a jóvenes de 16 a 18 años). Para el desarrollo del trabajo se utilizó una metodología cualitativa, mediante el análisis de contenido. Las actividades se analizaron de acuerdo con tres criterios: tipo de técnicas estadísticas propuestas (tablas de frecuencia, gráficas y medidas estadísticas), tipo de prácticas que se solicita desarrollar y los niveles de lectura que se promueven de acuerdo con Curcio (1989). Dentro de los resultados se destacan: Las actividades están planteadas con un predominio de los gráficos de barras y circulares; las prácticas más frecuentes son leer, calcular, responder y registrar. Mientras que mínimamente se plantea: interpretar, argumentar, comparar e inferir. Las prácticas de lectura se ubican fundamentalmente en los niveles leer los datos y leer entre los datos. Con referencia a los tiempos sugeridos para el estudio de la Estadística, es el nivel básico el que presenta el mayor porcentaje de tiempo sugerido.

Palabras clave: Libros de texto, Educación Estadística, Actividades de aprendizaje, Educación primaria, secundaria y bachillerato

Modalidad: Ponencia

Abstract

This work shows the results of a research on the analysis of the statistical activities proposed in six Mexican textbooks of: primary level (taught in six grades, incorporates children from 6 to 12 years old), secondary level (taught in three degrees, covers young people from 13 to 15 years old) and baccalaureate level (it is generally taught in three grades, incorporates young people from 16 to 18 years). For the development of the work, a qualitative methodology was used, through content analysis. The activities were analyzed according to three criteria: type of statistical techniques proposed (frequency tables, graphs and statistical measures), type of practices that are requested to be developed and reading levels that are promoted according to Curcio (1989). Among the results are: The activities are raised with a predominance of bar charts and circulars; whereas other types of graphics such as those of multiple lines and bars do not have the required emphasis; The most frequent practices are reading the graph, calculating, responding and registering. While it minimally poses: interpret, argue, compare and infer. The reading practices are located mainly in the levels reading the data and reading between the data. With reference to the suggested times for the study of statistics, it is the basic level that presents the highest percentage of time suggested.

¹ Universidad de Sonora, México. yolanda_perez_r@hotmail.com

² Tecnológico de Monterrey, México. bruiz@itesm.mx

³ Universidad de Sonora, México. ehugues@mat.uson.mx



Key words: Textbooks, Statistical Education, Learning activities, Primary, secondary and high school education

I. Introducción

Aunque en México la educación ha evolucionado y se han alcanzado ciertos logros, no se ha garantizado la calidad educativa (INEE, 2012). La Estadística es una disciplina en la cual se perciben mayores deficiencias educativas; aun cuando en los últimos años, se le ha dado más importancia y ha reflejado una mayor incorporación de temas referidos a Probabilidad y Estadística en el currículo preuniversitario, hacen falta ajustes en su planeación, particularmente en el diseño de recursos concretos para una enseñanza que apunte a las orientaciones recientes, pues de otra manera, pudieran no ser seguidas o ejecutarse adecuadamente.

Además, se tiene la percepción de que los profesores suelen omitir o dejar los temas de Estadística para el final del programa y con poco tiempo disponible. Esto ocasiona que el alumno sólo consiga un aprendizaje memorístico, ya que no puede asimilar el contenido en un tiempo tan limitado, lo que repercutirá en su futura vida personal o profesional, y no será capaz de aplicar dicho aprendizaje (Batanero, 2002).

Socialmente la Estadística ha pasado a ser considerada fundamental en la vida personal y profesional de las personas, es necesario que sean estadísticamente cultas (Ridgway, Nicholson y McCusker, 2008), así como que adquieran un razonamiento estadístico adecuado. De acuerdo con Wild y Pfannkuch (1999), se describe a través de cuatro dimensiones: ciclo de investigación, tipos de pensamiento, ciclo interrogativo y disposiciones. Promoverlo, demanda la conjunción de esfuerzos por parte de profesores, autoridades educativas y recursos didácticos adecuados, que impulsen al estudiante hacia el pensamiento estadístico a través de esas 4 dimensiones.

Esto despierta la inquietud de cómo estructurar actividades didácticas, en el ámbito de la enseñanza de la Estadística, que aseguren la calidad de los esfuerzos educativos que se vienen realizando en México, particularmente en el contexto de una reforma de educación básica (integrada por tres niveles: preescolar, primaria y secundaria) y nivel medio superior (NMS) (que comprende el nivel bachillerato y educación profesional técnica) que se encuentra en proceso. Uno de los documentos oficiales más favorecidos por los profesores como referente de su tarea educativa, son los libros de texto (Díaz-Levicoy, Gaicomone y Arteaga, 2017) y en el afán de apoyar su labor, consideramos necesario revisar qué se propone en los libros de texto mexicanos para promover el logro de una formación estadística pertinente en los estudiantes y tener un punto de partida para la mejora de directrices en el diseño de actividades didácticas. El presente trabajo pretende dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Cuáles son los tiempos sugeridos y las acciones didácticas promovidas en la enseñanza de la Estadística, en los libros de texto mexicanos de nivel primaria, secundaria y bachillerato?

II. Marco Conceptual

En este apartado se hace mención de las principales ideas, conceptos y estrategias que se usaron en la revisión de algunos libros de texto mexicanos.

2.1 Representaciones Gráficas y tabulares

Se prestará atención a todas aquellas actividades donde aparezca algún tipo de gráfica estadística o su elaboración, particularmente gráficas como: histograma, circular, de barras, de puntos, pictogramas, etc. Las gráficas constituyen elaboraciones básicas de suma importancia, disciplinar



y didácticamente hablando, pues muestran información a través de una combinación de elementos como puntos, líneas, sistemas de coordenadas, figuras, números, símbolos, textos y color (Insunza, 2015), pueden ser incluso más precisas y reveladoras que los cálculos estadísticos convencionales y señalan ideas complejas comunicadas con claridad, precisión y eficiencia (Tufte, 2001 y Few, 2004).

También, fijaremos la atención en la representación tabular de una lista de datos y tablas de distribución de datos. Entendiendo una tabla de datos como aquella que incluye una lista de todos los datos, pero sin calcular las frecuencias asociadas a la distribución. Y tablas de distribución de datos cuando se presenta una tabla de datos agrupando los valores y calculando las respectivas frecuencias (Díaz-Levicoy, et al, 2017).

2.2 Prácticas solicitadas a estudiantes

Con base en los textos analizados identificamos las siguientes prácticas en las actuaciones estadísticas de los estudiantes: (1) Leer: Leer un gráfico ya construido respondiendo a preguntas en función a una lectura literal del gráfico. (2) Elaborar: Es una actividad donde se le pide al estudiante que construya un gráfico o tabla estadística con los datos. (3) Calcular: Es una actividad donde se pide efectuar cálculos (sumar o restar, porcentajes, encontrar media, moda, mediana, rango, etc.) con los datos mostrados. (4) Ordenar: Corresponde a organizar los datos proporcionados. (5) Completar: Consiste en añadir lo que falta o lo necesario para concluir una cosa o proceso. (6) Comparar: Fijar la atención en dos o más objetos para descubrir sus relaciones o estimar sus diferencias o semejanzas. (7) Justificar y Argumentar: Es una práctica donde el estudiante debe exponer razones o encontrar elementos que validen o demuestren una conclusión o decisión. (8) Decidir: Tomar una acción o determinación (9) Transnumeración: Es cuando se pide a los estudiantes realizar un cambio de representación, es decir, pasar de un tipo de gráfico a otro o pasar a una tabla (Wild y Pfannkuch, 1999). (10) Inferir: Establecer una conclusión, estimación, predicción haciendo uso de información particular como evidencia para esas generalizaciones. (11) Interpretar: Explicar. (12) Analizar: Estudiar algo en partes para conocerlo y explicarlo. Resultados que coinciden con Díaz-Levicoy, et. al. (2017).

2.3 Niveles de lectura

La taxonomía de comprensión gráfica propuesta por Curcio (1989) es una de las herramientas a utilizar en este trabajo, ya que se le considera útil en el diseño de situaciones o actividades didácticas estadísticas, así como en la clasificación de actuaciones de estudiantes en relación con las capacidades estadísticas que se espera desarrollen. La taxonomía inicial consta de los tres niveles de lectura siguientes:

1. “Leer datos”: este nivel de comprensión requiere una acción local y una específica, como la lectura literal del gráfico, que atiende únicamente los hechos explícitamente representados; por lo tanto, no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo;
2. “Leer entre los datos” implica comparar e interpretar valores de los datos, integrar los datos en el gráfico, buscar relaciones entre las cantidades y aplicar procedimientos matemáticos simples a los datos; entendiendo tanto la estructura básica del gráfico como las relaciones contenidas en él; incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico.



3. “Leer más allá de los datos” implica la extrapolación de datos, predecir, inferir a partir de los datos sobre informaciones que solo están implícitamente presentes en el gráfico; requiere conocer el contexto en que los datos se presentan;

A los que se aúna otro nivel sugerido por Shaughnessy, Garfield y Greer (1996):

4. “Leer detrás de los datos” corresponde a una ampliación de los niveles anteriores, y se refiere a mirar críticamente el uso del gráfico y conectar la información gráfica con el contexto para realizar un análisis profundo y un razonamiento causal basado en el conocimiento de la materia y la experiencia; incluye examinar la calidad de los datos y la metodología de recolección, la sugerencia de una posible explicación, y la elaboración de modelos alternativos y representaciones gráficas.

III. Metodología

Se analizaron seis (6) libros de texto, cinco (5) de ellos elegidos por ser textos oficiales editados por la subsecretaría de educación básica de la Secretaría de Educación Pública y uno (1) de nivel bachillerato por ser muy utilizado por profesores en nuestro entorno y ser de una editorial de prestigio a nivel nacional. Se trata de una muestra no probabilística deliberada o por conveniencia pues el estudio es exploratorio. Los libros seleccionados son: Desafíos matemáticos 3 y 6 para primaria (2016); Conecta Estrategias: Matemáticas 1, 2 y 3 de secundaria (2016); y Vive la Probabilidad y Estadística 1 (Flores y Gómez, 2014) para bachillerato.

Para el desarrollo del trabajo esencialmente se utilizó una metodología cualitativa. Siguiendo a Ruiz (2004), se revisa el tiempo que se sugiere dedicar a la enseñanza de la Estadística en los libros explorados a fin de valorar la importancia que se le concede a esto en congruencia con lo pretendido. También, centrados en el contenido, se analizaron las actividades didácticas que proponen los libros seleccionados para abordar lo estadístico, de acuerdo con los siguientes criterios: tipo de técnicas estadísticas propuestas (tablas de frecuencia, gráficas y medidas estadísticas), tipo de prácticas que se solicita desarrollar, los niveles de lectura que se promueven de acuerdo con Curcio (1989), identificando la presencia o ausencia de cada uno de estos criterios. Por último, entre ellas, se seleccionaron actividades que ilustren los criterios y se elaboran unas tablas cuyas lecturas facilitan visualizar los resultados obtenidos, los cuales fueron comparados con lo que marca la reforma educativa, particularmente alrededor de las competencias estadísticas pretendidas.

IV. Análisis

4.1 Importancia que los distintos niveles educativos le conceden a la Estadística

En este apartado se pretende dar un panorama sobre cuál es la importancia que los distintos niveles educativos le conceden a la Estadística, medida ésta en términos del peso temporal o porcentaje de tiempo de estudio sugerido a la enseñanza de la Estadística en educación básica y en el NMS. En esta dirección, Ruiz (2014) elaboró una investigación en América Latina (AL), donde retomamos algunos resultados sobre México. Para el nivel secundaria y preparatoria se tomaron los tiempos sugeridos de los libros de texto oficiales y programas curriculares para la enseñanza de la Estadística en México.

a) Nivel Primaria

En la investigación de Ruiz (2014), se reporta que, en tercer grado, el tiempo dedicado a la Estadística en la escuela primaria es aproximadamente 17.7% del dedicado al área de matemáticas. Mientras que en sexto grado, el tiempo dedicado a la enseñanza de la Estadística es



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

aproximadamente 18.9%. Ambos porcentajes están ligeramente por arriba de la media ponderada en AL, comparándolos con la información en la siguiente tabla.

Tabla 1. Porcentaje de tiempo de enseñanza dedicado a áreas de la Matemática de 3° y 6° de Primaria en América Latina. Fuente: Natalia Ruiz. REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación (Pág. 109).

Distribución del tiempo de enseñanza en Matemáticas en educación primaria según áreas en AL.		
Área de la Matemática	Tercer grado	Sexto grado
Números	41.14%	37.14%
Medidas	19.41%	18.59%
Geometría	18.02%	19.84%
Estadística	16.11%	15.65%
Otros	5.32%	7.98%
TOTAL	100%	100%

b) Nivel Secundaria

Tomando como referente lo indicado en los libros de texto para el área de Matemáticas editados por la Secretaría de Educación Pública Mexicana (SEP), con base a los tiempos que se sugieren, se presenta información en tabla 2. Se puede observar que en este nivel académico el total de sesiones promedio dedicadas a la educación estadística dentro de la matemática es de sólo el 6.2%, siendo en segundo grado donde se plantea el mayor porcentaje de sesiones dedicadas a la Estadística 8.53%. Resalta el hecho de que el porcentaje dedicado al estudio de la Estadística en secundaria es menor que en primaria, dejando entrever más visiblemente que su enseñanza se relega a un segundo término dentro de este nivel educativo en comparación a otras áreas de la Matemática. Además, llama la atención que los temas estadísticos se encuentran al final de los bloques, colocando al docente entre la disyuntiva sobre cuánto tiempo es conveniente que les dedique a estos temas y qué parte de las competencias buscará promover si decide abordarlos.

Tabla 2. Porcentajes dedicados anualmente a la educación Estadística en secundaria sugeridos por los libros de texto emitidos por la Secretaría de Educación Pública. Fuente: Conecta estrategias niveles 1, 2 y 3 (2016)

Grado	Sesiones dedicadas a la Matemática	Sesiones dedicadas a la Estadística	Porcentaje dedicado a la Estadística
Primero	205	10	4.87 %
Segundo	205	17.5	8.53%
Tercero	195	10	5.13%
TOTAL	605	37.5	6.20%

Nota: Una sesión considera aproximadamente 50 minutos.

c) Nivel Bachillerato

En cuanto al tiempo dedicado a la educación estadística en el nivel medio superior (bachillerato), se encontró que inicialmente se contempla en primer semestre en Matemáticas I (DGB, 2017). Tal presencia se ubica en el bloque IV (de 7) con una dedicación de aproximadamente 16 sesiones de 50 minutos cada una. Además, cabe mencionar que este bloque es lo único contemplado en la formación estadística común de todos los estudiantes en el bachillerato ya que adicionalmente sólo se continúa para estudiantes que eligen el área propedéutica que contiene un curso de Probabilidad y Estadística en quinto semestre, como sería el caso de las escuelas incorporadas a la Universidad de Sonora, y, sólo en algunas escuelas de nivel medio superior, en un segundo curso de Probabilidad y Estadística en sexto semestre dedicado a la probabilidad solamente. Esta



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

información se complementa en una tabla, en la que resalta que la Estadística se estudia un 17.12% aproximadamente del tiempo dedicado a la Matemática a lo largo del bachillerato (ver tabla 3), en el caso de quienes estudian un curso de Probabilidad y Estadística solamente.

Tabla 3. Porcentaje dedicado a la estadística, basados en el programa académico de la Dirección General de Bachillerato de la secretaría de educación Pública (2017)

Materia	No. de sesiones por semana	Sesiones totales por semestre	Porcentaje
Matemáticas I (bloque IV Estadística)	5	65	17.66%
Matemáticas II	5	80	21.74%
Matemáticas III	5	80	21.74%
Matemáticas IV	5	80	21.74%
Probabilidad y Estadística I (bloques I al IV Estadística)	3	48	13.05%
TOTAL		368	100.00%

4.2 Análisis de las actividades didácticas en los libros de texto seleccionados

En este apartado se procede a revisar las actividades didácticas de estadística promovidas en los libros de texto mexicanos seleccionados, teniendo como principales criterios de análisis: tipo de técnicas estadísticas (tablas de frecuencia, gráficas y medidas estadísticas) que se propone sean estudiadas, tipo de prácticas que se solicita desarrollar, los niveles de lectura que se promueven, la incorporación de algunas ideas retomadas de la literatura en educación estadística y la comparación de todo esto con lo que marca la reforma educativa, particularmente alrededor de las competencias estadísticas pretendidas. Los hallazgos encontrados en el análisis de libros de texto oficiales se resumen a continuación:

a) Nivel Primaria

En la educación básica (primaria), de conformidad con la Reforma Integral, los libros de texto organizan el tratamiento de la Matemática en los siguientes ejes: 1) Sentido numérico y pensamiento algebraico; 2) Forma, espacio y medida; 3) Manejo de la información; y, además, el compromiso de desarrollar: Actitud hacia el estudio de las matemáticas (SEP, 2011). Estos ejes tienen el propósito de desarrollar competencias en el estudiante. Siendo el tercer eje donde se ubica el tema de Estadística. En este nivel educativo, en congruencia con la visión de competencia planteada y sus elementos, las competencias matemáticas a desarrollar con apoyo de los libros de texto son los siguientes:

a) Resolver problemas de manera autónoma. Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones. b) Comunicar información matemática. Comprende la posibilidad de que los alumnos expresen, representen e interpreten información matemática contenida en una situación o en un fenómeno. c) Validar procedimientos y resultados. Consiste en que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal. d) Manejar técnicas eficientemente. (SEP, 2011, p.23)

El análisis de los libros Desafíos matemáticos de tercero y sexto de primaria (2016) se resume en que se manejan principalmente dos tipos de representaciones: tablas y gráficas; siendo el gráfico



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

de barras el más frecuentemente utilizado, seguido por el gráfico circular, gráficos cuya incorporación se puede justificar porque son fáciles de trabajar en edades tempranas, como lo menciona Watson (2006). Manejan conceptos como muestra, media, mediana, moda. Las actividades propuestas a los estudiantes en su mayoría son iniciadas con la solicitud de alguna de las prácticas como: calcula, responde, completa, ordena, elabora; que la mayoría de las veces se asocian a los niveles de lectura 1: “Leer los datos” y 2 “Leer dentro de los datos”. Aunque se encontraron actividades que solicitan prácticas como: decide, discute y argumenta, estas se solicitan muy poco, es decir, menos del 10% de las veces. En cuanto a aspectos estadísticos más allá de conocimientos o técnicas principalmente se promueve la descripción de los datos a partir de: tablas, gráficos y medidas; limitada principalmente a la muestra y manifestando escasamente alguna interpretación hacia la población. A continuación, se procede a mostrar en una tabla el análisis de actividades seleccionadas para ejemplificar lo antes dicho.

Tabla 4. Resumen del análisis realizado de las actividades seleccionadas del libro: Desafíos matemáticos, tercero de primaria (2016)

Aspectos	Tercero de primaria		
	Actividad 26	Actividad 27	Actividad 28
Contenido	Graficas de barra y pastel,	Grafica de barras	Grafica de barras
Prácticas	Responder, registrar, elaborar, organizar, decidir, contestar, analizar	Analizar, responder	Contestar, interpretar, elaborar,
Técnicas estadísticas	Organizar datos en un gráfico y tabla, interpretar la gráfica, contrastar su hipótesis	Interpretar la gráfica, (variable, valor, frecuencia absoluta)	Interpretar la gráfica, (variable, valor, frecuencia absoluta)
Niveles de lectura	Leer los datos, leer dentro de los datos	Leer los datos, leer dentro de los datos	Leer los datos, leer dentro de los datos
Competencias	Emprender procesos de búsqueda, organización, análisis e interpretación de datos contenidos en tablas o gráficas de diferentes tipos, para comunicar información que responda a preguntas planteadas por ellos mismos u otros	Análisis e interpretación de datos contenidos en gráficas	Análisis e interpretación de datos contenidos en gráficas

Por ejemplo, en tercer grado de primaria, la actividad 26 tiene como primera práctica solicitada la de responder, acción que ayuda a introducir al niño al contexto planteado y a sugerir con los cuestionamientos posteriores una predicción de la opinión de los integrantes de su grupo. Luego se promueve la práctica de registrar, cuyo atributo llevará a la recopilación y registro de datos. Posteriormente se solicita la práctica de elaborar, donde se promueve que el niño, decida, organice y dibuje una gráfica con la información recabada. Finalmente se solicita la práctica de contestar, que ayuda al análisis del gráfico y a corroborar si su predicción inicial fue congruente con la información obtenida. Esto es, se introduce al contexto, se promueve el uso de algunas técnicas estadísticas como organización de la información en un gráfico y tabla, interpretar la información y caracterizarla, además compararla con su hipótesis inicial. Con estas prácticas se promueven: un tipo de inferencia “informal” sin datos y, ya con datos, lecturas en los niveles 1 de Curcio “leer los datos” y 2 “leer dentro de los datos”. En cuanto a las competencias tras esta actividad, se observa que se pretende promover cada una de las competencias señaladas para este nivel educativo.

26 Cuatro estaciones

Consigna

De manera individual, realiza las siguientes actividades.

1. Responde las preguntas.

a) ¿Qué estación del año te gusta más?

¿Por qué?

b) ¿Qué estación crees que les gusta más a tus compañeros?

c) ¿Y cuál crees que les gusta menos?

2. Para corroborar si es cierto lo que crees, reúnete con dos compañeros y pregunten al resto del grupo. Registren los datos en la tabla.

Preguntas	Primavera	Verano	Otoño	Invierno	Total
¿Qué estación del año te gusta más?					
¿Qué estación del año te gusta menos?					

3. Una vez que tengan la información en la tabla, busquen una forma de representar gráficamente los resultados de la encuesta.

4. Respondan las preguntas.

a) ¿Qué estación del año prefieren más sus compañeros?

b) ¿Qué estación prefieren menos?

c) ¿Resultó lo que creían? ¿Por qué?

Figura 1. Actividad 26 de tercero de primaria

Para sexto año de primaria, un resumen del análisis realizado a las actividades 52, 53 y 54, puede ser visto en tabla 5.

Tabla 5. Resumen del análisis realizado de las actividades seleccionadas del libro: Desafíos matemáticos, sexto de primaria (2016)

Aspectos	Sexto de primaria		
	Actividad 52	Actividad 53	Actividad 54
Contenido	Media aritmética, mediana, moda	Media, mediana, moda	Media, mediana, moda
Prácticas	ordenar, responder, analizar, decidir, argumentar	Resolver, decidir, argumentar	Resolver, decidir, argumentar
Técnicas estadísticas	Tabla de frecuencias absolutas, calcular la media aritmética, mediana y moda	Tabla de frecuencias relativas, Calcular medidas de tendencia central	Tabla de frecuencias relativas, calcular medidas de tendencia central
Niveles de lectura	Leer los datos, leer dentro de los datos	Leer los datos, leer dentro de los datos	Leer los datos, leer dentro de los datos
Competencias	Organización, análisis e interpretación de datos contenidos en tablas o gráficas	Análisis e interpretación de datos contenidos en tablas o gráficas	Análisis e interpretación de datos contenidos en tablas o gráficas

b) Nivel Secundaria

El análisis de las actividades de los libros: Conecta Estrategias 1, 2, y 3 de secundaria (2016) que corresponden al eje de Manejo de información se resume en que los conocimientos o técnicas estadísticas promovidas en ellas son: tablas de datos, gráficas de barra, circulares, histograma, polígono de frecuencias, graficas de serie de tiempo; además, medidas estadísticas como media, mediana, moda, rango, desviación media, y conceptos como muestra, población, variable, frecuencia relativa, porcentual, fundamentalmente. Los que aparecen más frecuentemente, coincidiendo con lo que sucede en el nivel primaria, son el gráfico de barras. Las prácticas solicitadas en las actividades propuestas a los estudiantes son iniciadas con: lee, elabora, traza, registra, calcula, completa, ordena, resuelve, obtén, elige, responde, comenta, comunica, explica,



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

compara, decide, justifica, interpreta, argumenta y discute. Aun con un abanico de prácticas notablemente más amplio que en la educación primaria, su ejecución se realiza predominantemente sólo en los dos primeros niveles de lectura. En cuanto a aspectos estadísticos más allá de conocimientos o técnicas, principalmente se promueve la descripción de los datos a partir de: tablas, gráficas y medidas, limitada principalmente a la muestra y manifestando escasamente alguna interpretación hacia la población. Finalmente, las principales competencias que se promueven en las actividades son: que los estudiantes emprendan análisis e interpretación de datos contenidos en tablas o gráficas de diferentes tipos, para comunicar información matemática, mínimamente emprender procesos de búsqueda y organización de la información, y escasamente se llega a la inferencia hacia la población. A continuación, se procede a mostrar en una tabla el análisis de algunas actividades seleccionadas para ejemplificar lo antes dicho.

Tabla 6. Resumen de las actividades analizadas de los libros: Conecta Estrategias 1, 2, y 3 de secundaria (2016)

Aspectos	Secundaria		
	Nivel Primer grado Actividad 75 y 76	Segundo grado Actividad 28	Tercer grado Actividad 78 y 79
Contenido	Frecuencia absoluta y frecuencia relativa	Media aritmética y mediana	Medidas de dispersión: desviación media y rango.
Prácticas	leer, responder, analizar, concluir, argumentar, organizar	Leer, responder, registrar, interpretar y decidir	Leer, responder, decidir, analizar, argumentar
Técnicas estadísticas	Calcular o estimar una proporción y comparar frecuencias relativas.	Estimar una proporción, interpretar, comparar dos muestras de datos para estimar y argumentar con datos las afirmaciones hechas	técnicas estadísticas para calcular o estimar una medida de desviación
Niveles de lectura	Leer los datos, leer dentro de los datos	Leer los datos, leer dentro de los datos, leer más allá de los datos	Leer los datos, leer dentro de los datos, leer más allá de los datos
Competencias	Emprender procesos de búsqueda y organización de la información. análisis e interpretación de datos contenidos en tablas o gráficas	Análisis e interpretación de datos contenidos en tablas o gráficas	Análisis e interpretación de datos contenidos en tablas o gráficas

Particularmente, en tercer grado de secundaria, el contenido temático de la lección 78 es: medidas de dispersión, analizándose las diferencias entre desviación media y rango. Llama la atención que se presenta la actividad 78 con dos muestras de datos y su comparación, para la toma de decisiones. Se pretende conceptualizar desviación media y rango. En esta lección se tiene como primera práctica solicitada lee, la cual ayuda al estudiante a conocer la situación problema; luego, responde, se ejecuta a través de la lectura de representaciones tabulares, poniendo en uso conocimientos previos de medidas de análisis para la toma de decisiones. Posteriormente, se les pide discutir, analizar y definir una estrategia de análisis, estas prácticas se ejecutan poniendo en uso conocimientos previos, eligiendo una técnica estadística para calcular la variabilidad de la información y emitir una decisión argumentada. Luego, se les pide analizar afirmaciones hechas, argumentando con los resultados de su análisis y definiendo con cual afirmación están de acuerdo. Finalmente, se refuerza con la institucionalización de los conceptos. En cuanto a aspectos estadísticos descriptivos al estudiante se le presenta información en tablas, se promueven técnicas estadísticas para calcular o estimar una medida para la situación sugerida, se trabaja con la muestra. Se cree que esta actividad muestra un incipiente acercamiento con el RII al promoverse la comparación de dos muestras de datos para la toma de decisiones efectiva y argumentar con datos

las afirmaciones hechas. Se promueve los niveles de lectura 1, 2 y 3. Las competencias pretendidas para estas actividades son: análisis e interpretación de datos contenidos en tablas, para comunicar información, también se promueve argumentar basado en información, este tipo de actividades se dan escasamente.

BLOQUE 4
Secuencia 7 / lección 78
El mejor horno

CONTEXTO
Mide la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las desviaciones de cada dato a la media (desviación media). Analiza las diferencias de la "dispersión media" con el "rango", como medidas de la dispersión.

Hay situaciones donde lo que interesa de un conjunto de datos es conocer su dispersión (qué tan separados o juntos están entre sí). En esta secuencia aprenderás que la desviación media es un recurso útil para el análisis de la dispersión de un conjunto de datos.

1. Para comparar la precisión de horneado de dos hornos de gran tamaño, se puso el termostato de cada uno a 180 °C y se tomó la temperatura (en °C) en distintos puntos.

Horno A					Horno B				
160	200	192	190	188	194	204	185	200	188
162	180	165	196	182	190	198	187	189	192
198	170	194	170	160	193	193	194	170	194
187	166	186	184	164	175	181	187	192	184

a) La temperatura de 180 °C es la indicada en el manual como la idónea para el horneado de panqués.
¿Consideras que ambos hornos son igual de adecuados para hornear panqués?
¿Por qué?

b) Trabaja en equipo. Convierten cómo conviene analizar los datos para tomar una decisión. Distribuyen el trabajo según convergen y anotan sus conclusiones.
¿Qué horno es mejor para hornear panqués?
¿Por qué?

c) Comparan sus respuestas con las de sus compañeros. Lleguen a una decisión común y anoten sus comentarios.

2. Doña Carmen —experta repostera que hornea panqués en grandes cantidades y que asegura no saber matemáticas—, su marido y su hijo —estudiante de ingeniería— discuten acerca de qué horno deben seleccionar para hornear panqués.
Marido: Las temperaturas del horno A varían de 160 °C a 200 °C, y las del B, de 170 °C a 204 °C. Es mejor el horno B porque hay menos variación de temperatura.
Doña Carmen: En el horno A, mientras unos panqués quedan crudos, otros se queman, y sólo algunos salen bien cocidos. En el B, los panqués se queman, pero si la temperatura se reduce un poco, quedan mejor que en el A.
Hijo: El promedio de temperaturas en el horno A es 179.7 °C y en el B, 189.5 °C. El promedio más cercano a 180 °C es el del A; por eso es mejor.
Argumenta, en equipo, con quién estás de acuerdo. Expliquen su respuesta.

Una manera de saber qué variación hay en las temperaturas es considerar el rango, es decir, la diferencia entre los valores máximo y mínimo del conjunto de datos. Saber que en el horno A el rango de temperaturas es de 40 °C es un primer indicador de que, a pesar de que el promedio es cercano a 180 °C, la temperatura del horno es muy irregular. En la siguiente lección aprenderás otra manera de considerar la variación de temperatura.

3. Escribe, para cada afirmación, una V si consideras que es verdadera, y explica en tu cuaderno por qué lo es; o una F si supones que es falsa. En este último caso, justifica tu respuesta con un ejemplo en que no se cumpla la afirmación.

a) Si dos conjuntos de números tienen el mismo rango, entonces sus promedios son iguales.
b) Si dos conjuntos de números tienen el mismo rango, entonces sus valores máximo y mínimo coinciden.
c) Si dos conjuntos tienen rangos y promedios iguales, entonces los conjuntos son idénticos.

Figura 2. Actividad 78 de tercero de secundaria

c) Nivel Bachillerato

El análisis del libro *Vive la Probabilidad y la Estadística 1* (Flores y Gómez, 2014) del nivel medio superior se empezará asentando las competencias de referencia que corresponden a este nivel y que se encuentran establecidas en el Marco Curricular Común que da sustento al Sistema Nacional de Bachillerato (SNB), parte central de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) (DOF, Acuerdo 444, 2008). De ahí se retoman las competencias disciplinares que se espera se promueva en este nivel educativo.

Algunas competencias disciplinares de matemáticas, en la cual se considera está inmersa la Estadística, son las siguientes: a) Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. b) Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. c) Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

El análisis del libro de texto, *Vive la Probabilidad y Estadística 1* (Flores y Gómez, 2014) se resume en cuales conocimientos o técnicas estadísticas son promovidas en ellas, como son: tablas de distribución de frecuencias, gráficas de barra, histogramas, polígono de frecuencias, ojivas, diagrama de puntos, diagrama de tallo y hoja, pirámide de población, gráficos circulares, histograma, polígono de frecuencias, además, medidas estadísticas como media, mediana, moda, rango, desviación media, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y conceptos como población, muestra, dato, variable, tipos de muestreo, frecuencia relativa, porcentual, tamaño de clase, marca de clase, etc.; usando más frecuentemente tablas de distribución de frecuencias, en menor grado gráficas. Las actividades realizadas por los estudiantes son iniciadas con las prácticas: lee, organiza, explica, elabora, integra, construye, discute, registra, calcula, contesta, resuelve; mínimamente contrasta, elige, estima, predice, argumenta e interpreta, que se asocian a un nivel de complejidad cognitiva considerable, especialmente estas últimas. Las prácticas más solicitadas predominantemente conciernen más a los dos primeros niveles de lectura. Las competencias promovidas se acercan más a expresar ideas y conceptos. A analizar datos de una muestra, para determinar o estimar su comportamiento, esto, mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas, relacionadas con los datos, con la distribución de frecuencias y con el cálculo de medidas de centralización; Mínimamente elegir y decidir un tipo de muestreo o gráfica. Es escasa la interpretación y estructura de argumentos acerca del comportamiento de una población, relacionado con los datos provenientes de una población o muestra. Escasamente se lleva al estudiante a un tipo de inferencia hacia un contexto más amplio. En cuanto a otros aspectos estadísticos, el estudiante mínimamente emprende procesos de búsqueda y organización de información, generalmente se le presenta información ya organizada en tablas, se promueven técnicas estadísticas para calcular o estimar medidas para la situación sugerida, se trabaja datos muestrales, analizando los datos contenidos en tablas o gráficas, escasamente se llega a la interpretación, a inferir hacia la población y a tomar decisiones sobre tipos de muestreo o gráficos a usar.

A continuación, se procede a mostrar en una tabla el análisis de algunas actividades pertenecientes a los bloques de Estadística, para ejemplificar lo dicho en el párrafo anterior.

Tabla 7. Resumen de las actividades analizadas del libro *Vive la Probabilidad y Estadística 1* (Flores y Gómez, 2014) usado en dos preparatorias incorporadas a la Universidad de Sonora.

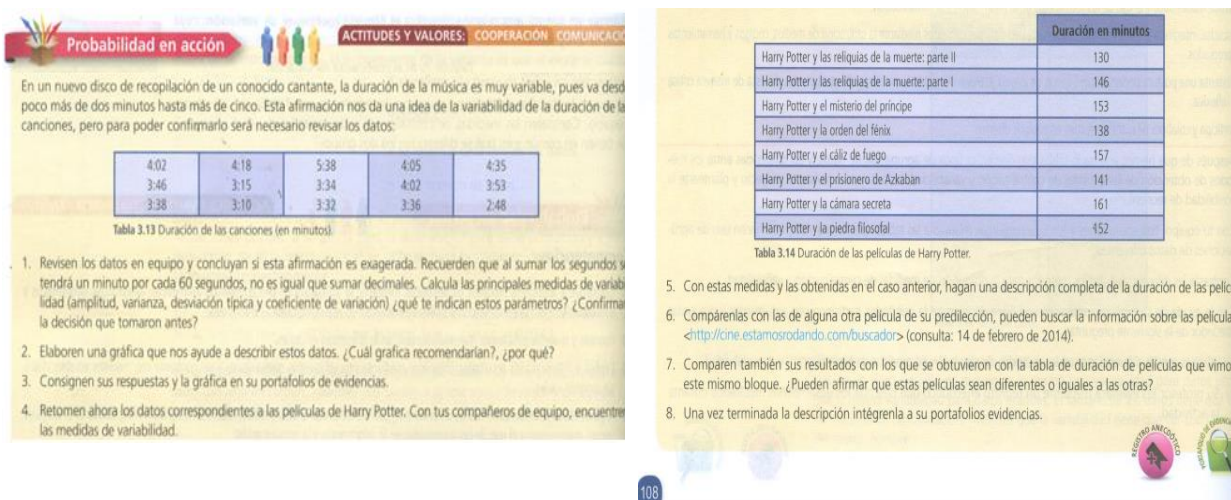
Bloque	Preparatoria		
	Bloque 1. Sección Probabilidad en acción, página 32	Bloque 2. Sección Probabilidad en acción, página 54	Bloque 3. Sección Probabilidad en acción, página 108
Aspectos			
Contenido	Población, muestra, variable, variabilidad, moda, tipos de muestreos	Estudio retrospectivo, puntual o prospectivo, variable y tipos de variables	Amplitud, varianza, desviación estándar y coeficiente de variación;
Prácticas	Recabar, registrar, organizar información en tablas. Contestar, decidir, argumentar investigar, discutir.	Discutir, usar, decidir argumentar.	organizar, calcular, elaborar, decidir, concluir, argumentar.
Técnicas estadísticas	Desarrollo de conceptos estadísticos: población, variable,	se promueve el análisis de datos, para una toma de decisiones eficiente.	Comparación de dos muestras de datos.



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

Niveles de lectura	<p>variabilidad, moda, se promueve el muestreo aleatorio sistemático. Leer los datos, leer dentro de los datos, leer más allá de los datos.</p>	leer más allá de los datos	<p>Uso de amplitud, varianza, desviación estándar y coeficiente de variación; organizar, graficar, argumentar una afirmación, Leer los datos, leer dentro de los datos, leer más allá de los datos</p>
Competencias	<p>Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. Argumentar la solución obtenida del problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales.</p>	<p>Argumentar la solución obtenida del problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.</p>	<p>Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. Formula y resuelve problemas matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales y Argumenta la solución de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.</p>

Por ejemplo, en el bloque 3, en la sección Probabilidad en acción, en la actividad de la página 108, se presentan dos situaciones problema con datos organizados en tablas, llama la atención pues se promueve la comparación de dos muestras de datos para la validación de afirmaciones. Las prácticas por realizar son: organizar, lleva a ordenar los datos para su posible tratamiento matemático; luego calcular, cuya práctica promueve el uso de técnicas estadísticas como amplitud, varianza, desviación estándar y coeficiente de variación; posteriormente elaborar una gráfica, acción que promueve organizar y decidir la mejor forma de representar la información en un gráfico o tabla, y concluir si la afirmación “La duración de la música es muy variable” es validada o no con la información presentada. En cuanto a aspectos estadísticos, se promueve la organización, la elección de cómo presentar los datos, el análisis de datos a través de medidas estadísticas, el argumentar una afirmación, pero se piensa que la situación problema podría utilizarse para además llevar al estudiante a un tipo de inferencia hacia un contexto más amplio, sin quedarse sólo en la validación o no de afirmaciones, sino también en estimar y predecir, y por qué no, a establecer nuevas afirmaciones de las situaciones analizadas. Las competencias que se pretenden promover son: Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales, etc... Las prácticas promovidas en esta actividad esencialmente hacen énfasis en actividades de los niveles de lectura 1 “leer los datos”, 2 “leer entre los datos” y en algunos cuestionamientos el 3 “leer más allá de los datos, por lo que se cree que esta actividad muestra un incipiente acercamiento con el RII al promoverse la comparación de dos muestras de datos (ver tabla 7).



Probabilidad en acción

ACTITUDES Y VALORES: COOPERACIÓN COMUNICACIÓN

En un nuevo disco de recopilación de un conocido cantante, la duración de la música es muy variable, pues va desde poco más de dos minutos hasta más de cinco. Esta afirmación nos da una idea de la variabilidad de la duración de las canciones, pero para poder confirmarlo será necesario revisar los datos:

4:02	4:18	5:38	4:05	4:35
3:46	3:15	3:34	4:02	3:53
3:38	3:10	3:32	3:36	2:48

Tabla 3.13 Duración de las canciones (en minutos).

1. Revisen los datos en equipo y concluyan si esta afirmación es exagerada. Recuerden que al sumar los segundos se tendrá un minuto por cada 60 segundos, no es igual que sumar decimales. Calcule las principales medidas de variabilidad (amplitud, varianza, desviación típica y coeficiente de variación) ¿qué te indican estos parámetros? ¿Confirma la decisión que tomaron antes?

2. Elaboren una gráfica que nos ayude a describir estos datos. ¿Cuál gráfica recomendarían?, ¿por qué?

3. Consignen sus respuestas y la gráfica en su portafolios de evidencias.

4. Retomen ahora los datos correspondientes a las películas de Harry Potter. Con tus compañeros de equipo, encuentren las medidas de variabilidad.

	Duración en minutos
Harry Potter y las reliquias de la muerte: parte II	130
Harry Potter y las reliquias de la muerte: parte I	146
Harry Potter y el misterio del príncipe	153
Harry Potter y la orden del fénix	138
Harry Potter y el cáliz de fuego	157
Harry Potter y el prisionero de Azkaban	141
Harry Potter y la cámara secreta	161
Harry Potter y la piedra filosofal	152

Tabla 3.14 Duración de las películas de Harry Potter.

5. Con estas medidas y las obtenidas en el caso anterior, hagan una descripción completa de la duración de las películas.

6. Compárenlas con las de alguna otra película de su predilección, pueden buscar la información sobre las películas <<http://cine.estamosrodando.com/buscador>> (consulta: 14 de febrero de 2014).

7. Comparen también sus resultados con los que se obtuvieron con la tabla de duración de películas que vimos este mismo bloque. ¿Pueden afirmar que estas películas sean diferentes o iguales a las otras?

8. Una vez terminada la descripción intégrenla a su portafolios evidencias.

Figura 3. Actividad pág. 108 de tercer bloque de bachillerato

Con referencia a las competencias disciplinares del currículo, buscan promover en los alumnos no sólo el contenido temático, sino el razonamiento estadístico y tocan su componente inferencial. Por lo tanto, se considera que, dentro del curso de Probabilidad y Estadística, de acuerdo con el programa del curso al menos en lo que su planeación corresponde, se buscaría promover también algunas concepciones iniciales acerca de la inferencia. Y, aunque en los programas de estudio el sentido estadístico y el RII no aparezcan como objetivos a desarrollar, el hecho es que implícitamente deberían promoverse toda vez que se está estudiando Estadística y como señalan Makar, et al. (2011) hacer estimaciones e inferencias acerca de un fenómeno desconocido es el corazón de la estadística. Es importante mencionar que este libro promueve la elaboración de un proyecto estadístico escolar, su desarrollo es a través del trabajo colaborativo y como mencionan Wild y Pfannkuch (1997) ciertos objetivos de aprendizaje deben cumplirse para llegar al nivel deseado de comprensión siendo el ciclo investigativo una dimensión que ayuda de gran manera a esa comprensión.

V. Conclusiones

Con referencia al peso o importancia que se le da a la educación Estadística en México, el tiempo que recomienda dedicar en los libros de texto analizados es relativamente poco para los contenidos y propósitos que se planean alcanzar, también es poco en comparación a otros contenidos matemáticos, dando como resultado que los temas no sean abordados con el detenimiento necesario con que se requeriría fueran tratados. De esto se desprende que el tiempo disponible es una limitante más para que se puedan alcanzar las competencias estadísticas a desarrollar en estos niveles educativos.

En cuanto a las actividades didácticas analizadas, se detectó que los libros de texto de educación básica (primaria y secundaria), manejan principalmente dos tipos de representaciones: tablas y gráficas (gráfico de barras y circular, los más frecuentemente utilizados), coincidiendo nuestros resultados con la investigación realizada por Diaz-Levicoy et al (2017). Por otro lado, el tipo de prácticas que predomina son leer, calcular, responder, lo que da por resultado el énfasis en actividades básicamente de los niveles de lectura “leer los datos” y “leer entre los datos”, que tienen presencia al menos en el 90% de ellas. Estos resultados son similares a los libros de textos



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

chilenos y argentinos analizados por Diaz- Levicoy y Arteaga (2014) y Diaz-Levicoy, et al (2017), pues manejan mayoritariamente las prácticas calcular, completar, construir, leer y ejemplificar, que implican un nivel de lectura “leer entre los datos”. Ahora bien, es comprensible lo señalado por Inzunza (2015) al observar que estudiantes de nivel superior prestan poca atención a aspectos predictivos (estimaciones) sobre el comportamiento de las gráficas, pues desde el nivel básico y medio superior se presentan mínimamente prácticas que lleven a inferencias y predicciones, es decir, contrastar, estimar, interpretar, inferir, donde encontramos un mayor nivel de razonamiento y el logro de un nivel de lectura 3. En referencia a las competencias curriculares: las actividades principalmente promueven el análisis e interpretación de datos contenidos en gráficas, para comunicar información que responda a preguntas planteadas por ellos mismos u otros; Mínimamente emprenden procesos de búsqueda y organización de la información; mínimamente eligen la forma más adecuada de organizar y representar (tabular o gráfica) los datos, para comunicar información estadística; y escasamente se lleva al estudiante a un tipo de inferencia hacia un contexto más amplio (poblacional), estos resultados discrepan con el marco definido por Wild y Pfannkuch (1999) en la promoción del razonamiento estadístico.

En el bachillerato se puede afirmar que, los libros de texto no favorecen que los estudiantes adquieran una formación estadística deseable, y por ende no cuentan con elementos suficientes pertinentes, como: cuestionar críticamente la información estadística que pueden encontrar en diversos contextos; argumentar sus conclusiones estadísticas; la capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones, llegando así con algunas deficiencias al ingresar al nivel escolar superior o al área laboral. A diferencia de las competencias promovidas en la educación básica no se debe perder de vista el contexto social de la educación media superior: de ella egresan individuos en edad de ejercer sus derechos y obligaciones como ciudadanos, y como tales deben reunir, en adición a los conocimientos y habilidades que definirán su desarrollo personal, una serie de actitudes y valores que tengan un impacto positivo en su comunidad y en el país en su conjunto (Diario Oficial de la Federación, 2008).

Finalmente se percibe que los libros de texto son una directriz de lo que planes y programas de estudio proponen para estos renglones educativos o como una guía para ello y, en cierta medida, esto permite esclarecer y valorar su alcance potencial (pues son editados por la subsecretaría de educación básica de la Secretaria de Educación Pública y de una editorial de prestigio a nivel nacional autorizada). Sin embargo, dicho alcance se ve comprometido por la falta de actividades que promuevan prácticas asociadas a: contrastar, elegir, inferir, estimar, argumentar e interpretar; que comparados con lo habitual (identificar o calcular), se reconocen como las de mayor complejidad cognitiva, ya que tratan de construir juicios fundados en información, caracterizados por la utilización de un razonamiento estadístico, lo cual ayudaría al aprendizaje y enseñanza de la Estadística, como en sus posibles resultados. Adicionalmente, podemos afirmar que el panorama actual sobre la educación estadística no está particularmente abierto al desarrollo del sentido estadístico de los estudiantes ni de su RII, afirmaciones válidas en lo que respecta a nuestro medio educativo.

Bibliografía

- [1] Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires, 2002*. Conferencia inaugural. Recuperado de <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/CULTURA.pdf>
- [2] SEP, (2016). *Conecta estrategias, Matemáticas 1*. Cd. de México, México: SM de Ediciones, S.A. de C.V.
- [3] SEP, (2016). *Conecta estrategias, Matemáticas 2*. Cd. de México, México: SM de Ediciones, S.A. de C.V.



VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos

- [4] SEP, (2016). *Conecta estrategias, Matemáticas 3*. Cd. de México, México: SM de Ediciones, S.A. de C.V.
- [5] Curcio, F. (1989). *Developing graph comprehension*, Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.
- [6] Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B. y Arteaga, P. (2017). Caracterización de los gráficos estadísticos en libros de texto argentinos del segundo ciclo de educación primaria. *Profesorado. Revista de Curriculum y Formación de Profesorado*, 21 (3), 299-326. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/567/56752489015.pdf>
- [7] Diaz-Levicoy, D., Arteaga P. (2014). Análisis de gráficos estadísticos en textos escolares de séptimo básico en Chile. *Revista electrónica Diálogos Educativos*, 14 (28), 21-40. Recuperado de <https://www.researchgate.net/publication/276269172>
- [8] Diario Oficial de la Federación (2008). Acuerdo número 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato, *Secretaría de Educación Pública*, Recuperado en: http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/10905/1/images/Acuerdo_444_marco_curricular_comun_SNB.pdf
- [9] SEP (2016). *Desafíos matemáticos, tercer grado de educación básica*. Cd. de México, México: Editado por la subsecretaría de educación básica, por la Comisión Nacional de libros de texto gratuitos.
- [10] SEP (2016). *Desafíos matemáticos, para el alumno. Sexto grado de educación básica*. Cd. de México, México: Editado por la subsecretaría de educación básica, por la Comisión Nacional de libros de texto gratuitos.
- [11] Few, S. (2004). *Show me the numbers. Designing tables and graphs to enlighten*, Oakland, CA: Analytics Press.
- [12] Flores, A y Gómez, A. (2014). *Vive la probabilidad y la Estadística I*. Cd. de México, México: Progreso Editorial.
- [13] Friel, S.N., Curcio, F.R. & Bright, G.W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32 (2), 124-158. Recuperado de https://www.jstor.org/stable/749671?seq=1#metadata_info_tab_contents
- [14] INEE (2012). *La educación en México: Estado actual y consideraciones sobre su evaluación*, Cd. de México, México. Recuperado de http://www.senado.gob.mx/comisiones/educacion/reu/docs/presentacion_211112.pdf
- [15] Insunza, S. (2015). Niveles de interpretación que muestran estudiantes sobre gráficas para comunicar información de contextos económicos y sociodemográficos. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 20 (65), 529-555. Distrito Federal, México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa, A.C. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14035408010>
- [16] Makar, K., Bakker, A. & Ben-Zvi, D. (2011). The Reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13, (1-2), 152-173. Recuperado de <http://www.jvdiesproyco.es/documentos/ACTAS/2%20Comunicacion%2035.pdf>
- [17] Ruiz, N. (2014). La enseñanza de la estadística en la educación primaria en América Latina. *REICE: Revista iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 13(1), 103-121. Recuperado de <http://www.rinace.net/reice/numeros/arts/vol13num1/art6.pdf>
- [18] Ridgway, J., Nicholson, J. y McCusker, S. (2008, Julio) *Mapping new statistical Literacies and Illiteracies. International Conference on Mathematics Education*, Trabajo presentado en el 11th International Congress on Mathematics Education, Monterrey, México.
- [19] SEP (2011). *Programa de estudios 2011 guía para el maestro*. Educación básica secundaria. Distrito Federal, México. Recuperado de http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/pdf/secundaria/matematicas/PROG3EROSSEC_MAT2013.pdf
- [20] Shaughnessy, J. M., Garfield, J., & Greer, B. (1996). *Data Handling*. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds). *International Handbook of Mathematics Education*. (205-237). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- [21] Tufte, Edward (2001). *The Visual Display of Quantitative Information*, Cheshire Connecticut: Graphics Press llc.
- [22] Watson, J.M. (2006). *Statistical literacy at school: growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- [23] Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Institute* 67,3, 223-265, Printed in Mexico.

Aprendizaje de la Aleatoriedad y Conceptos Asociados: un Estudio en Secundaria con Apoyo de Geogebra

Guillermo Ramírez Montes¹ & Ana Cláudia Batalha Henriques²

Resumen

En este trabajo presentamos los resultados de un estudio realizado durante el 1º semestre del año lectivo 2017, en el contexto de una experiencia de enseñanza apoyada con TIC, específicamente con Geogebra, dirigida al aprendizaje de la probabilidad en décimo año de escolaridad en el contexto costarricense. Se presenta, en particular, una de las cinco tareas de la secuencia de aprendizaje que conforma la experiencia de enseñanza, con el objetivo de comprender cómo los alumnos aprenden conceptos básicos asociados a experimentos aleatorios (aleatoriedad, casos favorables, casos totales y evento aleatorio) al realizar tareas exploratorias apoyadas con Geogebra, y cuál es el papel de este software como recurso didáctico para el aprendizaje de estos conceptos. La metodología utilizada fue de tipo cualitativa e interpretativa, siendo empleados, como instrumentos de recolección de datos, la observación participante y la recolección documental de las resoluciones de los alumnos. Los resultados evidencian que la mayor parte de los alumnos tienen noción de la aleatoriedad, asociando el concepto con experiencias de su día a día. Sin embargo, presentan dificultades para utilizar dicho concepto en la toma de decisiones que involucran probabilidades. Por su lado, los conceptos de casos favorables, casos totales y eventos aleatorios son desconocidos por la mayor parte de los alumnos. En cuanto a las contribuciones de la tecnología, el trabajo con Geogebra permitió que algunos alumnos fueran capaces de inferir correctamente relaciones asociadas a los conceptos de casos favorables, casos totales y eventos, a medida que simulan varias veces la experiencia del lanzamiento de dos dados. Además, las simulaciones para pequeñas repeticiones de la experiencia permitieron evidenciar que gran parte de los alumnos tienen creencias equivocadas sobre la aleatoriedad, producto de un uso inadecuado de la probabilidad clásica. De esta forma, los resultados obtenidos permiten hacer una evaluación positiva del uso de tareas exploratorias con recurso a Geogebra para la enseñanza y aprendizaje de conceptos de Probabilidad en secundaria. Durante la ponencia del trabajo se busca presentar estos resultados y mostrar la simulación de Geogebra utilizada en la tarea.

Palabras clave: aleatoriedad, casos favorables y totales, tarea exploratoria, Geogebra, simulación

¹ Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Costa Rica. grm1905@gmail.com

² Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal. achenriques@ie.ulisboa.pt



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la
Probabilidad y el Análisis de Datos*

Abstract

In this paper we present the results of a study conducted during the 1st semester of the school year of 2017 in the context of a teaching experiment supported by ICTs, particularly Geogebra, aimed at the learning of Probability in the 10th grade of the Costa Rican context. We present, in particular, one of the five tasks of the learning sequence that supports the teaching experiment, aiming to understand how 10th grade students of Costa Rica learn the basic concepts associated with random experiments (randomness, favorable cases, total cases and random event) when working on exploratory tasks supported by Geogebra, and what is the role of this software as a didactic resource for learning these concepts. The methodology used was qualitative and interpretative and data collection included: participant observation and the students' answers to the tasks. The results show that the majority of students have a notion of randomness, associating the concept with their real life experiences. However, they have difficulties in using this concept to make decisions involving probabilities. The concepts of favorable cases, total cases and events are unknown to most students. Regarding the contributions of technology, working with Geogebra allowed some students to be able to correctly infer relations associated with the concepts of favorable cases, total cases and events as they simulate the experience of throwing two dice several times. In addition, when they do a small number of simulations for an experience, it was possible to observe that a large part of the students have wrong beliefs about randomness, due to an inadequate use of classical probability. In this way, the results obtained allow us to make a positive evaluation of the use of exploratory tasks with Geogebra for the teaching and learning of Probability concepts in secondary school. During the presentation of the work, we seek to present these results and show the simulation of Geogebra used in the task.

Keywords: randomness, favorable and total cases, exploratory task, Geogebra, simulation.

I. Introducción

La Probabilidad, como área de conocimiento de la Matemática, ha venido tomando mayor importancia a nivel educativo escolar y universitario en los últimos años (Inzunza, 2014), adquiriendo su enseñanza un papel más experimental a nivel de primaria y de secundaria (Batanero, 2006). Este hecho se refleja en la preocupación de varios países por considerar los conocimientos básicos probabilísticos en sus programas de Matemática, incluyendo el Programa de Matemática de Costa Rica, donde se incluye la Probabilidad desde los primeros años de la educación escolar (MEP, 2012). Esta importancia atribuida a la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad se debe al hecho de ser una herramienta matemática base para el aprendizaje de otras disciplinas y proveer al alumno de herramientas para lidiar con situaciones cotidianas donde reina el azar (Batanero, 2006). En



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la
Probabilidad y el Análisis de Datos*

este sentido, capacidades como interpretar, comprender y analizar datos probabilísticos se vuelven elementos fundamentales para que el alumno presente una mejor participación en la sociedad (Inzunza, 2014).

A nivel de secundaria, los contenidos probabilísticos enseñados en la clase de Matemática se han convertido en fuente necesaria no sólo para hacer lecturas básicas de probabilidades en periódicos y otras fuentes de información, sino también para ayudar a entender mejor algunos conceptos estadísticos que están muy ligados con conceptos básicos de probabilidad (Mendenhall, Beaver y Beaver, 2010). Así, conceptos probabilísticos como experiencia aleatoria, casos favorables, casos totales y eventos aleatorios están asociados a los conceptos estadísticos de muestra aleatoria. Estos conceptos forman una base para introducir al alumno al cálculo de probabilidades, no obstante, su asociación con diferentes significados, incluyendo los términos cotidianos, y el formalismo con el que son tratados en la clase de Matemática generan dificultades en el aprendizaje del alumno (Inzunza, 2014). En este sentido, dificultades como comprender y aplicar conceptos probabilísticos se tornan comunes en el aprendizaje, como consecuencia, elementos psicológicos como el miedo o disgusto para aprender Probabilidad llegan a ser más fuertes que la voluntad propia en algunos alumnos (Batanero, 2005).

Los programas de Matemática se han preocupado por integrar la Probabilidad en sus currículos y en proponer prácticas de enseñanza y aprendizaje distintas a las tradicionales, que permitan superar esas dificultades (Santos y Moita, 2009). Las Tecnologías de la Información y Comunicación [TIC] surgen como una forma de cambiar el papel pasivo que comúnmente asume el alumno en las clases tradicionales, otorgándole un papel de constructor de su conocimiento (Santos y Moita, 2009), a través del cual pueda minimizar la presencia de dificultades. La utilización de software matemático, como por ejemplo Geogebra, permite la exploración de conceptos probabilísticos a partir de simulación (Inzunza, 2014), proceso que se ha mostrado bastante favorable en el aprendizaje de la Probabilidad.

En este camino exploratorio que asume el alumno, la tarea propuesta adquiere un papel importante, siendo necesario que su formulación logre acoplar el concepto matemático con el componente tecnológico, ayudando al alumno en su aprendizaje. Así, las tareas exploratorias, entendidas como tareas abiertas donde el alumno es invitado y desafiado a explorar el concepto matemático de forma autónoma y, por tanto, con menor intervención del profesor, abren camino para que a partir de los conocimientos previos se pueda construir nuevo conocimiento matemático (Ponte, 2005). Estas tareas también permiten que procesos esenciales para el aprendizaje, enfatizados por el programa de Matemática costarricense (MEP, 2012), como la argumentación, la conexión de ideas entre conceptos, la comunicación y la utilización de representaciones del concepto matemático, sean puestos en práctica. En particular, en referencia a la Probabilidad, el programa establece entre sus propósitos el optar por metodologías que lleven al alumno a identificar, recoger e



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la
Probabilidad y el Análisis de Datos*

interpretar información necesaria para la resolución de tareas estocásticas, utilizando recursos como la simulación de situaciones del contexto cotidiano que conduzcan a una mejor comprensión del concepto.

Este estudio busca contribuir en el campo de la educación probabilística, en lo que se refiere al aprendizaje con nuevos enfoques de enseñanza, en particular con las tecnologías, que estimulen la participación efectiva de los alumnos en el aula. Así, en esta ponencia se presentan resultados de un estudio desarrollado en el contexto de una experiencia de enseñanza dirigido al aprendizaje de la Probabilidad en 10° año del contexto costarricense, utilizando tareas exploratorias apoyadas con Geogebra. En particular, se presentan los resultados relativos a una de las cinco tareas de la secuencia de aprendizaje que conforma la experiencia de enseñanza.

El objetivo del estudio es comprender cómo los alumnos costarricenses de 10° año aprenden conceptos básicos asociados a experimentos aleatorios, específicamente, los conceptos de aleatoriedad, casos favorables, casos totales y evento aleatorio, al realizar tareas exploratorias apoyadas con Geogebra, y cuál es el papel de este software como recurso didáctico para el aprendizaje de tales conceptos. Para responder a este objetivo se plantean dos cuestiones de investigación:

- 1) ¿Cuáles son los aprendizajes evidenciados por los alumnos en sus resoluciones referidas a estos conceptos después de finalizada la primera tarea de la experiencia de enseñanza?
- 2) ¿Qué dificultades revelan los alumnos en el trabajo con estos conceptos?
- 3) ¿Cuál es el papel de Geogebra en el aprendizaje, durante el desarrollo de la primera tarea de la experiencia de enseñanza?
- 4) ¿Qué dificultades revelan los alumnos en la utilización del Geogebra para el trabajo de los conceptos?

II. Marco teórico

Aprendizaje de los conceptos de aleatoriedad y conceptos asociados al espacio muestral en la clase de matemática

El término aleatoriedad no resulta ser desconocido para el alumno, pues en el momento en el que inicia su estudio escolar ya ha vivenciado algunas situaciones de aleatoriedad que, de alguna u otra forma, le permiten comprender cuándo está en presencia de ellas (Ortiz, Batanero y Serrano 2001). Sin embargo, en este contacto alumno-cotidianidad, con experiencias aleatorias, el término aleatoriedad no siempre tiene el mismo sentido que se le



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la
Probabilidad y el Análisis de Datos*

intenta transmitir formalmente al estudiante en la clase de matemática, evidenciando de esta forma un carácter complejo asociado al concepto que tiende a traer dificultades para el alumno (Ortiz, Batanero y Serrano 2001). En cierta forma esta complejidad está asociada a su relación directa con el concepto de probabilidad. Según Martins (2011), la aleatoriedad viene a ser un medio para estudiar la probabilidad como una propiedad asociada a los fenómenos aleatorios y, por tanto, asociada a patrones que se rigen bajo la ley de los grandes números. En este sentido, Ortiz et al. (2001) hacen un estudio sobre los términos asociados a la probabilidad y la aleatoriedad, utilizados comúnmente en los libros de texto de bachillerato en España, encontrando que existe una diversidad tales como: acaso, incertidumbre, ganar, probable, urna, dado, entre otros.

En referencia a los conceptos asociados al espacio muestral, la teoría de conjuntos ha servido como el medio para trabajar el lenguaje formal del cálculo de probabilidades, asociando términos probabilísticos como espacio muestral, evento y evento imposible a los términos conjunto universal, subconjunto del espacio muestral y conjunto vacío, respectivamente (Pitman, 1993). Groth, Butler y Nelson (2016) trabajan actividades lúdicas para la enseñanza de tipos de eventos, enfatizando que, la utilización de estos términos probabilísticos muchas veces no va de la mano con las definiciones que ha aprendido el alumno en su día a día, generando dificultades en el aprendizaje de los términos evento imposible, evento seguro y evento menos probable, producto de la interpretación que hace el alumno con su cotidianidad.

Por su parte, el programa de Matemática costarricense enfatiza que el alumno de ciclo diversificado (10°, 11° y 12°) debe llegar con destrezas básicas asociadas a la Probabilidad, entre ellas el manejo de situaciones aleatorias, siendo relevante promover en la clase la reflexión y formalización de los conceptos básicos asociados al cálculo de probabilidades, entre estos, los conceptos asociados al espacio muestral. Para tales fines el programa sugiere la utilización de herramientas como la modelación y simulación que, además de permitir el trabajo colectivo, permitan al estudiante ver la probabilidad contextualizada, motivando su aprendizaje (MEP, 2012).

Otros autores, por ejemplo, Batanero (2006), también enfatizan en que los avances tecnológicos deben ser un medio para abordar el aprendizaje de la Probabilidad por caminos didácticos que, sin necesidad de un gran nivel de formalismo de los conceptos, ayuden a superar las dificultades atribuidas su aprendizaje. Así, las TIC se convierten en un camino para dejar de centrar el aprendizaje del alumno solamente en el contenido, buscando fortalecer su pensamiento matemático a través de la resolución de tareas en contextos reales que, además de permitir el aprendizaje del concepto, fomenten capacidades matemáticas (MEP 2012).



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la
Probabilidad y el Análisis de Datos*

Simulación a través de computador en el estudio de conceptos probabilísticos

Por simulación se puede entender el proceso artificial utilizado para imitar o substituir el comportamiento de un fenómeno aleatorio, utilizando, de modo general, *números aleatorios* (Martins 2011). Esta imitación de la realidad permite un aprendizaje diferente al habituado por el alumno, promoviendo la exploración de teorías, el dinamismo del grupo y el trabajo con tareas que, mediante métodos analíticos de resolución, tienden a ser complejas para el alumno (Redecker 2013).

Para Erickson (2006), la simulación mediante la utilización del computador cobra importancia en el estudio del aprendizaje de la Probabilidad, facilitando la comprensión del concepto y el análisis de los cálculos. Este autor, enfatiza que la simulación con computador permite al alumno mejorar la inferencia de conceptos probabilísticos a través de la exploración de diferentes representaciones asociadas al concepto matemático, y con utilización de poco tiempo.

Algunas limitaciones deben ser consideradas al trabajar simulación con el computador, entre ellas, las simulaciones de números aleatorios que generan los computadores son pseudo-aleatorios, lo que implica que los comportamientos generados por el computador no sean ajustados perfectamente a los modelos teóricos, pudiendo llevar al alumno a sesgos a la hora de identificar el valor frecuencial de probabilidad, el cual puede no coincidir con el valor teórico según la lectura hecha por el alumno (Inzunza 2017). Además, Coutinho (2011) menciona que existe la posibilidad de que el alumno no esté familiarizado con el *software* matemático, existiendo cierta resistencia de este a utilizar la tecnología para resolver una tarea, cuando el cálculo a mano es posible y viable para el alumno.

Finalmente, Erickson (2006) enfatiza que es necesario hacer simulación tanto con tecnología como sin ella, de forma que haya un equilibrio que permita aprovechar las capacidades de aprendizaje del alumno. Para este autor, el trabajo sin tecnología debe procurar que no se pierda el formalismo dado por axiomas que sustentan la definición del concepto y otros elementos matemáticos necesarios para definirlo. Por su lado, el trabajo con tecnología debe procurar que la simulación sirva para profundizar en las representaciones y propiedades ligadas al concepto, ahorrando cálculos grandes que demoran mucho tiempo y cuyo proceso analítico de resolución ya se conoce.

La utilización de Geogebra en el aprendizaje de conceptos probabilísticos

Uno de los recursos con los que es habitual trabajar en las clases de Matemática, donde es utilizada tecnología, es Geogebra. Algunas características como la facilidad de uso, ser de descarga gratuita, disponer de herramientas que permiten la representación dinámica del concepto matemático y su relevancia para trabajar la Probabilidad en comparación con otros softwares dinámicos, lo convierten en un software con potencialidad didáctico (Inzunza 2014).



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la
Probabilidad y el Análisis de Datos*

Autores como Inzunza (2014) enfatizan que Geogebra ayuda a visualizar diferentes comportamientos de los conceptos envueltos, utilizando para eso la construcción de parámetros que permiten simular y manipular el objeto matemático, lo que a su vez permite la exploración de propiedades de conceptos básicos de Probabilidad, y que el alumno participe en la construcción de su propio conocimiento. En su estudio, este autor utiliza la hoja de Excel y la hoja gráfica que dispone Geogebra para mostrar la simulación del lanzamiento de un dado después de repetir su lanzamiento una ‘gran’ cantidad de veces, obteniendo por observación que el valor de probabilidad frecuencial para cualquier evento simple (obtener una cara con un número específico entre 1 y 6) tiende a aproximarse al valor teórico $1/6$. En esta misma línea, Batanero (2005) en su estudio sobre los diferentes significados asociados a la probabilidad, afirma que “con el desarrollo progresivo de los ordenadores ha aumentado el interés por la introducción experimental de la probabilidad” (p.260), lo que a su vez envuelve el trabajo de los conceptos de aleatoriedad, casos favorables, casos totales y evento de una experiencia aleatoria. No obstante, para esta autora la utilización de software matemático no debe reemplazar el estudio formal de los conceptos probabilísticos, afirmando que ambos abordajes deben usarse, complementándose mutuamente. Finalmente, Mercado (2013) da algunos ejemplos de cómo utilizar Geogebra para el estudio de conceptos probabilísticos mediante simulación, destacando que a través de la simulación pueden abordarse fácilmente situaciones aleatorias complejas, cuyo aprendizaje a mano resulta muy difícil para el estudiante.

III. Metodología

El presente estudio se centra en la primera tarea de una secuencia de aprendizaje conformada por cinco tareas exploratorias apoyadas con Geogebra que sirven de base a una experiencia de enseñanza desarrollada en los meses de marzo y abril de 2017, con un grupo de alumnos (14 hombres y 14 mujeres) de la enseñanza regular de 10° año de un colegio científico del Valle central, ubicado en los alrededores de la capital de Costa Rica.

Esta tarea buscó alcanzar dos objetivos de aprendizaje: 1) identificar características asociadas a la aleatoriedad; e 2) identificar casos favorables, casos totales y eventos aleatorios. Ambos objetivos fueron trabajados utilizando Geogebra para hacer simulación de la experiencia aleatoria del lanzamiento de dos dados. En la primera parte de la tarea los alumnos son invitados a simular el lanzamiento de dos dados con un total de 10 y 20 repeticiones de la experiencia respectivamente, mientras que en la segunda parte simulan 900 y 1000 veces dicha experiencia. En cada simulación los alumnos tenían que ir registrando los datos observados de la simulación en la parte final de la tarea (Hoja de registro de datos) e ir respondiendo preguntas que orientaban la exploración de los conceptos abordados. Los alumnos trabajaron en parejas en la resolución de la tarea, cada par disponiendo de una computadora con acceso a Geogebra y el archivo ejecutable de simulación “lanzamiento de dos dados”. Este archivo disponía de dos botones, etiquetados con los parámetros “n” y “e”, conforme muestra la Figura 1. El parámetro “n”, variando



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la
Probabilidad y el Análisis de Datos*

entre 1 y 1000, indicaba la cantidad de veces que se deseaba repetir la experiencia del lanzamiento, mientras que el parámetro “e”, variando entre 1 y el valor de “n”, permitía observar los resultados obtenidos en las caras de los dados para cada lanzamiento simulado. Finalmente, el gráfico de barras muestra las frecuencias absolutas y relativas para la suma de los números obtenidos en las caras de los dados después de simular el lanzamiento de los dados “n” veces.

La resolución de la tarea permitió a los alumnos explorar con Geogebra la experiencia del lanzamiento de dos dados, introduciéndolos a los conceptos formales de casos favorables, casos totales y evento aleatorio, y al mismo tiempo identificar sus nociones sobre la aleatoriedad y conceptos anteriores de casos favorables, casos totales y evento aleatorio. La tarea fue diseñada para ser trabajada por los alumnos en 2 lecciones de 40 minutos, desarrollando una discusión colectiva de los conceptos abordados, y la respetiva formalización de estos, realizada al inicio de la siguiente clase. Antes de comenzar el abordaje de la tarea, fue aplicada una prueba diagnóstica, identificando que gran parte de estos alumnos tenían una noción de aleatoriedad asociada a términos coloquiales y un conocimiento de la Probabilidad orientado al significado clásico de la regla de Laplace.

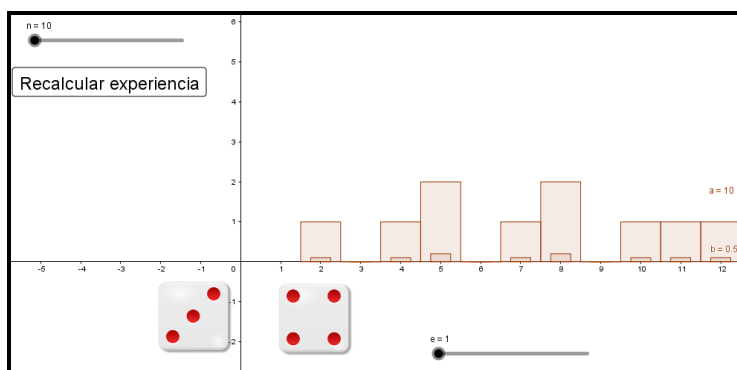


Figura 1. Imagen del archivo ejecutable de Geogebra para trabajo de la tarea

En miras a responder las cuestiones del estudio se recurrió a una metodología cualitativa asociada a un paradigma interpretativo, donde el investigador (primer autor de este trabajo) procura describir y interpretar los significados que los alumnos, como parte de un contexto educativo, atribuyen a los conceptos de aleatoriedad, casos favorables, casos totales y evento aleatorio (Latorre, Del Rincón y Arnal 1998). Durante la aplicación de la tarea el investigador asumió un papel de observador participante, atendiendo dudas en cuanto a la redacción de los enunciados, y tomando algunos apuntes de las discusiones que surgieron por parte de los alumnos durante el trabajo de la tarea.

Como instrumentos de recolección de datos fueron utilizados: 1) la revisión documental de las resoluciones de la tarea desarrollada por los alumnos, y de grabaciones de imágenes solicitadas a los alumnos en el enunciado de la tarea, correspondientes a extractos de

momentos de simulación con Geogebra; y 2) la observación participante para identificar el ritmo de trabajo de los alumnos, acceder a cierta información específica sobre sus aprendizajes, y aclarar ciertos aspectos de redacción de los enunciados de la tarea.

El análisis de los datos se desarrolló siguiendo una metodología descriptiva e interpretativa, tanto para el análisis de los aprendizajes de los conceptos trabajados y dificultades evidenciadas por los alumnos como para el análisis del papel de Geogebra (Walker, 1980). En la siguiente sección se describe lo que el alumno hizo y se presenta una interpretación de los aprendizajes y dificultades evidenciadas a través de ejemplos de las soluciones dadas por diferentes alumnos, todos con nombre de anonimato para efectos de salvaguardar su integridad, intentando abarcar la diversidad de soluciones observadas.

IV. Resultados

Aprendizajes del concepto de aleatoriedad y conceptos básicos asociados al espacio muestral

En lo que concierne a aprendizajes del concepto de aleatoriedad, las resoluciones de los alumnos revelan que todos tienen noción de la aleatoriedad, algunos asociándola como una propiedad del azar y, por tanto, a la variabilidad de los datos, como se interpreta en la respuesta de Antonio y Marcos (Figura 2) cuando se les cuestiona en la cuarta pregunta (denotado en la figura por P4) sobre la cantidad de veces que creían necesario realizar la experiencia de lanzar los dados para obtener todas las sumas posibles.

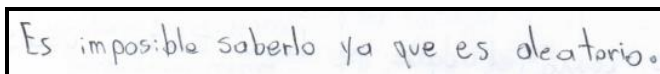


Figura 2. Resolución de Antonio y Marcos. P4

Otros asocian la aleatoriedad directamente al concepto de probabilidad, como en el caso de Laura y Johan en la última pregunta de la tarea, al cuestionárseles si los resultados obtenidos en las simulaciones realizadas para distintos valores de “n” habían sido diferentes y el porqué de esto. De la respuesta de Laura y Johan, en la Figura 3, se interpreta que consideran la aleatoriedad como una característica que no permite saber cuántas veces es necesario realizar la experiencia para obtener todos los resultados, al igual que Antonio y Marcos, quienes manifiestan esto en términos de probabilidades para referir que entre mayor cantidad de lanzamientos es más probable, pero no seguro, obtener un valor específico de suma para los dados.

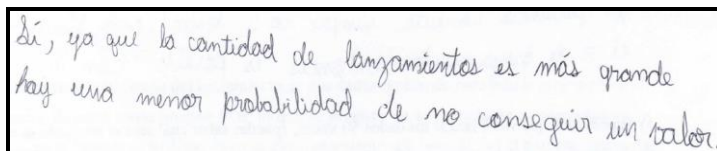


Figura 3. Resolución de Laura y Johan. P8



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la
Probabilidad y el Análisis de Datos*

Entre las dificultades presentadas por los alumnos, la mayor parte reveló la presencia de patrones no siempre correctos cuando se repite un número “pequeño” de veces un experimento aleatorio. Por ejemplo, Santiago y Simón, como también Vanuza y Charol, después de simular la experiencia del lanzamiento de dados para “n” igual diez y “n” igual veinte, respectivamente, al cuestionárseles en la primera pregunta si ¿los valores obtenidos en la experiencia eran los que esperaba?, responden según se muestra en las Figuras 4 y 5.

Sí, porque hay más combinaciones que forman 8 o 9 que 11. Hubo variedad de resultados.

Figura 4. Resolución de Santiago y Simón. P1

Si. Sin embargo, también esperábamos que al sumar los números de las pintas de cada dado se obtuviesen resultados de mayor magnitud.

Figura 5. Resolución de Vanuza y Charol. P2

La argumentación de Santiago y Simón es considerada incorrecta ya que, debido al carácter aleatorio de la experiencia, no deben necesariamente salir las sumas de ocho y nueve con mayor frecuencia. En el caso de Vanuza y Charol se interpreta que obtuvieron resultados variables y no con mayor frecuencia para las sumas de ocho y nueve, no obstante, su argumentación permite inferir que, aunque tienen una noción de la aleatoriedad, tienden a creer que debería ser más probable que las sumas se comportasen según el valor teórico de probabilidad. De esta forma, se evidencia que estos alumnos tienen una concepción vaga de la aleatoriedad y, por tanto, de la Ley de los grandes números para el cálculo de probabilidades, tendiendo a utilizar la Regla de Laplace para tomar decisiones donde interviene la probabilidad.

En referencia a los conceptos de casos favorables, casos totales y eventos, las soluciones que presentan los alumnos revelaron que más de la mitad del grupo dejan sin responder la pregunta introductoria donde se desafiaba al alumno al reconocimiento de estos conceptos, pudiendo ser causa el no haber trabajado en años anteriores con conceptos asociados al espacio muestral o no haber trabajado con eventos compuestos. El resto de los alumnos aluden a los conceptos asociados al espacio muestral en sus soluciones, cuando al ser cuestionados sobre los posibles resultados a obtener en las sumas de las pintas de las caras de los dados después de ser lanzados y la cantidad de veces necesarias de repetir el experimento para obtener todas las sumas posibles, muestran evidencia de identificar casos totales, casos favorables y eventos asociados a la experiencia aleatoria del lanzamiento, como es el caso de Dávila y Ana en las Figuras 6 y 7, y Leonardo y Alfonso en la Figura 8.

36, cada dado tiene 6 caras es decir 6^2
 ↳ posibilidades de lanzamientos
 Se pueden obtener números del 2 al 12

Figura 6. Resolución de Dádiva y Ana. P1.

Resultado = 8

Dado 1	Dado 2
6	2
5	3
4	4
3	5
2	6

Figura 7. Resolución de Dádiva y Ana.P2

mín 11 máx. ∞
 Porque hay 11 posibilidades.

Figura 8. Resolución de Leonardo y Alfonso. P4.

De la primer resolución de Dádiva y Ana (Figura 6) se observa que ellas reconocen que en total hay 36 diferentes combinaciones (casos totales), y al usar la expresión “se pueden obtener números del 2 al 12” están manifestando que saben identificar eventos aleatorios, mientras que de la segunda resolución (Figura 7), donde se les solicita escribir el resultado que obtuvieron más veces después de simular 20 lanzamientos, se observa que Dádiva y Ana también identifican casos favorables, escribiendo en la tabla las distintas formas de obtener el evento “obtener una suma de ocho”. Similarmente, Leonardo y Alfonso (Figura 8), además de saber que la aleatoriedad está presente, también saben identificar los eventos de la experiencia aleatoria, pero aludiendo a ellos implícitamente con la expresión “mín 11” para referirse a obtener una suma diferente en cada repetición de la experiencia, y “máx ∞ ” en el caso de obtener sumas repetidas en lanzamientos anteriores, pero aún no todas las once sumas posibles.

Utilización de Geogebra como recurso de apoyo en el aprendizaje de los conceptos trabajados

La utilización de Geogebra les permitió a todos los alumnos observar que a medida que aumenta la cantidad de lanzamientos se obtienen más eventos o resultados para la suma de las pintas de las caras de los dados y también más casos favorables para los distintos eventos. De la Figura 9 se interpreta que Kevin y Pedro manifiestan “sí” para decir que los resultados obtenidos son diferentes, evidenciándose que identifican más posibilidades para la suma de las pintas de las caras de los dados y, por tanto, más eventos y casos totales en las últimas simulaciones (900 y 1000 lanzamientos), en comparación con las primeras simulaciones (10 y 20 lanzamientos).



VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

Sí, porque en el problema 6-7 hicimos ~~una~~ 900 lanzamientos, lo cual aumenta más las probabilidades de conseguir más resultados, a diferencia del problema 2-3 en el que obtuvimos muchos resultados que no aparecieron.

Figura 9. Resolución de Kevin y Pedro. P8.

Por su lado, la tabla de la Figura 10, donde se les solicitaba a los alumnos registrar el resultado de suma con mayor frecuencia obtenido para “n” igual a veinte, y las respectivas formas en que se obtuvo ese resultado, permiten inferir que a pesar de ser el evento “obtener una suma de siete” el evento con mayor probabilidad teórica, la simulación con “n” igual a 20 llevó a Laura y Johan a obtener que el evento con mayor frecuencia es “obtener una suma de ocho”, pudiendo recurrir a variar los valores del deslizador “e” para observar los casos favorables para ese evento con un valor pequeño de “n”, en este caso obteniendo tres casos favorables. De esta forma, se evidencia que Laura y Johan logran identificar casos favorables para eventos aleatorios específicos.

Resultado = 8	
Dado 1	Dado 2
4	4
5	3
6	2

Figura 10. Resolución de Laura y Johan. P2c

Por otro lado, la utilización de simulación no fue suficiente para superar dificultades asociadas a la aleatoriedad, pues algunos alumnos, después de simular con diferentes valores de repetición la experiencia del lanzamiento de dados ($n=10$, $n=20$, $n=900$ y $n=1000$), no fueron capaces de identificar que no existe un número fijo de lanzamientos necesarios para obtener todas las sumas posibles para las pintas de las caras de los dados. Esto se observa, por ejemplo, en las soluciones de Kevin y Pedro, en las Figuras 11 y 12, al responder a la cuarta pregunta de la tarea.

36 veces, para dar campo a todas las combinaciones posibles entre los dados.

Figura 11. Resolución de Kevin y Pedro. P4



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la
Probabilidad y el Análisis de Datos*

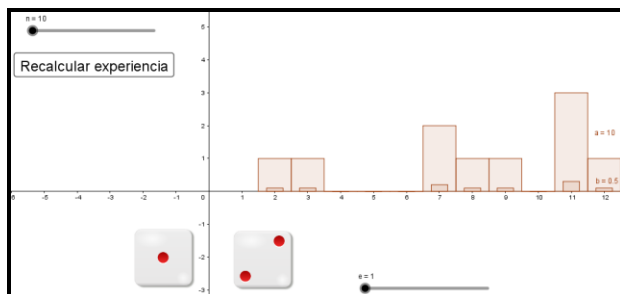


Figura 12. Simulación de Kevin y Pedro para $n=10$.

Los alumnos aluden a “36 veces” para indicar que se necesitan 36 repeticiones de la experiencia para obtener todos los resultados, número que corresponde a la cantidad de casos totales de la experiencia aleatoria. Así, se interpreta que Kevin y Pedro consideran que va a salir una combinación de números diferentes en cada repetición de la experiencia, cuando en la realidad no tiene que ser necesariamente de esa forma debido al carácter aleatorio de la experiencia. Los alumnos no logran observar de su simulación para $n=10$ (Figura 12) que algunas de las combinaciones posibles para la suma de once se han repetido, pues su frecuencia es tres, cuando dicha suma sólo tiene dos posibles casos favorables de suceder, obtener 6 y luego 5, u obtener 5 y luego 6 en el primer y segundo dado, respectivamente.

V. Conclusiones

Los resultados del análisis de la tarea exploratoria trabajada por los alumnos involucrando Geogebra, permiten referir que ellos son capaces de desarrollar conocimiento frente a los conceptos de aleatoriedad, casos favorables, casos totales, y el concepto de evento aleatorio. No obstante, algunos alumnos presentan dificultades, posiblemente como producto de las experiencias vividas en su día a día con los términos probabilísticos trabajados (Groth, Butler y Nelson 2016; Ortiz et al. 2001) o del desconocimiento total de los términos.

Los aprendizajes observados en esta tarea permiten concluir que los alumnos tienen noción del concepto de aleatoriedad, pero no todos lo tienen consolidado, existiendo la presencia de patrones incorrectos que asocian a la aleatoriedad. Entretanto, el concepto de evento aleatorio, casos favorables, y casos totales son identificados apropiadamente por pocos alumnos, pareciendo ser desconocidos para el resto de ellos, o al menos existe dificultad para identificarlos en el trabajo con experiencias aleatorias trabajadas con eventos compuestos.

La utilización de Geogebra contribuyó a la exploración de los conceptos, incluyendo observación de relaciones entre casos totales y casos favorables en la repetición de una experiencia. No obstante, no fue suficiente utilizar simulación con Geogebra para que la mayor parte de los alumnos interiorizase totalmente el concepto de aleatoriedad, resultado



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la
Probabilidad y el Análisis de Datos*

de una falta de observación en las simulaciones por parte del alumno o una mejor guía en la redacción de la tarea a la hora de explorarla con Geogebra.

Lo anterior implica, por un lado, considerar reforzar conceptos probabilísticos en años anteriores (MEP, 2012), incluyendo el trabajo con experiencias aleatorias compuestas, y, por otro lado, trabajar más con recursos tecnológicos en la clase de matemática, acostumbrando al alumno a su uso, para profundizar más en el concepto y menos en el cálculo. Para esto es necesario mantener un equilibrio entre simulaciones de experiencias aleatorias hechas con tecnología y simulaciones con modelos concretos (Batanero, 2005), permitiendo al alumno ver las ventajas de la tecnología en el aprendizaje de la Matemática, en particular, en el aprendizaje de conceptos de Probabilidad.

VI. Referencias

- [1] BATANERO, Carmen, «Significados de la probabilidad en la educación secundaria», *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME*, 2005, **8** (3), p. 247-263, ISBN: 1665-2436.
- [2] BATANERO, Carmen, «Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo», en FLORES, Pablo; LUPIAÑEZ, José Luis (eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*. Granada, Sociedad de Educación Matemática Thales, 2006, p. 1-16, ISBN: 84-688-0573-4
- [3] COUTINHO, Clara, *Metodologia de Investigaçãõ em Ciências Sociais e Humanas. Teoria e Prática*, 1º ed., Coimbra, Edições Almedina, 2011. ISBN: 9789724044873.
- [4] ERICKSON, Tim, «Using simulation to learn about inference», en ROSSMAN, Allan; CHANCE, Beth (eds.), *Proceedings of the 7th International Conference on Teaching Statistics* (celebrado en Salvador, Bahia, Brasil, 2-7 jul, 2006), Bahia, IASE, ISI, 2006. ISBN-10: 90-73592-24-0, ISBN-13: 978-90-73592-24-7.
- [5] GROTH, Randall; BUTLER, Jaime; NELSON, Delmar, «Overcoming challenges in learning probability vocabulary», *Teaching Statistics*, 2016, **38** (3), 102-107. doi.org/10.1111/test.12109
- [6] INZUNZA, Santiago, «Geogebra: Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad», en ASENJO, Joaquin; MACÍAS, Óscar; TOSCANO, Juan Carlos (eds.), *Actas do Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación* (celebrado en Buenos Aires, 12, 13 y 14 de nov, 2014), Buenos Aires, OEI, 2015. ISBN: 978-84-7666-210-6
- [7] INZUNZA, Santiago, «Conexiones entre las aproximaciones clásicas y frecuencial de la probabilidad en un ambiente de modelación computacional», *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2017, **11**, 69-86.



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la
Probabilidad y el Análisis de Datos*

- [8] LA TORRE, Antonio; DEL RINCÓN, Delio; ARNAL, Justo, *Bases metodológicas de la investigación educativa*, 1ªed., Barcelona, Ediciones Experiencia, 2003. ISBN 10: 8493288381, ISBN 13: 9788493288389.
- [9] MARTINS, Maria Eugenia, «Como Estimar a Probabilidade de um acontecimento por Simulação», en APM-Associação de Professores de Matemática- (eds.), *Actas do PROFMAT 2011*(celebrado en Lisboa, 5-7 set, 2011), Lisboa, APM, 2011, p. 1-16.
- [10] MENDENHALL, William; BEAVER, Robert; BEAVER, Bárbara, *Introducción a la probabilidad y la estadística*, 13ª ed., Ciudad de México, Cengage Learning, 2010. ISBN-13: 978-607-481-466-8.
- [11] MERCADO, Miguel, «Exploración de conceptos de probabilidad con Geogebra», *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, 2013, **2**, 309-317. ISSN-e 2255-5854
- [12] MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA, *Programas de Estudio de Matemática*. San José, Costa Rica, 2012. [Consulta: 3-7-2018] Disponible en: <<http://www.mep.go.cr>>
- [13] ORTIZ, Juan Jesús; BATANERO, Carmen; SERRANO, Luis, «El lenguaje probabilístico en los libros de texto», *Suma*, 2001, **38**, 5-14. ISSN 1130-488X
- [14] PITMAN, Jim, *Probability*, 1ªed, New York, Board, 1993. ISBN 978-1-4612-4374-8
- [15] PONTE, João Pedro, «Gestão curricular em Matemática», en GTI (ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*, Lisboa, APM, 2005, p. 11-34. ISBN 972-8768-16-8
- [16] REDECKER, Christine, *JRC scientific and policy reports: The Use of ICT for Assessment of Key Competences*. Luxembourg, Publications Office of European Union, 2013. Disponible en: doi:10.2791/87007.
- [17] SANTOS José; MOITA, Filomena Maria, «Objetos de Aprendizagem e o Ensino de Matemática: Análise de sua importância na aprendizagem de conceitos de probabilidade», en 2º Encontro regional de educação matemática – EREM, celebrado en Rio Grande do Norte, Brasil, 12-14 agosto, 2009, [Consulta: 4-7-2018]. Disponible en:<http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/objetos/comunica13.pdf>.
- [18] WALKER, R, «*The conduct of educational case study: ethics, theory and procedures*», en Dockrell, William Bryan; Hamilton, David (ed.), *Rethinking educational research*, London, Hodder & Stoughton, 1980, p. 30-63. ISBN 9780340205488

La Enseñanza determinista de la probabilidad

Giovanni Sanabria Brenes¹

Resumen

El presente trabajo analiza las respuestas de docentes en formación, que ya cursaron un curso sobre probabilidad y son estudiantes del TEC de Costa Rica, en un test de situaciones problema de probabilidad con el fin de valorar el manejo que hacen de la aleatoriedad. En las respuestas se evidencia que algunos: no saben hacer explícito el espacio muestral ni la experiencia aleatoria, descuidan las hipótesis que se necesitan para utilizar la probabilidad como un modelo y dan respuestas deterministas a situaciones aleatorias, es decir piensan que hay una única respuesta correcta. ¿Será que se enseña la probabilidad de forma determinista?

Palabras clave: formación de profesores, probabilidad, determinismo, aleatoriedad

Abstract

This paper analyzes the responses of teachers in training, who have already taken a course on probability and are students of the TEC of Costa Rica, in a test of probability problem situations in order to assess the handling they make of randomness. The answers show that some do not know how to make explicit the sample space or the random experience, neglect the hypotheses that are needed to use probability as a model and give deterministic answers to random situations. Could it be that probability is taught in a deterministic way?

Keywords: teacher training , probability, determinism, randomness

Modalidad: Ponencia

I. Introducción

La probabilidad tiene su origen en la aleatoriedad. El concepto de aleatoriedad no es sencillo, pues implica la existencia del azar. Además, como se ha evidenciado en muchas investigaciones, el azar es difícil de comprender para nuestros estudiantes. Sin embargo, es indispensable para abordar el estudio de las probabilidades.

¹ Instituto Tecnológico de Costa Rica – Universidad de Costa Rica, Costa Rica.
gsanabria@itcr.ac.cr



Al respecto, Batanero & Serrano (1995) señalan “A pesar de las dificultades filosóficas y psicológicas descritas, las situaciones aleatorias revisten una gran importancia. El problema de asegurar que una sucesión sea aleatoria sigue teniendo una gran actualidad debido a sus aplicaciones.”

En Costa Rica, la enseñanza de la probabilidad tanto en secundaria como a nivel universitario está a cargo de docentes formados en Enseñanza de la Matemáticas o de Matemáticos. Esto conlleva un gran inconveniente, la Matemática es una ciencia exacta no da pie a la incertidumbre necesaria en probabilidad, y se suele presentar de forma muy determinista. Así, la formación que reciben los docentes en formación en matemática centrada en el método axiomático deductivo, puede convertirse en un obstáculo para comprender la aleatoriedad. Al respecto, Batanero (2000) señala

“La misma naturaleza de la estadística es muy diferente de la cultura determinista tradicional en clase de matemáticas. Un indicador de ello es que aun hoy día prosiguen las controversias filosóficas sobre la interpretación y aplicación de conceptos tan básicos como los de probabilidad, aleatoriedad, independencia o contraste de hipótesis, mientras que estas controversias no existen en álgebra o geometría (Batanero y Serrano, 1995).” (p.7)

Además, Elizarrarás (2014) señala que

“Sin duda, el desarrollo de un pensamiento matemático integral no sólo debe enfocarse al pensamiento determinista sino también y de forma conjunta e interactiva debe incluir el pensamiento estocástico; sólo así, se requiere de incorporar el pensamiento complejo de una forma real. Cabe señalar el desarrollo del pensamiento estocástico corresponde a una forma distinta de aprender porque la idea de azar implica reconocer ciertas sutilezas que permiten la advertencia de lo posible, lo cual no es trivial, requiere de tiempo”. (p.26)

En el presente trabajo, se analiza las respuestas a cinco situaciones problemas dadas por nueve docentes en formación. En dichos problemas se analiza el papel que juega la aleatoriedad y se obtienen algunas implicaciones a considerar en la enseñanza de la probabilidad.

II. La muestra

El test se aplicó a nueve estudiantes de la Carrera Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos. Estos estudiantes cursaron en el Segundo semestre del 2017 el curso Elementos del Análisis de Datos y Probabilidad y en este semestre están cursando el curso de Didáctica de la Estadística.

III. Resultados

Se anexa el test aplicado. Este test se aplicó el viernes 23 de marzo del 2018. Seguidamente se analizarán las respuestas dadas por los docentes en formación.

1. Primer problema

Situación #1. En una canasta hay 10 bolas enumeradas del 1 al 10. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una bola par? Justifique su respuesta.

Como respuesta correcta a esta situación hay dos opciones:

- No aleatoriedad. Consiste en decir que la probabilidad es del 100% (pues si hay una canasta simplemente me fijo en sus bolas y tomé una bola par). Esto pues la situación no tiene la restricción que la bola deba elegirse al azar.
- Aleatoriedad. Se debe indicar que se va asumir la hipótesis de que la bola es elegida al azar y que bajo esta hipótesis se tiene que la probabilidad es $\frac{1}{2}$.

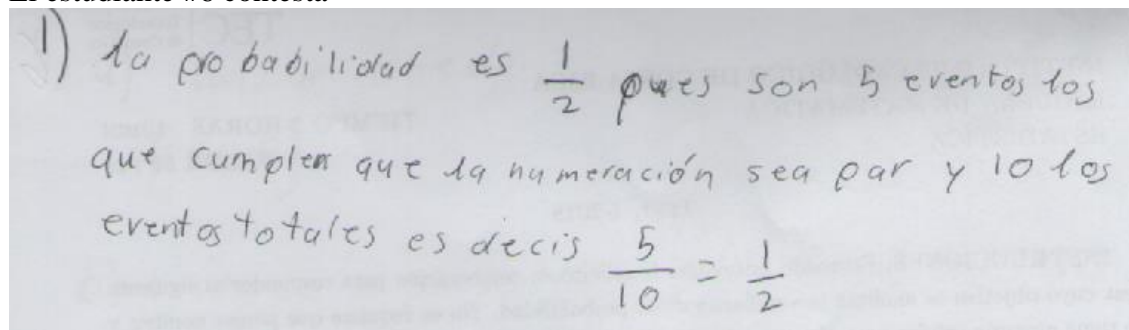
La simple respuesta de $\frac{1}{2}$ no se considera correcta.

Respuesta a la pregunta 1

Total de respuestas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
9	0	9

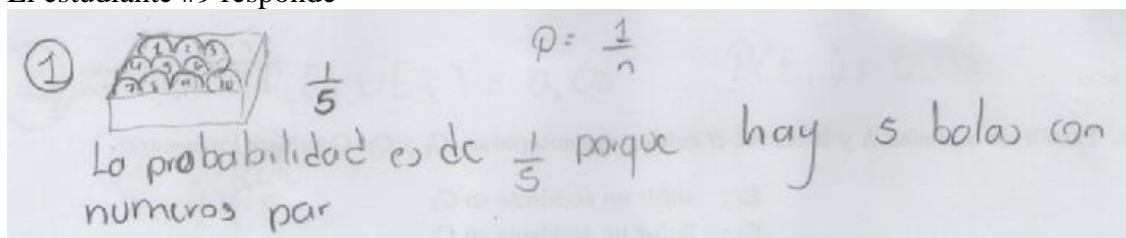
Dentro de las respuestas incorrectas hay 7 respuestas similares a la dada por el estudiante #2: “ $\frac{1}{2}$ o $\frac{5}{10}$ pues 5 bolas son pares y son 10 en total”.

El estudiante #6 contesta



En esta respuesta se ve como el estudiante considera la situación como aleatoria cuando es determinista.

El estudiante #9 responde



Podemos observar que este estudiante tiene un manejo inadecuado de la regla de Laplace.

Normalmente en un curso de probabilidad teórica, y en la mayoría de los libros de texto, se indica que no todos los procesos o experimentos aleatorios pueden ser descritos por la probabilidad, solo los que cumplan tres requisitos (Sanabria, 2012):

1. Se conocen todos los posibles resultados antes de realizarse el experimento.
2. No se sabe cuál de los posibles resultados se obtendrá en el experimento.
3. El experimento puede repetirse.

A estas hipótesis se deben agregar dos hipótesis más si se quiere aplicar la Ley de Laplace:

4. La cantidad de posibles resultados es finita.
5. Los posibles resultados son equiprobables.

Sin embargo, muchas veces esos requisitos quedan en el primer día de clase y no se reafirma a lo largo del proceso de enseñanza. Particularmente, esta situación tiene que ver con que, si no hay aleatoriedad, los posibles resultados son uno y nos encontramos ante una situación determinista.

Además, es indispensable al utilizar el modelo probabilístico para resolver un problema, indicar los supuestos en los que se basa ese modelo.

2. Segundo problema

Situación #2. Juan tiene cinco camisas: dos son nuevas, tres camisas son viejas. Este domingo va a elegir una para ir a ver a la novia, ¿Cuál es la probabilidad de que el domingo ande con una camisa vieja? Justifique su respuesta.

Este problema es similar al anterior pero se trata de ser más evidente: si Juan va a ver la novia y es domingo, lo más lógico es que elija una camisa nueva.

Las respuestas que se consideran correctas son:

- No aleatoriedad. Consiste en decir que la probabilidad es del 0%. Igual con un buen supuesto se puede considerar que 100% es una respuesta correcta (por ejemplo suponer que Juan solo usa las camisas viejas)
- Aleatoriedad. Se debe indicar que se va a asumir la hipótesis de que la camisa es elegida al azar y que bajo esta hipótesis se tiene que la probabilidad es 3/5.

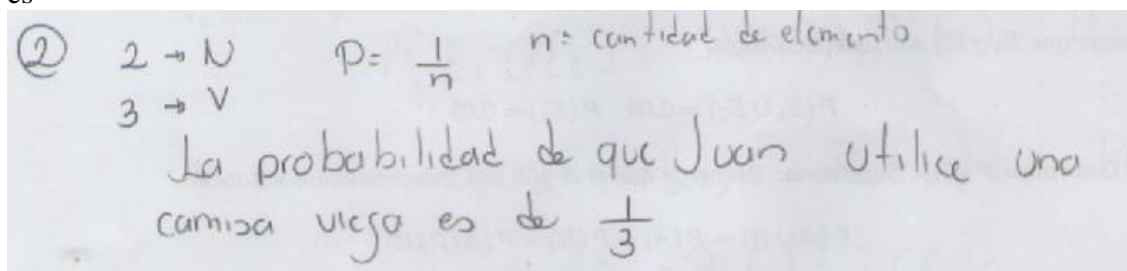
La simple respuesta de 3/5 no se considera correcta.

Respuesta a la pregunta 2

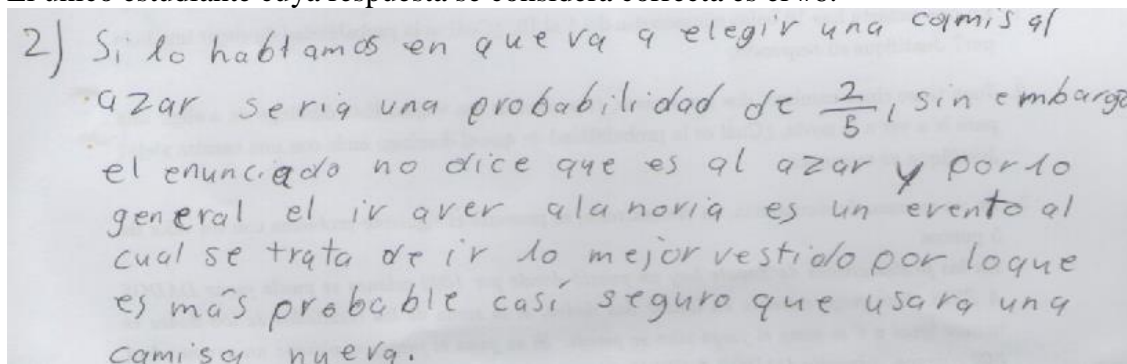
Total de respuestas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
9	1	8

Dentro de las respuestas incorrectas hay 7 respuestas similares a la dada por el estudiante #4: “3/5 Pues son 5 camisas de las cuales tres son viejas”.

El estudiante #9 mantiene el patrón presentado en la pregunta anterior e indica que la respuesta es



El único estudiante cuya respuesta se considera correcta es el #6:



Este estudiante muestra que le da importancia a la aleatoriedad a diferencia de sus compañeros.

Los resultados en esta pregunta reafirman lo observado en la pregunta anterior, la mayoría de los estudiantes no prestan atención en las hipótesis que se deben asumir al aplicar la probabilidad. Esto es esencial cuando se aplica la probabilidad en diferentes ámbitos (ciencias sociales, finanzas,...).



3. Tercer problema

Situación #3. En un examen de secundaria, en el desarrollo, se presenta el siguiente problema con un valor de 5 puntos

En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lanzar dos dados, si la suma de los resultados de los dados es menor o igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Si se gana el juego, se obtiene un premio de 1 500 colones. ¿Jugaría DADOS A SEIS?

Un estudiante A calculo correctamente la probabilidad del evento G (ganar el juego):

Dado 2

+	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>
<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>
<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>
<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>
<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>
<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>

Dado 1

$$P(G) = ((15)/(36)) \approx 0.416$$

El estudiante respondió al problema indicando que jugaría DADOS A SEIS.

a. ¿Cuántos puntos de los 5 puntos que valía el problema le da a la solución de la respuesta A? Justifique su respuesta.

b. ¿Cuál es la respuesta correcta al problema?

Recordemos que la probabilidad es un insumo para la toma de decisiones, pero no toma la decisión por nosotros. La decisión que se tome es un balance entre la probabilidad y el riesgo que estoy dispuesto a tomar. Así, esta situación introduce un concepto importante en la aplicación de probabilidades que usualmente se evade en su enseñanza: el concepto de riesgo.

Para esta situación (pregunta a) se considera como respuesta correcta el dar entre 3 y 4 puntos pues calculó correctamente la probabilidad, pero no justificó su respuesta. Y es que la probabilidad de un 41.6% puede ser atractiva para arriesgarse a jugar DADOS A SEIS.

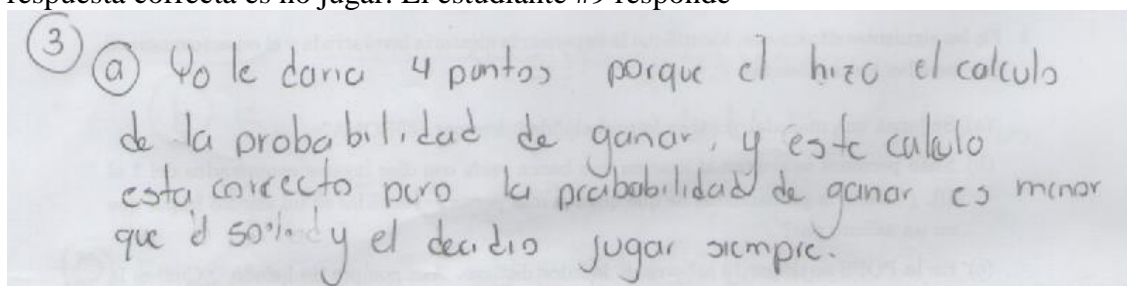
Si se piensa que la respuesta correcta única es no jugar DADOS A SEIS pues la probabilidad es menor al 50%, es reducir el problema al determinismo. No hay respuestas correctas a situaciones aleatorias, hay respuestas con cierto grado de certeza.

Respuesta a la pregunta 3a

Total de respuestas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
9	0	9

Las respuestas incorrectas obtenidas fueron clasificadas (no fue una clasificación a-priori establecida) en:

- Opinión personal (estudiantes: #1,#2). Consideran que la decisión es una opinión personal ajena a la probabilidad. Por ejemplo, el estudiante #2 indica: “Los 5, pues la pregunta es si jugaría y él en su opinión sí jugaría”.
- Incompletas (estudiantes: #4, #5,#7, #8). Dan menos de 5 puntos a la respuesta dada pero no justifican. Por ejemplo, el estudiante #8 indica: “le daría 3.5 puntos, pues hizo el cálculo de probabilidad”
- Determinismo (estudiantes: #3,#6,#9). Dan menos puntos pues consideran que la respuesta correcta es no jugar. El estudiante #9 responde



Respuesta a la pregunta 3b

Total de respuestas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
9	2	7

Las respuestas incorrectas se clasifican en:

- Determinismo. Los estudiantes #2, #6, #7, #8 y #9 consideran que la respuesta es no jugar pues la probabilidad de ganar es menor al 50%. Llama la atención que algunos estudiantes, que dieron respuesta incompleta en a), tenían una posición determinista de acuerdo a su respuesta en b) (Estudiantes #7 y #8)
- No responde. Los estudiantes #3 y #5 no responden a la pregunta.

Los estudiantes #1 y #4 dan respuestas que se pueden considerar correctas. El estudiante #1 indica:

(b) ¿Cuál es la respuesta correcta al problema?

Me parece que la pregunta no está bien planteada, pues se le está preguntando al estudiante si él jugaría o no y eso depende de que tan arriesgada sea la persona al ver la probabilidad, pues es del 41,6% de ganar.

Esta respuesta realmente es casi correcta, quizás el defecto es que considera que la pregunta planteada no es tipo de pregunta para un examen debido a su incertidumbre en la respuesta.

El estudiante #4 indica:

¿Cuál es la respuesta correcta al problema?

Objetiva: Para alguien, ganar con el 41% a su favor sería muy alto. Para otra persona no.

Subjetiva: La respuesta sería que no juegue porque pierde 6 de cada 10 juegos.

En evaluación, por lo general, la mayoría de los problemas de probabilidad se centran en su cálculo y no en toma de decisiones, para reducir la incertidumbre en las respuestas. Esto posiblemente por mera tradición. Sin embargo, esta forma de evaluar limita el potencial aplicativo de la probabilidad. Actualmente han surgido otras opciones de evaluar, como la evaluación por medio en proyectos, que el caso de la probabilidad debería tomar en cuenta la variación en las respuestas.

4. Cuarto problema

Situación #4. Para ir de la ciudad A a la ciudad B existen dos autopistas: C_1 y C_2 . Considere los eventos:

E_1 : sufrir un accidente en C_1

E_2 : Sufrir un accidente en C_2

Suponga que: E_1 y E_2 son independientes, $P(E_1 \cup E_2) = 0.08$, $P(E_1) = 0.05$

- Determine $P(E_2)$. Sugerencia: Recuerde que si A y B son independientes entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$
- Juan debe ir de la ciudad A a la ciudad B y toma la decisión de ir por la autopista C_2 . ¿Es correcta la decisión de Juan? Justifique su respuesta.

El problema 4a no es objeto de este estudio, es más un distractor para no dar directamente las probabilidades de los eventos E_1 y E_2 .



VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos

La solución al problema 4a es:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1)P(E_2)$$

$$\Rightarrow 0.08 = 0.05 + P(E_2) - 0.05 \times P(E_2)$$

$$\Rightarrow P(E_2) = 0.0315$$

Por lo tanto, hay una mayor probabilidad de sufrir un accidente en la autopista C₁.

Sin embargo, para el problema 4b no se puede decir que la decisión de Juan es la correcta, si es la más correcta en términos de probabilidad. De repente Juan se va por esa autopista y sufre un accidente. Así, no podemos hablar de una única respuesta correcta. Además, las probabilidades de sufrir accidentes en las autopistas son casi similares. Así, la respuesta correcta a 4b, es indicar que no se puede asegurar que la decisión de Juan es la correcta pero si es la más correcta. Esto se puede relacionar con el concepto de aceptación y rechazo que es indispensable en Estadística Inferencial, por ejemplo si debó juzgar la decisión de Juan, la aceptaría pues tomó la decisión más correcta. En cambio otras decisiones se rechazarían.

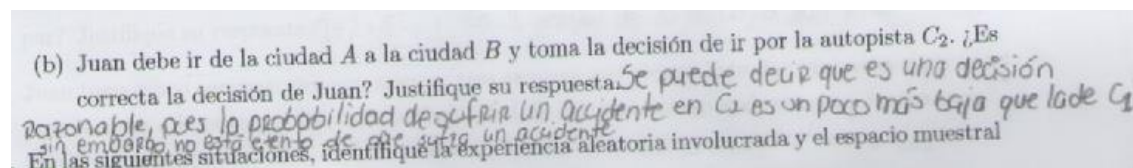
Respuesta a la pregunta 4b

Total de respuestas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
9	1	8

Las respuestas incorrectas se clasifican en:

- Determinismo. Los estudiantes #1, #2, #4, #5, #6, #7 y #9 consideran que la decisión de Juan es la correcta pues la probabilidad lo indica.
- No responde. El estudiante #3 no responde a la pregunta.

El estudiante #8 da una respuesta correcta al problema:



Dado que las probabilidades de sufrir accidentes en las autopistas son casi similares, en la vida real pueden pesar otros factores para tomar la decisión como: experiencia del conductor, si el trayecto es más corto que otro. Si bien, los factores inherentes a la propia carretera se supone que se consideraron para valorar la probabilidad de accidente en la misma, hay conceptos intuitivos de la probabilidad propios del contexto que no pueden ser cuantificables. El conocimiento informal que tenga los involucrados en la situación, junto con el riesgo que se este dispuesto a asumir, nutre la toma de decisión. Esto hace que para tomar decisiones, además del cálculo de probabilidades, se debe tomar el contexto de los datos. ¿Sera que el contexto, del cual se toman los datos de un problema, y el conocimiento informal de los involucrados debe ser considerado como parte de la enseñanza de la probabilidad? Esto haría introducir en la enseñanza de la



probabilidad problemas de tipo “análisis de casos” donde la probabilidad se confronte con un contexto en aras de tomar una decisión. Esto no es ajeno al trabajo que se realiza al realizar una investigación utilizando la estocástica, donde muchas veces el contexto le da sentido o refuta algún análisis realizado. Sin lugar a duda las investigaciones y trabajos que se realizan en torno a la enseñanza basada en proyectos (Batanero & Díaz, 2004) y el razonamiento inferencial intuitivo (García & Sánchez, 2014) favorecen una enseñanza de la probabilidad donde el contexto suele tener un papel importante.

5. Quinto problema: experiencias aleatorias

Situación #5. *En las siguientes situaciones, identifique la experiencia aleatoria involucrada y el espacio muestral (no resuelva los problemas):*

- Se lanza una moneda. ¿cuál es la probabilidad de sacar CORONA?*
- Siete personas se sientan al azar en una banca vacía con diez lugares enumerados del 1 al 10. ¿Cuál es la probabilidad de que queden más personas sentadas en un asiento impar que en un asiento par?*
- En la POPS se tienen 10 sabores de helados distintos. Ana compra un helado. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana escoja su helado favorito?*

Recordemos que una experiencia aleatoria, es una experiencia donde interviene el azar. Es decir, una experiencia que al realizar genera un resultado que varían dentro de un conjunto de posibles resultados y no se puede predecir. El espacio muestral es el conjunto de posibles resultados de una experiencia aleatoria.

En este problema, las experiencias aleatorias para cada situación son, respectivamente:

- Lanzar una moneda. Espacio muestral: {corona, escudo}
- Sentar al azar siete personas en una banca vacía con diez lugares enumerados del 1 al 10. Espacio muestral: conjunto de maneras de sentar a las personas
- Se puede decir que no cuenta con experiencia aleatoria. Es un problema abierto. Otra opción, es decir que la experiencia aleatoria es: elegir un helado al azar de la POPS, donde el helado favorito tiene una mayor probabilidad de ser elegido. Este caso, el espacio muestral es el conjunto de sabores de helados que vende esa sucursal de la POPS.

Los resultados de las respuestas de los 9 estudiantes se resumen en la siguiente tabla:

Respuesta a la pregunta 5

Problema	Experiencia aleatoria		Espacio Muestral	
	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
5a	3	6	5	4
5b	0	9	0	9
5c	2	7	4	5

La mayoría de las respuestas correctas se dieron en la situación 5a y fueron idénticas a la dada anteriormente. Los estudiantes #1 y #5 identificaron correctamente el espacio muestral para esta situación, pero no la experiencia aleatoria. El estudiante #5 no indicó la experiencia aleatoria y el estudiante #1 indicó “exp. Aleatoria: Corona”.

Para la 5c, se consideró correcto indicar como experiencia: elegir un helado y como espacio muestral: los 10 sabores de helado. Los estudiantes #1, #5, #7 y #9 indicaron correctamente el espacio muestral pero los estudiantes #1 y #7 indicaron que la experiencia aleatoria es que Ana elija su helado favorito.

Algunas de las respuestas incorrectas se muestran a continuación.

El estudiante #8 indica:

Pregunta	Exp Aleatoria	Esp. Muestral
a	Sacar corona	Moneda
b	Sentarse en un asiento impar	Asientos ocupados.
c	Comprar helado favorito	Helado escogido.

El estudiante #2 indica:

(no resuelva los problemas):

Experiencia aleatoria = sacar corona

(a) Se lanza una moneda. ¿cuál es la probabilidad de sacar CORONA? \bullet Espacio muestral = ~~moneda~~ moneda

(b) Siete personas se sientan al azar en una banca vacía con diez lugares enumerados del 1 al 10. ¿Cuál es la probabilidad de que quedan más personas sentadas en un asiento impar que en un asiento par? Experiencia Aleatoria = Elegir asiento impar Espacio muestral = 7 personas

(c) En la POPS se tienen 10 sabores de helados distinto. Ana compra un helado. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana escoga su helado favorito? Experiencia aleatoria = Elegir helado favorito Espacio muestral Ana

Con esta situación se evidencia el poco manejo que tiene los estudiantes de los conceptos de experiencia aleatoria y de espacio muestral. Estos conceptos operacionalizan un concepto más complejo pero indispensable para entender las probabilidades: el concepto de aleatoriedad.

Usualmente estos conceptos se estudian al inicio de un curso de probabilidad, pero conforme avanza el curso se suelen olvidar, no se les da la importancia que merecen y pocas veces se evalúan.



IV. Conclusiones

De manera general, las respuestas dadas por los docentes en formación indican que un buen porcentaje: no saben hacer explícito el espacio muestral ni la experiencia aleatoria, descuidan las hipótesis a asumir al utilizar la probabilidad como un modelo y dan respuestas deterministas (ven solo una única respuesta correcta) a situaciones aleatorias.

Sobre la parte inicial al resolver un problema con probabilidad, en los problemas primero y segundo, se evidenció como algunos aplican la regla de Laplace sin verificar que la situación involucre una experiencia aleatoria o sin suponer una experiencia aleatoria o recrearla, como parte de la resolución del problema. La aleatoriedad es indispensable para hablar de probabilidad. En muchas aplicaciones de la probabilidad, sobre todo en problemas de las ciencias sociales, se parte de supuestos, entre ellos, la existencia de la aleatoriedad.

Sobre la parte final, al dar una respuesta a un problema de toma de decisiones por medio de la probabilidad, las respuestas a los problemas tercero y cuarto evidencia como una gran mayoría de ellas reflejan una respuesta única a situaciones azarosas y consideran como incorrectas otras decisiones por ser menos probables. Quizás el ver la estocástica como parte de la matemática, como se mencionó en la introducción, influya en este tipo de respuestas de los estudiantes.

Además, se evidencia un poco apreciación del azar en las situaciones planteadas, y su relación, a nivel intuitivo, con conceptos ligados a la probabilidad:

- Concepto de riesgo. En un problema de toma de decisiones, la decisión que se tome es un balance entre la probabilidad y el riesgo que se esta dispuesto a tomar. El concepto de riesgo es indispensable en aplicaciones de probabilidad a las finanzas, por ejemplo.
- Conceptos de aceptación y rechazo. Una decisión no es correcta o incorrecta, más bien se acepta o se rechaza de acuerdo a lo que me indique la probabilidad, pues no sabes con certeza cuál será la mejor decisión. Estos conceptos son indispensables en Estadística Inferencial y sería genial que desde el estudio de las probabilidades se introduzca su uso.

En el problema quinto se evidencia el poco manejo de los conceptos de experiencia aleatoria y espacio muestral.

Por otro lado, producto del análisis realizado a los problemas presentados en el test, sugieren que se valoren otras formas de enseñar en probabilidad, pues por lo general las tareas que se plantean en la enseñanza y aprendizaje del tema y su consecuente evaluación se han centrado en el cálculo de probabilidades. Estas formas son:

- Evaluación por medio de proyectos. Por medio de proyectos de investigación se evidencie que el estudiante asume supuestos, considera la variación en las respuestas, tome en cuenta el contexto de los datos y rechace o acepte sus hipótesis de investigación.
- Evaluación por medio de “análisis de casos”. Se le planteen casos al estudiante, reales (tomados de investigaciones) o ficticios, donde el estudiante debe confrontar la



probabilidad con un contexto en aras de tomar una decisión, e incluso analice las posibles decisiones y sus repercusiones.

Estas formas de enseñanza y aprendizaje requieren más investigación para concretarlas; aunque es importante indicar que el uso de proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estocástica no es algo nuevo (Batanero & Díaz (2004), Batanero & Díaz (2011)).

En general, producto de las respuestas anteriores, se puede decir que la enseñanza de la probabilidad se suele reducir a un algoritmo: no interesa el planteamiento inicial del problema (supuesto de aleatoriedad, experiencia aleatoria y espacio muestral), ni la variación en la respuesta (consideración de riesgo, aceptación o rechazo de afirmaciones), solo interesa aplicar posiblemente la Regla de Laplace. De este modo, se pierde la posibilidad del desarrollo del pensamiento probabilístico y la enseñanza de la probabilidad se vuelve determinista.

V. Bibliografía

1. Batanero, C. (2000). *¿ Hacia dónde va la educación estadística*. *Blaix*, 15(2), 13.
2. Batanero, C., & Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. *Aspectos didácticos de las matemáticas*, 125-164. Zaragoza: ICE.
3. Batanero, C., & Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada: Universidad de Granada.
4. Batanero Bernabeu, C., & Serrano Romero, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (5), 15-28.
5. Elizarrarás, B. (2014). El pensamiento estocástico y el pensamiento pedagógico en la formación de docentes para la educación básica: viabilidad, trascendencia y pertinencia. In *Segundo congreso internacional: espacio común de formación docente*. Recuperado el 10 de setiembre 2018 en <http://www.uaimlosmochis.org/ECFD/index.php/2014/2/paper/viewFile/18/12>.
6. García, Víctor N.; Sánchez, Ernesto A. (2014). Razonamiento inferencial informal: el caso de la prueba de significación con estudiantes de bachillerato. En González, María Teresa; Codes, Myriam; Arnau, David; Ortega, Tomás (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 345-354). Salamanca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
7. Sanabria, G. (2012). *Comprendiendo las Probabilidades*. Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Anexo: TEST.

INSTRUCCIONES: Estimado estudiante le solicitó su colaboración para responder al siguiente Test cuyo objetivo es analizar la enseñanza de la probabilidad. No se requiere que ponga nombre y no tiene ninguna validez para el curso. Agradezco su colaboración.

1. En una canasta hay 10 bolas enumeradas del 1 al 10. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una bola par? Justifique su respuesta.
2. Juan tiene cinco camisas: dos son nuevas, tres camisas son viejas. Este domingo va a elegir una para ir a ver a la novia, ¿Cuál es la probabilidad de que el domingo ande con una camisa vieja? Justifique su respuesta.
3. En un examen de secundaria, en el desarrollo, se presenta el siguiente problema con un valor de 5 puntos

En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lanzar dos dados, si la suma de los resultados de los dados es menor o igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Si se gana el juego, se obtiene un premio de 1 500 colones. ¿Jugaría DADOS A SEIS?

Un estudiante A calculo correctamente la probabilidad del evento G (ganar el juego):

		Dado 2					
		1	2	3	4	5	6
Dado1	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

$$P(G) = \frac{15}{36} \approx 0.416$$

El estudiante respondió al problema indicando que jugaría DADOS A SEIS.

- (a) ¿Cuántos puntos de los 5 puntos que valía el problema le da a la solución de la respuesta A? Justifique su respuesta.
- (b) ¿Cuál es la respuesta correcta al problema?

4. Para ir de la ciudad A a la ciudad B existen dos autopistas: C_1 y C_2 . Considere los eventos:

E_1 : sufrir un accidente en C_1

E_2 : Sufrir un accidente en C_2

Suponga que E_1 y E_2 son independientes.

$$P(E_1 \cup E_2) = 0.08 \quad P(E_1) = 0.05$$

(a) Determine $P(E_2)$. Sugerencia: Recuerde que si A y B son independientes entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$0.05 + x - 0.05x = 0.08 \implies x = 0.0315$$

(b) Juan debe ir de la ciudad A a la ciudad B y toma la decisión de ir por la autopista C_2 . ¿Es correcta la decisión de Juan? Justifique su respuesta.

5. En las siguientes situaciones, identifique la experiencia aleatoria involucrada y el espacio muestral (no resuelva los problemas):

(a) Se lanza una moneda. ¿cuál es la probabilidad de sacar CORONA?

(b) Siete personas se sientan al azar en una banca vacía con diez lugares enumerados del 1 al 10. ¿Cuál es la probabilidad de que queden más personas sentadas en un asiento impar que en un asiento par?

(c) En la POPS se tienen 10 sabores de helados distinto. Ana compra un helado. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana escoga su helado favorito?

Algunos aspectos relacionados con la didáctica de la probabilidad y de la estadística en secundaria en Costa Rica.

Título

Félix Núñez Vanegas ¹

Resumen

En los últimos programas de matemática de secundaria en Costa Rica, se incluyeron contenidos de probabilidad y estadística, y además una metodología nueva para el abordaje de tales temas, en la que el estudiante es protagonista en este enfoque, pues se espera que él descubra el conocimiento a partir de la solución a una situación problema que se le propone. Es importante por tanto que el docente cuente con ideas teóricas acerca de cómo un estudiante piensa una vez enfrentado a una situación. Con el fin de comentar los cambios que se han generado en los programas de estudio en secundaria, comentar los resultados en bachillerato en estos temas de estocástica de los años 2016 y 2017 y de generar conocimiento teórico acerca de cómo un estudiante procede una vez que se enfrenta a una situación problema, se ha realizado este trabajo. Concretamente, se presentarán algunas ideas de la Teoría de Campos Conceptuales explicadas en el contexto de la probabilidad y de la estadística. Veremos que los resultados en bachillerato en estos temas no son los deseados en general, por lo que es importante conocer propuestas que aporten en la mejora de esta problemática, y es por ello que también se comentan algunos trabajos realizados recientemente en Costa Rica sobre la didáctica de la probabilidad y la estadística.

Palabras clave: Didáctica estadística, probabilidad, bachillerato, esquema, significado.

Abstract

In the most recent mathematics programs for Costarrican high schools, probability and statistics contents were included, as well as a new methodology for dealing with such topics, in which the student is the protagonist in this approach, since he is expected to discover the knowledge from the solution oproblem situation that is proposed. It is important therefore that the teacher has theoretical ideas about how a student thinks once faced with a situation. Specifically, some ideas of the Theory of Conceptual Fields explained in the context of probability and statistics are given. This work has been done in order to comment on the changes that have been introduced in high school programs and analyze the results in 2016 – 2017 national tests related to these stochastic topics, generating theoretical knowledge about how a student should proceed in a problem situation. We will see that the results in national tests on these issues are not the desired in general, so it is important to know proposals that contribute to the improvement of this problem, and that is why some current works developed in Costa Rica on the didactics of probability and statistics are discussed.

Keywords: Statistical didactics, probability, national tests, scheme, meaning.

Modalidad: Ponencia.

¹ Instituto Tecnológico de Costa Rica-Universidad de Costa Rica, Costa Rica. fnunez@itcr.ac.cr



I. Introducción

Las preocupaciones acerca de la educación en estocástica han generado, entre otros aspectos, que en los programas de matemáticas de la mayoría de países desarrollados, España por ejemplo, se hayan incorporado temas de estadística y de probabilidad. Tales preocupaciones hicieron eco en las autoridades del Ministerio de Educación Pública de nuestro país y realizaron lo propio al proponer nuevos programas para la enseñanza de la matemática. En ellos se plantean significativos cambios, tanto en contenidos (introducción a la estadística y a la probabilidad) como en la forma de abordarlos (metodología).

En Núñez (2008) se señala que una deficiencia de los programas de matemática en secundaria era que los temas de estadística no estaban distribuidos a lo largo de todos los años de estudio y que ese hecho provocaba que los estudiantes no contaran con un tiempo significativo para madurar cada concepto. En la propuesta nueva, los temas de probabilidad y estadística están diseminados holgadamente en todos los años de la enseñanza primaria y secundaria, estando más a tono con las recomendaciones que se sugieren para el abordaje de tales temas, lo anterior permite, de acuerdo con Núñez (2008) "desarrollar los temas mucho más despacio e irlos introduciendo poco a poco, de modo que los estudiantes se vayan familiarizando con ellos, iniciando con lo más básico."

Pero también, se introduce una nueva metodología en el establecimiento de dichos contenidos, basada en la resolución de problemas. De tal manera que el docente debe tener dominio de la disciplina misma y también de la Teoría de Situaciones de Brousseau (1986), sobre la cual se basa la metodología de enseñanza y en la que la resolución de problemas, como medio para lograr el aprendizaje, es medular. Más concretamente, en ellos se señala que:

“Este estilo propone una secuencia de cuatro momentos pedagógicos centrales en la enseñanza de las matemáticas: presentación de situaciones problema por parte del educador, solución o aporte de ideas por parte del estudiante (en varias modalidades: individualmente, parejas, subgrupos,...), comunicación de resultados por el estudiante y, finalmente, la institucionalización por parte del educador” (Programas de estudio matemáticas, 2012).

Lo anterior nos indica que los docentes deben tener, no sólo un dominio disciplinar, específicamente en probabilidad y estadística, sino también en esta metodología de enseñanza, de la cual ya hemos hablado con detalle en Núñez (2013).

Revisemos los resultados de las pruebas de bachillerato de los años 2016 y 2017, con el fin de valorar, a la luz de estos datos, si se ha logrado que los jóvenes cuenten con un conocimiento aceptable en estocástica.

1. **Habilidades generales de los programas de estudio evaluadas en 2017.**

De acuerdo con el informe de la Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad (DGECE, 2018), en el examen de bachillerato de matemática aplicado en 2017, modalidad académica diurna, se evaluaron 19 habilidades, de las cuales, siete corresponden a habilidades en probabilidad y



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

estadística, las cuales se detallan a continuación, de acuerdo con la numeración establecida por la DGEC:

13. Utilizar las medidas de posición para resumir y analizar la información proveniente de un grupo de datos cuantitativos. (3 ítems).
14. Utilizar las principales medidas de variabilidad para evaluar y comparar la dispersión de los datos. (2 ítems).
15. Utilizar diferentes representaciones para analizar la posición y variabilidad de un conjunto de datos. Valorar la importancia de las medidas de resumen (posición y variabilidad) para el análisis de la información estadística. (2 ítems).
16. Analizar la importancia del uso de medidas relativas de tendencia central y variabilidad dentro de los análisis comparativos de información. (2 ítems).
17. Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas. (3 ítems).
18. Utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. (2 ítems).
19. Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil. (2 ítems).

El total de ítems de esta prueba fue de 60, de los cuales 16 (26,66 %) correspondieron a estadística y probabilidad. Como vemos, son habilidades en estocástica que requieren por parte del docente un dominio pleno y además se les proporciona a estas habilidades bastante peso en esta prueba estandarizada.

Por otro lado, en este informe se establecen cinco categorías, acerca del nivel de dificultad de los ítems, según la proporción de estudiantes evaluados que respondieron correctamente la habilidad evaluada en dicha prueba, a lo que denominan dificultad del ítem:

Tabla 1 Categoría de dificultad por habilidad general

Nivel de dificultad	Porcentaje P de estudiantes que responden correctamente
Muy fácil	$P \geq 90$.
Fácil	$60 \leq P < 90$
Intermedio	$40 \leq P < 60$
Difícil	$10 \leq P < 40$
Muy difícil	$P < 10$

Fuente: Elaboración propia de acuerdo con datos de DGEC (2018)

De acuerdo con los resultados obtenidos en esta prueba, tomados de la DGEC (2018), se confeccionó la siguiente tabla, el total evaluados fue de 23479:

Tabla 2 Nivel de dificultad según habilidad, prueba diurna modalidad académica.

Habilidad en estadística y Probabilidad	Porcentaje P de estudiantes que respondieron correctamente en ítems de Estadística y probabilidad.	Nivel de dificultad
14	87,2	Fácil
13	53,3	Intermedio
15	57,8	
16	50,7	
17	54,5	
18	43,5	
19	26,2	Difícil

Fuente: Elaboración propia, con base en datos de la DGEC, 2018.

De la tabla vemos que no hay habilidades evaluadas clasificadas con dificultad muy fácil o muy difícil. La clasificación de las habilidades en probabilidad y estadística de acuerdo al nivel de dificultad se brinda a continuación:

Habilidad con nivel de dificultad Fácil

- Utilizar las principales medidas de variabilidad para evaluar y comparar la dispersión de los datos. (14)

Habilidad con nivel de dificultad Intermedio

- Utilizar las medidas de posición para resumir y analizar la información proveniente de un grupo de datos cuantitativos. (13)
- Utilizar diferentes representaciones para analizar la posición y variabilidad de un conjunto de datos. Valorar la importancia de las medidas de resumen (posición y variabilidad) para el análisis de la información estadística. Analizar la importancia del uso de medidas relativas de tendencia central y variabilidad dentro de los análisis comparativos de información. (15)
- Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas. (16)
- Utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. (17)
- Utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. (18)



Habilidad con nivel de dificultad Difícil

- Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil. (19)

A pesar de que la mayoría de habilidades se clasifican con nivel de dificultad intermedio, no deja de ser preocupante que un alto porcentaje responde incorrectamente los ítems correspondientes a estas habilidades. Por ejemplo, para los dos ítems correspondiente a la habilidad **utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre**, tan sólo un 26,2% respondió correctamente. A excepción de los ítems correspondiente a la habilidad **utilizar las principales medidas de variabilidad para evaluar y comparar la dispersión de los datos**, que un 87,2% los respondió correctamente, los ítems de las otras habilidades, en promedio, alrededor del 51% del total de estudiantes evaluados respondió correctamente, por lo que alrededor del 49% no.

Según el informe de la DEGCE (2017), el promedio general en esta prueba fue de 58,8, con desviación estándar de 16,8. La cantidad de evaluados fue de 23479.

Es importante señalar también que en la prueba de bachillerato de 2016, modalidad académica diurna, en probabilidad y estadística, se evaluaron las mismas habilidades con la misma cantidad de ítems. Los resultados fueron muy parecidos. En la tabla siguiente se dan los detalles de estos resultados:

Tabla 3 Nivel de dificultad según habilidad, prueba diurna modalidad académica.

Habilidad en y Probabilidad	Porcentaje P de estudiantes que respondieron correctamente en ítems de Estadística y probabilidad. (2016)	Nivel de dificultad
14	69,5	Fácil
19	76,8	Fácil
13	47,9	Intermedio
15	56,8	
16	40,6	
18	41,2	
17	32,0	Difícil

Fuente: Elaboración propia, con base en datos de la DGEC, 2017.



En este caso se tiene los siguiente:

Habilidad con nivel de dificultad Fácil

- Utilizar las principales medidas de variabilidad para evaluar y comparar la dispersión de los datos. (14).
- Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil. (19)

Habilidad con nivel de dificultad Intermedio

- Utilizar las medidas de posición para resumir y analizar la información proveniente de un grupo de datos cuantitativos. (13)
- Utilizar diferentes representaciones para analizar la posición y variabilidad de un conjunto de datos. Valorar la importancia de las medidas de resumen (posición y variabilidad) para el análisis de la información estadística. Analizar la importancia del uso de medidas relativas de tendencia central y variabilidad dentro de los análisis comparativos de información. (15)
- Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas. (16)
- Utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. (18)

Habilidad con nivel de dificultad Difícil

- Utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. (17)

De acuerdo con el informe de la DEGCE (2017), el promedio general en esta prueba de matemática fue de 61,1, con desviación estándar de 16,1. La cantidad de evaluados fue de 23566.

Al igual que en la prueba académica diurna de bachillerato de 2017, un alto porcentaje de estudiantes no responde correctamente en esta prueba, en la misma modalidad, alrededor del 48%.

No es una novedad que los resultados de los estudiantes en las pruebas de matemática en estos temas no son los deseados. Concretamente, cuando se aplicaban las pruebas estandarizadas de matemática a los estudiantes del noveno grado y se incluyó el tema de estadística, los bajos porcentajes generaron preocupación en la sociedad costarricense. En el año 2005, el Departamento de Pruebas Nacionales del Ministerio de Educación Pública, ventiló los resultados deficitarios que ostentaron los estudiantes y las estudiantes en las pruebas estandarizadas de noveno año y el bachillerato. En particular los dos contenidos del tema de estadística evaluados, a saber, conceptos básicos y medidas de tendencia central, arrojaron serias preocupaciones. De hecho, tan sólo un 31,23% y un 36.33% obtuvieron respuestas correctas en tales contenidos respectivamente. Al respecto, en dicho informe se afirma que:

“En estadística, ninguno de los dos contenidos muestra un buen rendimiento” (M.E.P., 2005).



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

Lo anterior plantea retos importantes en aras de incidir positivamente en este proceso de enseñanza y aprendizaje de la estocástica, a nivel de secundaria, sobre todo porque, en este enfoque metodológico, el estudiante es protagónico en la construcción de su propio conocimiento, particularmente, en aquellos atinentes a probabilidad y estadística, por lo que es de suma importancia contar con una referencia teórica acerca de cómo es que el estudiante aprende, cómo es que aborda un determinado problema, cómo es que se dan las filiaciones y rupturas una vez enfrentado a una situación problema. Vale la pena, entonces, tener una referencia y una posición teórica acerca de cómo es que, un estudiante enfrentado a una situación problema, piensa.

Insertar esos temas de probabilidad y estadística en los programas de estudio de matemática, además de toda una nueva metodología basada en la Teoría de Situaciones, planteada por Brousseau (1986), ha provocado en el sector docente de la enseñanza primaria y secundaria de este país, una cierta preocupación, sobre todo en aquellos profesores en los que sus programas de estudio no contemplaron cursos de probabilidad y de estadística y mucho menos de su didáctica.

Es por tanto la intención de este trabajo aportar conocimiento acerca de algunas ideas concernientes a la didáctica de la matemática, que podrían orientar el proceso de enseñanza y aprendizaje de los temas de estadística y de probabilidad. Específicamente se quiere que los docentes involucrados, conozcan algunas de las ideas de la Teoría de Campos Conceptuales ligadas a conceptos en didáctica de la estadística y de la probabilidad.

2. Esfuerzos didácticos en el abordaje de la enseñanza de la estadística y de la probabilidad en Costa Rica.

En Núñez (2013), ya habíamos mencionado algunas de las razones acerca de la importancia que tiene la enseñanza de la estadística, específicamente decíamos que la estadística es una parte de la educación general, deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos.

También apuntábamos que the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) establece una serie de estándares y principios para la educación matemática para primaria y secundaria en el año 2000, propuesta planteada por docentes estadounidenses.

En Costa Rica desde hace varios años se le viene dando relativa importancia a temas de estadística y de probabilidad. En los programas de estudios de matemática de 1995, por ejemplo, en primaria y secundaria, se incorporan contenidos de estas disciplinas.

Por otro lado, ya para 1999 tres estudiantes de licenciatura en Educación Primaria con énfasis en primero y segundo ciclos, desarrollaron una tesis en la que proponen cómo tratar la estadística y probabilidad en primer y segundo ciclos (Carvajal, et al, 1999). Adicionalmente, un trabajo de graduación de la Maestría Profesional en Planificación Curricular, una propuesta metodológica de la enseñanza de la estadística, en la que se brinda una guía metodológica que motive al



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

docente de matemática de octavo año a enseñar la estadística, incluyendo actividades innovadoras desde la correlación interdisciplinaria (Espeleta, 2000).

En el 2007 se elaboró una Memoria de Seminario de Graduación en la Universidad de Costa Rica, específicamente en la Escuela de Matemática, titulado “Diseño de una unidad didáctica que oriente el proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos de estadística de tercer ciclo del programa del Ministerio de Educación Pública”. En ese trabajo, se aborda la enseñanza de la estadística desde una perspectiva dinámica, en la que el estudiante tiene una participación activa, y al profesor se les dan las definiciones y conceptos, para que pueda llevarlos al aula (Navarro, 2007).

En 2008 se elaboró una tesis en la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica titulada, “La Enseñanza y el aprendizaje de la estadística en secundaria: situación actual, aproximación metodológica”. En esta propuesta se realiza un aporte didáctico para abordar algunos temas de estadística en secundaria (Núñez, 2008).

Más recientemente, en 2010 se elaboró una Memoria de Seminario de Graduación en la Universidad Nacional, específicamente en la Escuela de Matemática, titulada “Estado Actual de la Enseñanza y Aprendizaje de Probabilidad y Estadística, en I y II Ciclo, en la Educación Costarricense en las Direcciones Regionales Educativas de Heredia y Pérez Zeledón”, en la que se investiga la situación actual del proceso de enseñanza y aprendizaje de Probabilidad y Estadística en I y II Ciclo de la Educación pública Costarricense, con el afán de describir lo propuesto en los Programas de Estudio de Matemáticas de I y II Ciclo de la Educación General Básica y conocer la percepción de docentes de esos ciclos respecto a lo que se plantea en esos programas y de analizar el grado de cumplimiento de dicha propuesta. Además, se investiga la opinión de estos docentes respecto a la necesidad e importancia de impartir los contenidos en esos niveles, métodos, técnicas y recursos empleados, con mayor frecuencia, al desarrollar los contenidos. También se analizan los libros de texto que se utilizan con más frecuencia, así como el rol que cumplen.

Por otro lado, los esfuerzos realizados por la Escuela de Matemática del Tecnológico de Costa Rica a través de la organización de los congresos EDEPA (Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos), constituyen un significativo aporte en la difusión de trabajos y propuestas en líneas temáticas concernientes a la didáctica de la estadística y de la probabilidad. A la fecha han tenido suceso cinco ediciones del mismo y en cada uno se ha contado con la participación de destacados académicos en el área de la matemática y de la estadística y sus aportes han sido realmente importantes en la culturalización de la estadística y probabilidad.

Cabe mencionar también que, en diciembre de 2012, la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica organizó la Primera Escuela de Verano, como una actividad pre-congreso del III EDEPA. En ella se impartieron, desde una perspectiva didáctica, minicursos sobre combinatoria, estadística (descriptiva e inferencial), probabilidad, ponencias sobre análisis de datos, actividades desarrolladas desde un enfoque didáctico. Además, se han realizado dos ediciones más de las Escuelas de Verano, la segunda en la sede del Tecnológico, ubicada Santa



Clara, San Carlos, en 2015, y la otra, en la Universidad de Costa Rica, en la Sede del Atlántico, en 2017.

Como un aporte adicional, en el año 2013, la Revista digital Matemática, Educación e Internet, publica el libro “Contribuciones 2011-2013 en estadística y probabilidad: Su Didáctica, Aplicaciones y Tecnología” que constituye un compendio de los extensos expuestos en el II EDEPA, con trabajos ligados a la didáctica de la probabilidad y la estadística, así como también con propuestas de aplicaciones de estas disciplinas y el uso de paquetes computacionales para la aproximación de algunas probabilidades.

3. Algunos conceptos de la teoría de campos conceptuales ejemplificados en probabilidad y estadística.

Como dijimos anteriormente, en este enfoque metodológico adoptado en los programas de matemática, el estudiante es protagónico, porque debe construir su propio conocimiento, a partir de una situación problema que se le plantea. Es importante entonces tener una posición teórica acerca de cómo es que procede una vez que ha aceptado el problema. La teoría de Campos Conceptuales, de Vergnaud (1990) es un aporte teórico que tiene como objetivo permitir el análisis del aprendizaje de conceptos científicos y técnicos. Es un trabajo muy ligado a la psicología cognitiva y busca ofrecer un marco teórico que intenta dilucidar cómo el adolescente y el niño aprenden, cómo es que se entremezclan los conceptos, proceso que el autor llama filiaciones, así como también cómo es que se dan las rupturas entre unos y otros.

El concepto de situación no es la misma idea de Brousseau (1986) de situación didáctica, sino más bien, la concepción de los psicólogos que corresponde a aquella en la que un individuo es confrontado a alguna circunstancia. Si se quiere buscar una relación con las situaciones didácticas de Brousseau (1986), se diría que el concepto de situación de Vergnaud se asemeja con la etapa adidáctica. Recuérdese que toda situación didáctica tiene una etapa adidáctica en la que al estudiante se le pone a distancia con la intencionalidad didáctica.

Con esta idea de situación, se pueden distinguir dos clases:

- Aquéllas de las cuales tiene capacidad para resolver inmediatamente.
- Aquéllas para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias.

Aquí entra a jugar el concepto de esquema, que es la manera invariante de organizar la conducta del niño. En ambas clases de situaciones, los esquemas son distintos. Para la primera, se recurre a un esquema único y se procede de manera más o menos automatizada.

Consideremos el siguiente ejemplo:

Sea X la variable que indica el número de partes defectuosas de una máquina cuando se muestrean tres partes de una línea de producción y se prueban. La distribución de probabilidad de X es



x	0	1	2	3
$f(x)$	0.51	0.38	0.10	0.01

Se quiere calcular la esperanza de X . En una situación de la clase uno, se procede de la siguiente manera:

$$E(X) = 0 \times 0.51 + 1 \times 0.38 + 2 \times 0.10 + 3 \times 0.01 = 0.61$$

Mientras que para las situaciones de la clase dos, aparecen variados esquemas. Una vez enfrentado a una situación de este tipo, el individuo procede a buscar en el acervo de esquemas, alguna semejanza que le permita resolver la situación. El autor dice que esta semejanza es, en muchas ocasiones, ficticia. Por ejemplo, al pedirle al estudiante que determine la cantidad de palabras que se obtienen al permutar las letras de la palabra ADELA, el estudiante puede recurrir al esquema que usó para resolver problemas de conteo de permutaciones de objetos distintos, e indicar que el número es $5! = 120$, lo cual no es cierto, dado que las dos letras A son la misma.

El funcionamiento cognitivo, sin embargo, tiene dos componentes: una automatizada y otra de decisiones conscientes. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema de probabilidad:

Una empresa diseña un juego con una cierta probabilidad de ganarlo, la cual se puede ajustar. ¿A qué valor se debe ajustar dicha probabilidad de tal manera que, la probabilidad de que al menos diez de cien jugadores lo ganen, sea aproximadamente del 15%?

La solución es más o menos mecánica:

Sea X el número de veces que se gana el juego de 100 y p la probabilidad buscada

$$X \sim B(100, p)$$

Como se quiere que la que la probabilidad de que al menos 10 ganen el juego, de los 100, sea de 15%, entonces tenemos lo siguiente

$$P(X \geq 10) = 0.15 \leftrightarrow P(X < 10) = 0.85 \leftrightarrow P(X \leq 9) = 0.85$$

Ahora si se supone que $100p \geq 5$ y $100(1 - p) \geq 5$, entonces se tendría que

$$X_{\text{aprox}} \sim N(100p, 100p(1 - p))$$



Por lo que $P(X \leq 9) = P(X < 9.5)$ (Observando que la variable la estamos considerando continua). Aquí hay una componente del funcionamiento cognitivo, la decisión consciente.

$$\text{Ahora, } P(X < 9.5) = P\left(Z < \frac{9.5 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right) = 0.85$$

Utilizando la tabla de la distribución normal, se obtiene que

$$\frac{9.5 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}} = 1.04$$

Al elevar al cuadrado para resolver la ecuación, obtiene dos valores para p : 0.068695 y 0.1299.

La solución de la ecuación anterior muestra la componente del funcionamiento cognitivo que correspondería a la automatizada, no obstante, ahora se debe de dar la respuesta, y debe descartarse 0.1299, puesto que no satisface la ecuación original. Se tiene entonces la componente de decisión consciente. Por tanto $p = 0.068695$.

Falta verificar que $100 \times 0.068685 \geq 5$ y $100(1 - 0.068695) \geq 5$, lo cual es correcto.

De ahí que la probabilidad a la que se debe ajustar el juego es de 6.8685%

Detrás de cualquier esquema, subyace una conceptualización, la cual se refiere a todos aquellos conceptos que el individuo asume para evocar esos esquemas, y son esos conceptos los que hacen que se obtenga estabilidad en el esquema. Ese conocimiento implícito, que comprende no sólo conceptos en acto sino también teoremas en acto, es lo que Vergnaud llama invariantes operatorios. Son los conocimientos contenidos en los esquemas y los que hacen que frente a una situación dada, funcione igual.

Volviendo al ejemplo anterior del número de partes defectuosas de una máquina, cuando se calcula la varianza de la variable aleatoria X se puede recurrir a la definición, de la siguiente manera:

$$\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2)$$

Para luego proceder de forma más o menos automatizada así

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E((X - \mu)^2) = E((X - 0.61)^2) \\ &= 0.51 \times (0 - 0.61)^2 + 0.38 \times (1 - 0.61)^2 + 0.1 \times (2 - 0.61)^2 + 0.01 \times (3 - 0.61)^2 \\ &= 0.4979 \end{aligned}$$

Así que la varianza de la variable X es 0.4979.

Pero el proceso es más tedioso y hay más cálculos, por ende, más posibilidades de equivocarse. En lugar de eso, podría procederse de la siguiente manera:

$$E(X) = 0 \times 0.51 + 1 \times 0.38 + 2 \times 0.10 + 3 \times 0.01 = 0.61$$

$$E(X^2) = 0 \times 0.51 + 1 \times 0.38 + 4 \times 0.10 + 9 \times 0.01 = 0.87$$

Finalmente,

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = 0.87 - 0.61^2 = 0.4979$$



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

La segunda forma de proceder se justifica gracias a que hay un teorema que establece que la varianza de una variable aleatoria X es $\sigma^2 = VarX = E(X) - \mu^2$ y corresponde a una parte de los invariantes operatorios: Los teoremas en acto.

En esta teoría se habla de procesos de generalización y de restricción de un esquema. En efecto, para un determinado paquete de situaciones, siempre es posible aplicar un determinado esquema a una clase más baja y probablemente pueda funcionar en una clase más amplia, con ciertas modificaciones. El reconocimiento de invariantes es la clave de la generalización del esquema. Pero es probable que se quiera aplicar el esquema a una clase demasiado amplia, por lo que hay una situación de fallo y debe por tanto restringirse el alcance del esquema. Por ejemplo, para calcular el promedio final de un estudiante en una materia cuyas notas en el I Trimestre, II Trimestre y III Trimestre son 80, 90, 85, el alumno sumará y dividirá por tres. En cambio, ese conocimiento implícito que utiliza el estudiante no es válido cuando se tiene una situación como la siguiente: Si el primer trimestre tiene un peso de un 20%, el segundo un 30% y el tercero un 50% de la nota final, entonces, la nota final ya no se podrá obtener de simplemente sumar y dividir por tres. Se debe obtener un promedio ponderado y por ende, se debe variar el esquema, para que pueda resolverse el problema correctamente.

Cuando se habla de un concepto, debe referirse a él con dos componentes: Una que tiene que ver con la definición y otra con el sentido.

Desde la perspectiva de un didacta, Vergnaud dice que no se concibe creer que con sólo la definición un estudiante adquiere un conocimiento. Debe ir ligado al sentido, y que es sólo a través de los problemas que se le presenten al estudiante que se logrará. Todo ello está asociado con la primera etapa de la Teoría de Situaciones de Brousseau (1986), específicamente con la etapa de la devolución de la situación adidáctica, que consiste en que el estudiante se apropie del problema que se le asigna, que lo haga suyo, que se interese por él y que la responsabilidad sobre el conocimiento que va a descubrir recaiga V sobre él.

Es importante entender que un concepto tiene esas dos dimensiones, puesto que esto hace que el conocimiento sea operatorio. Es decir, que cuando un sujeto es puesto en situación, él pueda recurrir al conocimiento que guarda en su estructura cognitiva para resolver dicha situación. Vergnaud considera que un conocimiento, si se precia de ser racional, debe ser operatorio, de lo contrario, no es conocimiento.

Por ejemplo, pensemos que a un estudiante se le propone el siguiente problema: Cinco personas piden café con leche, uno para cada uno, tres quieren su café con leche descremada y dos con leche normal. Cuando el mesero lleva los cafés, se le confunden, y da al azar un café con leche a cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que a cada persona le corresponda el café que pidió?

Aquí, el conocimiento adquirido acerca del número de permutaciones de objetos, no necesariamente distintos, debe de ser operatorio y al resolver el problema, debería verse la operatoriedad de dicho conocimiento si se precia de ser racional:



Los cafés con leche normal se pueden considerar de un mismo tipo y los cafés con leche descremada de otro tipo. Así tenemos dos tipos de objetos. El número de permutaciones posibles sería

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

Del total de maneras, sólo hay una en la que a cada uno le toca el café con leche que pidió. De ahí que la probabilidad buscada es

$$\frac{1}{\frac{5!}{3! \times 2!}} = \frac{1}{10}$$

Por otro lado, los conceptos en acto no son de hecho conceptos, ni un teorema en acto es un teorema. En efecto, muchos estudiantes cometen el error de asumir que la raíz cuadrada de una suma es la suma de las raíces cuadradas. Por ejemplo, con frecuencia se observa que algunos estudiantes consideran correcta la igualdad $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$, y muchas veces utilizan ese resultado erróneo para resolver problemas que involucran esos tópicos. Por ejemplo, en la fórmula para la desviación estándar muestral $S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}}$, existe la tentación de algunos estudiantes de escribir

$$S = \frac{(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x})}{\sqrt{n-1}},$$

lo cual es claramente incorrecto.

Se dice que toda esta acción operatoria que abarca el proceso de conceptualización, no lo es todo. En efecto, no se juzga la veracidad o falsedad de un conocimiento totalmente implícito sin la ayuda de palabras, enunciados, símbolos y signos. Es por ello que se aclara que los significantes juegan un papel crucial en el proceso de conceptualización, por lo que un concepto es considerado como una tripleta de tres conjuntos: Situaciones, invariantes y significantes y sostiene que no se puede estudiar el desarrollo y el funcionamiento de un concepto, ya sea en el proceso de su aprendizaje o su utilización, sin considerar esos tres planos simultáneamente.

Campos conceptuales.

En una primera aproximación, Vergnaud dice que un campo conceptual es un conjunto de situaciones. Así, por ejemplo, dice que el campo conceptual de las estructuras aditivas es el conjunto de situaciones que requieren de una adición, una sustracción o una combinación de éstas. Concebir así un campo conceptual dice el autor, da como ventaja, generar una clasificación que reposa sobre el análisis de tareas cognitivas y en los procedimientos que pueden ser utilizados en cada una de ellas. Aquí el concepto de situación tiene el sentido de tarea, y una situación compleja se puede analizar como una combinación de tareas. El fracaso en una subtarea lleva necesariamente al fracaso global.



La Lógica, dice el autor, no es un cuadro suficientemente operatorio que identifique la complejidad relativa de las tareas y subtareas, de los procedimientos, etc. Es muy reductora y ubica en el mismo nivel aquellos objetos matemáticos que tienen el mismo status lógico, lo cual no quiere decir que planteen los mismos problemas de conceptualización.

Él destaca ese aspecto negativo de la Lógica para afirmar que la teoría de campos conceptuales no es una teoría basada en las estructuras lógicas, como la psicología cognitiva de Piaget, sino más bien, es una psicología de los conceptos.

Por tal razón, un campo conceptual debe ser visto como un conjunto de situaciones y el conjunto de invariantes operatorios que permitan analizar estas situaciones como tareas matemáticas.

Situaciones

El concepto de situación aquí coincide con la del psicólogo: Los procesos cognitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones a las que ha sido confrontado.

El autor retiene dos ideas principales: Variedad e historia. Él dice que en un campo conceptual dado, existe una gran variedad de situaciones y que los conocimientos de los estudiantes son modelados por las situaciones que han encontrado y dominado progresivamente.

El didacta no tiene una tarea fácil. En efecto, mientras la variedad lo orienta hacia el análisis, la descomposición en elementos simples, la historia lo lleva hacia la búsqueda de situaciones funcionales. Está bien plantearle problemas a un niño de seis años que tienen que ver con la compra de pasteles, poner la mesa, contar las personas, cubiertos, etc. pues esto ayuda a conceptualizar cuestiones matemáticas como el número, adición y resta. No obstante, no funciona así en la vida. La mayoría de situaciones no están en un contexto tan depurado y en limpio como suelen plantearse los problemas. Los hay de todos los tipos y sucede que se resuelven o no.

Con esto, el autor quiere decir que no es fácil partir de las situaciones de la vida para establecer una clasificación sistemática. Él cree que la mayoría de problemas concernientes a un determinado campo conceptual se pueden engendrar a partir de una combinación de relaciones de base, lo cual abre un amplio camino de investigación.

La idea de historia aquí, no tiene que ver con la historia de las matemáticas, sino con la historia del aprendizaje de las matemáticas, que es individual. Esta idea tiene una gran relación con Chevallard (1998) en el sentido siguiente: el tiempo didáctico asignado lo considera ficción. La puesta en texto del saber va de la mano con una exposición más o menos racional en donde el desarrollo es progresivo, acumulativo e irreversible. No obstante, en el proceso de aprendizaje, los conocimientos no se apilan unos sobre otros. Se dan integraciones sucesivas y se requieren reorganizaciones cognitivas que vuelven a retomar



conocimientos viejos, los reinterpretan y les modifican el sentido. “Ese después” se presenta como extraño a la adquisición lineal y programada de los saberes.

A la luz de estas ideas, es que Vergnaud considera la historia de cómo un estudiante ha ido adquiriendo un concepto. No es fácil, dice el autor, el trabajo del investigador didacta. Se pueden observar regularidades impresionantes de un niño a otro, en la manera que abordan una misma situación, en las concepciones primitivas que se forman de los objetos, de sus propiedades y de sus relaciones, y en las etapas por las cuales atraviesan. Tales regularidades se refieren a las distribuciones de procedimientos y no están unívocamente determinadas. Sin embargo, el autor defiende la tesis de que con la teoría de campos conceptuales, se pueden identificar las principales filiaciones y las principales rupturas en ese proceso de aprender.

Significados y significantes.

Anteriormente se habló de que un concepto tenía dos componentes: la definición y el sentido. El sentido son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o por un significante. Es así que el sentido para un individuo puede entenderse de la siguiente manera:

- Conjunto de esquemas que puede poner en acto para enfrentar una situación.
- Conjunto de esquemas que puede poner en acto para operar sobre los símbolos.

No obstante, aclara que una situación dada o un simbolismo particular no evoca en un sujeto todos los esquemas disponibles. El sentido de la resolución de una ecuación lineal particular, no es el sentido de la resolución de ecuaciones lineales.

Aquí él plantea que se debe aclarar la función del lenguaje y de los otros significantes, puesto que los significantes y la organización del discurso juegan un papel preponderante. En la teoría de los campos conceptuales, la función del lenguaje no sólo se reduce a comunicar y representar, sino también a ayudar al pensamiento.

La actividad lingüística favorece la realización de la tarea. Cuanto menos automatizada sea la realización de una tarea, más se utilizará el lenguaje. Es frecuente escuchar a los alumnos de una clase cuando dividen por primera vez un polinomio por otro. Cada paso va reforzado con la actividad lingüística. Es en este sentido que el autor dice que la actividad lingüística favorece la realización de la tarea y la resolución del problema encontrado. De esta manera, el autor llega a la función de representación del lenguaje, la cual es triple:

- Representación de los elementos pertinentes de la situación.
- Representación de la acción.
- Representación de las relaciones entre la acción y la situación.



El autor defiende la tesis de que el simbolismo matemático contribuye significativamente a la conceptualización, especialmente para la transformación de las categorías de pensamiento matemático en objetos matemáticos. Aunque acepta que el lenguaje natural es el medio esencial de representación y de identificación de las categorías matemáticas, no cree que tenga al igual que las fórmulas, los diagramas y las ecuaciones, el laconismo necesario para la selección y el tratamiento de la información.

4. **A modo de conclusión**

Las cuestiones planteadas anteriormente sirven de base para comprender que el proceso de aprendizaje es muy complejo, y que es importante que los docentes cuenten con un referente teórico al menos, acerca de cómo es que un estudiante piensa, cómo es que se dan las filiaciones y rupturas una vez enfrentado a una situación.

El bajo rendimiento que ostentaron los estudiantes y las estudiantes en los temas de probabilidad y de estadística en bachillerato en 2017, plantea retos importantes a investigadores en didáctica de la probabilidad y de la estadística, los cuales deben realizar importantes investigaciones acerca del actual estado de cosas, y proponer mejoras. En este enfoque de enseñanza, se promueve que el estudiante construya su conocimiento, a través de la solución que él debe de dar a una situación problema que el docente debe proponer; justamente la solución al problema, es el conocimiento que se debe establecer. Ya el algoritmo pasa a un segundo plano en este enfoque, lo cual promueve que los estudiantes se apropien de ese conocimiento. El asunto está entonces en aplicar esta metodología, la cual es difícil poner en práctica, y puede tentar al docente a elegir la enseñanza algorítmica.

Es menester que se haga entonces un profundo análisis de la situación, de buscar las dificultades que caracterizan a la enseñanza de cada tema, investigar cómo es que el estudiante aprende, de la pertinencia del tamaño de las listas de contenidos, así como su distribución, de la presentación de los temas a desarrollar, buscando relaciones entre ellos para integrar los unos con otros toda vez que sea posible. Así, por ejemplo, la media de una variable no debe verse aparte de su varianza y su distribución, sino que se traten de manera conjunta pues corresponden a un mismo campo conceptual.

Pese a que hay consenso, tanto en el plano internacional como en el nacional, de que la estadística es una parte de la educación general, deseable para los futuros ciudadanos adultos, para llevar al aula estos temas se requiere de capacitaciones y una formación continua de los docentes de matemática en servicio.

Hay muchos esfuerzos apuntando en esta dirección, tesis, artículos, propuestas didácticas en el abordaje de temas de probabilidad y de estadística, congresos como el EDEPA, Escuelas de Verano que intenta aportar conocimiento en temas específicos de estocástica.



Bibliografía

1. Batanero, C. (2001). Didáctica de la estadística. Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. España. Servicio de Reprografía de la Facultad de Ciencias, Granada, España.
2. Barrantes, J., Bolaños, H., Céspedes, M., Delgado, E., Freer, D., Padilla, E., & Víquez, M. (2010). Estado actual de la enseñanza y aprendizaje de probabilidad y estadística, en I y II ciclos, en la educación costarricense en las Direcciones Regionales Educativas de Heredia y Pérez Zeledón. Licenciante's thesis). Heredia, Costa Rica: Universidad Nacional.
3. Brousseau, G. (1986). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas. Traducción al castellano del artículo "Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques" publicado en la revista Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2):33-115, y realizada por Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús MurilloCarvajal,
4. Espeleta, A. (2002). La enseñanza de la Estadística: una propuesta metodológica. Sistema de Estudios de Posgrado. Maestría Profesional en Planificación Curricular. Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.
5. M; Masís, K; Méndez, T. (1998). La estadística y probabilidad en primer y segundo ciclo: tratamiento y propuesta. Memoria del seminario de Graduación presentado para optar por el grado de Licenciatura en Educación Primaria con énfasis en primer y segundo ciclos. Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.
6. Ministerio de Educación Pública. (2005). Programas de estudio matemáticas. San José, Costa Rica.
7. Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de estudio matemáticas. San José, Costa Rica.
8. Ministerio de Educación Pública. (2017). Informe Nacional. Resultados de las pruebas nacionales de la Educación Formal 2017. Bachillerato. Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad. San José, Costa Rica.
9. Ministerio de Educación Pública. (2018). Informe Nacional. Resultados de las pruebas nacionales de la Educación Formal 2017. Bachillerato. Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad. San José, Costa Rica.
10. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). 2000. Principles and Standards for School Mathematics. <http://www.standards.nctm.org/> .Estados Unidos. Última revisión, 25 de septiembre, 2007. 11:00am.
11. Navarro, R. (2007). Diseño de una unidad didáctica que oriente el proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos de estadística de tercer ciclo del programa del Ministerio de Educación Pública. Memoria del seminario de Graduación presentado para optar por el grado de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática. Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.



*VI Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad
y el Análisis de Datos*

12. Núñez, F. (2008). La Enseñanza y el aprendizaje de la estadística en secundaria: situación actual, aproximación metodológica. Sistema de Estudios de Posgrado. Maestría académica en matemática. Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.
13. Núñez, F. (2008). Consideraciones sobre la didáctica de la probabilidad y de la estadística. Memorias del VII CIBEM, Uruguay
14. Sanabria, G; Núñez, F. (2010). Una propuesta para introducir el estudio de las probabilidades: Probabilidad Frecuencial. Memorias del III Encuentro Enseñanza de la Matemática, UNED, Costa Rica.
15. Sanabria, G. (2012). Comprendiendo las probabilidades. Primera. Cartago: Editorial Tecnológica de Costa Rica.
16. Vergnaud, G. (1990). "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol. 10 (23): 133-170.

Niveles de lectura de estudiantes de licenciatura: el caso de una tabla y una gráfica de líneas

Elizabeth-H. Arredondo¹ & Jaime I. García-García² & César López Calvario³

Resumen

La enseñanza de la estadística ha cobrado auge en los últimos años, debido a ser considerada en las actuales políticas educativas como la promotora de una competencia necesaria en la sociedad. Esta competencia destaca entre sus puntos la capacidad de leer e interpretar información, de manera adecuada y crítica, presentada en cualquier tipo de representación. Se presenta un reporte de investigación cuyo objeto de estudio es la interpretación que realizan 36 estudiantes de licenciatura que llevaron a cabo la tarea de leer e interpretar una tabla y una gráfica de líneas. Esto con el objetivo de analizar el nivel de lectura que muestran al realizar dicha tarea, e identificar si el tipo de representación promueve niveles superiores de lectura; considerando dos marcos de referencia: los niveles de lectura de Curcio (1989) y Friel, Curcio y Bright (2001) para el análisis de la comprensión gráfica, y la jerarquía propuesta por Aoyama (2007) para la valoración crítica de la información y su integración con el contexto. El análisis de las interpretaciones evidencia que la mayoría de los estudiantes alcanzan el nivel 2, *leer dentro de los datos*, al enfocarse en la comparación de los datos; pocos jóvenes pudieron alcanzar los niveles superiores 3 y 4, *leer más allá de los datos* y *leer detrás de los datos*, respectivamente, al dar una predicción sobre una tendencia de los datos, o bien, al proporcionar hipótesis explicativas en términos de los datos que se muestran en la tabla o gráfica. Se observa que la valoración crítica de la información por parte del estudiante, se encuentra directamente relacionada con su conocimiento sobre el contexto, siendo este el que determina y caracteriza el nivel superior 4. Además, con base en nuestro análisis, podemos mencionar que la representación gráfica favorece en la interpretación de los estudiantes participantes para alcanzar niveles superiores de lectura.

Palabras clave: niveles de lectura, interpretación, tabla estadística, gráfica de líneas.

Abstract

The teaching of statistics has become increasingly relevant in recent years since current teaching policies consider it promotes a much needed competence in society. This competence involved the ability to read and interpret information in a suitable and

¹ Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos, Chile.
elizabeth.hernandez@ulagos.cl

² Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos, Chile.
jaime.garcia@ulagos.cl

³ Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.
nass1_2012@hotmail.com



critical way, regardless of the type of representation. A research report is presented whose object of study is the interpretation that 36 college students provide after completing a task involving reading and interpretation of a table and a line graph. Our objective was to analyze the reading level shown by the students when completing the task and identify whether the type of representations promotes higher levels of reading. To do so, we considered two frameworks: the reading levels by Curcio (1989) and Friel, Curcio, and Bright (2001) for the analysis of graph comprehension and the hierarchy proposed by Aoyama (2007) to critically evaluate information and its integration to the context. The analysis of the interpretations evidenced that most of the students reached level 2, read within the data, by focusing on data comparison. Only a few reached levels 3 and 4, read beyond the data and read behind the data, respectively, by providing a prediction on data trend or explanatory hypotheses regarding the data in the chart or graph. We observed that the students' critical evaluation is directly related to their knowledge of the context, which determines and characterizes the higher level 4. In addition, based on our analysis the type of graphic representation promotes the participants' interpretation to reach higher reading levels.

Keywords: reading levels, interpretation, statistical table, line graph.

I. Introducción

Actualmente, en la enseñanza de la Estadística es importante que el estudiante desarrolle una *cultura estadística* que le permita participar y desenvolverse en nuestra sociedad; por ejemplo, los medios de comunicación con los que tiene contacto, hacen uso de tablas y gráficas estadísticas para divulgar información política, deportiva, social, cultural, entre otras. La investigación en esta disciplina reconoce este hecho en actividades tan cotidianas como la lectura de la prensa (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013) o la interpretación de información estadística que se puede encontrar en diversos contextos (Gal, 2002), más aún, se enfatiza que esta debe ser evaluada con una mirada crítica para tomar decisiones y entender nuestro entorno (Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín, 2015). En particular, la interpretación de datos estadísticos, representados en gráficas y tablas, es parte esencial de la cultura estadística, que Gal (2002) considera como la asociación de dos capacidades:

- a) interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, y b) discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante (p. 2-3).

El objetivo del estudio es explorar la interpretación que realizan 36 estudiantes de licenciatura cuando leen información estadística representada en una tabla y una gráfica de líneas, así como identificar si el tipo de representación promueve niveles superiores de lectura. Esto sin que se guíe al alumno en su lectura a través preguntas, ya que en su cotidianidad este se enfrenta a la lectura de información divulgada en libros, revistas, periódicos, televisión o internet. Con base en lo anterior, se establecieron las siguientes preguntas que guiaron nuestra investigación: ¿Qué niveles de lectura exhiben los estudiantes de licenciatura cuando realizan la interpretación de información



representada en una tabla y una gráfica de líneas? ¿Qué tipo de representación, bajo el mismo contexto, promueve niveles superiores de lectura en los estudiantes?

II. Algunos estudios sobre lectura de tablas y gráficas estadísticas

Son escasos los estudios empíricos que informan sobre la lectura e interpretación de tablas y gráficas estadísticas por estudiantes de licenciatura. A continuación, en la Tabla 1 se presentan, de manera conjunta, algunas investigaciones relacionadas con nuestro trabajo que poseen participantes con características similares a los nuestros.; esto con el fin de facilitar la lectura e interpretación de los resultados.

Tabla 1. Estudios empíricos sobre lectura de gráficos estadísticos

Investigaciones	Autores	Tipos de problemas planteados y Resultados
Profesores en formación	Burgess (2002) Monteiro y Ainley (2007) Batanero, Arteaga y Ruiz (2010)	Problemas abiertos para construcción y en contexto Dificultades en producción e interpretación de gráficos en contextos. Bajos niveles de lectura.
	Rodríguez y Sandoval (2012) Díaz-Levicoy, Sepúlveda, Vásquez y Opazo (2016)	Problemas con preguntas dirigidas Bajos niveles de lectura en gráficos
	García-García, López y Arredondo (2018) Gea, Arteaga y Cañadas (2017) Arteaga (2011)	Problemas abiertos para solo la lectura del gráfico y situados en un contexto. Bajos niveles de lectura en gráficos
En estudiantes de educación media o básica (jóvenes o adultos)	Eudave (2009)	Problemas con preguntas dirigidas Bajos niveles de lecturas de gráficos.

La Tabla 1 evidencia que la investigación que se realiza en gran parte de América Latina se centra en el análisis de la formación de profesores, al inferirles a estos la responsabilidad de formar una cultura estadística en los estudiantes; esta situación responde a las políticas educativas de los países pertenecientes a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) que se alinean a los saberes solicitados por el Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA) (Pedró, 2012). Enseguida se amplía la información respecto a los resultados de investigaciones anteriores.

Burgess (2002) realizó un estudio con 30 estudiantes, que cursaban el primer año, en formación para profesores de educación primaria, encontrando que únicamente 20% fue capaz de producir gráficos adecuados y el 50% interpretó la gráfica considerando el contexto del estudio. Monteiro y Ainley (2006) realizaron una investigación con 218 estudiantes de pedagogía en educación básica, observando que la mayoría de ellos presentaba dificultad para leer algunos gráficos tomados de la prensa -no leían correctamente el gráfico, o bien, lo leían pero no interpretaban adecuadamente con el contexto de la noticia- por lo que no llegaban alcanzar un nivel de lectura



crítico de los datos. Eudave (2009) efectuó un estudio con 28 estudiantes, de distintas edades, que cursaban nivel básico en alguna de las modalidades de educación para adultos que se imparte en México, reportando que sólo cinco sujetos alcanzan los tres primeros niveles de Curcio, realizando una lectura completa y adecuada de la tabla de frecuencias y de la gráfica de líneas; cabe destacar que ambas representaciones contenían la misma información, como también se considera en nuestro estudio.

En Batanero, Arteaga y Ruiz (2010) se analizan los gráficos producidos por 93 estudiantes de formación profesional básica, observando errores en su construcción; además, se evalúan los niveles de lectura, reportando que pocos participantes alcanzan el nivel más alto. Arteaga (2011), en su tesis doctoral, realiza un estudio con 207 estudiantes que cursaban el segundo año de formación docente en educación primaria, indicando que la mayoría alcanza los primeros tres niveles de lectura, pero pocos llegan al nivel superior. Rodríguez y Sandoval (2012) analizan la construcción y lectura de tablas y gráficas estadísticas por 44 estudiantes en formación inicial docente y por 47 profesores de educación básica en ejercicio, encontrando que ambas muestras de participantes presentan dificultades en la lectura de estas representaciones, alcanzando el nivel 1 según la clasificación de Curcio, es decir, muestran habilidades básicas o iniciales del análisis de datos.

Díaz-Levicoy, Sepúlveda, Vásquez y Opazo (2016) reportan los niveles de lectura de tablas estadísticas que alcanzan 121 estudiantes para maestras de educación infantil, observando que la mayoría de las respuestas, a preguntas relacionadas con lectura de las tablas, los niveles “leer los datos” y “leer entre los datos”, se asociaban a la lectura literal de información y al desarrollo de procesos matemáticos sencillos. Gea, Arteaga y Cañadas (2017) evalúan la interpretación de tres gráficos estadísticos por 65 estudiantes de máster de formación para profesorado de educación secundaria y bachillerato, encontrando que la mayoría de las interpretaciones son correctas, sin embargo, se pertenecen a un nivel inferior o intermedio de lectura. Por su parte, García-García, López y Arredondo (2018) analizan las interpretaciones de 36 estudiantes universitarios de una tabla y una gráfica circular, encontrando que la mayoría presenta el nivel intermedio de lectura de Curcio; y sólo alrededor de la cuarta parte de los participantes alcanza niveles superiores en la lectura de ambas representaciones.

Los estudios anteriores nos muestran que la mayoría de los estudiantes presentan un nivel de lectura inferior o intermedio, es decir, pueden describir el contenido de la tabla o gráfica, realizar comparaciones de datos o cálculos matemáticos con ellos, o bien, dar alguna predicción; sin embargo, son muy pocos los jóvenes que integran el contexto en sus interpretaciones. En este estudio se pretende presentar una distinción en la valoración crítica en la interpretación del estudiante cuando lee la misma información estadística representada en una tabla y una gráfica de líneas.

III. Fundamentos del estudio

Nuestro trabajo se fundamenta bajo dos marcos de referencia que establecen niveles de lectura para gráficas estadísticas, con el objetivo de analizar la interpretación de información representada en una tabla y una gráfica de líneas por estudiantes de licenciatura. Para ello en este trabajo se



retoman las jerarquías de Curcio (1989) y Aoyama (2007), para presentar una propuesta de red de relaciones. El uso de estas jerarquías responde a que siguen estando presentes en la mayoría de las investigaciones de educación estadística, pues se han mostrado su vasto potencial. Sin embargo, se han hecho modificaciones y adaptaciones que buscan ampliar el espectro de análisis como evidencian diferentes investigaciones (Batanero, Díaz-Levicoy y Arteaga, 2018; Díaz-Levicoy, Arteaga y Batanero, 2017; Gea, Arteaga y Cañadas, 2017).

Curcio (1989) postula tres niveles para clasificar la evidencia de la comprensión gráfica de los estudiantes:

- *Nivel 1: Leer los datos.* Lectura de la información representada en el gráfico –el lector responde preguntas explícitas para las cuales la respuesta está en el gráfico–.
- *Nivel 2: Leer dentro de los datos.* Interpretación e integración de la información que se presenta en un gráfico –el lector completa al menos un paso de inferencia lógica o pragmática para responder preguntas–.
- *Nivel 3: Leer más allá de los datos.* Extender, predecir o inferir de la representación para contestar preguntas –el lector da una respuesta que requiere conocimiento previo sobre una pregunta que está relacionada con el gráfico–.

Friel, Curcio y Bright (2001) definen un nuevo nivel superior ampliando la clasificación anterior:

- *Nivel 4: Leer detrás de los datos.* Valoración crítica de la información representada en el gráfico –el lector integra su conocimiento del contexto para dar conclusiones, se cuestiona sobre la forma en que fueron obtenidos los datos–.

Inicialmente, Curcio y colaboradores establecieron estos niveles para gráficas; no obstante, Batanero (2001) menciona que pueden aplicarse para la lectura de tablas, tal como Eudave (2009) lo realiza en su estudio sobre niveles de comprensión de información con estudiantes, jóvenes y adultos, de educación básica.

Por su parte, Aoyama (2007) identifica cinco niveles diferentes de interpretación de gráficas:

- *Nivel 1: Idiosincrático.* Los estudiantes en este nivel no pueden leer valores o tendencias en las gráficas, proporcionan valores incorrectos al leer la gráfica o dejan de contestar la pregunta. No pueden conectar algunas características extraídas de los gráficos con el contexto. Por lo general, sus respuestas se basan en su limitada experiencia individual o en perspectivas personales.
- *Nivel 2: Lectura básica de la gráfica.* Los estudiantes de este nivel pueden leer valores y tendencias en gráficos, pero no pueden explicar los significados contextuales de las tendencias o características que ven, ni contextualizar los eventos presentados.
- *Nivel 3: Racional/Literal.* Los estudiantes de este nivel pueden leer valores y tendencias particulares. Explican los significados contextuales literalmente en términos de los rasgos mostrados en un gráfico, pero no pueden sugerir ninguna interpretación alternativa; sólo utilizan los significados presentados. Por lo general, no pueden cuestionar la fiabilidad de la información.



- *Nivel 4: Crítico.* Los estudiantes de este nivel pueden leer gráficos y comprender las variables contextuales presentadas. Más aún, pueden evaluar la fiabilidad del significado contextual descrito en el gráfico y cuestionar la información presentada.
- *Nivel 5: Elaboración de hipótesis y modelos.* Los estudiantes de este nivel pueden leer gráficos, y aceptar y evaluar alguna información presentada. Pueden formar sus propias hipótesis o modelos explicativos. En este nivel, los estudiantes actúan como investigadores y no sólo como receptores de información.

Cuando surge la necesidad de considerar la valoración crítica de la información, los tres niveles superiores de Aoyama (2007) pueden considerarse como subcategorías del nivel 4 de Friel, Curcio y Bright (2001).

IV. Método

Nuestro estudio es tipo descriptivo-cualitativo, ya que se enfoca en analizar las interpretaciones de estudiantes de licenciatura cuando realizan la lectura de información estadística representada en una tabla y una gráfica de líneas.

Sujetos

La muestra se compone de 36 estudiantes que cursaban el primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, y el profesor titular quien colaboró con la aplicación de los instrumentos. Los estudiantes, cuyas edades oscilaban entre 18 y 31 años, no recibieron información alguna del propósito del estudio.

Instrumentos

Dos tareas de lectura de información estadística representada en una tabla y una gráfica de líneas. Como rasgo particular, ambas representaciones contienen los mismos datos: la cantidad de matrícula escolar (número de estudiantes inscritos) en los niveles educativos básicos en México (preescolar, primaria, secundaria) durante tres ciclos escolares (2012/2013, 2013/2014, 2014/2015). En las indicaciones de las tareas, se les solicitó a los estudiantes leer e interpretar la información estadística, comparar datos, observar tendencias, generar conclusiones y realizar críticas; plasmando sus interpretaciones en hojas de trabajo.

El tipo de tareas elegidas para este trabajo se acercan al análisis que en su práctica profesional se deben enfrentar los profesores en México, esto al cierre de un ciclo escolar en su institución de trabajo; también se aclara que los datos son reales, pero la elaboración de la gráfica es propia y que esta busca englobar las características que exponen comúnmente los informes de las escuelas y en los medios de comunicación, en donde generalmente no es un experto en estadística quien hace este tipo de gráficos, así que identificamos que se hace por momentos, un abuso semiótico de algunos referentes presentes en esta. Esto de antemano nos lleva a considerar en las conclusiones la anexión de posibles limitaciones de este estudio.

Además, se consideró abordar las tareas sin preguntas, de manera abierta, debido a que comúnmente el estudiante se enfrenta de esta manera a la interpretación de información estadística presentada por diversos medios de comunicación en tablas o gráficas. En la Figura 1 se presentan ambas tareas del estudio:

Tarea 1. Lectura de la tabla

Matrícula escolar por nivel educativo						
Nivel educativo	Ciclo escolar					
	2012/2013		2013/2014		2014/2015	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
Preescolar	2,405,057	2,356,409	2,419,755	2,367,201	2,428,623	2,375,442
Primaria	7,552,382	7,237,024	7,444,001	7,136,378	7,322,782	7,028,255
Secundaria	3,201,483	3,138,749	3,317,740	3,254,118	3,444,599	3,380,447

Fuente: SEP. Sistema Interactivo de Consulta de Estadística Educativa.

Tarea 2. Lectura de la gráfica de líneas

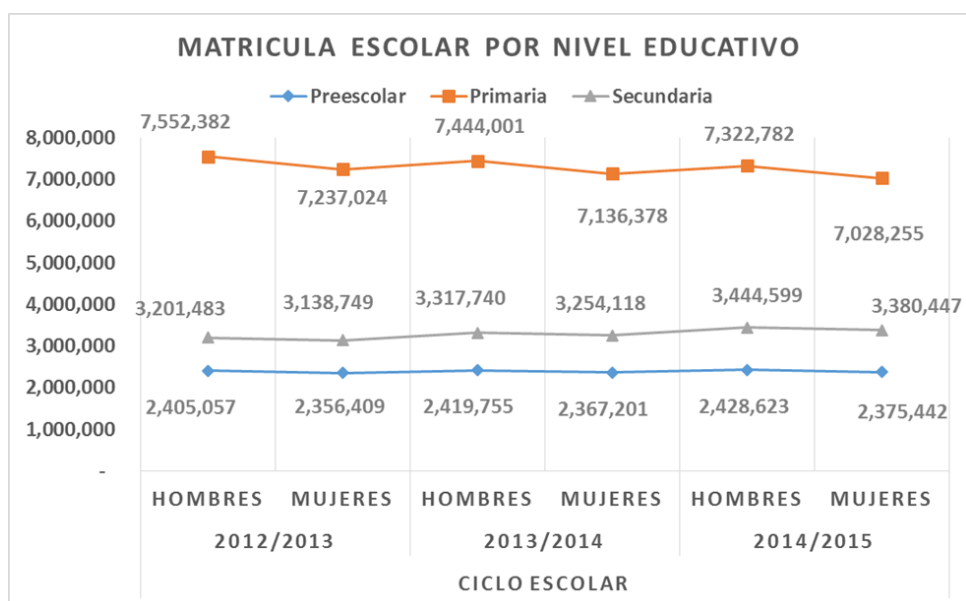


Figura 1. Tareas del estudio

Procedimiento de aplicación

Cada tarea se aplicó en una sesión de 20 minutos. En la primera sesión, los estudiantes realizaron la lectura de la tabla; y en la segunda, una semana después, la lectura de la gráfica de líneas. Se consideraron dos sesiones, con objetivo de evitar la influencia de la lectura de la tabla sobre la del gráfico, e identificar si el tipo de representación -con los mismos datos estadísticos- promueve niveles superiores de lectura en los estudiantes.

Procedimiento de análisis de datos

El proceso de análisis de datos es de tipo cualitativo; consiste en una revisión sistemática de todas de las interpretaciones de los estudiantes para formar un sistema de categorías y luego clasificarlas en los niveles de lectura de Curcio y colaboradores (*leer los datos, leer dentro de los datos, leer*

más allá de los datos, leer detrás de los datos), considerando la jerarquía de Aoyama para el nivel 4 (*racional/literal, crítico, elaboración de hipótesis y modelos*), en función de los elementos o rasgos característicos que presentan. Se definen subcategorías para cada nivel de lectura, obteniendo una nueva jerarquía.

V. Resultados

A continuación, se presentan los resultados del análisis de las interpretaciones de ambas tareas: primero se incluye una tabla que exhibe la jerarquía obtenida con el tipo de respuestas que caracterizan a cada nivel; después, ejemplos representativos de cada subcategoría; posteriormente, se muestran de manera sucinta los resultados en una tabla de frecuencias; y finalmente, la clasificación de las lecturas de manera conjunta a través de una tabla de doble entrada.

En la Tabla 1 se presenta la jerarquía obtenida con el análisis de los resultados, que incluye los niveles de lectura expuestos en los fundamentos del estudio, y las subcategorías que la forman, así como la descripción de la respuesta típica escrita acerca de elementos característicos encontrados.

Tabla 1. Jerarquía obtenida con los datos del estudio

Nivel de lectura	Subcategoría	Descripción
Nivel 0. Lectura idiosincrática (N0)	Perspectiva personal (PP)	No se leen valores o tendencias; la lectura se basa en la experiencia individual o perspectivas personales de lector, sin conectar características extraídas de la tabla o gráfica de líneas con el contexto.
Nivel 1. Leer los datos (N1)	Título (T)	Se lee el título de la tabla o gráfica de líneas, sin realizar interpretaciones ni cálculos adicionales.
	Título y variable(s) (TV)	Se lee el título y la(s) variable(s) de la tabla o gráfica de líneas, sin realizar interpretaciones ni cálculos adicionales.
Nivel 2. Leer dentro de los datos (N2)	Comparación horizontal/fila (H/F)	Se presentan comparaciones con los datos: en la gráfica de líneas de manera horizontal, y en la tabla por filas, tomando como base la variable ciclo escolar.
	Comparación vertical/columna (V/C)	Se presentan comparaciones con los datos: en la gráfica de líneas de manera vertical, y en la tabla por columnas, tomando como base la variable nivel educativo.
	Ambas comparaciones (A)	Se presentan comparaciones con los datos de ambas maneras.
Nivel 3: Leer más allá de los datos (N3)	Predicción de tendencia (PT)	Se presentan tendencias del comportamiento de los datos, considerando la información que se puede observar.
	Predicción de valores (PV)	Se presentan predicciones de valores, considerando la información que se puede observar.
Nivel 4: Leer detrás de los datos (N4)	Racional (R)	Se leen valores, se realizan comparaciones, se detectan tendencias particulares, y se explican significados contextuales literalmente en términos de las características

	que muestra la tabla o gráfica de líneas, pero no se sugieren interpretaciones alternativas.
Hipotético (H)	Se lee, acepta y evalúa la información representada en la tabla o gráfica, formando hipótesis explicativas.

Enseguida, en la Tabla 2, se presentan ejemplos de cada nivel y subcategoría definidas anteriormente.

Tabla 2. Ejemplos de lecturas clasificadas por nivel y subcategoría

Nivel de lectura	Categoría	Tipo de representación y respuesta del estudiante a su lectura	Descripción
Nivel 0. Lectura idiosincrática (N0)	Perspectiva personal (PP)	Gráfica de líneas: <i>La mayoría de los adolescentes ya no quieren estudiar, incluso hasta lo pequeños ya no quieren saber de escuelas, por la situación de problemas de drogas u otros tipos de problemas, en su mayor parte las escuelas hay pocos estudiantes.</i>	El estudiante no conecta la información de la gráfica de líneas en su lectura; esta sólo se basa en su perspectiva personal.
Nivel 1. Leer los datos (N1)	Título (T)	Gráfica de líneas: <i>En esta grafica se observa el número de alumnos (matrícula escolar) que asisten según el nivel educativo.</i>	El estudiante describe el contenido de la tabla sin interpretarla; sólo observa el título.
	Título y variable(s) (T-V)	Tabla: <i>Aquí se puede ver que en los años 2012/2015 de cómo esta ordenada la matrícula escolar en cada nivel educativo y tiene sus propios matriculados así mismo los otros niveles y es la tabla que se lleva a cabo la cifra de control.</i>	El estudiante describe el contenido de la tabla sin interpretarla; observa el título y la variable ciclo escolar.
Nivel 2. Leer dentro de los datos (N2)	Comparación horizontal/fila (H/F)	Gráfica de líneas: <i>En nivel preescolar, el número de niños en el país se mantiene casi estable. En nivel primaria, la población de niños disminuye cada vez más. En nivel secundaria, la población de jóvenes aumenta.</i>	El estudiante realiza comparaciones entre los datos de la matrícula, observando variaciones por nivel educativo; la comparación la realiza de manera horizontal tomando como base el ciclo escolar.
	Comparación vertical/columna (V/C)	Tabla: <i>Se muestra que en los ciclos escolares, en el nivel secundaria los alumnos son menos que en</i>	El estudiante realiza comparaciones entre los datos por columnas, identifica que un nivel educativo tiene una

	Ambas comparaciones (A)	<p><i>primaria.</i></p> <p>Gráfica de líneas: <i>La población femenina disminuye por año en primaria. La población de primaria es la mayor. La población de preescolar es menor.</i></p>	<p>mayor matrícula que otro.</p> <p>El estudiante realiza comparaciones de ambas maneras: horizontal, al indicar que disminuye matrícula femenina de primaria por año escolar, y vertical, a mencionar que la matrícula de cierto nivel es mayor o menor.</p>
Nivel 3: Leer más allá de los datos (N3)	Predicción de tendencia (PT)	<p>Tabla: <i>En el ciclo 2013 – 2014, en el nivel educativo primaria se observa que bajo tanto en hombres como mujeres, si sigue estando así los próximos años será menos y así sucesivamente. Hubo un aumento en el nivel secundaria del 2012 a 2015, aumentaron el número de personas estudiando.</i></p>	<p>El estudiante proporciona una tendencia del comportamiento de los datos referentes a la matrícula del nivel primaria; también, menciona variables involucradas en la gráfica y realiza una comparación al identificar el aumento de la cantidad de alumnos en nivel secundaria.</p>
	Predicción de valores (PV)	<p>Gráfica de líneas: <i>Nos muestra una gráfica de matrículas escolares por nivel educativo. Notamos que hay menos y aun disminuirá un 3.7% por año la matrícula a nivel primaria, también nos da a conocer que son muy poca la matrícula a nivel preescolar y secundaria.</i></p>	<p>El estudiante realiza una predicción del porcentaje que disminuirá la matrícula del nivel primaria por ciclo escolar; además, menciona una de las variables involucradas en la gráfica y realiza una comparación al identificar los niveles con menor cantidad de alumnos.</p>
Nivel 4: Leer detrás de los datos (N4)	Racional (R)	<p>Gráfica de líneas: <i>Para nivel primaria se observa una descendencia de la cantidad de matrículas por lo que concluyo que el alumnado deja la escuela. Para el nivel secundaria se observa que la cantidad de matrículas aumenta por lo que deduzco que el alumnado vuelve a ascender a la misma cantidad.</i></p>	<p>El estudiante realiza comparaciones, por ejemplo indica que la matrícula de nivel primaria aumenta, detecta una tendencia de los datos de nivel secundaria, y proporciona una conclusión (significado contextual) en términos de una característica observada en la gráfica.</p>
	Hipotético (H)	<p>Tabla: <i>En el nivel primaria los estudiantes empiezan a darse de baja durante los años, ya sea por la economía u otras cosas, en el nivel secundaria la cantidad de alumnos aumenta</i></p>	<p>El estudiante proporciona hipótesis sobre el comportamiento de los datos; es decir, justifica el por qué la matrícula de secundaria es menor que la de primaria.</p>

poco y vemos que es menos que en primaria ya que los jóvenes ya no quieren estudiar o por recursos.

Una vez detallada la manera en cómo se realizó la clasificación, en la Tabla 3 se exponen las frecuencias de las interpretaciones que fueron clasificadas en cada nivel y subcategoría.

Tabla 3. Frecuencia de respuestas por subcategoría

Tipo de representación	N0		N1		N2		N3		N4		Total
	PP	T	T-V	H/F	V/C	A	PT	PV	R	H	
Gráfica	3	1	0	10	4	8	0	1	3	6	36
Total	3	1			22		1		9		
Tabla	3	1	1	6	6	10	2	0	1	6	36
Total	3	2			22		2		7		

Las frecuencias de respuestas nos indican que la mayoría de los participantes (22 en cada caso) alcanzan el nivel 2, leer dentro de los datos, al realizar comparaciones con los datos, primordialmente de manera horizontal (en la gráfica) o por ambas formas (en la tabla). El nivel 4, leer detrás de los datos, es el segundo con mayor frecuencia (9 y 7 en la lectura de la gráfica y tabla, respectivamente), los estudiantes integran la información estadística con el contexto formando hipótesis explicativas o proporcionando significados contextuales. Pocas son las respuestas clasificadas en los otros niveles; sin embargo, es preocupante identificar interpretaciones basadas en experiencias, o perspectivas, esencialmente personales, sin considerar la información estadística representada.

En la Tabla 4 se organizan, analizan y clasifican las interpretaciones de los estudiantes a las dos tareas de lectura, de manera conjunta, considerando los niveles de lectura expuestos en la tabla 1.

Tabla 4. Niveles de lectura alcanzados en cada actividad de manera conjunta

Lectura		Tabla					Total
		Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	
Gráfica de líneas	Nivel 0	3	0	0	0	0	3
	Nivel 1	0	0	1	0	0	1
	Nivel 2	0	1	18	2	1	22
	Nivel 3	0	1	0	0	0	1
	Nivel 4	0	0	3	0	6	9
Total		3	2	22	2	7	36

Las frecuencias de respuestas de ambas tareas organizadas de manera conjunta nos indican que la mayoría de los participantes fueron consistentes en los niveles de lecturas que presentan: 18 alcanzan el nivel intermedio 2, 6 el nivel superior 4, y 3 el nivel inferior 0. Además, podemos identificar que la lectura de la gráfica de líneas, en este estudio, mostro una mayor frecuencia en



el nivel superior 4.

VI. Conclusiones y limitaciones del estudio

Los resultados arrojados por este estudio muestran que los estudiantes se quedan en el nivel 2 de lectura, leer dentro de los datos, correspondiente a una comparación de datos para ambos casos propuestos, lo que significa que los estudiantes solo son capaces de operar horizontal o verticalmente las frecuencias de las representaciones de la tabla y la gráfica. Esto es una situación preocupante debido a que la lectura de estas representaciones es una habilidad que se considera debe poseer un ciudadano crítico y reflexivo del mundo. Este tipo de resultados coinciden con investigaciones como las citadas en los antecedentes; sin embargo, destacamos una distinción en la valoración crítica dentro de las interpretaciones de los estudiantes apoyándonos de los niveles jerárquicos de Aoyama.

Otra observación que tenemos, es que el tipo de representación (tabla o gráfica con los mismos datos estadísticos) no influyó de manera significativa en la mejora de los resultados, es decir, en favorecer en los estudiantes alcanzar niveles superiores de lectura.

El tipo de error más frecuente en las lecturas de los estudiantes es aquel que se relaciona a la sobre valoración que dan estos a la frecuencia de la variable, en otras palabras, estos establecen conclusiones o predicciones apoyados en el valor de la variable. Este trabajo deja un evento que consideramos interesante analizar con mayor profundidad, que es el caso del contexto del problema; que si bien es conocido por los estudiantes, no es algo tan familiar como el reportado en García-García, López y Arredondo (2018), donde el contexto (tendencias electorales en las pasadas elecciones en México) influyó para que los estudiantes presentaran rasgos de niveles superiores de lectura.

Por otro lado, identificamos dos aspectos que han limitado el presente trabajo. Uno de ellos se puso de manifiesto en los elementos del gráfico de líneas, ya que al sólo poseer tres periodos de tiempo, obstaculiza identificar de manera nítida tendencias presentes en los datos. El segundo aspecto corresponde al abuso de líneas y la gran cantidad de datos numéricos sobre la imagen, lo cual dificulta la lectura e interpretación de la gráfica.

Agradecimientos

Este trabajo se ha llevado a cabo en el contexto del Proyecto de Mejoramiento Institucional PMI-ULA: 1503, bajo la tutela de los Postgrados en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos, Chile.

Bibliografía

- [1] Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2 (3), 298-318.
- [2] Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis de Doctorado. Universidad de Granada, España.



- [3] Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 141-154.
- [4] Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 83, 7-18.
- [5] Batanero, C., Díaz-Levicoy, D. y Arteaga, P. (2018). Evaluación del nivel de lectura y la traducción de pictogramas por estudiantes chilenos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 14, 49-65.
- [6] Burgess, T. (2002). Investigating the “data sense” of preservice teachers. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6). Cape Town: IASE.
- [7] Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: NCTM.
- [8] Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2017). Lectura de pictogramas por estudiantes chilenos de Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 217-226). Zaragoza: SEIEM.
- [9] Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y López-Martín, M. (2015). Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de educación primaria chilena. *Educação Matemática Pesquisa*, 17 (4), 715-739.
- [10] Díaz-Levicoy, D., Sepúlveda, A., Vásquez, C. y Opazo, M. (2016). Lectura de tablas estadísticas por futuras maestras de Educación Infantil. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3), 1099-1115.
- [11] Eudave, D. (2009). Niveles de comprensión de información y gráficas estadísticas en estudiantes de centros de educación básica para jóvenes y adultos de México. *Educación Matemática*, 21 (2), 5-37.
- [12] Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, 32 (2), 124-158.
- [13] Gal, I. (2002). Adult’s statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70 (1), 1-25.
- [14] García-García, J.I., López, C y Arredondo, E-H. (2018). Interpretación de una tabla y una gráfica circular por estudiantes de licenciatura. *Tangram, Revista de Educação Matemática*, 1 (3), 24-39.
- [15] Gea, M., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2017). Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de Educación Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 12, 19-37.
- [16] Monteiro, C. y Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2 (3), 188-207.
- [17] Pedró, F. (2012). Deconstruyendo los puentes de PISA: del análisis de resultados a la prescripción política. *Revista Española de Educación Comparada*, 19, 139-174.
- [18] Rodríguez, F. y Sandoval, P. (2012). Habilidades de codificación y descodificación de tablas y gráficos estadísticos: un estudio comparativo en profesores y alumnos de pedagogía en enseñanza básica. *Avaliação: Revista de la avaliação da Educação Superior*, 17 (1), 207-235.