TEC | Tecnológico de Costa Rica

mep Ministerio de Educación Pública

edepa 5

Memorias

V Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

Cartago, Costa Rica, 7, 8 y 9 de diciembre de 2016

ISBN: 978-9968-641-41-8

Editores: Greivin Ramírez Arce y Jennany Ortiz Mata.

PRESENTACIÓN

La Escuela de Matemática del Tecnológico de Costa Rica (TEC) tiene el agrado de invitar a los docentes de primaria, secundaria y de universidad a la Semana EDEPA 2016 a realizarse del 5 al 9 de diciembre de 2016 en Costa Rica, sede del TEC ubicada en Cartago. En esta semana se realizará el **V Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos** (V EDEPA) los días 7,8 y 9 de diciembre, y los días anteriores (5 y 6 de diciembre) se realizarán algunas actividades previas a este evento.

El propósito central del evento es rescatar, a través de conferencias, talleres, ponencias, reportes de investigación y charlas, entre otras actividades, la importancia que tienen la enseñanza de estos tópicos en un mundo cada vez más competitivo e informatizado. Esperamos contar con aportes pedagógicos sobre probabilidad y estadística, particularmente relacionados con los temas propuestos en los programas del Ministerio de Educación de Costa Rica, y propuestas que tengan que ver con el incipiente campo de la didáctica del análisis de datos.

PRESENTACIÓN

ACTIVIDADES DESTACADAS

- Conversatorio y charla pre-encuentro

(lunes 5 de diciembre):

Trayectorias hipotéticas de aprendizaje y las ideas fundamentales de la Estadística.

Dr. Ernesto Sánchez Sánchez. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México.

- Conversatorio y charla pre-encuentro

(martes 6 de diciembre):

Reflexiones sobre las gráficas en la clase de estadística

Dra. Carolina Carvalho. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal.

- Conferencia inaugural del V EDEPA

(miércoles 7 de diciembre):

Las grandes ideas del pensamiento probabilístico y su enseñanza en un ambiente rico en tecnología

Dr. Ernesto Sánchez Sánchez. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México.

- **Rol de la Tecnología y Programación Computacional en la Educación Estadística.**

Dr. Jesús Humberto Cuevas Acosta

Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México

PRESENTACIÓN

- Conferencia de Clausura del V EDEPA:

Elección de las tareas para las clases Estadística: ¿Es una labor fácil?

Dra. Carolina Carvalho. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal.

- Taller del V EDEPA:

El uso de Fathom en la elaboración de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje

Dr. Ernesto Sánchez Sánchez. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México.

- Ponencia del V EDEPA:

Feedback del profesor en las clases estadística con recursos tecnológicos

Dra. Carolina Carvalho. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal.

OBJETIVOS GENERALES

1. Evidenciar los esfuerzos realizados para el mejoramiento de la enseñanza de la estadística, probabilidad y análisis de datos, en primaria, secundaria y nivel universitario.

2. Incentivar al participante a realizar investigaciones cuantitativas utilizando la estadística, la probabilidad y el análisis de datos.

3. Constituir un espacio de crítica, debate y comunicación sobre el estado actual y desarrollo reciente de la investigación en Didáctica de la Estadística, de la Probabilidad y del Análisis de Datos a nivel nacional e internacional.

4. Establecer un grupo de trabajo interesado en fomentar el mejoramiento de la enseñanza de la estadística y probabilidad en primaria y secundaría.

PROGRAMA PARA LA SEMANA DEL V EDEPA

	Pre-EDEPA		V EDEPA		
	lunes 5 de diciembre	martes 6 de diciembre	miércoles 7 de diciembre	jueves 8 de diciembre	viernes 9 de diciembre
8:00 am a 8:50 am			Inscripción y desayuno	Conferencia	Conferencia
9 am a 9:30 am	Charla y conversatorio	Charla y conversatorio		Ponencias	Ponencias
9:40 am a 10:10 am			Inaguración		
10:10 am a 10:40 am			Conferencia Inaugural	Refrigerio	Refrigerio
10:40 am a 11:10 am				Ponencias	Conferencias paralelas/ ponencias
11:20 am a 11:50 am			Ponencias	Actividades de integración	
12:00 md a 1:30 am	Almuerzo				Almuerzo
1:30 pm a 3:00 pm	Inscripción de extranjeros	Libre	Talleres		Mesa redonda
3:00 pm a 3:30 pm			Refrigerio		Refrigerio
3:30 pm a 5:00 pm			Talleres (continuación)		Conferencia de Clausura (entrega de certificados)

CONFERENCIAS

	Autores	País	Título
C1	Carolina Carvalho	Portugal	Reflexiones sobre las gráficas en las clases de estadística
C2	Sergio Hernández González	México	La Profesión Misteriosa... La Estadística
C3	Jesús Salinas Herrera y Silvia Mayén Galicia	México	Las actitudes hacia la estadística en estudiantes mexicanos de bachillerato
C4	Ernesto Alonso Sánchez Sánchez	México	Trayectoria hipotéticas de aprendizaje y las ideas fundamentales de la Estadística
C5	Ernesto Alonso Sánchez Sánchez	México	Las grandes ideas del pensamiento probabilístico y su enseñanza en un ambiente rico en tecnología
C7	Jesús Humberto Cuevas Acosta	México	Metodología para implementar la investigación reproducible en educación
C8	Carolina Carvalho	Portugal	Elija las tareas para las clases estadísticas ¿Una tarea fácil?
C9	Edwin Chaves Esquivel	Costa Rica	Resolución de problemas en estadística según los programas del MEP

PONENCIAS

	Autores	País	Título
PO1	Diego Solís, Manuel Chaves, Jerson Valverde	Costa Rica	El azar: el gran invento del ser humano
P02	Giovanni Sanabria B., Félix Núñez V.	Costa Rica	La probabilidad como elemento orientador de la toma de decisiones
P03	Tannia Moreira, Vanessa Smith, Eiliana Montero, José Zamora	Costa Rica	Relación entre estereotipos de género y el rendimiento en matemáticas: Un estudio comparativo entre jóvenes de secundaria y universitarias
P04	Randall Alberto Brenes Gómez	Costa Rica	La Estadística y la Probabilidad en el Deporte
P05	Belén Giacomone, Danilo Díaz-Levicoy, Juan D. Godino	España - Chile	Análisis ontosemiótico de tareas que involucran gráficos estadísticos en Educación Primaria
P06	Danilo Díaz-Levicoy, Pedro Arteaga, Carmen Batanero	España - Chile	Investigaciones sobre gráficos estadísticos en Educación Primaria: revisión de la literatura
PO8	Dicleny Castro Carvajal, John Jairo Zabala	Colombia	Sobre la Interpretación de las Medidas de Variabilidad
P09	Rafael Parraguez, María Gea, Danilo Díaz, Carmen Batanero	España - Chile	¿Conectan los futuros profesores las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad?
P10	Giovanni Sanabria Brenes	Costa Rica	Las distribuciones para objetos indistinguibles
P11	Claudia Vásquez, Nataly Pincheira, Danilo Díaz	Chile	Exigencia Cognitiva De Las Tareas Sobre Probabilidad En El Currículo De Educación Primaria

PONENCIAS

	Autores	País	Título
P13	Bianca Ruiz Hernández	México	Emergencia de pensamiento estadístico a partir de una actividad de diseño de experimentos
P14	Luis A. Gómez Rodríguez	Costa Rica	IDEA - Archivo de intercambio internacional de datos para Estadística
P15	Pedro A. Ramos Alberto, Ramon Aristides Paz Sanchez	El Salvador	Experiencias de la Aplicación de la Estadística en la Elaboración de Proyectos en la Investigación Educativa, El Salvador, 2015
P16	Leonardo Moreno Romero	Uruguay	Contextualizando la Estadística por Medio del Deporte
P17	Alejandra Alfaro Barquero, Sonia Chinchilla Brenes	Costa Rica	Diseño de una prueba vocacional para estudiantes de las Ingenierías en Construcción, Diseño Industrial y Producción Industrial en el ITCR.
P18	Pedro Armando Ramos Alberto	El Salvador	Estudio Estadístico sobre la aplicación de la Responsabilidad Social de la Empresa (RSE) en las industrias textiles; 4LEAGUE, HILASAL, JC SEWING SUPPLY, BCTC, LINDOTEX, BROOKLYN, El Salvador, 2015
P19	Yuliana Mora Cedeño	Costa Rica	Calificación de las Carreras del Tecnológico de Costa Rica según Estudiantes Graduados: Una Aplicación de Análisis de Factores
P20	Greivin Ramírez Arce, Kendall E. Rodríguez	Costa Rica	Simulación de variables aleatorias continuas y el teorema del límite central
P21	Carolina Carvalho, Carlos Monteiro, Maria Niedja	Portugal	Feedback del profesor en las clases de estadística con recursos tecnológicos
P22	Félix Núñez Vanegas, Giovanni Sanabria B.	Costa Rica	La dimensión del control en la regla producto en problemas de conteo
P23	Felipe Fernandez , Luisa Andrade, Ingrith Álvarez	Colombia	Panorama de investigación en Educación Estadística a partir de trabajos doctorales

TALLERES

	Autores	País	Título
T01	Adriana Solís Arguedas, Sandra Schmidt Quesada	Costa Rica	Resolución de problemas de estadística y probabilidad para primaria
T02	Carlos E. Guillén Pérez, Karina P. González Vargas	Costa Rica	Tuva Lab: Una plataforma amigable para aprender estadística descriptiva
T03	Gabriel Mena Cantero, Andrea Navarro Agüero	Costa Rica	Probabilidad, más que solo suerte
T04	Mario Alberto Marín Sánchez	Costa Rica	Uso de Ecuaciones estructurales en el análisis de relaciones causales entre variables latentes
T06	Jesús Salinas Herrera	México	La historia de la ciencia como recurso didáctico para la enseñanza de la probabilidad y la estadística
T07	Luis D. Zamora Grajal, Carlos Albenda Solís	Costa Rica	Actividades computacionales para probabilidad en GeoGebra según los nuevos programas del MEP
T08	Ernesto Alonso Sánchez Sánchez	México	El uso de Fathom en la elaboración de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje
T09	Jorge Arroyo , Jose Andrey Zamora Araya	Costa Rica	Edición de texto dinámicos con Látex y R
T10	Alexander Borbón Alpízar, Grace D. Calderón Prado	Costa Rica	Uso de los formularios de Google para recopilación de información estadística y su posterior análisis con Geogebra
T11	Luis E. Carrera, Jessica Navarro, Reiman Acuña C.	Costa Rica	Taller de resolución y adaptación de ejercicios de probabilidad en el ciclo diversificado
T12	Welman Rosa Alvarado	El Salvdor	Taller especializado de Risk Simulator para la Medición del Riesgo Crediticio en Entidades Bancarias.

TALLERES

	Autores	País	Título
T13	Nazarelle Rojas Machado Carmen Hernández López	Costa Rica	Propuesta para la enseñanza de probabilidad condicional y eventos independientes mediante el uso de paradojas
T14	Johana Gómez, Luis E. Ramírez, Marisol Solano	Costa Rica	Propuesta didáctica para enseñar principios de conteo en secundaria
T15	Adriana Arias, Karen Mora, Andrés Delgado	Costa Rica	Propuesta didáctica, para la enseñanza de la regla de Laplace en secundaria
T16	Stefannie P. Vargas, María J. Zúñiga Morales	Costa Rica	Propuesta didáctica para comprender Regla de Bayes y Probabilidad Total.
T15	Emanuel Arias, Dayana Calderón, Jeison Esquivel	Costa Rica	Propuesta para enseñar probabilidad frecuencial y la ley de los grandes números en secundaria.
T16	Jesús Humberto Cuevas Acosta	México	Aplicación de una metodología de investigación reproducible en educación estadística

CONFERENCIAS

Reflexiones sobre las gráficas en las clases de estadística

Carolina Carvalho

Resumen

Las poblaciones de las sociedades modernas producen y consumen cifras. Y no sólo a los adultos, los niños también son productores y consumidores de datos. En estas sociedades una de las formas más comunes de hacer esto es utilizar gráficos. Un periódico impreso diario o en línea, un folleto publicitario, un artículo científico a menudo usan diferentes tipos de gráficos. En consecuencia, todos los ciudadanos a tomar diferentes tipos de decisiones necesitan saber cómo hacer frente a diferentes tipos de gráficos. En la escuela desarrollar habilidades para hacer frente a las cartas, y no sólo en las clases de matemáticas. En este estudio tuvo como objetivo revisar la literatura sobre gráficos y estadísticas. Se inicia con la descripción de cómo se construye el conocimiento sobre gráficos. A continuación, se presentan algunos resultados de la investigación que se está desarrollando en Portugal acerca de esta forma de representación y en última instancia se retiran implicaciones para el trabajo de los docentes en el aula.

LA PROFESIÓN MISTERIOSA… La Estadística

Sergio Hernández González

Resumen

Estando por Chile en el mes de mayo del año 2014, me puse a leer el periódico Las Últimas Noticias y dentro de la sección Empleo y Educación, me encontré con la siguiente noticia: "La profesión misteriosa: adivina dónde trabaja un estadístico", donde el reportero entrevistaba a dos egresados de la Universidad Católica de Valparaíso, para que dieran su punto de vista sobre lo que puede hacer un estadístico en su quehacer profesional. Además, dicho reportero hacía mención sobre los resultados del portal de empleo estadounidense CarrerCast.com, donde divulgaba el ranking de "los mejores trabajos del 2014", tomando en consideración la empleabilidad, ingresos y niveles de estrés, resultando sorprendente que eran los matemáticos y "sus primos" los estadísticos, los que están a la cabeza de ese listado. Me sorprendió tanto, que consulté la página y en verdad era cierto. Para el año 2015, volví a consultarla y seguía igual!!!!

Este año aparte de consultar la página, que por cierto es la hora donde no se han publicado los resultados, me di a la tarea de consultar una página que me diera información sobre ese mismo aspecto, pero de nuestro país, encontrando www.forbes.com.mx, donde aparece un estudio que detalla sobre "Las 5 carreras mejor (peor) pagadas en México", basado en un estudio que hizo una organización denominada ComparaCarrera y que intituló "¿Cómo escoger qué carrera estudiar?", que en resumen, los resultados obtenidos son: que es una carrera que tiene un salario por arriba del promedio, que cuesta poco dinero estudiarla, que tiene mucha ocupación y que tiene poca tasa de desempleo.

En esta conferencia se presentan y se comentan dichos resultados, además de que se da una Inducción a la Estadística, marcando como pauta la corriente ideológica del Falsacionismo, propuesto por Karl Raimun Pooper. Y por último se compara la labor que hace un Médico y un Estadístico, ya que ambos utilizan CÁLCULOS y GRÁFICAS, el primero para analizar, diagnosticar y dar un tratamiento médico a su paciente; y el segundo para analizar, visualizar y diagnosticar un procedimiento estadístico para los datos. Mostrando así que el quehacer del Estadístico no es tan misterioso como parece, sino algo normal como lo que hace un Médico, labor que todo mundo conoce!!!!

Las actitudes hacia la estadística en estudiantes mexicanos de bachillerato

Jesús Salinas Herrera, Silvia Azucena Mayén Galicia

Resumen

En el campo de la investigación de la educación estadística, empiezan a tomar fuerza los estudios relacionados con los aspectos afectivos en el proceso de enseñanza aprendizaje de ésta. En países europeos y sudamericanos principalmente, han surgido estudios relacionados con las actitudes hacia la estadística tanto en profesores en formación como en servicio, sin embargo, en México, la investigación es incipiente. En este trabajo se presenta un estudio exploratorio en que se analizan las actitudes hacia la estadística que tienen estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México, que es un sistema de bachillerato en que el estudio de la estadística es de carácter optativo.

Para este análisis, aplicamos a una muestra de 277 estudiantes la Escala de Actitudes hacia la Estadística EAEE (Estrada, 2012), lo que ha permitido identificar sus actitudes en una etapa inicial. Los primeros resultados señalan una tendencia favorable y derivan de aquellos ítems que evalúan componentes de tipo social, cognitivo, afectivo y educativo.

Por otro lado, nos llama la atención que al ser la estadística una asignatura opcional en un sistema escolar mixto, son las mujeres quienes opten por estudiarla, ya que representan el doble o más de hombres que respondieron en cada centro escolar de la muestra, aunque en las puntuaciones medias del total no se encontraron diferencias significativas.

Otros resultados relevantes son el interés que mantienen los estudiantes por el aprendizaje de la estadística; reconocer la importancia y utilidad para su área de estudios y otras áreas del conocimiento, así como para la vida diaria.

En otro aspecto, también destaca que la falta de estudios previos de estadística en estos alumnos de bachillerato es consistente con los resultados que presentan investigadores de otros contextos. Pensamos que puede ser un elemento que determine una actitud favorable o desfavorable hacia la estadística.

Trayectorias hipotéticas de aprendizaje y las ideas fundamentales de la Estadística

Ernesto Alonso Sánchez Sánchez

Resumen

Las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje constituyen una propuesta innovadora para que el profesor elabore lecciones y actividades matemáticas para los estudiantes ¿Cómo utilizar este instrumento en el ámbito de la enseñanza de la Estadística? El primer paso consiste en identificar las ideas fundamentales de la Estadística. Esta identificación es una de las estrategias docentes para mejorar la enseñanza y para la construcción y desarrollo del currículo de cualquier campo disciplinar. En Estadística se han identificado 7: Datos, Variación, Distribución, Representación, Asociación y Modelación de relación entre dos variables (correlación), Modelos de probabilidad e Inferencia y muestreo. Para cada idea se debiera desarrollar al menos una trayectoria hipotética de aprendizaje.

Las grandes ideas del pensamiento probabilístico y su enseñanza en un ambiente rico en tecnología

Ernesto Alonso Sánchez Sánchez

Resumen

Se trata de destacar los rasgos que caracterizan el pensamiento probabilístico y lo distinguen del pensamiento matemático, rasgos que han sido inhibidos en el enfoque de la enseñanza tradicional de la materia que pone el énfasis en los procedimientos de cálculo y/o en la estructura formal de la probabilidad. Se trata de proponer algunos principios para elaborar actividades que incluyan y desarrollen las grandes ideas de la probabilidad sugeridas por Gal: Aleatoriedad, Variabilidad, Independencia y la relación Predicción/Incertidumbre. El papel de la tecnología, en particular del software Fathom, ha abierto la posibilidad real de que los estudiantes desarrollen su pensamiento probabilístico.

Metodología para Implementar la Investigación Reproducible en Educación

Jesús Humberto Cuevas Acosta

Resumen

Durante las últimas tres décadas se han incrementado las denuncias relacionadas con la veracidad de los resultados de investigación en distintas áreas de la ciencia y el desarrollo tecnológico, especialmente las que implican el uso de actividades experimentales. En consecuencia, han surgido iniciativas para promover la rigurosidad y probidad intelectual entre quienes efectúan actividades investigativas.

La reproducibilidad es uno de los cimientos básicos del método científico. Una investigación es reproducible si cumple al menos con tres principios fundamentales: [1] El método se describe de forma completa y detallada; [2] Los datos utilizados se ponen a disposición pública, y [3] El protocolo de depuración y tratamiento de los datos está documentado conforme a normas comúnmente aceptadas por comunidades epistémicas reconocidas.

En este documento se presentan los resultados de un estudio que tuvo como propósito evaluar una metodología para introducir la reproducibilidad de la investigación en el tratamiento de tópicos como análisis exploratorio de datos, estimación por intervalos, pruebas de hipótesis y regresión lineal simple y múltiple. En el estudio participaron 116 estudiantes de educación superior a los que se les condujo durante diez semanas a través de un modelo didáctico basado en la resolución de problemas e investigación dirigida.

Los resultados obtenidos señalan que: [1] La investigación reproducible es un medio que fomenta la honestidad intelectual; [2] La institución escolar proporciona un entorno fundamental para promover la investigación reproducible en la formación científica; [3] Es posible introducir métodos de reproducibilidad y herramientas de cómputo científico como mecanismo para evaluar aprendizajes. Se sugiere efectuar un estudio de carácter experimental que permita responder las siguientes interrogantes, a saber, ¿cuáles son los protocolos básicos para aplicar esta metodología en la enseñanza de la estadística en educación secundaria? ¿cuáles son las herramientas computacionales más adecuadas para implementar la investigación reproducible en este nivel educativo? y ¿qué programas de actualización, capacitación y formación es necesario crear para desarrollar las habilidades de los profesores en esta metodología?

Elija las tareas para las clases Estadísticas: ¿Una tarea fácil?

Carolina Carvalho

Resumen

En los últimos años la investigación en torno de la educación estadística ha mostrado cómo los estudiantes de diferentes niveles educativos construyen conceptos estadísticos y de cómo este aprendizaje no está exenta de dificultades. Cuando se analiza de cerca la mayor parte de esta investigación nos encontramos, por un lado, con la idea de que las tareas que realizan los estudiantes en clase parecen influir en muchas de sus actuaciones, ya sea en positivo o no. Por otro lado, con una realidad del aula donde las tareas que los estudiantes realizan apenas les permiten adquirir un conocimiento práctico traducido en normas aisladas de dominio y algoritmos que aprenden a través de la repetición y la rutina en lugar de un conocimiento relacional y significativa, es decir, el conocimiento que movilizará cada vez que nuevas situaciones requieren. En concreto, el objetivo principal de esta conferencia es discutir cómo las tareas elegidas por el maestro pueden contribuir al logro del estudiante, con base en los resultados generados por la investigación. Un segundo objetivo está anclado en el anterior refleja la urgencia de que esta elección no es sólo una tarea aislada de un maestro, pero de maestros que trabajan en colaboración.

Resolución de problemas en Estadística según los programas del MEP

Edwin Chaves Esquivel

Resumen

Se analizan los fundamentos teóricos que sustentan la enseñanza de la Estadística según los programas de estudios del MEP y se dan ejemplos concretos sobre algunas situaciones didácticas que podrían ser empleados para desarrollar en el aula integrando diferentes conocimientos y habilidades.

PONENCIAS

El azar: el gran invento del ser humano

Diego Solis, Manuel Chaves Quesada, Jerson Valverde Gamboa

Resumen

El azar tiene una serie de palabras que lo caracterizan. No todas esas palabras lo representan de una forma fiel:

- Suerte
- Manipulación
- Torpeza
- Robo
- Juicio de Dios
- Decisión
- Ingenuidad
- Milagro

Frente a la variedad de representaciones y usos semánticos, la duda alrededor del "azar" es: ¿existe una definición formal? En el caso de existir, ¿cuál es esa definición? ¿Es un concepto que merece ser definido? ¿Cuál es su origen?

El ser humano reconoce en el azar el poder de lo aleatorio, es por eso que existen múltiples ejemplos de su uso:

1. Lotería, cartas y dados.
2. Referente Bíblico (Túnica de Jesús).
3. Tradición Sueca (Repartición de tierra: Indivisible).

Muchos "deterministas" defienden que el azar puro no existe, ya que se utiliza mediante la manipulación humana. Eso genera una actitud psicológica (convención social) frente al reto aleatorio. En general, toda actividad aleatoria sufre algún tipo de intervención. Alguien debe lazar los dados, alguien debe barajar las cartas, "algo" debe elegir al ganador, etc.

Ante la incertidumbre que genera la torpeza del hombre, se han creado métodos inaccesibles al error. Procesos en los cuáles la manipulación humana no debe intervenir. La mayoría de esos procesos infinitos de cálculo han probado ser dependientes y con distribuciones no uniformes. Es decir carecen de utilidad. Será entonces, ¿que no existe

el azar y simplemente somos víctimas de una ilusión? ¿Dios juega a los dados con el universo?

En el ámbito nacional, el MEP, intenta formar el pensamiento aleatorio y desarrollar capacidades para abordar el azar, lo impredecible y la incertidumbre. Esta propuesta se creó en el año 2012 y se implementó del 2013 en adelante. La etapa inicial se define en primer grado, hasta lograr la abstracción en secundaria.

La propuesta curricular tiene la intención de generar una vocación investigativa y fomentar condiciones para la toma de decisiones. Un estudiante costarricense debe "ser capaz de comparar y juzgar la validez de argumentos, identificar errores y distorsiones en los medios de información y descubrir la racionalidad de afirmaciones diarias" (MEP, 2012, p.55).

Han transcurrido cuatro años desde la publicación del nuevo plan de estudios en Matemática. Los encargados de la propuesta son cautelosos y no se lanzan a pronosticar resultados en el corto plazo. Su calma se justifica en que el proceso de actualización de los contenidos debe cumplir sus objetivos con una generación completa de graduados. Esa justificación tiene sentido y revela la complicada tarea del deber educativo. Los niveles de alcance matemático se deben medir a largo plazo, pero las nuevas nociones académicas se pueden estudiar desde su implementación. Los estudiantes pueden dar evidencias del proceso logrado hasta el día de hoy.

Ante la falta de mediciones que revelen la pertinencia de los nuevos planes de estudio y el deseo de pronosticar aciertos y errores en la enseñanza de la Estadística y Probabilidad, se tomaron dos grupos experimentales de precálculo, MA-0125, de la Universidad de Costa Rica, como fuente primaria de medición. El objetivo del estudio es medir el concepto del "azar" (experiencias aleatorias) en una población que vivió los primeros tres años de implementación del nuevo plan.

Las actividades de medición se diseñaron para un periodo de 3 meses, de forma tal que los estudiantes tuviesen tiempo suficiente para reflexionar sobre la lección y consultar bibliografía adicional. El objetivo de cada lección es utilizar una dinámica que permita ampliar la conceptualización del término "azar". Nunca se agota el tema ni se define de forma única el concepto en cuestión. Las sesiones se complementan con espacios de discusión y comparación de sensaciones.

La probabilidad como elemento orientador de la toma de decisiones

Giovanni Sanabria Brenes, Félix Núñez Vanegas

Resumen

La resolución de problemas como metodología de enseñanza actualmente ocupa un lugar privilegiado en la matemática. La enseñanza de la probabilidad, considerada como una disciplina de las matemáticas, no debería estar desligada de esta metodología y sí permear sus procesos de aprendizaje. No obstante, siendo la didáctica de la probabilidad un campo incipiente, las propuestas en torno de su enseñanza son pocas, y encontrar propuestas didácticas basadas en la resolución de problemas, es difícil. Lo anterior plantea entonces interrogantes válidas, tales como, si se considera a la probabilidad como modelo para resolver problemas, ¿cómo resolver con éxito un conjunto de situaciones problema? Por otro lado, ¿Qué limitaciones tiene el modelo probabilístico en la resolución de dichas situaciones? Y desde luego también, es natural preguntarnos, ¿cómo desarrollar en el estudiante el pensamiento probabilístico a través de situaciones problemáticas?

El presente trabajo pretende dar una respuesta parcial a estas interrogantes, recurriendo a los principales referentes teóricos de resolución de problemas: Polya (1965), Schoenfeld (1985) y Brousseau (1986). Y además, se consideran los significados de probabilidad propuestos por Batanero (2005). Así, se propone una clasificación de las situaciones problemas en probabilidad: aquellas centradas en el cálculo de probabilidades (ampliamente tratadas en los libros de texto), las que tienen que ver con la toma de decisiones y las situaciones ajenas al azar que utilizan la probabilidad como modelo.

El presente trabajo pretende caracterizar las situaciones problema que tienen que ver con toma de decisiones. Así, se parte de un problema básico de cálculo de probabilidades con dados, y poco a poco a la luz de referentes teóricos, este se va transformado en una situación problema de toma de decisiones que permita abordar la enseñanza de la probabilidad. En este trabajo, solo se diseña la situación problema, esta requiere ser validada en el aula.

Finalmente, producto de la construcción de la situación, se plantean una serie de características y recomendaciones para la formulación de situaciones problema de toma decisiones con fines didácticos.

Relación entre estereotipos de género y el rendimiento en matemáticas: Un estudio comparativo entre jóvenes de secundaria y universitarias

Tania Elena Moreira-Mora, Vanessa Smith-Castro, Eiliana Montero-Rojas, Andrey Zamora-Araya

Resumen

La literatura internacional ha documentado ampliamente que cuando las mujeres son expuestas a expresiones de ideas como “las mujeres no son buenas en matemáticas” su interés, disposición, capacidad y rendimiento en pruebas matemáticas disminuye significativamente. Al parecer la presencia de estereotipos que cuestionan las habilidades de ciertos grupos sociales representa una “presión extra” para los miembros de esos grupos precisamente cuando se encuentran en situaciones en donde tales habilidades deben ser expresadas en el máximo nivel de ejecución (como es el caso de la prueba de aptitud académica para ingresar a la universidad) y esta “presión extra” interfiere en el rendimiento mismo (Spencer, Steele & Quinn, 1999; Inzlicht & Schmader, 2012). A su vez las investigaciones han mostrado que los estereotipos de género alrededor de las matemáticas se sostienen sobre ideologías sexistas que permiten perpetuar de manera abierta y sutil los roles tradicionales asignados a hombres y mujeres. La investigación empírica nacional proporciona importante evidencia que apoya esta desafortunada relación (Guillén, 1998; Montero & Villalobos, 2004, Smith-Castro, 2013).

Desde esta perspectiva, surge la interrogante ¿están implicadas las actitudes sexistas y los estereotipos de género en el rendimiento de las mujeres en pruebas de habilidades generales de razonamiento matemático? Este problema de investigación ha sido poco abordado en nuestro medio para el caso específico del rendimiento académico en Matemáticas. Por ello, el objetivo principal de la investigación fue analizar las implicaciones de las actitudes sexistas y los estereotipos de género en el rendimiento en matemática en población femenina de colegios públicos de la gran área metropolitana (GAM) y de tres universidades públicas de Costa Rica.

En esta ponencia se presenta los resultados de dos estudios llevados con mujeres de colegios públicos (N = 501) y universidades públicas (N = 450) de la GAM, en los cuales se analizan, mediante Modelos de Ecuaciones Estructurales (SEM), los vínculos entre las ideologías sexistas (sexismo hostil y benevolente), los estereotipos de género en contextos matemáticos, la autoeficacia matemática y el rendimiento en pruebas estandarizadas de matemáticas.

Los SEM representan una alternativa para explorar posibles planteamientos teóricos causales con datos que provienen de estudios observacionales o correlacionales. Contar de previo con un marco teórico sólido que sustente las hipótesis que conectan causalmente los diversos constructos involucrados en la explicación del fenómeno de interés es esencial para el empleo de estos modelos, así como una correcta operacionalización y medición de todos los constructos y variables relevantes (Freedman, 2010; Kaplan, 2009; Klein, 2011; Mulaik, 2009; Skrondal & Rabe-Hesketh, 2004).

Los resultados indican una relación indirecta entre los dos tipos de sexismo (hostil y benévolo) y el rendimiento en matemática. Dicha relación aparece mediada por la equidad de género (creencias de que hombres y mujeres son igualmente buenos/as en matemáticas) y la seguridad o autoeficacia matemática. Los datos llaman la atención sobre la necesidad de desarrollar intervenciones para promover una mayor autoeficacia matemática en nuestras estudiantes. Esto les permitirá acercarse de mejor manera a los contenidos matemáticos, lo que a su vez les permitiría mejores rendimientos en contextos matemáticos

La Estadística y la Probabilidad en el Deporte

Randall Alberto Brenes Gómez

Resumen

En este mundo en el que nos movemos, la estadística e inclusive la probabilidad, representan dos ramas dela matemática que se encuentran presentes en muchos lugares y actividades del ser humano. Por lo que su manejo y comprensión básica, representan una excelente oportunidad de poder comprenderlo de una mejor manera, lo que también nos permitiría reaccionar de una mejor forma ante situaciones concretas que se nos presentan.

Los deportes, vistos desde la óptica de la persona que los practica, la que los sigue como fanático, la que se ve atraído por sus bemoles o simplemente, quien desea por entretenimiento o negocio, realizar apuestas ya sean simbólicas con los amigos o en casas de apuestas (en países donde sea legal) con dinero en efectivo.

La idea primordial de la ponencia que se propone presentar es presentar algunas situaciones y datos que ilustren el manejo que se realiza en estas dos disciplinas (Estadística y Probabilidad) cuando de deportes se habla.

Veremos ejemplos concretos y ficticios sobre lo importante que es analizar datos históricos y cálculo de probabilidades, los cuales deben servir como insumo real en la toma de decisiones que el usuario, o persona interesada debe tener para realizar su elección y no, la simple intuición o lo que en Costa Rica se conoce como “aguizotes”.

Análisis ontosemiótico de tareas que involucran gráficos estadísticos en Educación Primaria

Belén Giacomone, Danilo Díaz-Levicoy, Juan D. Godino

Resumen

En diversas investigaciones en el área de la Educación Matemática se afronta el estudio sobre gráficos estadísticos presentes en los libros de texto, con el fin de obtener información sobre la variedad de gráficos usados y contrastarlos con los significados pretendidos por las directrices curriculares. Díaz-Levicoy (2014) analiza libros de texto españoles de Educación Primaria considerando como unidades de análisis el tipo de gráfico, la actividad pedida, el nivel de lectura y la complejidad semiótica del gráfico; Díaz-Levicoy, Giacomone, López-Martín y Piñeiro (2016) replican el estudio analizando libros digitales. Si bien es fundamental investigar sobre los distintos tipos de representaciones que caracterizan la enseñanza de la estadística, en estos trabajos no se aborda de manera explícita la naturaleza y diversidad de los objetos matemáticos involucrados en el uso de tales representaciones. Es necesario que el profesor de Educación Primaria tome consciencia sobre la complejidad que conlleva el uso de gráficos de acuerdo a las necesidades cognitivas de cada nivel educativo.

El objetivo de esta investigación es comprender las dificultades potenciales de los alumnos en el aprendizaje matemático de los gráficos estadísticos mediante la aplicación de la herramienta configuración ontosemiótica, al revelar la trama de objetos y significados que intervienen en la actividad matemática. Dicha herramienta forma parte de los desarrollos teóricos y metodológicos propuestos por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007).

Se trata de una metodología descriptiva sobre la diversidad de objetos y significados puestos en juego en tareas que involucran gráficos estadísticos, seleccionadas previamente de libros de texto de Educación Primaria de España.

Los resultados que aporta este trabajo reflejan la necesidad de incorporar este tipo de análisis epistémico, sobre resolución de problemas, a la formación de profesores de matemáticas, para mejorar la enseñanza de la estadística. El análisis ontosemiótico de tareas sobre gráficos estadísticos, permite comprender que el profesor de matemáticas debe tener conocimiento, comprensión y competencia para discriminar los distintos tipos de objetos que intervienen en la práctica matemática escolar, apoyada en el uso de diversos sistemas de representación y siendo consciente de las relaciones sinérgicas entre los mismos (Giacomone, 2015). Debe ser competente para diseñar y gestionar procesos de materialización e idealización de los objetos matemáticos, junto con los correspondientes procesos de particularización y generalización (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012).

Investigaciones sobre gráficos estadísticos en Educación Primaria: revisión de la literatura

Danilo Díaz-Levicoy, Pedro Arteaga, Carmen Batanero

Resumen

La alta cantidad de información estadística que se trasmite por diferentes medios, exige que los ciudadanos tengan la capacidad para leerla e interpretarla, además de poder comunicar ideas en forma clara y precisa sobre el tema en cuestión. Una parte importante de esta información se transmite por medio de gráficos estadísticos (barras, líneas, sectores, pictogramas, entre otros), que son considerados elementos de la cultura estadística (Gal, 2002) y, por consecuencia, del sentido estadístico (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013).

Las directrices curriculares de diferentes países han incorporado los contenidos de estadística y probabilidad desde los primeros cursos de la formación obligatoria, entre ellos los gráficos estadísticos, como una forma de entregar herramientas a los estudiantes para enfrentarse con éxito a estos temas en diferentes situaciones de la vida cotidiana (social, personal y profesional). Estos gráficos estadísticos muchas veces son manipulados para sacar provecho de una determinada situación; por tanto se espera que los ciudadanos estadísticamente cultos identifiquen estas situaciones y puedan formarse una opinión fundada al respecto, lo que implica el dominio de los elementos específicos de cada gráfico sepan interpretarlos. Más aún, en muchas ciencias, los gráficos estadísticos cumplen un papel fundamental para organizar los datos que permiten observar relaciones entre variables, útiles para detectar los patrones, propiedades y relaciones en determinados fenómenos (Glazer, 2011).

Lo anterior, motiva el desarrollo de un estudio en el que se desea aproximarse al estado del arte respecto a las investigaciones sobre lectura y construcción sobre gráficos estadísticos en Educación Primaria. Dichos estudios evidencian las dificultades de los estudiantes de Educación Primaria en los diversos niveles de lectura de los mismos (e.g., Carvalho, Campos y Monteiro, 2011; Guimarães, 2002). Del mismo modo, las investigaciones sobre construcción de gráfico muestran que los estudiantes de

Educación Primaria presentan errores en la construcción de gráficos respecto a: a) falta de proporcionalidad en sus elementos (barras con alturas no proporcionales y separación no uniforme de las mismas, iconos no proporcionales en los pictogramas, etc.); dificultad para identificar los ejes, ausencia de leyendas y rótulos, en los gráficos que usan (e.g., Cruz, 2013; Walichinski y Junior, 2013).

Esta revisión de la literatura permite observar que las investigaciones sobre este tema está en desarrollo y que aún son escasas en algunos países (ejemplo, Chile, España, México, entre otros), donde los temas de estadística y probabilidad se han incluido recientemente en las directrices curriculares de Educación Primaria, y donde sería necesario realizar estudio en los diferentes niveles del sistema educacional.

¿Conectan los futuros profesores las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad?

Rafael Parraguez, María M. Gea, Danilo Díaz-Levicoy, Carmen Batanero

Resumen

Un cambio importante que se ha producido en la última década en el currículo de Educación Primaria de muchos países es la incorporación de contenidos de probabilidad desde los primeros niveles. Se sugiere utilizar un enfoque frecuencial de la probabilidad, donde los niños realicen experimentos, recojan datos de sus resultados y obtengan conclusiones sobre diferentes sucesos.

La principal razón que apoya este cambio es que vivimos en un mundo con fuerte presencia del azar, por lo que hemos de preparar a los niños para afrontar dichas situaciones y tomar decisiones correctas en situaciones de incertidumbre. Así, autores como Gal (2005) reclaman la alfabetización probabilística de todos los ciudadanos, como conjunto de conocimientos, capacidades y actitudes que les permitan desenvolverse frente a los fenómenos aleatorios. Será entonces necesario proporcionar una formación adecuada de los futuros profesores que han de impartir estos contenidos, teniendo en cuenta las características específicas de la probabilidad y sus aspectos didácticos.

En este trabajo nos hemos interesado por esta problemática y, más concretamente, por analizar la forma en que los futuros profesores de Educación Primaria relacionan los significados clásicos y frecuencial de la probabilidad, y las dificultades que puedan tener en diferenciar dichos significados y ponerlos en relación.

Para ello, analizamos las respuestas escritas a una actividad práctica por una muestra de futuros profesores de Educación Primaria en España. La actividad ha sido adaptada de Rivas y Godino (2015), quienes también la utilizaron en la formación de profesores. Nuestro análisis completa el suyo, puesto que los autores citados sólo describen la resolución colectiva en la pizarra por el profesor y alumnos. En nuestro caso, comparamos las respuestas en un grupo de estudiantes que la resuelven

individualmente y otro que la resuelven trabajando en parejas, en ambas situaciones por escrito.

Las actividades propuestas se relacionan con: a) resolución de un problema sobre juego equitativo con enfoque clásico; b) estimación del valor esperado en 100 repeticiones del juego mediante el enfoque frecuencial; y c) puesta en relación de los enfoques clásico y frecuencial, por parte de los participantes. Mientras la primera y tercera preguntas resultaron muy sencillas, fue mucho más difícil estimar la frecuencia esperada de veces que ocurre un suceso en la segunda pregunta, lo que indica que estos futuros profesores no comprenden con profundidad la ley de los grandes números, ni siquiera en forma intuitiva. Estos resultados nos plantean una problemática en la formación de los profesores, que se supone han de enseñar la probabilidad bajo estos dos enfoques en la Educación Primaria.

Las distribuciones para objetos indistinguibles

Giovanni Sanabria Brenes

Resumen

Considere la experiencia aleatoria de lanzar un par de dados. Es usual, incluso a nivel de secundaria, que el profesor realice una tabla en donde exhibe los 36 posibles resultados del espacio muestral de esta experiencia cruzando los 6 resultados del dado 1 con los 6 resultados del dado 2. Pero, ¿Qué sucede si los dados son indistinguibles? Sea X la suma de los puntos obtenidos en los dados, ¿hay alguna diferencia en la distribución X si los dados son distinguibles o no?

Por otro lado, considere el experimento de lanzar una moneda legal (con caras: Escudo, Corona) diez veces. Sea Y: el número de escudos obtenidos. Observe que Y sigue una distribución binomial con probabilidad de éxito 0.5 y número de intentos n=10, es decir Y~B(10,0.5).

Ahora, si se varía el experimento: se lanza simultáneamente diez monedas legales idénticas y sea Y: el número de escudos obtenidos. ¿Cuál será la distribución de Y? ¿Será que ya no sucede que Y~B(10,0.5)?

Y además, ¿los futuros docentes que ya han cursado probabilidad podrán determinar con éxito la distribución de X y Y con objetos indistinguibles?

Para dar respuesta a las interrogantes, primero se procederá a realizar una pequeña encuesta a estudiantes de la Carrera de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora del Tecnológico de Costa Rica que han cursado probabilidad con el fin de determinar si los conocimientos adquiridos les permiten obtener con éxito de X y Y con objetos indistinguibles. Luego, por medio de la experimentación, lanzando dados y monedas, se valorará si X y Y con objetos indistinguibles siguen cierta distribución utilizando Bondad de Ajuste. Finalmente se dará una justificación lógica sobre la distribución de X y Y con objetos indistinguibles.

Exigencia Cognitiva De Las Tareas Sobre Probabilidad En El Currículo De Educación Primaria

Claudia Vásquez Ortiz, Nataly Pincheira, Danilo Díaz Levicoy

Resumen

¿Qué significa enseñar y aprender probabilidad?, ¿qué conocimientos necesitan los profesores para enseñar probabilidad?. Son algunos interrogantes que aún están por resolver pese a que el estudio de la probabilidad se ha incorporado con fuerza en las últimas décadas en el currículo escolar de diversos países (e.g. NCTM, 1989; NATIONAL CURRICULUM, 1999; NCTM, 2000; CCSSI, 2010; MECD, 2014; MINISTRY OF EDUCATION SINGAPORE, 2007; MINEDUC, 2012; 2013a). Esto ha generado un notorio aumento de investigaciones vinculadas a la probabilidad y su enseñanza en las distintas etapas escolares (e.g. GODINO, BATANERO Y CAÑIZARES, 1997; GÓMEZ, 2014; DÍAZ-LEVICOY Y ROA, 2014; VÁSQUEZ Y ALSINA, 2015a). Sin embargo, las investigaciones al respecto aún son escasas y evidencian "la necesidad de desarrollar investigaciones vinculadas a la naturaleza semiótica de la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad" (NILSSON Y LI, 2015, p. 440), que proporcionen herramientas al profesorado, a nivel disciplinar y didáctico, que permitan implementar de manera idónea las nuevas directrices curriculares, sobre todo si consideramos que gran parte del profesorado en ejercicio no ha recibido formación al respecto (VÁSQUEZ Y ALSINA, 2014).

Se evidencia así, pues, la necesidad de desarrollar estudios que muestren ¿cómo evoluciona el estudio de la probabilidad a lo largo del currículo escolar?, ¿cuáles son los énfasis dados en los distintos niveles?, ¿qué tipo de tareas se promueven durante el proceso?. Asimismo, se requiere dar cuenta acerca de ¿cuáles son los conocimientos a desarrollar en el profesorado para una enseñanza idónea de la probabilidad en el aula?.

Es en este contexto que surge esta investigación, a través de la cual se busca aportar información que permita tener una visión amplia de lo que significa enseñar y aprender probabilidad a lo largo del currículo escolar. Es por ello que en este trabajo, que forma parte de un estudio de mayor envergadura, se analiza la exigencia cognitiva de las tareas matemáticas sobre probabilidad presentes en los programas de estudio de la

asignatura de matemática para la Educación Primaria en Chile. Para ello, nos situamos desde la perspectiva de Smith y Stein (1998) quienes proporcionan una taxonomía para la clasificación de las tareas matemáticas a partir del tipo y nivel de pensamiento requerido para solucionarlas.

¿Por qué es importante analizar la exigencia cognitiva de las tareas matemáticas sobre probabilidad propuestas por los programas de estudio? Porque estos constituyen un referente a seguir a nivel nacional por el profesorado a la hora de decidir cómo organizar y desarrollar los objetivos de aprendizajes, sugiriendo un conjunto de indicadores de evaluación que son ejemplificados a través de un listado de actividades, escritas en un lenguaje simple y centradas en el aprendizaje efectivo. "Estas actividades no buscan competir con el texto de estudio, sino ser una guía al docente para diseñar sus propias actividades" (MINEDUC, 2012, p. 26). Por tanto, los programas de estudio se configuran como uno de los recursos preponderantes al momento de organizar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, por ende su análisis resulta de interés al momento de iniciar con el proceso de búsqueda de respuestas a interrogantes como los planteados al inicio de este escrito. Esto adquiere aún más relevancia si consideramos que en Chile gran parte del profesorado no ha recibido preparación para la enseñanza de la probabilidad (VÁSQUEZ, 2014).

En lo que sigue, se presenta el marco teórico elegido para este estudio, para luego describir la metodología, los resultados y discusión de los mismos. Por último, presentamos algunas reflexiones que buscan dar directrices para la enseñanza y la formación de profesores en relación con la probabilidad en la Educación Primaria.

EMERGENCIA DE PENSAMIENTO ESTADÍSTICO A PARTIR DE UNA ACTIVIDAD DE DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Blanca Ruiz Hernández

Resumen

Wild y Pfannkuch (1999) hacen énfasis en la necesidad de transitar por el ciclo investigativo que impulse el pensamiento estadístico en los estudiantes. Sin embargo, la planeación, una de las fases más importantes, también es una de las más complicadas de insertar en la escuela. En el presente trabajo se propone esta inserción haciendo uso del diseño de experimentos. Se analiza la experiencia de enseñanza realizada con 12 estudiantes de ingeniería que habían llevado un curso introductorio de probabilidad y estadística y que participaron en un taller en donde se vieron sumergidos en el ciclo investigativo completo a través de la mejora de un prototipo. La actividad se basó en el ejemplo didáctico conocido como Helicóptero de Box y resultó exitosa porque los estudiantes se percataron de las ventajas de involucrarse en el ciclo completo, de las bondades de las herramientas estadísticas y pudieron tomar decisiones sustentadas. Sin embargo, cometieron algunos errores que afectan las conclusiones sobre la mejora de su prototipo.

IDEA - Archivo de intercambio internacional de datos para Estadística

Luis A. Gómez Rodríguez

Resumen

La tecnología debe utilizarse como un medio de comunicación que acerque a los estudiantes a otros estudiantes de diferentes regiones del mundo.

Con esto en mente, y buscando aplicar la Estadística como herramienta para entender las diferencias y semejanzas entre estudiantes de diferentes lugares, durante el simposio sobre "Mentalidad Internacional" del colegio de BachilleratoInternacional Westlake Academy en Dallas Texas, se empezó a gestar un interesante proyecto de colaboración internacional para la creación y utilización de bases de datos sobre características y preferencias de estudiantes en diferentes lugares del mundo con el fin de ofrecer información para análisis estadístico.

La presente ponencia resume la experiencia y resultados desde la perspectiva de un profesor participante con el fin exponer su importancia y utilidad, así como proponer una idea similar a profesores del país.

Experiencias de la Aplicación de la Estadística en la Elaboración de Proyectos en la Investigación Educativa, El Salvador, 2015

Pedro Armando Ramos Alberto, Ramon Arístides Paz Sánchez

Resumen

La presente investigación se encuentra muy relacionada con el proceso de investigación acción, actividad en la que el docente y los alumnos elaboran trabajos de investigación en el aula, en la que se emplean métodos y procedimientos científicos, con el objetivo de desarrollar todo el proceso de investigación científica mediante la realización de exploraciones que propongan soluciones a un problema educativo real con un enfoque constructivista.

Bajo ese contexto, se presentan tres trabajos de investigación elaborados con la participación de los estudiantes del Profesorado en Matemática de la Escuela de Matemática, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador, (2015). Estos trabajos fueron realizados en el aula de la asignatura de Investigación Educativa (IE), con el objetivo que los estudiantes adquirieran el conocimiento y el dominio de la terminología básicas de la metodología de la investigación. Además, conocer los diversos enfoques metodológicos, integrando la herramienta de la estadística. Se pretende que estos estudiantes adopten una actitud reflexiva y crítica con respecto a la realidad educativa y que posean idoneidad técnico-profesional para investigar científicamente esa realidad y transformarla creativamente.

Los trabajos que se seleccionaron y desarrollaron en el aula son:

1. Estudio Estadístico sobre la salud de los estudiantes de la asignatura IE.
2. Las Incidencias del sobrepeso de la Mochila en los estudiantes de la asignatura IE.
3. Identificar los posibles factores que generan apatía e inciden en el aprendizaje de matemáticas en los alumnos de la escuela República del Perú, Municipio de Mejicanos, San Salvador.

Los resultados de dichas investigaciones les propició al descubrimiento, la construcción de conceptos, la adquisición de conocimientos y la solución de problemas. Relevante fue que las investigaciones incidieron en ellos en identificar que es una valiosa herramienta didáctica que fortalece su proceso de enseñanza-aprendizaje, llevo a los estudiantes a la reflexión crítica de su propia actividad y la mejora de procesos de enseñanza-aprendizaje. Despertó el interés, se propició el involucramiento de los alumnos a investigar cualquier hecho que amerite ser investigado en el aula, que los estimule a la curiosidad de saber, de preguntar, de explorar, de comprobar, de experimentar su entorno y realidad. Hubo motivación ya que ayudo a comprender los problemas que enfrentarán cuando ya se encuentren laborando.

Diseño de una prueba vocacional para estudiantes de las Ingenierías en Construcción, Diseño Industrial y Producción Industrial en el Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR).

Alejandra Vanessa Alfaro Barquero, Sonia Chinchilla Brenes

Resumen

El proceso de elección vocacional implica un análisis riguroso hacia la búsqueda de opciones profesionales y laborales congruentes con las características personales. Sin embargo, muchas veces los jóvenes se enfrentan a este desafío sin el nivel esperado de madurez. Así, por ejemplo, en el Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) se recibieron 645 solicitudes de cambio de carrera en el 2015, según datos del Departamento de Admisión y Registro.

A pesar de que se han desarrollado muchos estudios vinculados con la elección vocacional, pocas pruebas se han especializado en el área de ingenierías, por lo anterior este estudio se planteó con el objetivo de diseñar y validar una prueba vocacional que permitiera conocer el perfil de los estudiantes de Ingeniería en Construcción, Diseño Industrial y Producción Industrial en el Instituto del ITCR; así como también identificar posibles diferencias según las variables de satisfacción con la elección vocacional, carrera, sexo y rendimiento académico.

La muestra estuvo constituida por 477 estudiantes y 12 docentes del ITCR de las carreras indicadas en el año 2015, a través de una combinación de estrategias cualitativas y cuantitativas de investigación, se recopilaron opiniones de docentes y estudiantes expertos para definir el perfil por carrera y formular ítems para la construcción de la prueba. Posteriormente se realizó un proceso de validación del instrumento utilizando análisis factoriales exploratorios y confirmatorios. Finalmente se realizó un análisis de varianza para identificar diferencias significativas entre los estudiantes según las variables de interés.

Las escalas diseñadas en este estudio obtuvieron evidencias de validez aceptables y permitieron diferenciar con claridad el perfil vocacional de los estudiantes de las 3 ingenierías, de acuerdo con las puntuaciones obtenidas en las escalas de tareas e intereses.

En relación con las habilidades, los estudiantes de Diseño Industrial sobresalieron en el componente viso espacial estético, los estudiantes de Producción Industrial en liderazgo y los de Construcción en la habilidad físico mecánica. Además los estudiantes de estas dos últimas carreras mostraron mayores destrezas autopercibidas en razonamiento lógico-matemático.

En relación con el sexo los hombres tendieron a puntuar más alto en su interés por la construcción, en su percepción sobre la habilidad físico mecánica y el razonamiento lógico; mientras que las mujeres sobresalieron en sus intereses por el Diseño Industrial. No se evidenciaron diferencias significativas entre hombres y mujeres en rendimiento académico.

Estudio Estadístico sobre la aplicación de la Responsabilidad Social de la Empresa (RSE) en las industrias textiles; 4LEAGUE, HILASAL, JC SEWING SUPPLY, BCTC, LINDOTEX, BROOKLYN, El Salvador, 2015

Pedro Armando Ramos Alberto

Resumen

El propósito de la presente investigación es conocer la realidad de la Industria textil en nuestro país, partiendo de un marco teórico-conceptual que permita comprender el funcionamiento, de la adaptación de normas de las leyes que rigen este tipo de empresas, y del nivel de aplicación de la Responsabilidad Social de la Empresa (RSE).

Entiéndase Responsabilidad Social de la Empresa (RSE) como la acción voluntaria, humanista por parte de los empresarios en proporcionar beneficios que van más allá de las leyes y normas para la mejora de la sociedad, del medio ambiente y de la situación económica de sus empleados logrando de ésta forma ser competitivo en el área.

Para llevar a cabo el estudio, se seleccionó a las industrias textiles siguientes: 4LEAGUE, HILASAL (carretera a Santa Ana); JC SEWING SUPPLY, BCTC (San Bartolo); LINDOTEX, BROOKLYN (San Marcos). Se elaboró un instrumento y se recolecto la información por medio de entrevistas realizadas a los trabajadores y trabajadoras, de dichas industrias, y luego se utilizan técnicas estadísticas para el análisis de la información.

Los objetivos del estudio se dirigieron a investigar el perfil de cada una de estas industrias, realizando un estudio exploratorio, se elaboran indicadores, se hacen comparaciones para identificar el posicionamiento de la RSE que ocupan las industrias textiles. Además, se usaron técnicas estadísticas; análisis de correspondencia para identificar los niveles de aplicación de la RSE y el análisis jerárquico para definir y agrupar en clúster las opiniones con mayor similitud de los consultados de las industrias textiles. Este resultado nos lleva a identificar las diferencias significativas en las

diferentes industrias textiles y así establecer cuál es la empresa que lidera en la aplicación de la RSE. Los resultados nos llevaron a posicionar que las empresas textiles 4LEAGUE e HILASAL, lideran en la aplicación de la RSE, es decir, las empresas contemplan y aplican politicas de beneficios a sus empleados, a las familias, comunidad, a la sociedad. Además, se plantean conclusiones, recomendaciones y se proyecta socializar los resultados con industrias que estén comprometidos con la aplicación de la RSE.

Calificación de las Carreras del Tecnológico de Costa Rica según Estudiantes Graduados: Una Aplicación de Análisis de Factores

Yuliana Mora Cedeño

Resumen

El objetivo de la investigación es conocer la calificación que los graduados del año 2013 del Tecnológico de Costa Rica, otorgan a sus carreras en una serie de aspectos que van desde la metodología y recursos didácticos hasta acciones de promoción de igualdad y ética profesional. Se calcula un índice de calificación a partir de un análisis de factores, que identifica tres dimensiones: (1) pedagogía y academia, (2) administración y recursos y (3) entorno social y profesional. Los datos se obtienen del cuestionario "Perfil de Salida". En general, la calificación promedio de las tres dimensiones alcanzó valores de aproximadamente 6 puntos en una escala de 0 a 10 y el índice total de calificación presentó un promedio de 6,3.

Simulación de variables aleatorias continuas y el teorema del límite central

Greivin Ramírez Arce, Kendall Eduardo Rodríguez Bustos

Resumen

Se presenta una propuesta de simulación de variables aleatorias continuas y de ejercicios que involucran el desarrollo del Teorema del Límite Central.

Para esto se hará uso de Excel con programación básica en Visual Basic que permite desarrollar muestreo repetitivo que emula el comportamiento que siguen las distribuciones.

La propuesta pretende que el estudiante inicie desde el diseño de la distribución, haga el desarrollo repetitivo de experimentos, construya su representación gráfica y llegue hasta el cálculo de probabilidades desde el enfoque frecuencial.

Las distribuciones continuas a simular son la uniforme, la exponencial, la gamma, la normal y su relación de cada una de estas con el Teorema del Límite Central.

El marco en que el que se sustenta la propuesta es a través del Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK), propuesto por Koehler y Mishra (2006) en el que interesa mostrar: a) las distintas representaciones que se pueden obtener con Excel, b) las técnicas pedagógicas que la programación aporta en forma constructiva para adquirir el concepto Teorema del Límite Central, c) el conocimiento sobre qué hace fácil y difícil la comprensión del concepto y cómo la tecnología puede aportar.

Feedback del profesor en las clases de estadística con recursos tecnológicos

Carolina Carvalho

Resumen

En la mayoría de las aulas lo feedback del profesor se da a los estudiantes oralmente o por escrito. Este artículo discute el feedback en situaciones mediadas por el uso de los recursos tecnológicos y cómo estos recursos pueden influir en la relación de los alumnos con contenido estadístico. Para ilustrar la discusión se utilizan protocolos de estudios en el que los participantes utilizan el software TinkerPlots como medio para aprender conceptos estadísticos.

Cabe señalar que los estudios empíricos presentados no han tenido como foco inicial los procesos de feedback. Sin embargo, volver a visitar ellos se enfrentan a la necesidad de que los profesores puedan planificar sus actividades con estos recursos más dinámicos y visuales pero tiene que pensar en lo feedback que proporcionan a los estudiantes una vez que las tecnologías digitales transforman y vigorizar el compromiso del estudiante con las tareas. Por lo tanto, los estudios futuros deben explorar los procesos de feedback en situaciones de enseñanza estadística mediadas por recursos tecnológicos.

La dimensión del control en la regla producto en problemas de conteo

Félix Núñez Vanegas, Giovanni Sanabria Brenes

Resumen

Cuando se realiza la solución de un problema de conteo, por lo general queda la sensación de si se habrá hecho correctamente. Lo anterior se debe entre otros aspectos a que en muchas ocasiones, la solución dada carece del rigor con que se resuelven problemas de otros dominios de la matemática. Cuando estos problemas se resuelven con la rigurosidad matemática, se monitorea el proceso de solución en cada etapa, y se cubren todos los ángulos. Este control, una de las dimensiones que agrega Shoenfeld a las heurísticas que brinda Polya por considerarlas insuficientes para resolver ciertos problemas matemáticos, es sumamente importante en la realización de un correcto conteo y disminuye, o elimina, esa sensación de inseguridad en la solución dada. Empero, en los niveles iniciales, este abordaje no se ajusta, dado que los estudiantes carecen de los conocimientos matemáticos que podrían intervenir en la solución de estos problemas. Una forma alternativa de tener el control del proceso, es a través de una correcta interpretación y aplicación de la regla del producto. En este trabajo, se exponen una manera de desarrollar la heurística y el control en los estudiantes para resolver ciertos problemas de conteo por medio de la regla del producto. Finalmente, brindaremos un ejemplo de una incorrecta aplicación de esta técnica dada por algunos estudiantes del curso de Métodos Estadísticos de la Carrera de EMAC del Tecnológico de Costa Rica, y la estrategia para advertirlos del error subyacente, mediante una correcta interpretación de la regla del producto.

Panorama de investigación en Educación Estadística a partir de trabajos doctorales

Felipe Fernández Hernández, Luisa Andrade Esobar, Ingrith Álvarez Alfonso

Resumen

La Línea investigación en Educación Estadística que trabaja en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, ha ejecutado desde sus inicios en 2006, varios proyectos de investigación y asesorado trabajos de grado a nivel de pregrado y postgrado, sobre diversos temas de la estadística y probabilidad. Resultados de la investigación, difundidos y reconocidos, no han tenido el impacto deseado en la comunidad académica, debido a que las intervenciones de aula que fueron objeto de pesquisa solo han provocado cambios circunstanciales en los estudiantes, y además, posiblemente porque la consistencia con los principios teóricos metodológicos y del enfoque ha sido insuficiente.

Por ello, en búsqueda de estrategias que posicionen la labor de la Línea de investigación, se planteó un proyecto que abordó la revisión de una muestra representativa de trabajos de grado de nivel doctoral, para iniciar una reformulación del trabajo investigativo de la Línea, y abrir horizontes relacionados con las tendencias actuales de investigación en la Educación Estadística. A partir de la literatura se identificaron enfoques teóricos que orientan la labor investigativa en los trabajos doctorales, tales como el 'Enfoque ontosemiótico', la 'Ingeniería didáctica', la 'Alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico', o las 'Taxonomías para caracterizar pensamiento estadístico'. De igual manera se determinaron temas objeto de atención en la acción educativa y en la investigación en el campo (v.g. representación y análisis de datos, probabilidad y combinatoria). Así mismo, se explicitaron los sujetos o focos de interés de la investigación (v.g. estudiantes de colegio, profesores de matemáticas en formación inicial o continuada); marcos metodológicos que respaldan el trabajo indagativo de las disertaciones (v.g. diseño de instrucción, investigación-acción, análisis documental); e ideas de la didáctica que pueden aportar a la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y la probabilidad.

La metodología del proyecto mezcló métodos cualitativos y cuantitativos provechosos en dos sentidos. Por un lado, el paradigma hermenéutico posibilitó la acción interpretativa de las disertaciones, complementó la generación de las categorías de análisis y permitió la caracterización de tales tesis. Por otro lado, los métodos cuantitativos basados en recuentos de frecuencias, facilitaron la descripción de tendencias respecto a los asuntos investigados y el afinamiento y selección de una muestra de juicio. Todo lo anterior se constituyó en insumos para la elaboración un panorama, producto del proyecto.

Entre los principales resultados cabe señalar el acopio y sistematización de 129 disertaciones asesoradas en universidades de 17 países, donde se destacan Estados Unidos, España, Brasil y Australia, que constituyen el 83% de la muestra. Con referencia a los enfoques teóricos, se constata que la 'Alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico' es predominante, aunque otros enfoques como el 'Ontosemiótico', el 'Constructivismo', los 'Procesos cognitivos', la 'Práctica reflexiva', son también utilizados en algunas disertaciones. Respecto a los marcos metodológicos, la investigación cualitativa prima sobre la cuantitativa, y se reconoce el uso frecuente de los 'Experimentos de enseñanza' como parte del 'Diseño de instrucción'. En términos de los sujetos de interés investigativo, se destaca la formación de otros profesionales en cursos de estadística y probabilidad, sin dejar de lado la formación de estudiantes de colegio y de profesores en ejercicio. Y respecto a los temas objeto de estudio, sobresalen nociones ligadas a la estadística descriptiva, la probabilidad, la inferencia estadística y la variabilidad.

Estos resultados presentan una radiografía en relación con la investigación en los programas de doctorado y proveen ideas para el desarrollo de la investigación en el campo de la Educación Estadística. A saber, potenciar asuntos menos abordados como la variabilidad, la formación inicial de profesores y el uso de tecnología para la enseñanza y aprendizaje; profundizar en la metodología de 'Experimentos de enseñanza' así como en el enfoque de 'Alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico', vigentes en la comunidad de investigación. De manera particular, la Línea de investigación propone reelaborar sus derroteros a partir de la formación inicial y continuada de profesores teniendo en cuenta estas ideas.

TALLERES

Resolución de problemas de estadística y probabilidad para primaria

Adriana Solís Arguedas, Sandra Schmidt Quesada

Resumen

El propósito del taller es llevar a cabo una serie de actividades sobre temas de estadística y probabilidad a nivel de primaria.

Las actividades estarán basadas en los problemas de estadística y probabilidad publicados en el Calendario Infantil de la Escuela de Matemática del TEC.

Se espera que estas actividades le permitan a los docentes, fortalecer la enseñanza de estos temas en sus respectivos salones de clase.

Probabilidad, más que solo suerte

Gabriel Mena Cantero, Andrea Navarro Agüero

Resumen

Este taller va dirigido a profesores y estudiantes universitarios de Enseñanza de la Matemática que deseen capacitarse en el tema de las probabilidades para poder ampliar sus conocimientos e impartir con mayor seguridad las clases de este tema, buscando incentivar el interés de sus estudiantes por este tema.

Los temas a trabajar se centran en la construcción de la Ley de Laplace, haciendo un repaso por los conceptos básicos de la teoría de las probabilidades como aleatoriedad, espacio muestral, eventualidad, probabilidad frecuencial, probabilidad teórica, evento, eventualidades equiprobables y Ley de Laplace. Además, lo que se busca es que aparte del repaso, se puedan efectuar las construcciones de los mismos a partir de problemas y actividades, y mediante el uso de programas que permitan la modelación de situaciones probabilísticas.

El principal objetivo del taller es estudiar la relación que existe entre las eventualidades equiprobables, la Ley de Laplace y muchas situaciones o experimentos básicos de la teoría de las probabilidades, las cuales pueden ser modeladas con elementos simples del entorno, con elementos obtenidos de tiendas especializadas o mediante el uso de programas informáticos para este fin.

Utilizando lo planteado por los Programas de Matemática del Ministerio de Educación Pública, se procurará generar un ambiente de construcción del conocimiento, utilizando para esto la integración de la historia con problemas importantes en la teoría de las probabilidades, la elaboración de materiales simples con los cuales modelar las situaciones planteadas, el uso de elementos del entorno para la modelización de fenómenos probabilísticos y se incluirá un módulo de uso del programa Excel como modelador de situaciones y en el que se pueda establecer la relación entre probabilidad frecuencial y probabilidad total, especialmente en experimentos con eventualidades equiprobables.

Uso de Ecuaciones estructurales en el análisis de relaciones causales entre variables latentes

Mario Alberto Marín Sánchez

Resumen

Se presentará a los participantes la terminología básica, los fundamentos del modelo, ejemplos de formulación de modelos y análisis de resultados incluidos algunos elementos de ajuste. Se discuten generalidades sobre este tipo modelos y su uso. Es un taller muy básico para introducir a los participantes en esta herramienta de exploración de datos y confirmación de hipótesis.

LA HISTORIA DE LA CIENCIA COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA

Jesús Salinas Herrera

Resumen

El enfoque de este taller se articula con el movimiento generalizado en el ámbito educativo internacional de abordar el proceso educativo basado en competencias. Si bien no existe consenso respecto del concepto de competencia y es una noción que ha generado mucha controversia (Moreno, 2010), aquí se adopta críticamente el enfoque que considera las competencias como una integración de conocimientos, procedimientos, emociones, actitudes y valores (Sacristan, 2008). Así, contrario a una visión enciclopédica, proponemos que el estudio de la historia de la ciencia permite una perspectiva interdisciplinaria (Maz, 1999) y ayuda a fomentar una actitud crítica y racional. En nuestra opinión este enfoque permite un acercamiento a la ciencia que no se restringe a sus contenidos disciplinarios, sino que, sobre todo, permite valorar una manera de pensar. La actitud científica se ha construido históricamente y ha generado una práctica que conlleva valores humanos que es importante reconocer y promover (Bronowsky, 1968).Por consiguiente, el propósito central de este taller es reflexionar y discutir sobre la manera de utilizar la historia de la ciencia como un recurso didáctico y de explorar su papel como medio para propiciar el aprendizaje de competencias generales que enriquezcan la cultura básica y la formación integral de los alumnos del nivel bachillerato (Stephenson, Ling, Burman & Cooper, 2001).Una premisa básica de nuestro planteamiento es que el conocimiento del desarrollo de la ciencia en un contexto cultural más amplio, proporciona un interés por el estudio de los contenidos de las diferentes disciplinas y contribuye a su entendimiento. Asimismo, proporciona a los profesores y alumnos una mejor comprensión de los valores que caracterizan a la actividad científica.

Propósitos : 1. Usar la historia de la ciencia para propiciar el aprendizaje de competencias generales relacionadas con el pensamiento científico.

2. Reflexionar acerca de los valores humanos característicos de la actividad científica

3. Propiciar una cultura más amplia de los profesores, relacionada con el desarrollo histórico, social y filosófico del pensamiento científico.

Actividades computacionales para probabilidad en GeoGebra según los nuevos programas del MEP

Luis Diego Zamora Grajal, Carlos Albenda Solís

Resumen

En el taller se desarrollará una propuesta para el aprendizaje de conceptos de probabilidad, establecidos por el MEP para el III ciclo (octavo año), utilizando el software Geogebra.

El taller está basado en el proyecto de graduación de los ponentes para optar al grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora en el instituto de tecnológico de Costa Rica presentado en febrero del 2016.

Las actividades que se trabajaran pueden ser adaptadas a otros niveles y planes educativos, permitiéndole al docente ampliar su área de trabajo, así como la creación o adaptación de nuevas guías que le permitan cumplir su trabajo en beneficio para sus estudiantes.

El tema de probabilidad fue implementado al programa de estudio del sistema educativo costarricense a partir del año 2012, haciendo uso de la computadora como instrumento de ayuda para la adquisición de las habilidades correspondientes y cumpliendo con los ejes disciplinares que se mencionan en dicho programa.

Los estudiantes desde la primaria, o incluso, antes adquieren un gran temor y poca aceptación hacia los conceptos matemáticos, muchas veces transmitidos por sus padres e incluso por sus maestros, lo cual dificulta aún más la asimilación de los contenidos del programa de estudios. Aunado a esto, en los programas se incluye la enseñanza de la Estadística y Probabilidad, áreas de la matemática que necesitan de mucho análisis, fase de la modelación con el que los estudiantes presentan grandes deficiencias, además, de la poca formación con la que cuentan gran cantidad de docentes en estos temas.

Así, se propone realizar un taller que permita a los educadores utilizar actividades que con ayuda del computador, guías para estudiantes y profesores, sirvan como recurso en sus aulas, además de retroalimentarse acerca del tema y que le permita a los estudiantes una mayor comprensión.

El uso de Fathom en la elaboración de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje

Ernesto Alonso Sánchez Sánchez

Resumen

Las posibilidades de simulación del software hacen posible elaborar trayectorias hipotéticas de aprendizaje para que los estudiantes adopten un enfoque estocástico de la probabilidad. Una premisa para aprovechar las posibilidades del software es entender la transformación que sufre el contenido matemático de la probabilidad cuando se cuenta y se puede utilizar la tecnología en el aula de clase. En particular, Fathom permite desarrollar su pensamiento probabilístico. En este taller se estudiará un esquema para la construcción e implementación de lecciones con ayuda del software para dicho fin.

Edición de texto dinámicos con Látex y R

Jorge Arroyo-Hernández, Jose Andrey Zamora-Araya

Resumen

Uno de los aspectos más importantes que debe incluir cualquier trabajo escrito de investigación es la presentación de la información numérica y gráfica en forma rigurosa. Para esto, es necesario contar con paquetes informáticos que agilicen su edición y producción. A través de la conjunción de los software Látex y R es posible editar documentos utilizando el paquete Knitr para Análisis Estadísticos y representaciones grácas de forma dinámica. El objetivo del taller es mostrar la forma en que se pueden generar documentos dinámicos con látex y que procese datos estadísticos en tiempo real con R, utilizando el software Rstudio en Linux (Ubuntu). Se deja abierto los procedimientos para que puedan repetirse en otros sistemas operativos como Windows o IOS.

Uso de los formularios de Google para recopilación de información estadística y su posterior análisis con Geogebra

Alexander Borbón Alpízar, Grace Dayana Calderón Prado

Resumen

Se realizará un taller en donde se les mostrará a los participantes la manera en que se pueden utilizar los formularios de Google para recopilar información estadística, posteriormente se realizará el análisis de dicha información con el software Geogebra.

En la primera parte del taller se enseñará a construir un formulario de Google para recopilar información que los mismos participantes al taller proporcionarán; estos formularios son muy útiles tanto para obtener datos en el aula como para trabajos como tesis, proyectos, etc.

Posteriormente, en la segunda parte del taller, se tomarán los datos recopilados para hacer un análisis estadístico básico donde se abarcarán los conceptos más importantes que se mencionan en el programa del MEP tales como: muestra, población, medidas de posición y de variabilidad, representaciones tabulares y gráficas. También se comentará sobre las diferencias entre las fórmulas utilizadas por el software Geogebra y las fórmulas recomendadas por los encargados de la reforma matemática para los programas de secundaria.

Taller de resolución y adaptación de ejercicios de probabilidad en el ciclo diversificado

Luis Ernesto Carrera Retana, Jessica Navarro Aguirre, Reiman Acuña Chacón

Resumen

En este taller, dirigido a educadores en matemática del ciclo diversificado, se pretende abordar y modificar diferentes problemas en probabilidad relacionados con los nuevos programas del ministerio de educación pública de Costa Rica. Al final del taller, los profesores contarán con un banco de ejercicios que podrán usar en sus clases y evaluaciones.

Taller especializado de Risk Simulator para la Medición del Riesgo Crediticio en Entidades Bancarias.

Welman Rosa Alvarado

Resumen

Este taller está dirigido a personas interesadas en laborar en entidades que desarrollen actividad crediticia ya sea del sector financiero, real o en entes de control de sistema financiero; en temas relacionados con construcción y seguimiento de modelos y metodologías de cuantificación de riesgo de crédito. Personas interesadas en auditoria de riesgos.

ARTICULOS COMPLETOS

Simulación de variables aleatorias continuas y el teorema del límite central

Kendall Rodríguez Bustos[1] & Greivin Ramírez Arce[2]

Resumen

Se presenta una propuesta de simulación de variables aleatorias continuas y de ejercicios que involucran el desarrollo del teorema del límite central. Para esto se hará uso de Excel con programación básica en Visual Basic que permite desarrollar muestreo repetitivo que emula el comportamiento que siguen las distribuciones. La propuesta pretende que el estudiante universitario inicie desde el diseño de la distribución, haga el desarrollo repetitivo de experimentos, construya su representación gráfica y llegue hasta el cálculo de probabilidades desde el enfoque frecuencial. Las distribuciones continuas a simular son la uniforme, la exponencial, la normal y su relación de cada una de estas con el teorema del límite central.
El marco en que el que se sustenta la propuesta es a través del Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK), presentado por Koehler y Mishra (2006) en el que interesa mostrar: a) las distintas representaciones que se pueden obtener con Excel, b) las técnicas pedagógicas que la programación aporta en forma constructiva para adquirir el concepto teorema del límite central, c) el conocimiento sobre qué hace fácil o difícil la comprensión del concepto y cómo la tecnología puede aportar al desarrollo del conocimiento.

Abstract

A proposal of simulation of continuous random variables and exercises involving the development of the Central Limit Theorem is presented. For this it is going to be used Excel with basic programming in Visual Basic, that allows to develop repetitive sampling which emulates the behavior that distributions follow. The proposal is intended for the university student to start from the layout design, make the development of repetitive experiments, build his/her plot and achieve to calculate probabilities from the frequency approach. The continuous distributions to be simulated are the uniform, the exponential, the normal and the relationship of each of these with the Central Limit Theorem.
The framework in which the proposal is based is through the Pedagogical Technological Content Knowledge (TPACK), presented by Koehler and Mishra (2006) which wants to show: a) the different representations that can be obtained with Excel, b) the pedagogical techniques that programming contributes constructively to acquire the Central Limit Theorem concept, c)the knowledge about what makes easy or difficult to understand the concept and how technology can contribute to the knowledge development.

Palabras claves: simulación, variables aleatorias continuas, teorema del límite central, conocimiento tecnológico pedagógico del contenido

Keywords: simulation, central limit theorem, technological pedagogical content knowledge

Modalidad: ponencia

El interés de la presente propuesta es incorporar la programación básica en Visual Basic, como complemento de Excel, para simular el comportamiento de variables aleatorias

[1]Instituto Tecnológico de Costa Rica, kendall2412@gmail.com
[2]Instituto Tecnológico de Costa Rica, gramirez@itcr.ac.cr

continuas tales como la uniforme, exponencial, normal y la relación de estas con el teorema del límite central.

Lo anterior es relevante considerando que los estudiantes universitarios ingresan con deficiencias en contenidos y habilidades de razonamiento estocástico, aunado a ello, los cursos que toman en su educación superior, aparte de ser pocos, muchas veces son desarrollados con metodologías clásicas reducidos a formalismos y a procesos rutinarios de aplicación de fórmulas; sin conocer el proceso de construcción de las distribuciones en los que carecen del desarrollo repetitivo de experimentos (Inzunsa, 2006; Ramírez, 2007).

Múltiples investigadores concuerdan que para modelar situaciones reales en las cuales hay presencia del azar, lo aleatorio o la incertidumbre, es importante el desarrollo del pensamiento o razonamiento probabilístico y buscar métodos que permitan de manera razonable emular estos sucesos o fenómenos aleatorios. (Alvarado; Batanero, 2008; Sánchez, 2009; Inzunsa; Guzmán, 2011; Jaimes; Yáñez, 2013; Burbano; Pinto; Valdivieso, 2015)

No obstante, los conocimientos matemáticos no son suficientes para que los profesores logren enseñar probabilidad de una manera correcta y fomentar en sus alumnos un adecuado razonamiento probabilístico; pues, desde el enfoque clásico no permite la debida comprensión de probabilidad ni desarrollar intuiciones adecuadas, y de esta forma no generan una construcción significativa en los estudiantes acerca de los conceptos asociados a experimentos aleatorios. (Batanero; Contreras; Díaz; Roa, 2012; Jaimes; Yáñez, 2013)

Jaimes y Yáñez (2013) consideran que muchos docentes todavía tienen preferencia por el enfoque clásico de la probabilidad; donde está más asociado a la visión determinista de las matemáticas y desconfían de la aproximación de los resultados que se obtienen al realizar o simular una serie de ensayos de un experimento aleatorio.

Por ello, se plantea el uso de la simulación computacional como un recurso didáctico que puede lograr despertar el interés e incrementar la motivación de los discentes para el aprendizaje de temas relacionadas con probabilidad. En particular, en el caso de la simulación de variables aleatorias continuas y el teorema del límite central, se aconseja realizarlo después de aprender los aspectos teóricos de los modelos de probabilidad continuos en la etapa de las operaciones formales. (Burbano; Pinto; Valdivieso; 2015).

Marco teórico

Interesa del Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK, figura 1) según la propuesta realizada, las siguientes intersecciones:

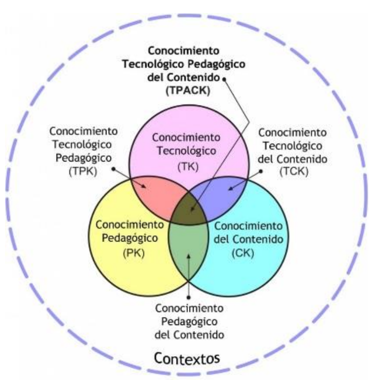


Figura 1. Modelo TPACK por Koehler y Mishra (2006)

Conocimiento pedagógico del contenido

1. *Conocimiento que permite comprender cómo se debe organizar y adaptar un contenido para ser enseñado.*

Inzunsa y Guzmán (2011) consideran que el éxito de un currículo de probabilidad para lograr fomentar el razonamiento probabilístico de los estudiantes depende, en gran medida, de la comprensión de los profesores acerca de la probabilidad, complementado con el conocimiento de las concepciones erróneas de los estudiantes y el uso de representaciones y herramientas.

Más aún, actualmente existe una tendencia por parte de los investigadores de la estocástica que es plantear propuestas del proceso de enseñanza – aprendizaje mediante el significado frecuencial de la probabilidad. De hecho, Batanero, Contreras y Gómez (2014) se centran en las siguientes características del significado frecuencial:

- Posibilidad de estimar una probabilidad teórica a partir de datos de frecuencias.
- Comprensión de las características de resultados aleatorios y de la convergencia.

2. *Forma en que representan y formulan los conceptos de la disciplina, técnicas pedagógicas, que hace que los conceptos sean fáciles o difíciles de aprender.*

Diversos investigadores recomiendan ampliamente hacer uso de simulación y experimentación en la enseñanza de la probabilidad, donde la idea de realizar experimentos es la observación de la estabilidad, que alrededor de la probabilidad empírica adquiere las frecuencias relativas asociado a un suceso aleatorio cuando se aumenta el número de repeticiones, tal como se plantea la Ley de los Grandes Números, y esto constituye el fundamento del enfoque frecuencial. (Inzunsa; Guzmán, 2011; Jaimes; Yáñez, 2013)

Además, el desarrollo de la simulación se sugiere primero, de manera física, con el fin de analizar el comportamiento de resultados aislados, más tarde, el proceso repetitivo de toma de muestras deberá permitir el surgimiento de patrones que lleven a deducciones e inferencias sobre el comportamiento de las distribuciones (Ramírez, 2013).

Alvarado y Batanero (2008, p.8) plantean esta necesidad de repetición con el concepto: "El teorema central del límite, uno de los fundamentos en estadística, estudia el comportamiento de la suma de variables aleatorias, cuando crece el número de sumandos, asegurando su convergencia hacia una distribución normal en condiciones muy generales"

Diversas investigaciones asociadas a la enseñanza del teorema del límite central consideran que hay una complejidad en la comprensión de su significado presentado en los libros de estadística aplicada a la ingeniería y se hallan una variedad de enfoques y aproximaciones. (Alvarado; Batanero, 2008).

Estas deficiencias en la comprensión del concepto de distribución y del teorema del límite central generan otras limitaciones; particularmente en la realización e interpretación en la estadística inferencial: intervalos de confianza y contrastes de hipótesis.

Es por esto, que el proceso repetitivo de toma de muestras a través de la generación de ciclos con la programación, debe buscar que el estudiante acorte la brecha entre el duro proceso imaginativo que sugiere las hipótesis del teorema del límite central y la manipulación de los estimadores de cada muestra que se consiguen al imprimir sus resultados en la hoja de Excel desde Visual Basic.

3. *Estrategias, conocimientos previos, errores conceptuales y metodológicos más frecuentes de los estudiantes*

Estudios evidencian la existencia de concepciones erróneas y sesgos probabilísticos por parte de las personas adultas y estudiantes universitarios, de tal forma, que sin una preparación correcta sobre los futuros profesores y profesores en servicio pueden mostrar razonamientos y sesgos similares en estos estudios. (Inzunsa; Guzmán, 2011)

Sánchez (2009) considera que hay tres principales sesgos probabilísticos durante el proceso de aprendizaje de los estudiantes, esto son: el sesgo de equiprobabilidad, el sesgo de la atención y la representatividad; esto como producto de sus estudios acerca de los errores y dificultades de los alumnos en la resolución de problemas de probabilidad a nivel de secundaria en México.

De esta manera, una enseñanza basada en el uso de la simulación física como computacional, y la reflexión en pequeños grupos sobre estas dificultades pueden ayudar a superar estos sesgos. (Batanero; Contreras; Díaz; Roa, 2012; Batanero; Contreras; Gómez, 2014).

Alvarado y Batanero (2008) consideran que los elementos de significado relacionados con la distribución normal son necesarios para una debida comprensión del teorema de límite central, puesto que en éste es indispensable el uso de esta distribución. Además, en el caso de la enseñanza por simulación, mencionan que el uso de la tecnología por sí sola no es suficiente para la comprensión del teorema, sino que son las actividades de tipo constructiva favorecen el aprendizaje.

Así, en esta propuesta, se pretende que el estudiante vaya generando la representación gráfica instantánea que permite analizar de manera dinámica el comportamiento de la distribución, y su convergencia o no, al aumentar el número de muestras obtenidas mediante la programación básica.

Conocimiento tecnológico del contenido

1. *Involucra todas las formas en que la tecnología limita o facilita la representación, explicación o demostración de conceptos y métodos propios de la disciplina.*

Al realizar experimentos físicos ayuda a generar una mejor comprensión alrededor del experimento aleatorio en cuestiones como la identificación del espacio muestral y en la relación ordenada entre posibilidades a priori y resultados a posteriori. Sin embargo, dadas las pocas repeticiones que se realizan mediante la simulación física; entonces es difícil que los alumnos logren captar ciertas regularidades en el comportamiento del suceso aleatorio que permita dar algún significado a su experiencia y generar conceptos claro de la probabilidad de un evento aleatorio. De esta manera, ante las pocas repeticiones y a la toma de mayor número de muestras se facilita el uso de la tecnología; en particular, las simulaciones computacionales. (Jaimes; Yáñez, 2013)

En particular, en el caso del teorema del límite central, aunque una demostración matemática establece la veracidad del teorema, quizás esto no contribuya mucho a la idea intuitiva del resultado. De esta forma, Alvarado y Batanero (2008) proponen a partir de una población sencilla realizar una simulación con lápiz y papel de la elección de la muestra aleatoria de distintos tamaños de la población y luego utilizar simulación utilizando tecnología para establecer una mejor comprensión del teorema.

Desde luego, el docente debe tener bien claro el alcance de las herramientas computacionales para la enseñanza de la estocástica, pues Arnaldos y Faura (2012) advierten el riesgo del uso de las simulaciones que supone presentarlos a los estudiantes del siguiente sentido: mostrar dónde se encuentran, qué proporcionan y cómo se usan; y dejar a su libertad el uso de las mismas como parte de los materiales a disponibilidad.

En el caso particular de la propuesta, el utilizar únicamente Excel (sin el complemento de Visual Basic), Fathom, Statistica o Geogebra hará que el proceso repetitivo de toma de muestras sea largo, el proceso de construcción de la distribución sea tedioso, la acumulación de los estimadores sea ineficiente, o simplemente se requiera de una programación elevada. Caso contrario a través de Visual Basic como complemento de Excel, que facilita todas las condiciones antes mencionadas.

2. *Qué tecnología son las mejores para enseñar un tema determinado y cómo utilizarlas de forma efectiva para abordarlo.*

En cierto sentido, la simulación es una representación que sustituye su experimento estocástico por otro y su empleo es de gran utilidad en la enseñanza de conceptos en el campo de las distribuciones en el muestreo. Además, se proponen ejercicios para generar muestras aleatorias de observaciones de distintas distribuciones de probabilidad usando los paquetes estadísticos como: Minitab, SAS o plantilla electrónica Excel. (Alvarado; Batanero, 2008)

Se concuerda en nuestra propuesta con Alvarado y Batanero (2008) en los que consideran que, para la enseñanza del teorema de límite central se puede utilizar una simulación gráfica en la computadora como una forma de ilustrar y argumentar esta proposición mediante el aumento progresivo del tamaño de la muestra. Tal como el caso de la aproximación de la distribución normal a la binomial para distintos valores de los parámetros n y p.

3. *De qué modo el contenido disciplinar es transformado por la aplicación de una tecnología.*

Jaimes y Yáñez (2013) afirman el uso correcto de una herramienta computacional, que permite la generación de diversos experimentos aleatorios en gran número de pruebas, puede ayudar a encontrar una aproximación y relacionarla con la probabilidad teórica y el espacio muestral para generar un concepto significativo.

Arnaldos y Faura (2012) mencionan las siguientes aplicaciones de las simulaciones usando tecnología en los aspectos de variables aleatorias y modelos de variables aleatorias; que respalda el trabajo realizado en este documento:

- Variables aleatorias: comprensión de los tipos de variables aleatorias, interpretación de sus principales características, funciones que describen su comportamiento aleatorio.

- Modelos de variables aleatorias: comprensión de la naturaleza y efecto de las variaciones paramétricas, mejorar la capacidad de distinción entre los tipos de modelos.

En la propuesta se utilizan los conceptos previos de biyectividad de funciones (aplicado a distribuciones según Sanabria, 2013), cálculo de inversas y el comportamiento de la función lineal; para generar a partir de un número aleatorio entre 0 y 1, las distribuciones de variables aleatorias continuas: uniforme, la exponencial y la normal. Además, a través de la generación de ciclos se transforma el problema en el proceso de muestreo repetitivo que cumple con las hipótesis del teorema del límite central.

Conocimiento tecnológico pedagógico

1. *Conocimiento de las características y el potencial de las múltiples tecnologías disponibles utilizadas en contextos de enseñanza aprendizaje. E inversamente, conocimiento sobre cómo la enseñanza y aprendizaje se modifican al utilizar la tecnología en particular.*

En el estudio realizado por Jaimes y Yáñez (2013) evidencian que la simulación computacional en probabilidad permite superar algunos de los sesgos o concepciones erróneas que los estudiantes poseen acerca de las secuencias aleatorias o sobre el valor de las probabilidades en experimentos compuestos; como el sesgo de los valores recientes, sesgo del desorden, sesgo de equiprobabilidad y la concepción de la variación constante de las frecuencias relativas.

Diversos investigadores mencionan que la promoción de las actuales tecnologías en la enseñanza de la matemática permite hacer simulaciones y a través de estas se construye un puente entre las ideas intuitivas del discente y los conceptos formales; permitiendo verbalizar sus pensamientos y apropiarse del razonamiento probabilístico. (Castro; Rodríguez, 2005; De Oliveira; Espasandin; 2011)

La programación básica en Visual Basic como complemento de Excel puede permitir que los estudiantes expresen sus interpretaciones, comparaciones y conjeturas (funciones psicológicas de nivel superior, según Feuerstein en Kozulin, 2000), al tener que construir ciclos anidados, condicionales, y actualización de variables.

Conocimiento pedagógico tecnológico del contenido

La triple intersección evidencia, según Mishra y Koehler (2006), que en nuestra propuesta el uso de simulación es fundamental debido a que:

> La tecnología puede jugar un papel esencial en la forma de representar, ilustrar, ejemplificar y demostrar las ideas y conceptos de una disciplina. Supone el desarrollo de una mente abierta y creativa para poder adaptar las herramientas que existen, que no siempre fueron creadas para fines educativos y reconfigurarlas. Siendo así, TPACK requiere de la comprensión de:
>
> - la representación de ideas utilizando la tecnología.
> - Técnicas pedagógicas que utilizan la tecnología en formas constructivas para enseñar un contenido.

- conocimiento sobre qué hace fácil o difícil la comprensión de un concepto y cómo la tecnología puede contribuir a compensar esas dificultades que enfrentan los alumnos.
- conocimiento de las ideas e hipótesis previas de los alumnos y sobre cómo la tecnología puede ser utilizada para construir conocimiento disciplinar.

La integración de la tecnología a la enseñanza de un contenido disciplinar requiere del desarrollo de una sensibilidad que atienda a la relación dinámica y transaccional entre componentes.

La programación de la simulación de estas actividades debería permitir a los estudiantes compartir su estrategia de simulación como una red de intercambio de salida de información. Aquí el profesor debe ser un guía que organice y dirija el conocimiento brindado por las redes, sabiendo destacar la información innecesaria en la programación realizada. Como utiliza Siemens (2004) el conectivismo:

> La integración de principios explorados por las teorías del caos, redes, complejidad y auto-organización. El aprendizaje es un proceso que ocurre al interior de ambientes difusos de elementos centrales cambiantes que no están por completo bajo control del individuo. El aprendizaje (definido como conocimiento aplicable) puede residir fuera de nosotros (al interior de una organización o una base de datos), está enfocada en conectar conjuntos de información especializada, y las conexiones que nos permiten aprender más tienen mayor importancia que nuestro estado actual de conocimiento.

Aspectos teóricos

Los siguientes conceptos son deseables que el estudiante conozca como contexto en el desarrollo de las actividades que se proponen:

Enfoque frecuencia de la probabilidad

Dado un evento asociado a una experiencia aleatoria, la *probabilidad frecuencial* es la frecuencia relativa observada con que ocurre el evento al repetirse la experiencia varias veces. Es decir, si A es un evento, entonces la probabilidad frecuencial corresponde a:

$$P(A) = \frac{\text{núm de experimentos donde el evento } A \text{ ocurre}}{\text{núm total de experimentos realizados}}$$

Ley de los Grandes Números

Dado un experimento, y sea A un evento. Si el experimento se repite un número suficientemente grande de veces, entonces la probabilidad frecuencial de A será muy cercana al valor real de la probabilidad.

Variable aleatoria

Es una función de un espacio muestral Ω asociado a los números reales, es decir, una regla que asigna un único valor real a cada evento del espacio muestral.

Variable aleatoria continua

Se dice que X es una variable aleatoria continua si y sólo si su rango es continuo.

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua

Distribución uniforme: Se dice que X sigue una distribución uniforma en el intervalo $[a, b]$ si su función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 0 & si \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

y se denota $X \sim U[a, b]$.

La función de distribución acumulada corresponde:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x > a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 1 & si \quad x > \ b \end{cases}$$

Por otro lado, si se quiere obtener valores aleatorios de una variable

$$Y \sim U[a, b]$$

Note que si v es un número aleatorio entre 0 y 1 que cumple que $v = F_Y(y)$, entonces

$$v = \frac{y-a}{b-a} \Longrightarrow y = v(a-b) + a$$

Distribución exponencial: Se dice que X sigue una distribución exponencial si su distribución de probabilidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

donde λ es una constante positiva. Se denota $X \sim Exp(\lambda)$.

La función de distribución acumulada corresponde:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Si se quiere obtener valores aleatorios de una variable $X \sim Exp(\lambda)$, note que si v es un número aleatorio entre 0 y 1 que cumple $v = F_X(x)$, entonces

$$v = 1 - e^{-\lambda x} \Longrightarrow x = \frac{-\ln(1-v)}{\lambda} = \frac{-\ln w}{\lambda}$$

con $w = 1 - v \ \in]0,1]$.

Distribución normal: Se dice que X sigue una distribución normal si su función de probabilidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Donde μ y σ son constantes. Se denota $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Para obtener valores aleatorios de una variable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se presenta el problema de que no se cuenta con una fórmula explícita de F_X. Sin embargo, Excel tiene predeterminada de forma numérica la función inversa de F_X mediante el comando =DISTR.NORM.INV(v;μ;σ).

Distribución normal estándar: Se dice que Z sigue una distribución normal estándar si Z sigue una distribución normal con media cero y varianza uno, es decir, $Z \sim N(0,1)$.

Teorema del Límite Central: Sean $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ variables aleatorias mutuamente independientes que siguen una misma distribución, tales que

$$E(X_i) = \mu \quad \text{y} \quad Var(X_i) = \sigma^2, \text{ para } i = 1,2,3, \ldots, n$$

- Considere la variable suma

$$S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$$

Se tiene que:

- $E(S_n) = n\mu$
- $Var(S_n) = n\sigma^2$
- Cuando $n \longrightarrow \infty$ se tiene que $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0,1)$

- Considere la variable aleatoria promedio

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n}$$

Se tiene que:

- $E(\bar{X}) = \mu$
- $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
- Cuando $n \longrightarrow \infty$ se tiene que $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$

Actividades

Actividad 1

1. *Una batería funciona en un tiempo exponencial con promedio de 5 horas. En un lote de 20 baterías, determine la probabilidad de que entre 7 y 12 tarden más de 6 horas.*

Simulación computacional en Excel

Considere la variable X como la duración de una batería en horas. Dado que X sigue una distribución exponencial con media $E(X) = 5$, donde $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, entonces se tiene que $\lambda = \frac{1}{5}$. De esta forma

$$X \sim Exp\left(\frac{1}{5}\right)$$

Luego, sabiendo que la función acumulada de la distribución exponencial asociada a la variable aleatoria continua X está dada por:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{5}}, \text{ con } x \geq 0$$

Observe que si v es un número aleatorio entre 0 y 1 que satisface que $v = F_X(x)$ sea una función biyectiva, entonces

$$v = 1 - e^{-\frac{x}{5}} \Rightarrow x = -5\, ln(1 - v) \text{ (sugerido por Sanabria, 2013)}$$

$$\Rightarrow x = -5\, ln\, w, \text{ donde } w = 1 - v$$

De esta manera, para generar valores aleatorios de la variable X se utiliza la fórmula:

$$x = -5\, ln\, w, \text{ con } w \in]0{,}1]$$

Esta transformación del conocimiento disciplinar, hace que el conocimiento pedagógico del estudiante se vea alterado a partir de la construcción de la distribución.

Con los datos anteriores, se plantea la simulación computacional:

1. Se define la variable "Valor aleatorio" en la celda A1. En la siguiente celda A2 se escribe el comando: =ALEATORIO() para generar valores aleatorios en el intervalo [0, 1]. Dado que se desean realizar 1000 valores aleatorios entonces se arrastra la fórmula de la celda A2 hasta la celda A1001.
2. Se defina la variable "X" en la celda B1 que corresponde a un valor aleatorio de la variable X distribuida de manera exponencial. Para ello, en la celda B2 se escribe el siguiente comando: $= -5 * LN(A2)$ relacionado con la formula $x = -5\, ln\, w$, donde la variable w corresponde a los valores aleatorios de la columna anterior en la hoja de cálculo.

   Luego se arrastra dicha fórmula hasta la celda B1001 para obtener 1000 valores aleatorios de la variable X; considerando este valor como una buena cantidad de experimentos realizados para mostrar la tendencia de la distribución (según Inzunsa; Guzmán, 2011).

   Por ejemplo, en la siguiente imagen en la celda B2 significa que la primera batería tuvo una duración superior a 6 horas (aprox 7.6126 horas).
3. Como primera parte de esta simulación interesa determinar la probabilidad de que una batería tarde más de 6 horas, es decir, $P(X > 6)$. De esta forma, se debe contabilizar los valores de la segunda columna que satisfacen la condición de que $X > 6$ y luego dividir dicha suma entre 1000 para hallar la probabilidad.

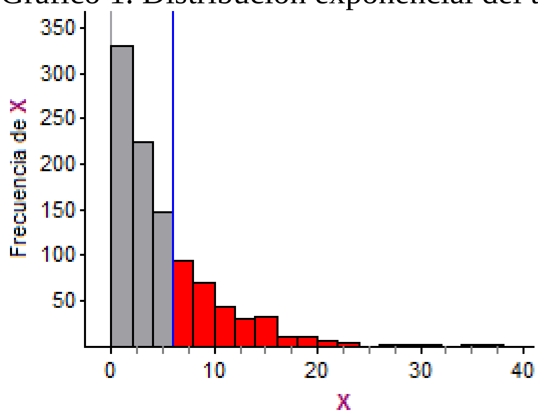
   Se define la variable "*Probabilidad de que tarde más de 6 horas*" en alguna celda cualquiera de la columna D y en la siguiente celda se escribe el comando: $= CONTAR.SI(B2{:}B1001; "> 6")/1000$

	A	B	C	D
1	**Valor aleatorio**	**X**		
2	0.218161504	7.612598243		
3	0.440567445	4.098458671		Probabilidad de que tarde más de 6 horas
4	0.965041132	0.177922775		0.300
1000	0.353359429	5.201347643		
1001	0.430509012	4.213935104		

Figura 2. Simulación computacional en Excel: Batería

La actividad permite variar el conocimiento tecnológico a partir de la construcción gráfica de la distribución, así como señalar la probabilidad solicitada; logrando una interpretación visual del cálculo solicitado.

Gráfico 1. Distribución exponencial del tiempo de duración de la batería.



4. Ahora bien, se desea hallar la probabilidad de que en un lote de 20 baterías, entre 7 y 12 baterías tarden más de 6 horas.

   Para ello, se plantea la siguiente estrategia: se define la variable "Núm Baterias i", con i $\in \{1, 2, \ldots, 100\}$ que corresponde a los 100 experimentos a realizar. Donde a partir de la cuarta columna (D1) hasta la centésima tercera columna (CY) se escribe en la primera celda: Núm Bacterías i (Ver figura 3).

   En la siguiente celda correspondiente a cada columna se escribe el comando: =ALEATORIO(), que asigna un valor aleatorio entre 0 y 1. Ahora, dado que en el enunciado del problema nos indica que se cuenta con un lote de 20 baterías, entonces en cada experimento se debe contar con una muestra de 20 baterías.
   Por lo que, en la cuarta columna se arrastra la celda D1 hasta la celda D21. De igual forma, se realiza con las demás 99 columnas restantes. Es decir, en total tendrán 2000 datos aleatorios que corresponde a 20 baterías por experimento (en este caso, se realizan 100 experimentos).

5. De esta manera se realizan 20 extracciones de baterías en cada experimento. Se considera un experimento exitoso, si se extraen entre 8 y 11 baterías que duran más de 6 horas. Así, en la celda D22 se escribe el siguiente comando:

```
=SI(Y(CONTAR.SI(D1:D20;"<"&$C$4)<=11;CONTAR.SI(D1:D20;"<"&
$C$4)>=8)=VERDADERO;"Éxito";"Fracaso")
```

   donde retorna como posibles resultados: Éxito o Fracaso y además el valor de la celda C4 corresponde a la probabilidad de que una batería tarde más de 6 horas.

   Observe que si se considera la variable Y como el número de baterías de un lote de 20 que duren más de 6 horas, entonces lo solicitado en este problema es $P(7 < y < 12)$ que es equivalente a calcular $P(8 \leq y \leq 11)$

   Luego, esto mismo se realiza con las demás columnas y así en cada experimento obtener un resultado (éxito o fracaso) que nos permita distinguir aquellos procesos donde cumplen o no las condiciones del problema dado. Se desea contabilizar la cantidad de éxitos que resultan de los 100 experimentos realizados y luego hacer el cálculo de la probabilidad respectiva.

   Para esto se define la variable "Probabilidad de que entre 7 y 12 baterías tarden más de 6 horas" y en una celda posterior se escribe el comando: $= CONTAR.SI\ (D22{:}CY22; "Exito")/100$ que retorna la probabilidad buscada.

fx =CONTAR.SI(D22:CY22,"Éxito")/100

C	D	E	F	CX	CY
	Núm Baterias 1	Núm Baterias 2	Núm Baterias 3	Núm Baterias 99	Núm Baterias 100
	0.004802771	0.25037703	0.087157423	0.746606789	0.782787881
Probabilidad de que tarde más de 6 horas	0.624186672	0.300567575	0.211156008	0.644880591	0.734459154
0.311	0.51540988	0.486392136	0.433073789	0.008216337	0.876002324
	0.211069095	0.363097749	0.445215215	0.085749549	0.291409775
	0.921913514	0.911822321	0.913607779	0.309922031	0.753488089
	0.125069477	0.247944442	0.242940769	0.998929319	0.960086745
	0.674553259	0.131234481	0.13358856	0.447733169	0.619361323
	0.877186301	0.483401045	0.304693248	0.852139799	0.599785223
	0.801746994	0.681406115	0.183959256	0.987005442	0.733679034
	0.093488029	0.796229496	0.48036361	0.948562114	0.468172975
	0.550485054	0.113504386	0.709179291	0.806251211	0.356246628
	0.735477732	0.195554607	0.991128173	0.813338044	0.391298367
	0.680295856	0.515679108	0.156054835	0.882504882	0.085569394
	0.043036878	0.636478419	0.071919176	0.860090227	0.675908915
	0.621456742	0.005041174	0.61788222	0.426072593	0.047721021
	0.560637927	0.177014116	0.82755184	0.893911823	0.165198711
	0.033024332	0.462146193	0.012050132	0.314720912	0.853318383
	0.720920085	0.021748692	0.912865619	0.779814968	0.677059079
	0.984902498	0.053751598	0.026263721	0.480431323	0.459749123
	0.660247662	0.195294048	0.620106801	0.474213688	0.867232336
Resultado	Fracaso	Éxito	Éxito	Fracaso	Fracaso
Probabilidad de que entre 7 y 12 baterías tarden más de 6 horas	0.24				

Figura 3. Simulación computacional en Excel: Batería

Con este proceso repetitivo de experimentos y el dinamismo de Excel, el estudiante debe ser capaz de analizar la variabilidad de los datos obtenidos. Además, al comparan resultados entre pares, debe despertar la curiosidad por ver que cada uno obtendrá resultados diferentes pero bastante aproximados entre ellos.

Solución teórica

Dado que X es la duración de una batería en horas, donde $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 5 \Longrightarrow$ $\lambda = \frac{1}{5}$, entonces

$$X \sim Exp\left(\frac{1}{5}\right)$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} P(X > 6) &= 1 - P(X \leq 6) \\ &= 1 - F_X(6) \\ &= 1 - \left(1 - e^{\frac{-1}{5} \cdot 6}\right) \\ &= e^{\frac{-6}{5}} \approx 0.3012 \end{aligned}$$

Considere la variable Y como el número de baterías que tardan más de seis horas de las 20 baterías, donde Y sigue una distribución binomial:

$$Y \sim B\left(20, e^{\frac{-6}{5}}\right)$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} P(7 < Y < 12) &= P(8 \leq Y \leq 11) \\ &= \sum_{k=8}^{11} C(20,k) \cdot \left(e^{\frac{-6}{5}}\right)^k \left(1 - e^{\frac{-6}{5}}\right)^{20-k} \\ &= 0.226606 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que entre 7 y 12 baterías duren más de 6 horas es 0.226606.

Actividad 2

2. *El tiempo que tarda un empacador en empacar una caja de bananos sigue una distribución exponencial con media 90 segundos. La empresa bananera "Costa Rican Bananas" ha decidido despedir a aquellos que en una inspección sorpresa tarden más de 2 minutos.*
   a. *Determine la probabilidad de que un empacador sea despedido.*
   b. *La empresa "Costa Rican Bananas" cuenta con diversas empacadoras en todo el país, y cada una contiene 35 empleados empacadores. La empresa ha decidido además cerrar empacadoras, en las que el promedio por empacar una caja por empacadora sea mayor a 100 segundos. Determine la probabilidad de que una empacadora sea cerrada.*

Simulación computacional en Excel

Parte (a)

Considere la variable X como el tiempo que tarda un empacador en empacar una caja de bananos en segundos. Dado que X sigue una distribución exponencial con media

$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 90 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{90}$. De esta forma: $X \sim Exp\left(\frac{1}{90}\right)$

Con los datos anteriores se puede plantear una posible simulación computacional de la siguiente manera:

1. Se define la variable "Valor aleatorio" en la celda A1. En la siguiente celda A2 se escribe el comando: =ALEATORIO() para generar valores aleatorios en el intervalo [0, 1]. Dado que se desean realizar 1000 valores aleatorios entonces se arrastra la celda A2 hasta la celda A1001.
2. Se define la variable "X" en la celda B1 correspondiente a la variable X distribuida de manera exponencial. Para ello se generan valores aleatorios mediante la siguiente formula:

   $$x = -90\ ln\ w, \text{ con } w \in]0,1]$$

   Para este caso, la variable w corresponde a los valores aleatorios de la columna anterior en la hoja de cálculo. Así, en la celda B2 se escribe el comando: $= -90 * LN(A2)$ Luego, se arrastra dicha fórmula hasta la celda B1001 para obtener 1000 valores aleatorios asociado a la variable X.
3. En este caso se debe determinar la probabilidad de que X > 120 (pues 2 minutos es equivalente a 120 segundos). De esta forma se debe contabilizar los valores generados de la segunda columna que satisfacen la condición de que X > 120 y luego dividir esa suma entre 1000 (cantidad de experimentos realizados) para hallar la probabilidad solicitada.
   De esta manera se define la variable "Probabilidad de ser despedido" en alguna celda de la columna C y en la siguiente celda se escribe el comando:
   $= CONTAR.SI(B2{:}B1001, ">120")/1000$

C5 =CONTAR.SI(B2:B1001,">120")/1000

	A	B	C	D
1	Valor aleatorio	X		
2	0.704546162	31.5181283		
3	0.10943819	199.115583		
4	0.6815953	34.4987279	Probabilidad de ser despedido	
5	0.728054289	28.5641694	0.269	
1000	0.045212062	278.675224		
1001	0.652658156	38.4031606		
1002				

Figura 4. Simulación computacional: Costa Rica Bananas (Parte (a))

Parte (b)

Teníamos que X es el tiempo por empacador al empacar una caja de bananos por segundos; de esta manera, se define la variable $\bar{X}$ como el tiempo promedio que dura una empacadora (35 empleados) en empacar una caja en segundos. Es decir:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{34} + X_{35}}{35}$$

Como $X \sim Exp\left(\frac{1}{90}\right)$ entonces se deduce que la media $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 90$ y la desviación estándar $\sigma = \frac{1}{\lambda} = 90$. De esta forma, para generar X_i valores aleatorios asociados a la variable X con $i = \{1,2,3, \ldots, 34,35\}$ se utiliza la siguiente fórmula: $x = -90\ ln\ w$, con $w \in]0,1]$.

Se puede realizar una posible simulación computacional de la siguiente manera:

El programa principal se llama ***PromedioExponencial***, en ella se escriben las funciones que se utilizará en la respectiva simulación.

1. Se define la variable *i* correspondiente a un valor aleatorio X distribuida de manera exponencial. A dicha variable le corresponde el siguiente comando: $-90 * Log(Rnd())$, donde $Rnd()$ es un comando especial de Visual Basic para generar valores aleatorios en el intervalo [0, 1].
2. Se define la variable *s* que correspondiente a la suma de *n* valores X_i que sigue una distribución normal, donde $i = \{1,2, \ldots, n\}$. Para determinar el promedio de cada muestra se realiza la instrucción $s/35$.
3. Se define la variable *fila* que corresponde a un contador del primer ciclo que controla la cantidad de valores a ejecutar en la hoja de cálculo. Para este caso se van generar 1000 valores aleatorios desde la celda A2 hasta la celda A1001 correspondientes a 1000 experimentos de esta simulación.
4. Se define la variable *n* asociada al tamaño de la muestra de cada experimento, en este caso *n* = 35. Este contador del segundo ciclo nos permite sumar *n* valores donde su resultado se guardará en la variable *s*.
5. Se desea hallar la probabilidad de que el promedio tarde más de 100 segundos, es decir, $P(\bar{X} > 100)$ entonces se define la variable *c* que se le asocia el comando: CountIf(Range("B1:B1001"),">100") que permite contabilizar la cantidad de valores que satisfacen la condición buscada.
6. El comando Cells(i,j) nos permite imprimir datos en la hoja de cálculo en la fila *i* y la columna *j*.

Ahora bien, el código completo del programa diseñado en Visual Basic directamente en las macros de Excel se muestra a continuación:

```
Option Explicit

Sub PromedioExponencial()

Dim i As Single
Dim s As Single
Dim fila As Integer
Dim n As Integer
Dim c As Single
s = 0
fila = 2

Do While fila <= 1001
    n = 1
    s = 0
    Do While n <= 35
        i = -90 * Log(Rnd())
        s = s + i
        n = n + 1
    Loop

    Cells(fila, 2) = s / 35
    fila = fila + 1
Loop

Cells(1, 1) = "Promedio Valores"
Cells(1, 2) = "Probabilidad"
c = Application.WorksheetFunction.CountIf(Range("A2:A1001"),">100")
Cells(2, 2) = c / 1000

End Sub
```

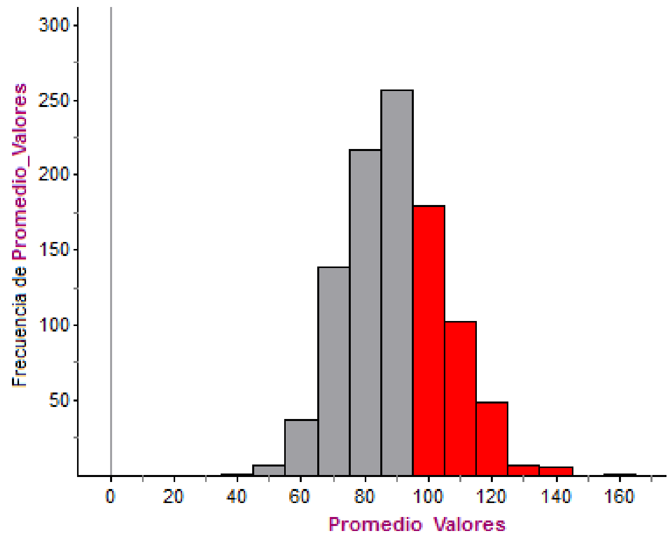
B2 | f_x 0.254000008106232

	A	B	C
1	Promedio Valores	Probabilidad	
2	84.55422211	0.254000008	
3	74.42016602		
4	93.85796356		
5	83.71691132		
6	90.73151398		
7	136.3995514		
8	57.30880737		
9	90.69599915		

Figura 5. Simulación computacional: Costa Rica Bananas (Parte (b))

La representación gráfica de la distribución de los promedios muestrales permite al estudiante analizar de los 1000 experimentos, en cuántos de ellos la duración promedio fue superior a 100 segundos. Además, de observar la tendencia hacia la distribución normal.

Gráfico 2. Distribución de los tiempos promedios que tarda una empacadora en empacar una caja de bananos (Distribución de los promedios muestrales)



Solución teórica

a) Considere X la duración de un empacador para empacar una caja de bananos en segundos, donde $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 90 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{90}$, entonces:

$$X \sim Exp\left(\frac{1}{90}\right)$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} P(X > 120) &= 1 - P(X \leq 120) \\ &= 1 - F_X(120) \\ &= 1 - \left(1 - e^{\frac{-1}{90}\cdot 120}\right) \\ &= e^{\frac{-4}{3}} \\ &= 0.2636 \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay una probabilidad de 0.2636 de que un empacador sea despedido.

b) Se define la variable $\bar{X}$ como el promedio de la duración de una empacadora (35 empacadores) en empacar una caja.

Como $n = 35 \geq 30$, entonces aplicando el Teorema del Límite Central:

$$\bar{X} \backsim N\underbrace{\left(90, \frac{8100}{35}\right)}_{\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

Pues si $X \sim Exp(\lambda)$, entonces $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{(1/90)^2} = 8100$

De esta forma:

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 100) &= 1 - P(\bar{X} < 100) \\ &= 1 - P\left(Z < \frac{100-90}{\sqrt{\frac{8100}{35}}}\right) \\ &= 1 - P(Z < 0.66) \\ &= 1 - \phi(0.66) \\ &= 1 - 0.7454 \\ &= 0.2546 \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay una probabilidad aproximada de 0.2546 de que una empacadora sea cerrada.

Actividad 3

3. *Jorge elaboró un software para resolver integrales no triviales, el cual tarda en promedio 6 segundos resolviendo una integral no trivial, con una desviación estándar de 0.75 segundos. Si el programa resolvió una lista de 30 integrales no triviales, determine la probabilidad de que el tiempo total en resolverlas sea inferior a 195 segundos.*

Simulación computacional en Excel

Para este caso X es el tiempo en segundos que tarda el software para resolver integrales no triviales, donde $\mu = 6$ y $\sigma = 0.75$. Además, se define S_{30} como el tiempo total que tarda el programa en resolver 30 integrales no triviales, es decir:

$$S_{30} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{29} + X_{30}$$

Dado que X sigue una distribución desconocida con media μ y desviación estándar σ conocidos, entonces a dicha variable no se le puede asociar una función de distribución de variable continua, pues no se sabe con certeza la manera en que se comportan los datos aleatorios asociado a X.

Sin embargo, para generar valores aleatorios en esta simulación computacional, se considera el siguiente resultado empírico relacionado a la probabilidad de una distribución normal:

$$P(\mu - 4\sigma \leq X \leq \mu + 4\sigma) \approx 0.99$$

De esta forma, se van a generar los valores aleatorios mediante la relación anterior, dado que se pueden obtener casi todos los datos aleatorios en cada experimento. Para este caso, en particular como $\mu = 6$ y $\sigma = 0.75$ entonces $X \in [3,9]$.

Se debe aclarar que la probabilidad frecuencial que se obtenga de esta simulación corresponde en realidad a una aproximación conservadora, donde en ocasiones es bastante cercana a la probabilidad teórica, esto pues, al no saber con certeza la distribución de la variable X entonces no es posible hallar la probabilidad esperada de manera computacional.

Dicha simulación se realiza mediante las macros de Visual Basic en Excel. Debido a que para cada experimento se deben tomar 30 muestras y obtener su respectivo tiempo total. Por lo que a la hora de realizar 1000 experimentos se obtendrán un total de 30000 datos aleatorios que implicará es una simulación muy engorrosa por la cantidad de datos.

Por lo que se propone utilizar programación básica, específicamente por medio de ciclos iterativos para realizar cálculos de manera eficiente. De esta forma, la simulación de este problema se realiza directamente en la hoja de programación de Visual Basic y se ejecuta el programa mostrando los datos en la hoja de cálculo de Excel.

El programa principal se llama ***SumaAproxNormales***, en él se escriben las funciones que se utilizarán en la respectiva simulación.

1. Se define la variable *i* correspondiente a un valor aleatorio *X* en el intervalo [3, 9]. A dicha variable le corresponde el siguiente comando: $6 * Rnd() + 3$, donde $Rnd()$ es un comando especial de Visual Basic para generar valores aleatorios en el intervalo [0, 1].

   Observe que la variable i está asociada a la función $y = (b - a)x + a$, donde $x \in [0,1]$, $y \in [a, b]$ con $a = 3$ y $b = 9$, o sea, $y = 6x + 3$.

2. Se define la variable *S* que correspondiente a la suma de *n* valores X_i que sigue una distribución normal, donde $i = \{1,2,, \dots, n\}$.
3. Se define la variable *fila* que corresponde a un contador del primer ciclo que controla la cantidad de valores a ejecutar en la hoja de cálculo de Excel. En este caso se van generar 1000 valores aleatorios desde la celda A2 hasta la celda A1001.
4. Se define la variable *n* asociada al tamaño de la muestra de cada experimento, en este caso *n* = 30. Este contador del segundo ciclo nos permite sumar *n* valores donde su resultado se guardará en la variable *s*.
5. En este caso se desea hallar $P(S < 195)$ entonces se define la variable *c* que se le asocia el comando: CountIf(Range("B1:B1001"),"<195") que permite contabilizar la cantidad de valores que satisfacen la condición buscada.
6. El comando Cells(i,j) nos permite imprimir datos en la hoja de cálculo en la fila *i* y la columna *j*.

   Ahora bien, el código completo del programa diseñado en Visual Basic directamente en las macros de Excel se muestra a continuación:

```
Sub SumaAproxNormales()

Dim i As Single
Dim s As Single
Dim fila As Integer
Dim n As Integer
Dim c As Single
s = 0
fila = 2
Do While fila <= 1001
    n = 1
    s = 0
    Do While n <= 30
        i = 6 * Rnd() + 3
        s = s + i
        n = n + 1
    Loop
    Cells(fila, 1) = s
    fila = fila + 1
Loop
Cells(1, 1) = "Suma Valores"
Cells(1, 2) = "Probabilidad"
c = Application.WorksheetFunction.CountIf(Range("A2:A1001"), "<195")
Cells(2, 2) = c / 1000
End Sub
```

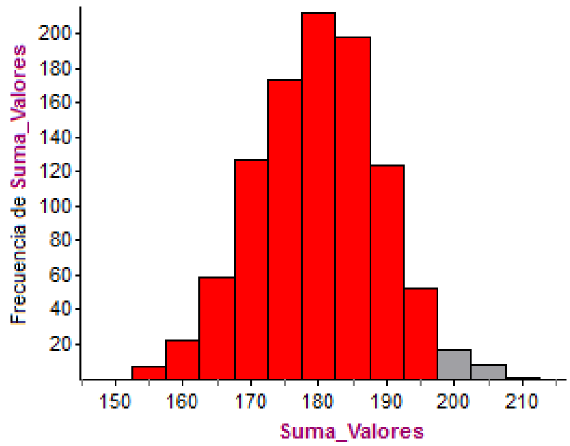
B2 | *fx* | 0.9549999

	A	B	C
1	Suma Valores	Probabilidad	
2	175.131546	0.954999983	
3	172.0077515		
4	173.9867096		
5	196.7796173		
6	191.5630188		
7	167.6452179		
8	187.6789856		
9	178.0463257		

Figura 6. Simulación computacional: Integrales

La gráfica de las sumas muestrales se presenta a continuación:

Gráfico 3. Distribución de los tiempos totales que tarda el software en resolver 30 integrales (Distribución de las sumas muestrales)



Solución teórica

Sean X el tiempo en segundos que tarda el software para resolver integrales no triviales.

$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{29} + X_{30}$ el tiempo total en segundos que tarda el programa en resolver 30 integrales no triviales,

Como $n = 30 \geq 30$, entonces aplicando el Teorema del Límite Central:

$$S \backsim N \underbrace{(180, 16.875)}_{(n\mu, n\sigma^2)}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} P(S < 195) &= P\left(Z < \frac{195 - 180}{\sqrt{16.875}}\right) \\ &= P(Z < 3.65) \\ &= \phi(3.65) \\ &= 0.9999 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad aproximada de que en total tarde menos de 195 segundos en resolver las 30 integrales no triviales es 0.9999.

Bibliografía

Alvarado H., Batanero C. (2008). Significado del teorema de central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística. *Estudios Pedagógicos*. 34(2), 10-26. Universidad Austral de Chile, Valdivia, Chile.

Arnaldos F., Faura U. (2012). Aprendizaje de los fundamentos de la probabilidad apoyado en las TICs. *@tic revista d'innovació educativa*. 9, 131-137. Universitat de València, Valencia, España.

Batanero C., Contreras J., Gómez E. (2014). Conocimiento Matemático de Futuros Profesores para la Enseñanza de la Probabilidad desde el Enfoque Frecuencial. *Boletim de Educação Matemática* (Bolema). 28 (48), 211-227. Río Claro, Brasil.

Batanero C., Contreras J., Díaz C., Roa R. (2012). Evaluación de Sesgos en el Razonamiento sobre Probabilidad Condicional en Futuros Profesores de Educación Secundaria. *Boletim de Educação Matemática* (Bolema). 24 (44), 1210-1221. Río Claro, Brasil.

Burbano V., Pinto J., Valdivieso M. (2015). Formas de usar la simulación como un recurso didáctico. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*. 45, 18-35. Fundación Universitaria Católica del Norte, Medellín, Colombia.

Castro W., Rodríguez O. (2005). Uso de herramientas computacionales para el aprendizaje de las matemáticas. *El Hombre y la Máquina*. 24, 47-51. Universidad Autónoma de Occidente, Cali, Colombia.

De Oliveira L. Espasandin C. (2011). O Uso de Simuladores e a Tecnologia no Ensino do Estocástica. *Boletim de Educação Matemática* (Bolema). 24(40), 662-673. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Río Claro, Brasil.

Inzunsa S. (2006). *Significados que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica*. Tesis doctoral no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

Inzunsa S., Guzmán M. (2011). Comprensión que muestran profesores de secundaria acerca de los conceptos de probabilidad: un estudio exploratorio. *Educación Matemática*. 23(1), 64-77. Grupo Santillana, D.F, México.

Jaimes E., Yáñez G. (2013). Efectos de la simulación en la comprensión de la ley de los grandes números. *Revista Integración*. 31(1), 70-83. Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Kozulin A. (2000). *Instrumentos Psicológicos*. Primera edición. Barcelona: Paidós.

Mishra P., Koehler M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: a new framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*. 108 (6), 1017-1054. Columbia University. New York. United States.

Ramírez G. (2007). Formas de razonamiento que muestran estudiantes de maestría en Matemática Educativa sobre distribuciones muestrales mediante problemas de simulación en Fathom. *Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (XII CIAEM)*. Querétaro, México.

Ramírez G. (2013). Simulación física y computacional: estrategia metodológica para resolver problemas estocásticos, *Memorias del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VII CIBEM)*. Montevideo, Uruguay.

Ramírez G., Rodríguez K. (2014). *Ejercicios Resueltos de Probabilidades*. Segunda Edición. Cartago, Costa Rica. Tecnológico de Costa Rica: Publicaciones ITCR.

Sanabria G. (2012). *Comprendiendo las Probabilidades.* Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Sanabria G. (2013). Simulación en Excel de variables aleatorias continuas, *Memorias del III Encuentro sobre Didáctica de la Probabilidad, la Estadística y el Análisis de Datos* (*IV EDEPA*). Cartago, Costa Rica.

Sánchez E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemática de la secundaria en México. *Educación Matemática*. 21(2), 41-45. Grupo Santillana México, D.F., México.

Siemens G. (2004). *Conectivismo: Una teoría de aprendizaje para la era digital.* (Diego Leal, trad.) Elearnspace. Winkler, Canadá. Recuperado de

http://www.fce.ues.edu.sv/uploads/pdf/siemens-2004-conectivismo.pdf

La probabilidad como elemento orientador de la toma de decisiones

Giovanni Sanabria Brenes[1] & Félix Núñez Vanegas[2]

Resumen

La resolución de problemas como metodología de enseñanza actualmente ocupa un lugar privilegiado en la matemática. La enseñanza de la probabilidad, considerada como una disciplina de las matemáticas, no debería estar desligada de esta metodología y sí permear sus procesos de aprendizaje. No obstante, siendo la didáctica de la probabilidad un campo incipiente, las propuestas en torno de su enseñanza son pocas, y encontrar propuestas didácticas basadas en la resolución de problemas, es difícil. Lo anterior plantea entonces interrogantes válidas, tales como, si se considera a la probabilidad como modelo para resolver problemas, ¿cómo resolver con éxito un conjunto de situaciones problema? Por otro lado, ¿Qué limitaciones tiene el modelo probabilístico en la resolución de dichas situaciones? Y desde luego también, es natural preguntarnos, ¿cómo desarrollar en el estudiante el pensamiento probabilístico a través de situaciones problemáticas?

El presente trabajo pretende dar una respuesta parcial a estas interrogantes, recurriendo a los principales referentes teóricos de resolución de problemas: Polya (1965), Schoenfeld (1985) y Brousseau (1986). Y además, se consideran los significados de probabilidad propuestos por Batanero (2005). Así, se propone una clasificación de las situaciones problemas en probabilidad: Aquellas centradas en el cálculo de probabilidades (ampliamente tratadas en los libros de texto), las que tienen que ver con la toma de decisiones y las situaciones ajenas al azar que utilizan la probabilidad como modelo.

Por otro lado, queremos caracterizar las situaciones problema que tienen que ver con toma de decisiones. Así, se parte de un problema básico de cálculo de probabilidades con dados, y poco a poco a la luz de referentes teóricos, este se va transformado en una situación problema de toma de decisiones que permita abordar la enseñanza de la probabilidad. En este trabajo, solo se diseña la situación problema, esta requiere ser validada en el aula.

Finalmente, producto de la construcción de la situación, se plantean una serie de características y recomendaciones para la formulación de situaciones problema de toma decisiones con fines didácticos.

Palabras clave: didáctica, probabilidad, situaciones problema, resolución de problemas.

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica -- Universidad de Costa Rica, gsanabria@itcr.ac.cr
[2] Instituto Tecnológico de Costa Rica -- Universidad de Costa Rica, fnunez@itcr.ac.cr

Abstract

Solving problems as teaching methodology is nowadays used in math. Teaching of probability, considered as a discipline of mathematics, should not be detached from this methodology and should permeate their learning processes. However, being the teaching of probability an emerging field, proposals around his teaching hardly appear, and find educational proposals based on problem solving, it is difficult. This raises valid questions such as the following: If we consider the probability as a model to solve problems, how to solve successfully a set of problem situations? On the other hand, what limitations does the probabilistic model in resolving such situations? And also, it is natural to ask how the student develop probabilistic thinking through problem situations?

This paper aims to give a partial answer to these questions, taking as base, theoretical referents on solving problems: Polya (1995), Schoenfeld (1985) and Brousseau (1986). Beside of this, we are considering the different meanings of probability proposed by Batanero (2005). Of this way, it is considered in this paper first, a classification of situations problems in probability: Those focused on the calculus of probabilities (widely discussed in textbooks), others which have to do with made decisions and situations beyond random probability using as a model.

On the other hand, we want to characterize problem situations that have to do with made decisions. To do this, we take a basic problem of calculating probability using dices, and little by little, through theoretical referents, our problem is becoming in to a made decision situation problem, which allows to aboard the probability teaching. In this paper it is designed only the situation problem, and it is required to be validated in the classroom.

Then, once it made this classification, we offer a recommendation about of using this situations in different moments of the teaching process.

Finally, as a result of construction situation, a characteristics and recommendation series are posed in order to formulate made decision situation problems with teaching purposes.

Keywords: Didactics, probability, situation problems, solving problems.

I. La resolución de problemas en la enseñanza de la probabilidad

Las teorías en didáctica de las matemáticas actuales se centran en una enseñanza basada en la resolución de problemas. En particular, la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau (1986), señala que el profesor debe diseñar situaciones problema cuya solución sea el conocimiento que se quiere enseñar. Así, se plantean uno o varios problemas al estudiante (situación a-didáctica), el cual debe ser motivado, para que por medio de sus conocimientos previos, logre resolverlos y así lograr la devolución de la situación, en la que le devuelve la responsabilidad de su aprendizaje al profesor. Cuando se logra la devolución de la situación, el profesor toma este conocimiento para institucionalizarlo, es decir, el profesor relaciona este conocimiento contextualizado adquirido con el saber formal pretendido. Luego este saber debe ser aplicado en la resolución de problemas. El aprendizaje en esta teoría se evidencia, cuando en un medio a-didáctico, en un contexto fuera incluso del ámbito escolar, el estudiante es capaz de aplicarlo para resolver algún problema en el que intervenga dicho conocimiento. Por otro lado, Vérgnaud (1990), en su teoría de Campos Conceptuales establece que, un conocimiento si se precia de ser racional, éste debe ser operatorio, de lo contrario, no es conocimiento.

En ese sentido, la probabilidad no debe ser utilizada con el único fin de medir la posibilidad de ocurrencia de eventos, como se hace en muchos libros de texto, donde los problemas se reducen a "calcule la probabilidad de….".

De acuerdo a lo anterior, el concepto de probabilidad se adquiere en su aplicación, dándole sentido al concepto.

Así, la resolución de problemas juega un papel importante en la enseñanza de la probabilidad. Sobre esto, Polya (1965) señala la necesidad de educar nuestra intuición para desarrollar una heurística o arte para resolver los problemas. Sin embargo, Schoenfeld (1985) señala que además de las heurísticas planteadas por Polya es necesario agregar tres dimensiones más para tener éxito en la resolución de problemas, éstas son: Recursos (conocimientos previos), Control (habilidad para monitorear y evaluar el proceso de resolución del problema) y el Sistema de Creencias (creencias sobre lo que es conocer y hacer matemática).

La resolución de problemas debe permear el proceso de enseñanza, y debe estar presente no solo al final para aplicar los conceptos adquiridos, sino también, al inicio, para aprehenderlos. El profesor debe diseñar buenas situaciones problema para lograr estos objetivos.

En el caso de probabilidad, ¿Qué es resolver un problema? Al revisar diversos libros de texto, aunque algunos plantean situaciones atractivas y contextualizadas, el problema se reduce al cálculo de la probabilidad de un determinado evento. Esto da la sensación de que se busca calcular probabilidad sin ningún otro fin, más que el de calcular. Así, después de abordar el estudio de un tópico de probabilidad, los problemas a resolver se reducen a calcular probabilidades.

Si bien se puede aprovechar el concepto intuitivo de probabilidad que posee el estudiante, el fin de un ambiente a-didáctico es que el conocimiento a enseñar surja del tratamiento con la situación y no que la misma situación lo mencione.

Entonces, ¿cuáles situaciones problema pueden ser útiles en la enseñanza de la probabilidad? Con base en lo anterior, proponemos las siguientes:

Para la introducción del concepto de probabilidad. Se recomienda utilizar situaciones sobre toma decisiones.

Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de probabilidad. En esta etapa debe predominar las situaciones centradas en el cálculo de probabilidades, pero estás se pueden combinar con situaciones sobre toma de decisiones y situaciones ajenas al azar que utilicen la probabilidad como modelo.

Para la aplicación de los conocimientos aprendidos. Se recomienda el uso principalmente de situaciones sobre toma de decisiones y situaciones ajenas al azar que utilizan la probabilidad como modelo.

Así se proponen tres tipos de situaciones: las situaciones centradas en el cálculo de probabilidades (ampliamente tratadas en los libros de texto), las situaciones sobre toma de decisiones (que serán abordadas en un próximo trabajo) y las situaciones ajenas al azar que utilizan la probabilidad como modelo (a exponer en el presente trabajo).

Las situaciones centradas en el cálculo de probabilidades son ampliamente tratadas en los libros de texto. En cuanto a las situaciones ajenas al azar que utilizan la probabilidad como modelo, éstas fueron descritas en Sanabria & Núñez (2016).

El presente trabajo pretende caracterizar las situaciones problema que tiene que ver con toma de decisiones, de tal manera que, se parta de un problema básico de cálculo de probabilidades con dados, y poco a poco, a la luz de referentes teóricos, el mismo se va transformado en una situación problema de toma de decisiones que permita abordar la enseñanza de la probabilidad.

Finalmente, producto de la construcción de la situación, se plantean una serie de características y recomendaciones para la formulación de situaciones problema de toma decisiones con fines didácticos.

II. La toma de decisiones y el cálculo de probabilidades

Generalmente en las clases de probabilidad los problemas se reducen al cálculo de la probabilidad de un determinado evento. La resolución de un problema de calcular una probabilidad de un evento, consiste en redactar el evento en términos de matemáticas y proceder a utilizar el algoritmo adecuado para calcular la probabilidad de dicho evento.

Para entender lo que estamos hablando, consideremos la siguiente situación.

Ejemplo. En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lanzar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde. ¿Cuál es la probabilidad de ganar DADOS A SEIS?

Solución. El problema tiene como único fin calcular una probabilidad: la probabilidad de que al lanzar dos dados distintos la suma de los resultados sea menor igual a 6. La siguiente tabla muestra los posibles resultados de la suma al lanzar dos dados, se sombrean los resultados menores iguales a seis:

Dado 2

Dado1

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

5	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
6	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*

Resulta que de los 36 posibles resultados al lanzar dos dados sólo hay 15 en los cuales la suma de los resultados es menor igual a 6. Por lo tanto, la probabilidad de ganar el juego es 15/36.

Se resolvió el problema. Note que solo se hizo el cálculo pero no interesa utilizarlo para algo. Es más, para el estudiante, no interesa saber cuánto da la probabilidad, solo si lo hizo correcto o no. El único fin del estudiante es que su cálculo concuerde con la respuesta correcta.

Estos tipos de problemas no entran en las situaciones problema de Brousseau (1986) y descontextualizan el concepto de probabilidad. Recordemos que un concepto adquiere sentido en su aplicación. Así se deben plantear situaciones en las cuales el estudiante al involucrarse con el problema, vea como una opción recurrir a la probabilidad para medir la posibilidad de ocurrencia de uno o varios eventos que detecte, y utilice el valor de esas probabilidades para dar una solución al problema. Pero, ¿Cómo serán estas situaciones problema? ¿Qué tipo de solución dan al problema?

Para plantear estas situaciones problemas debemos analizar las aplicaciones del concepto de probabilidad. Una de las principales aplicaciones de la probabilidad es la toma de decisiones. Cambiar un problema como "calcule la probabilidad de ganar el juego" por "¿Jugaría dicho juego?" o "pagaría por jugar dicho juego", le da sentido al problema e involucra al estudiante.

Replanteemos el ejemplo anterior.

Ejemplo. En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lazar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Si se gana el juego, se obtiene un premio de 1 500 colones. ¿Jugarías DADOS A SEIS?

En esta situación problema el estudiante debe tomar una decisión: jugar o no DADOS A SEIS. Así, para decidir se requiere que el estudiante recurra a un subproblema que le ayudara a decidir, este es: ¿Cuál es la probabilidad de resolver DADOS A SEIS?

De acuerdo al ejemplo anterior, la probabilidad de ganar el juego es de 15/36. Pero la solución del problema no queda ahí, se debe tomar la decisión. Resulta que 15/36 es aproximadamente 41.67%. Así, la probabilidad de ganar DADOS A SEIS es cercana al 42% que es menor al 50%, por lo que la decisión más racional es no jugar el juego, pues es mayor la probabilidad de no ganarlo (cerca del 58%) que la probabilidad de ganarlo (cerca del 42%).

La probabilidad se puede ver como un modelo para resolver problemas de toma de decisiones. Una de las características principales del modelo probabilístico es que no es determinista, es decir la solución brinda al problema de toma de decisiones no es la correcta sino la que probablemente sea más beneficiosa.

El cálculo de probabilidades por sí solo no es atractivo para los estudiantes y erosiona el concepto de probabilidad.

III. La probabilidad: un insumo para tomar decisiones

Considere de nuevo el juego DADOS A SEIS del ejemplo anterior. En este problema el estudiante debe tomar una decisión: jugar o no DADOS A SEIS. Esta decisión es importante, pues puede perder los 1000 colones que da para jugar o por el contrario, obtener una ganancia de 500 colones en caso de ganar el juego. Así, la probabilidad surge como herramienta que orienta la decisión a tomar.

Polya (1965) menciona que la primera etapa para resolver un problema es entenderlo. De acuerdo al análisis anterior, parte de entender un problema de toma de decisiones es ver las repercusiones de las distintas decisiones que se pueden tomar, y ver lo conveniente de tomar la mejor decisión. El profesor puede limitar esta etapa importante si, por ejemplo, lee el problema e inmediatamente les dice a los estudiantes "¿Cuál probabilidad es la que se debe calcular en este problema?". Es importante darle el tiempo al estudiante para que entienda el problema y educarlo en esto, por ejemplo en los primeros problemas se le puede solicitar como parte inicial del problema que "Describa las repercusiones de las distintas decisiones a tomar".

Como se mencionó antes, una decisión racional en el juego de Dados a SEIS es no jugar, pues la probabilidad de ganar el juego es menor al 50%.

La decisión racional que tomemos con base en la probabilidad no es la que va ocurrir si se repite la experiencia aleatoria, más bien es la más probable que ocurra. En el ejemplo note que en realidad se calcularon las probabilidades de dos eventos: ganar el juego (cerca de 42%) y perder el juego (cerca del 58%). Resultó que la probabilidad de perder es la mayor, por lo tanto una decisión racional es no jugar el juego pues es muy probable perder el dinero que pague por jugar.

Continuando con nuestro ejemplo, una vez que los estudiantes sean conscientes de que, de acuerdo a la probabilidad, se decide jugar o no, simulamos la situación con ellos para ver qué hubiera sucedido si su decisión fuera jugar. Resulta que algunos ganaron, entonces ¿se tomó la mejor decisión?

La probabilidad orienta la toma de decisiones pero no es ella la que toma la decisión. En otras palabras, la probabilidad nos da un insumo para que tomemos la decisión. Nunca nos dirá cuál es la mejor decisión, solo nos dice que es lo más probable que ocurra.

Por ejemplo, don Juan no sabe si debe comprar o no lotería. Para tomar la decisión recurre a la probabilidad y está le dice que es muy muy poco probable que se gane el premio mayor. Así, si decide comprar lotería es muy probable que pierda el dinero. Sin embargo, puede suceder que don Juan, se arriesgue, compre lotería y se gané el premio mayor.

Volviendo al ejemplo DADOS A SEIS,. Ana puede decidir, una vez vista la probabilidad de ganar este juego, pagar por jugar pues aunque la probabilidad de ganar es menor al 50%, no es para nada baja (cerca del 42%), es más, es mucho mayor la probabilidad de ganar DADOS A SEIS que de ganar la lotería. Pero entonces, ¿no sirvió de nada el cálculo de la probabilidad para tomar la decisión?

En realidad, en el caso de Ana, la probabilidad orientó su decisión, pues si esta hubiera sido muy baja (por ejemplo un 1%), Ana quizás no se atreva a tomar el riesgo de jugar.

En resumen, la probabilidad nos brinda un insumo para tomar la decisión, pero la decisión que se tome es un balance entre la probabilidad y el riesgo que estoy dispuesto a tomar. El riesgo es un concepto muy familiar al ser humano. Algunos constantemente asumimos riesgos en distintas situaciones de nuestra vida.

Lo anterior implica algo que quizás a los docentes de matemática no les agrade, la incertidumbre en la solución de un problema de toma de decisiones. No hay una respuesta única y esto puede chocar con el carácter deductivo de la matemática.

En nuestro ejemplo, de acuerdo a lo anterior, la decisión puede ser jugar el juego o no jugarlo. Ambas decisiones son correctas si justifica bien su respuesta con respecto a la probabilidad y el riesgo que está dispuesto a tomar. Así las posibles respuestas se pueden agrupar en dos tipos:

1. Se decide no jugar pues la probabilidad de perder el juego es mayor a la probabilidad de ganar.
2. Se decide jugar pues pese a que la probabilidad de perder el juego es mayor a la probabilidad de ganar, la probabilidad de ganar no es descartable y hay posibilidades significativas de ganar. Así se decide jugar y asumir el riesgo.

IV. Los significados de probabilidad y la toma de decisiones

Batanero (2005) brinda los distintos significados históricos de la probabilidad:

- Significado intuitivo. Es producto de ideas intuitivas y se da en personas que no han estudiado probabilidades, pero a través de frases y expresiones logran cuantificar el grado de ocurrencia de un evento.
- Significado laplaciano. La probabilidad es vista como un valor relativo formado por el número de resultados que favorecen el evento, entre el número total de resultados. Este significado es aplicable cuando la cantidad total de resultados es finita y estos son equiprobables.
- Significado frecuencial. La probabilidad es el valor al que se acerca la frecuencia relativa con que es observado el evento cuando la cantidad de veces que se repite un experimento aumenta, suponiendo que ese valor límite existe. En este caso, la frecuencia relativa con que es observado el evento, cuando la experiencia se repite un número grande de veces, es una aproximación a la probabilidad. Para un abordaje más detallado de este nivel puede consultar Sanabria & Núñez (2010, 2011).
- Significado subjetivo. La probabilidad es el grado de ocurrencia del evento basado en el conocimiento y la experiencia personal. Esta puede ser diferente para distintas personas.
- Significado teórico. La probabilidad es una teoría matemática formalizada.

Sobre estos significados de probabilidad, Batanero (2005) indica: "… su enseñanza no puede limitarse a una de estas diferentes perspectivas, en razón de que están ligadas dialécticamente. La probabilidad puede contemplarse como razón de posibilidad a favor y en contra, como evidencia proporcionada por los datos, como grado de creencia personal y como modelo matemático que ayuda a comprender la realidad".

Por lo tanto, una buena propuesta sobre la enseñanza de la probabilidad debe integrar los otros significados de probabilidad. Así, es importante que el estudiante confronte la probabilidad obtenida (de forma frecuencial o teórica) con el valor intuitivo que él tenía de esa probabilidad. Así, en la enseñanza de la probabilidad, el docente debe buscar situaciones problema que le permitan recorrer la diversidad semántica del concepto de probabilidad, pues estos distintos significados nutrirán y darán forma al concepto que adquiera en probabilidad. Pero, ¿Cómo introducir los significados de probabilidad en la toma de decisiones?

En los problemas de toma de decisiones se puede rescatar los significados de probabilidad y ver cómo estos influyen en la toma de decisiones. A nivel de secundaria los significados utilizados son: intuitivo, frecuencial y teórico.

El significado intuitivo de probabilidad ayuda a comprender el problema y se puede asociar con una toma de decisión intuitiva para resolver el problema, y que luego se puede contrastar con la decisión final. Además, esto permite ver la existencia de mitos o conceptos erróneos.

Ejemplo (¿Juegas o no?) En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lazar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Si se gana el juego, se obtiene un premio de 1 500 colones. Se debe tomar una decisión: jugar o no DADOS A SEIS.

a) Analice las repercusiones de las diferentes decisiones que se puede tomar.

b) Intuitivamente, ¿Cuál decisión tomaría? ¿Por qué?

En el ejemplo, la parte "a)" corresponde a la sección anterior. La parte b) es importante que el docente analice las respuestas de sus estudiantes.

Por ejemplo, un estudiante puede decir que tomará la decisión de no jugar, pues los resultados donde la suma es menor a 6 son: 2,3, 4,5 y 6. Estos son 5 de 11 resultados, por lo que no es favorable jugar. Sin embargo esto refleja un obstáculo epistemológico, que traducido a probabilidad, el estudiante está utilizando la Ley de Laplace para calcular la probabilidad a eventualidades no equiprobables. Posiblemente, esto se evidencie más claramente cuando en las partes siguientes del problema se solicite tomar la decisión.

Pero además, el significado intuitivo se puede introducir al solicitarle al estudiante que simule en concreto varias veces la experiencia aleatoria, ver qué decisión tomaría con base en los datos obtenidos y comparar esta decisión con la decisión racional según la probabilidad. Esto permite introducir la importancia de la Ley de los Grandes Números, el significado frecuencial y además favorece el entendimiento del problema.

Ejemplo (¿Juegas o no?) En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lazar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Si se gana el juego, se obtiene un premio de 1 500 colones. Se debe tomar una decisión: jugar o no DADOS

A SEIS.

a) Analice las repercusiones de las diferentes decisiones que se puede tomar.

b) Antes de decidir si se va al puesto a pagar por jugar este juego, juegue DADOS A SEIS en el aula, veinte veces.

c) Intuitivamente, ¿Cuál decisión tomaría teniendo en cuenta los datos obtenidos en b)? ¿Por qué?

En este ejemplo, note que la parte b) favorece que el estudiante comprenda bien el problema y vea cuándo gana y cuándo pierde. Veamos las respuestas que pueden obtener tres estudiantes:

	# de veces que se ganó	Ganó	Decisión intuitiva
Karla	7	Menos de la mitad	No jugar
Jorge	10	La mitad	Es indiferente
Anthony	12	Más de la mitad	Sí jugar

Como vimos, la decisión racional utilizando la probabilidad es la de Karla. Pero ¿por qué la decisión intuitiva puede fallar?

Recuerde que la Ley de los Grandes Números establece las condiciones bajo las cuales la probabilidad frecuencial de que ocurra el evento se aproxima a la probabilidad real o teórica: Dada una experiencia aleatoria, sea A un evento, si la experiencia se repite un número suficientemente grande de veces, entonces la probabilidad frecuencial de A será muy cercana al valor real de la probabilidad.

Así, pocas simulaciones de la situación involucrada puede llevar a tomar una decisión intuitiva incorrecta. Esto es parte de la comprensión correcta del significado frecuencial de probabilidad.

El significado frecuencial de probabilidad se puede introducir en el cálculo de la probabilidad.

Ejemplo (¿Juegas o no?) En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lazar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Si se gana el juego, se obtiene un premio de 1 500 colones. Se debe tomar una decisión: jugar o no DADOS A SEIS. Realice un análisis formal de la situación y conteste: ¿Jugaría DADOS A SEIS?

En este ejemplo, como ya se mencionó, para resolverlo el estudiante debe recurrir a calcular la probabilidad de ganar el juego para orientar su decisión. Este cálculo lo puede realizar utilizando probabilidad frecuencial. Para ello, simulemos este juego cien veces utilizando Excel. Para eso se denota en la hoja de Excel:

Celda	A1	B1	C1
Escribir	Dado1	Dado2	¿Ganó?
Celda	A2	B2	C2
Escribir	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=SI(A2+B2<=6;"SI";"NO")

Note que si la de los resultados de los dados es menor a seis (A2+B2<=6), entonces se da con respuesta SÍ, pues si se ganó el juego. Hasta el momento se ha simulado sólo un juego, donde un posible resultado es:

	A	B	C
1	Dado 1	Dado2	¿Ganó?
2	4	1	SI
3			

Para simular cien juegos, basta seleccionar las celdas escritas de la fila 2 y con el mouse arrastrar estas fórmulas hasta la fila 101, obteniendo

	A	B	C
1	Dado 1	Dado2	¿Ganó?
2	3	4	NO
3	6	6	NO
4	⋮	⋮	⋮
99	5	6	NO
100	1	1	SI
101	2	1	SI
102			

Para determinar cuántas veces se ganó el juego de las cien partidas, se puede escribir en un celda vacía "=CONTAR.SI(C2:C101;"=SÍ")".

En nuestra simulación, el valor que da esta celda es 44. Por lo tanto, la probabilidad frecuencial de ganar el juego es de 44%. Por lo tanto la decisión racional utilizando probabilidad frecuencial es no jugarlo. Incluso el estudiante puede realizar también el cálculo de la probabilidad teórica de ganar el juego (cerca del 42%) y compararla con la probabilidad frecuencial.

En general, el concepto de probabilidad frecuencial se puede aprovechar de diferentes formas en problemas de toma de decisiones:

a) En algunas situaciones se puede realizar el cálculo de probabilidades tanto de forma frecuencial como de forma teórica. Esto permitirá a los estudiantes valorar la compatibilidad de los significados.

b) En algunas situaciones donde el significado teórico es insuficiente o muy tedioso y es necesario recurrir al significado frecuencial para el cálculo las probabilidades. Un ejemplo de esto, es el problema de Monty Hall donde se debe tomar una decisión: Cambiarse o no de puerta. Y para ello, el cálculo de probabilidad suele ser muy tedioso teóricamente por lo que se recurre al enfoque frecuencial.

c) En la toma de decisiones.

Para esclarecer la última opción. De acuerdo a la Ley de los Grandes Números, la decisión tiende a ser más contundente cuando es mayor la cantidad de veces que decido o no realizar la experiencia aleatoria.

Ejemplo. Considere el juego DADOS A SEIS y suponga que ahora se pagan 1000 colones por jugar y si gana obtiene 2 000 colones. Manuel tiene 200 mil colones y decide invertirlos y paga 200 juegos de DADOS A SEIS. Él espera recuperar el dinero invertido y obtener algo de ganancia. Apoyaría la decisión de Manuel.

En este ejemplo, se debe tomar una decisión: apoyar o no a que Manuel invierta su dinero en Dados a SEIS. La probabilidad de ganar dados (ya sea que se halle de forma frecuencial o teórica) es cerca al 42%. Por lo que, de acuerdo al significado frecuencial de probabilidad y a la Ley de los Grandes Números, si de los 200 juegos que juega Manuel gana un número n de veces, entonces

$$\frac{n}{200} \approx 42\%$$

De donde n es aproximadamente 84. Es decir, se espera ganar alrededor de 84 juegos, obteniendo una ganancia aproximada de 168 mil y gasto 200 mil. Por lo tanto, la decisión más racional es no apoyar a Manuel.

Note que en este ejemplo se introduce intuitivamente el concepto de esperanza de variables aleatorias.

V. Conclusión

En las secciones anteriores se tomó un problema inicial de cálculo de probabilidad y cómo producto del análisis a la luz de los aportes teóricos de Batanero y Polya, este problema se fue transformado en una situación problema de toma de decisiones, diseñada para la enseñanza de la probabilidad. La situación obtenida es:

(¿Juegas o no?) En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lazar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Si se gana el juego, se obtiene un premio de 1 500 colones. Se debe tomar una decisión: jugar o no DADOS A SEIS.

a)Analice las repercusiones de las diferentes decisiones que se puede tomar.

b) Antes de decidir si se paga por jugar este juego, juegue DADOS A SEIS en el aula, veinte veces.

c) Intuitivamente, ¿Cuál decisión tomaría teniendo en cuenta los datos obtenidos en b)? ¿Por qué?

d) ¿Jugaría DADOS A SEIS? Fundamente su decisión.

e) Compare la decisión obtenida en d) con su decisión inicial.

f) Juegue DADOS A SEIS. Que resultado obtuvo y cuál fue el resultado de sus compañeros. La decisión toma en d) fue la correcta.

g)Suponga que ahora se pagan 1000 colones por jugar y si gana obtiene 2 000 colones. Manuel tiene 200 mil colones y decide invertirlos y paga 200 juegos de DADOS A SEIS. Él espera recuperar el dinero invertido y obtener algo de ganancia. Apoyaría la decisión de Manuel.

La situación problema diseñada es un buen acercamiento a lo que Brousseau (1986) llama Situación Didáctica. Esta situación debe ser validada en el aula.

Por otro lado, en el proceso de ir analizando y reformulando el problema, se obtuvieron una serie de recomendaciones para la formulación de los problemas de toma de decisiones en la enseñanza de la probabilidad. Estas recomendaciones son:

a) La probabilidad debe surgir con un modelo para orientar la toma de decisiones. Un problema que solo le pida al estudiante calcular una probabilidad no involucra al estudiante y degrada la aplicación del concepto de probabilidad.

b) la probabilidad nos brinda un insumo para tomar la decisión, no toma la decisión por nosotros. La decisión que se tome es un balance entre la probabilidad y el riesgo que estoy dispuesto a tomar.

c) Es ideal que algunas situaciones iniciales para la enseñanza de la probabilidad involucren, como parte del entendimiento del problema, algunos de los siguientes elementos:

  a. El estudiante pueda simular la experiencia aleatoria involucrada algunas veces.

  b. Describa las diferentes decisiones que se puedan tomar y sus repercusiones.

  c. Que puede tomar una decisión inicial intuitiva con base en la probabilidad intuitiva de los eventos involucrados.

d)Sobre el concepto de probabilidad frecuencial, este se puede utilizar de diferentes formas:

  a) En algunas situaciones se puede realizar el cálculo de probabilidades tanto de forma frecuencial como de forma teórica. Esto permitirá a los estudiantes valorar la compatibilidad de los significados.

  b) En algunas situaciones donde el significado teórico es insuficiente o muy tedioso y es necesario recurrir al significado frecuencial para cálculo las probabilidades.

  c) En la toma de decisiones, de acuerdo a la Ley de los Grandes Números, la decisión tiende a ser más contundente cuando es mayor la cantidad de veces que decido o no realizar la experiencia aleatoria.

En síntesis, se recomienda la utilización de situaciones sobre toma decisiones, con las características indicadas, para la introducción a la enseñanza de la probabilidad.

Bibliografía

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. En R. Farfán y cols. (Eds.). Relime, 8(3), 247-263.

Brousseau, G. Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas. Traducción al castellano del artículo "Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques" publicado en la revista Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2):33-115, y realizada por Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo. 1986.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas (Trad. J. Zagazagoitia).México: Trillas. (Original en inglés, 1965).

Sanabria, G. & Núñez, F. Introducción a la probabilidad utilizando la simulación en Excel. Memorias del 1er Encuentro Internacional de Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística (EIEPE), del 12 al 15 de julio de 2011. México: Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Sanabria, G. & Núñez, F. Probabilidad: un modelo para resolver diversos problemas. Publicado en memorias del VI Encuentro Internacional en la Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística, Benemérita Autónoma de Puebla, México, del 13 al 17 de junio de 2016, Puebla, México.

Sanabria, G. & Núñez, F. Una propuesta para introducir el estudio de las probabilidades: Probabilidad Frecuencial. En Facultad de Ciencias Naturales, Universidad Estatal a Distancia. Memorias III Encuentro de Enseñanza de la Matemática UNED, realizado en el INBio Parque, Heredia, Costa Rica, 3 y 4 de setiembre 2010. InBio Parque, Heredia, Costa Rica.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press.

Vergnaud, G. (1990). "La théorie des champs conceptuels", Recherches en Didactique des Mathémathiques Vol. 10 (23): 133-170.

La dimensión del control en la regla producto en problemas de conteo

Félix Núñez Vanegas[1] & Giovanni Sanabria Brenes[2]

Resumen

Cuando se realiza la solución de un problema de conteo, por lo general queda la sensación de si se habrá hecho correctamente. Lo anterior se debe entre otros aspectos a que en muchas ocasiones, la solución dada carece del rigor con que se resuelven problemas de otros dominios de la matemática. Cuando estos problemas se resuelven con la rigurosidad matemática, se monitorea el proceso de solución en cada etapa, y se cubren todos los ángulos. Este control, una de las dimensiones que agrega Shoenfeld a las heurísticas que brinda Polya por considerarlas insuficientes para resolver ciertos problemas matemáticos, es sumamente importante en la realización de un correcto conteo y disminuye, o elimina, esa sensación de inseguridad en la solución dada. Empero, en los niveles iniciales, este abordaje no se ajusta, dado que los estudiantes carecen de los conocimientos matemáticos que podrían intervenir en la solución de estos problemas. Una forma alternativa de tener el control del proceso de resolución de ciertos problemas de conteo, es a través de una correcta interpretación y aplicación de la regla del producto. En este trabajo, se exponen una manera de desarrollar la heurística y el control en los estudiantes para resolver ciertos problemas de conteo por medio de la regla del producto. Finalmente, brindaremos un ejemplo de una incorrecta aplicación de esta técnica dada por algunos estudiantes del curso de Métodos Estadísticos de la Carrera de EMAC del Tecnológico de Costa Rica, y la estrategia para advertirlos del error subyacente, mediante una correcta interpretación de la regla del producto.

Palabras clave: Regla del producto, conteo, control, inclusión-exclusión, heurísticas.

Abstract

Usually, when we have to solve a problem counting, we feel the sensation if we have considered all cases. This happened since the way of resolve this kind of exercises lacks mathematical formality that is in other mathematical domains. Solving this problems with this mathematical formality give us certainness and control of what we are going to make in each step. This control is very important in the resolution problems counting, and it is a dimension Shoenfeld gives to teachers in his work about mathematical problem solving, trying to improve the Polya works on how to solve

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica -- Universidad de Costa Rica, fnunez@itcr.ac.cr
[2] Instituto Tecnológico de Costa Rica -- Universidad de Costa Rica, gsanabria@itcr.ac.cr

problems, for considering this heuristics incomplete to make sure the resolve of many other kinds of problems. Nevertheless, this focus way is not adjustable during initial levels, since many students don't have necessary knowledge to proceed this way. An important alternative to have control in solve counting problems has to do with a correct interpretation and application of the product rule. In this paper, it is exposed a way to develop the heuristic and control in students in order to help them to resolve a kind counting problems, through product rule. Finally, we give an example of the incorrect using this rule, made for some students of a math course called Statistics Methods, from the career EMAC, Technological of Costa Rica, and how we have advised them about their mistakes through a correct application of product rule.

Keywords: Product rule, counting, control, inclusion-exclusion, heuristics.

I. Introducción

Es conocido el hecho de que los problemas de conteo se caracterizan por ser difíciles y además porque, cuando se da la solución a uno en particular, queda la inquietud de si se habrá resuelto correctamente. Lo anterior se debe, por lo general, a que la solución que se les da es bastante intuitiva, y pareciera que no se tiene control sobre el proceso de resolución. En Núñez (2007) habíamos comentado que una forma de evitar esta situación es resolver este tipo de ejercicios de manera más rigurosa, tal como se hace en matemáticas, por lo menos a nivel universitario, en donde se tenga dominio y control de lo que se va haciendo.
La regla del producto es, en muchos casos, una regla difícil de utilizar adecuadamente, y en general los problemas de conteo sueles ser difíciles de resolver incluso para estudiantes avanzados (Roa, 2000).

Por otro lado, cuando un estudiante tiene un error en la solución de un determinado problema de conteo, es difícil para el profesor hacerle ver dónde está el error, justamente por la forma en que se suelen resolver estos problemas. Mencionábamos entonces que resolver de manera rigurosa este tipo de ejercicios permite a su vez dos asuntos: el control sobre la solución y la explicación a los estudiantes sobre el mal conteo que se pudo haber hecho en un determinado problema.
No obstante, la resolución de este tipo de problemas vista de manera rigurosa, podría demandar mucho tiempo y requerirá de conocimientos matemáticos avanzados. En Núñez (2007) planteamos el siguiente problema:
¿Cuál es el número de aplicaciones sobreyectivas de un conjunto E que tiene n+1 elementos en uno F que contiene n elementos?
Se realizó la solución de dos maneras, una usual y la otra rigurosa.

La manera usual presentada en Núñez (2007), indica que, bajo estas circunstancias, una función f de E en F es sobreyectiva si y sólo si un elemento de F y sólo uno admite dos preimágenes y todos los demás elementos de F admiten sólo una preimagen. Entonces por la regla del producto se obtiene que, el total de funciones sobreyectivas de E en F corresponde a: n C(n+1,2) (n-1)!= n(n+1)!/2.

Por otro lado, la forma rigurosa presentada en Núñez (2007) no es sencilla ni escueta, sino que es más compleja que la usual y requiere del dominio de ciertos conceptos y teoremas de teoría de conjuntos, de funciones, que a un nivel introductorio, posiblemente sea difícil que nuestros estudiantes posean.

Por ejemplo, está implícito el concepto de partición, teoremas sobre cardinalidad de conjuntos, funciones de un conjunto en otro que a su vez es un conjunto de funciones.
Ciertamente, abordar un problema de conteo con el rigor que se hace en otros dominios de la matemática, brinda control y tranquilidad en el proceso de solución, porque cada aspecto está debidamente contemplado. ¿Qué hacer entonces?

II. La resolución de problemas y los problemas de conteo

Como mencionamos anteriormente, un aspecto complejo que atañe a los docentes en este tipo de problemas consiste en hacerle notar al estudiante el error en un conteo. En otro tipo de problemas matemáticos, el juego de cuadros nos puede ayudar a resolver una determinada situación. Cuando un estudiante no entiende una determinada explicación, podemos usar el cuadro algebraico, o geométrico o el analítico, pero en este tipo de tópicos, no parecen viables estas opciones, aunque sí podríamos usar programación; realizar un programa computacional que genere todos los casos posibles y observar cuáles son, será una herramienta muy útil en estos casos, porque se confrontarían los resultados obtenidos en un conteo con los generados en el programa. En ese sentido, se tendría una herramienta para convencer a los estudiantes del conteo incorrecto o de que contó bien, mas en el caso de que hubiera un conteo incorrecto, cómo atinarle al error. Todo esto no es tarea fácil.

El control de la solución es clave en este tipo de problemas, al igual que lo es la intuición, que los docentes deben preocuparse por educarla en sus estudiantes. Polya (1965) sugiere que para intentar resolver un problema, el individuo debe enfrentarse a las siguientes cuatro etapas: Comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. En su trabajo "Cómo plantear y resolver problemas" (Polya, 1965), introduce la necesidad de educar nuestra intuición para desarrollar heurísticas que nos permitan resolver problemas. Ese arte o ciencia de resolver problemas mediante la creatividad debe desarrollarse, por ello, tratando de enseñar a sus estudiantes cómo abordar un problema, desarrolla una serie de procedimientos heurísticos con los que podrían tener éxito en la solución del mismo. Por ejemplo, él sugiere, que cuando no se comprenda un determinado problema, cuando proceda, se dibuje una figura o se busque un problema similar, es decir, se piense heurísticamente, lo cual está ligado a un razonamiento no definitivo ni riguroso, sino provisional y plausible, cuyo fin es encontrar la solución del problema. Por lo general, este razonamiento se asocia con la inducción o la analogía. También sugiere atacar un problema más general, a esto Polya lo llama la paradoja del inventor, en el sentido de que un plan más ambicioso puede ser también el mejor.

No obstante, una vez ideado el plan de solución y ejecutado, debe examinar la solución obtenida. Mediante las preguntas ¿Puede comprobar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?, Polya señala que una buena respuesta a estas preguntas, reafirman la confianza en la exactitud de la solución encontrada para el problema dado.

En el caso de resultados numéricos de problemas matemáticos, Polya sugiere, dentro de sus recomendaciones heurísticas, que se comparen dichos resultados con números fáciles de observar y que el sentido común acepte como apropiados.

Cuando en su recomendación pide que se verifique el razonamiento empleado para resolver un determinado problema, hace un llamado a que, si dicha revisión se hace paso por paso, se realice sin caer en la mera repetición, por el hastío que puede producir esa conducta y porque bajo las mismas circunstancias, donde alguien se ha equivocado una vez, es muy posible volver a equivocarse. Si se considera necesario revisar el razonamiento paso por paso, él sugiere que por lo menos se cambie el orden en que han sido agrupados, introduciendo cambios.

Por otro lado, Schoenfeld (1985) indica que esta propuesta de Polya es insuficiente para resolver cierta clase de problemas matemáticos, y lleva a cabo una serie de investigaciones en las que concluye que las heurísticas planteadas por Polya no son suficientes para tener éxito en la resolución de problemas. Él dice que sin los conocimientos previos de los estudiantes, sin la habilidad para monitorear y evaluar el proceso de resolución del problema y sin un sistema de creencias sobre lo que es conocer y hacer matemática, no se podría llegar a solucionar un determinado problema. Por ello él agrega tres dimensiones más a la propuesta de Polya, a los cuales se les debe poner atención: **Recursos** (conocimientos previos), **Control** y el S**istema de Creencias**.

Esta habilidad para monitorear y evaluar el proceso de resolución de un problema de conteo, al que Schoenfeld llama control, es primordial aquí.
Las sugerencias que da Polya sobre que se comparen dichos resultados con números fáciles de observar y que el sentido común acepte como apropiados, son muy válidas en la resolución de problemas de conteo. El asunto aquí sin embargo, es que se puede descubrir que hay un error en la solución, pero encontrarlo es una tarea a veces difícil.
En este tipo de problemas, no se trata solamente de no entender un determinado procedimiento aplicado por el profesor, sino más bien el de hacer ver al estudiante por qué la solución que da, al parecer correcta desde un punto de vista intuitivo, tiene una componente equivocada, y en qué consiste.

Además, es poco didáctico cuando el docente en lugar de ayudar al estudiante a hallar el error, le da la solución correcta.

Verificar el razonamiento aplicado paso a paso, una vez hecha la solución, ayudará a encontrar el error en caso de que lo haya, o bien, reforzará la confianza de que la solución dada es la correcta. Este verificar se parece al control del que habla Shoenfeld, de tal manera que articulando ambas propuestas, se enriquece el acervo de heurísticas para un abordaje adecuado de un problema de conteo. Sin embargo, ¿cómo lograr ese control en los problemas de conteo? ¿Cómo evitar que el estudiante caiga en el juego de su intuición y que al verificar sus pasos simplemente reafirme lo que su intuición le dijo?

De acuerdo a lo anterior, nos centraremos en dos dimensiones de los problemas de conteo: la heurística y el control. El presente trabajo solo abordará estas dimensiones para los problemas de conteo que se resuelven con la regla del producto. Este trabajo será completado con otros encaminados a la resolución de problemas de conteo en general.

III. Heurística en la regla del producto

La regla del producto es un teorema en teoría de combinatoria que establece que la cardinalidad de productos de conjuntos es igual al producto de las cardinalidades de los conjuntos. Es decir:

Teorema (Regla del producto) *Sean E_1,E_2,...,E_k conjuntos finitos. Se tiene que*
$|E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k| = |E_1| \cdot |E_2| \cdot \ldots \cdot |E_k|$

El teorema por sí solo es un resultado que nos sirve para contar los elementos del conjunto producto. Pero para lograr aplicarlo debemos definir los conjuntos que componen este conjunto producto.

La primera pregunta que surge es ¿para qué contar elementos de un conjunto producto? Los elementos de un conjunto producto conforman una lista ordenada donde cada entrada de la lista pertenece a un conjunto con cierta característica, como podemos apreciar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Juan tiene tres pantalones de diferentes colores: Azul, Negro y Café. Además tiene dos camisas, una de manga larga y otra de manga corta. ¿De cuántas formas puede vestirse Juan?
Sea E_1 el conjunto de pantalones y E_2 el conjunto de camisas:

E_1= {Azul, Negro, Café}, E_2= {Manga larga, Manga corta}

Cada manera de vestirse lo podemos ver como una lista de dos entradas donde la primer entrada indica el pantalón a ponerse y la segunda entrada indica la camisa. Es decir, una manera de vestirse es un elemento de la forma:

(Pantalón, camisa)

Note que el conjunto de maneras de vestirse es $E_1 \times E_2$. De acuerdo a la Regla del Producto, el número de maneras de vestirse es:
$|E_1 \times E_2| = |E_1| \cdot |E_2| = 3 \cdot 2 = 6$
En efecto, note que:

$E_1 \times E_2$ *={(Azul, Manga larga), (Azul, Manga corta), (Negro, Manga larga), (Negro, Manga corta), (Café, Manga larga), (Café, Manga corta)}*

El ejemplo anterior evidencia que la aplicación de la Regla del producto formalmente no es tan fácil. Se necesita una manera más sencilla y sistemática de aplicarla. La idea es que este teorema en acto se convierta en una poderosa herramienta, una heurística para resolver problemas de conteo.

En Sanabria (2012) se define el Esquema por Etapas como una creación didáctica que permite la aplicación sistemática de la Regla del Producto. Este esquema es parte de la heurística buscada:

Esquema por Etapas: Si la realización de un proceso se divide en k etapas, y si consideramos a E_1, E_2,…, E_k como el conjunto de maneras de realizar la etapa 1, etapa 2, etapa 3,…, etapa k, respectivamente y supongamos que:
Etapa 1: hay $n_1 = |E_1|$ maneras de realizarla.
Etapa 2: hay $n_2 = |E_2|$ maneras de realizarla.
⋮
Etapa k: hay $n_k = |E_k|$ maneras de realizarla. Entonces el total de maneras de realizar el proceso completo es $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$

La heurística no es solo aplicar el esquema anterior a la primera, parte de la heurística es desarrollar la habilidad para definir las etapas y su orden de forma que el conteo sea exitoso, considerando que:

- Para determinar las maneras de realizar la etapa enésima, se asume que se realizaron las etapas anteriores (etapa 1, etapa 2,... etapa (n-1)).
- Como el orden de los factores no altera el producto, entonces, el orden de las etapas no influye en el resultado. Sin embargo, esto no significa que el orden de las etapas es irrelevante para el conteo; por el contrario, como el orden no influye, se debe buscar aquel que permita un conteo más simple. Por lo general, se recomienda ubicar al inicio las etapas con más restricciones.

Ejemplo. Cuántos números de cuatro dígitos se puede formar con los dígitos 1,2,3,4,5,6,7, si:

1. *No se pueden repetir los números.*

Considere las siguientes etapas del proceso de creación de uno de estos números:
Etapa I. Se elige el primer dígito: hay 7 maneras.
Etapa II. Se elige el segundo dígito: hay 6 maneras.
Etapa III. Se elige el tercer dígito: hay 5 maneras.
Etapa IV. Se elige el cuarto dígito: hay 4 maneras.
Por el principio del producto, se forman $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ números de cuatro dígitos distintos.

2. *No se pueden repetir los números y el dígito de las centenas es impar.*

El proceso de formación de estos números se puede dividir en las siguientes etapas:
Etapa I. Se elige el tercer dígito (dígito de las centenas): hay $|\{1,3,5,7\}|=4$ maneras
Etapa II. Se elige el primer dígito: hay 6 maneras.
Etapa III. Se elige el segundo dígito: hay 5 maneras.

Etapa IV. Se elige el cuarto dígito: hay 4 maneras.

Así, se pueden formar 4·6·5·4=480 números de cuatro dígitos bajo las condiciones solicitadas.

Aquí, la etapa más restrictiva es "elegir el dígito de las centenas", y se ubicó al inicio. Si esta etapa se coloca en otra posición, el conteo se complica.

Considérese ahora el ejemplo mencionado en nuestra introducción.

Ejemplo. ¿Cuál es el número de aplicaciones sobreyectivas de un conjunto E que tiene n+1 elementos en uno F que contiene n elementos?

Note que una función f de E en F es sobreyectiva si y sólo si un elemento de F y sólo uno admite dos preimágenes y todos los demás elementos de F admiten sólo una preimagen.

Entonces el proceso de formar una función de E en F sobreyectiva consta de las siguientes etapas:

Etapa1: Se elige el elemento en F que admite dos preimágenes: hay n posibilidades

Etapa 2: Se escogen los dos elementos de E que serán preimágenes del elemento de F escogido en la etapa1: hay C(n+1,2) maneras

Etapa 3: Se asignan las imágenes de los n-1 elementos restantes de E: hay (n-1)! maneras

Por la regla del producto se obtiene que, el total de funciones sobreyectivas de E en F corresponde a: n C(n+1,2) (n-1)!= n(n+1)!/2.

IV. Control en la regla del producto

La enseñanza de la regla del producto a través de la heurística que incluye el esquema de etapas, permite también tener un mejor control sobre los elementos involucrados, y a la vez, se tiene una herramienta sistemática para resolver ciertos problemas de conteo.

Sin embargo, suele pasar que el estudiante confía ciegamente en las etapas en que divide el proceso. Y pesé a que revise lo realizado, generalmente se concentra en la revisión de los cálculos del conteo de las maneras de realizar cada etapa y en ver si le faltó un detalle a considerar en una etapa debido a las etapas anteriores. En su control, no considera que las etapas estén mal definidas. Pero ¿Cómo detectar que las etapas están mal definidas?

Aquí entra en juego un aspecto medular de la regla del producto, y es quizá lo que nos permitirá, en estos niveles, tener un control para monitorear y evaluar el proceso. Al dividir el proceso en k etapas y al definir los conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_k$ como el conjunto de maneras de realizar cada etapa respectivamente, una forma de realizar todo el proceso es equivalente a obtener el único elemento del conjunto $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$. Lo anterior quiere decir que, dado un caso particular (una manera), debe existir una **combinación única** de los valores de las etapas definidas, mediante las cuales se obtenga dicho caso.

Así, parte de evaluar y monitorear el proceso de un conteo por etapas, es valorar si cada manera particular se puede obtener tomando un único valor del conjunto de valores posibles de cada etapa.

Ejemplo (Error de conteo). Se tienen cuatro confites (un frutini, un morenito, una tapita y un caramelo) que serán repartidos entre María y Francisco, bajo la condición de que a ella le correspondan al menos dos confites. ¿Cuántas maneras hay para repartirlos?
La forma de dividir el proceso de repartición de confites en las siguientes etapas genera un error de conteo:

Etapa I. Se elige dos confites para María: hay 6 maneras (pues de fijo le corresponden dos).
Las maneras son: {f,m},{f,t},{f,c},{m,t},{m,c},{t,c}.
Etapa II. Se reparten los confites restantes: hay 4 maneras.
Como se asume la etapa I, faltan dos confites, A y B, para repartir.
Las maneras son:

#	Confites para María	Confites para Francisco
1	confites A y B	ninguno
2	confite A	confite B
3	confite B	confite A
4	ninguno	confites A y B

Total: $6{\cdot}4=24$ maneras (Incorrecto)
Seguidamente se verifica el error de conteo. Una manera para realizar el proceso es que a Francisco le toque la tapita y a María el resto. Esta manera es generada por más de una combinación de valores de las etapas definidas anteriormente, dos de ellas son:

	Combinación 1	**Combinación 2**
Etapa I.	María se le da m y c	María se le da f y c
Etapa II.	María se le da f Francisco se le da t	María se le da m Francisco se le da t

Así, valores diferentes en las etapas generan el mismo resultado; por lo tanto, hay maneras de realizar el proceso que se están contando más de una vez.
Una forma de solucionar correctamente este problema consiste en considerar tres casos:
***Caso 1**: María le corresponden exactamente 2 confites: hay C(4,2)=6 maneras*
***Caso 2**: María le corresponden exactamente 3 confites: hay C(4,3)=4 maneras*
***Caso 3**: María le corresponden exactamente 4 confites: hay una manera*
Por lo tanto, el número de maneras de repartir los confites es 11.

V Experiencias a nivel universitario

En el año 2016, se les planteó a un grupo de estudiantes de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática asistida por Computadora que matricularon el curso Métodos Estadísticos, el siguiente problema:
En una determinada institución educativa, hay 16 grupos de sétimo, 11 grupos de octavo y 9 de noveno. ¿De cuántas maneras podemos elegir cinco grupos de modo que se tenga al menos uno de cada nivel?

Los estudiantes ya habían visto la regla del producto y el principio de inclusión y exclusión también.
La solución que dieron varios estudiantes fue la siguiente:

Etapa1: Se elige un grupo del nivel de Sétimo: C(16, 1)= 16
Etapa2: Se elige un grupo del nivel de Octavo: C(11, 1)=11
Etapa3: Se elige un grupo del nivel de Noveno: C(9, 1)=9
Etapa4: Se eligen los dos grupos restantes: C(33,2)=528

Por la regla del producto, el total de maneras de elegir a los grupos de manera que se escoja al menos uno de cada nivel sería: $16 \times 11 \times 9 \times 528 = 836352$

Analizando la solución que dieron, pareciera correcta. Veamos: Con la etapa 1, se aseguran que haya 1 de sétimo año, en la etapa 2, se asegura que haya uno de octavo y en la etapa 3, de fijo habrá uno de noveno. Hasta aquí llevan 3 grupos. Faltan 2, los cuales en la etapa 4, los toman de los 33 restantes.

Parece muy natural esta solución, sin embargo es incorrecta. ¿Cómo hacerles ver que hay un error? Algunos otros estudiantes preguntaron cuál es el error, ellos también vieron una solución plausible.
Sin embargo, la solución de este problema es la siguiente:

Sea U el conjunto de maneras de elegir cinco grupos de entre los 36 que se disponen.
Sean ahora los conjuntos

- $A_1 = \{x \in U / \ \ en\ x\ se\ elige\ al\ menos\ un\ grupo\ de\ Sétimo\}$
- $A_2 = \{x \in U / \ \ en\ x\ se\ elige\ al\ menos\ un\ grupo\ de\ Octavo\}$
- $A_3 = \{x \in U / \ \ en\ x\ se\ elige\ al\ menos\ un\ grupo\ de\ Noveno\}$

Lo que se pide calcular es entonces:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |U| - |\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}| = |U| - |\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}|$$

Ahora,

$$|\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}| = |\overline{A_1}| + |\overline{A_2}| + |\overline{A_3}| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_3}| - |\overline{A_2} \cap \overline{A_3}| + |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$$

Calculando las cardinalidades involucradas tenemos:

- *Se tiene que* $|\overline{A_1}| = C(20{,}5)$ *ya que* $\overline{A_1}$ *representa al conjunto de todas las maneras de elegir a los grupos donde no haya de sétimo. Con C(n,k) se denota el número de maneras de escoger k elementos de un conjunto de n elementos.*

- *Así con las demás*

$$|\overline{A_2}| = C(25{,}5) \qquad |\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = C(9{,}5) \qquad |\overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = C(16{,}5)$$
$$|\overline{A_3}| = C(27{,}5) \qquad |\overline{A_1} \cap \overline{A_3}| = C(11{,}5) \qquad |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 0$$

De tal manera que

$$|\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}| = |\overline{A_1}| + |\overline{A_2}| + |\overline{A_3}| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_3}| - |\overline{A_2} \cap \overline{A_3}| + |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$$
$$= C(20{,}5) + C(25{,}5) + C(27{,}5) - C(9{,}5) - C(11{,}5) \text{-} C(16{,}5) + |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$$
$$= 15504 + 53130 + 80730 - 126 - 462 - 4368 = 144408$$

Por lo que

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |U| - |\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}|$$

$= C(36,5) - 144408 = 376992 - 144408 = 232584$
Así que el número de maneras de elegir a los grupos con al menos uno de cada nivel es: 232584.

Los resultados son diferentes. Entonces preguntamos que a qué se debía el error. Ya estaban convencidos de que había un error, ahora la cuestión era encontrarlo.
Se les propuso realizar un caso particular. Se les recordó que dado un caso particular (una manera), debía existir una **combinación única** de los valores de las etapas mediante las cuales se obtenga dicho caso.
Se les explicó que para formar el caso particular, se utilizaría la notación de secciones utilizada en algunos Colegios de Costa Rica. Así, como hay 16 sétimos, estos se denotan:

$$7° - 1, 7° - 2, \dots, 7° - 16.$$

Los 11 octavos se denotan:

$$8° - 1, 8° - 2, \dots, 8° - 11.$$

Y los novemos se etiquetan:

$$9° - 1, 9° - 2, \dots, 9° - 9.$$

Bajo esta notación, se les dio este caso particular:

$$\{7° - 1, 8° - 1, 9° - 1, 7° - 2, 7° - 3\}$$

Y les preguntamos que si ese caso se podía obtener de manera única mediante una combinación de las etapas.
Resultados:
Varios estudiantes hicieron el siguiente análisis:

En la etapa 1, escogeríamos a la $7° - 1$.
En la etapa 2, a la $8° - 1$.
En la etapa 3, a la $9° - 1$.
Y en la última etapa, a la $7° - 2$ *y a la* $7° - 3$.

Pero con esas mismas etapas, esa posibilidad de escoger a los grupos se puede obtener así:

En la etapa 1, escogeríamos a la $7° - 2$.
En la etapa 2, a la $8° - 1$.
En la etapa 3, a la $9° - 1$.
Y en la última etapa, a la $7° - 1$ *y a la* $7° - 3$.

Es decir una escogencia particular se obtiene de al menos dos combinaciones de las etapas, cuando cada caso particular debe de obtenerse por única combinación de las etapas.

Un Test aplicado. Tratando de ver si lo anterior había quedado claro, se propuso a los estudiantes el siguiente problema, tomado de Sanabria (2012):
Suponga que en la Asamblea Legislativa hay 16 diputados del partido X, 26 del partido Y y 11 del partido Z. Se debe formar una comisión de 8 diputados. ¿De cuántas maneras se puede formar la comisión si se debe elegir al menos un diputado de cada partido?
Se les pidió que analizaran la siguiente solución:

Etapa 1: Elegir un diputado del partido X: C(16,1)
Etapa 2: Elegir un diputado del partido Y: C(26,1)

Etapa 3: Elegir un diputado del partido Z: C(11,1)
Etapa 4: Elegir el resto: C(50,5)
Total C(16,1)C(26,1)C(11,1)C(50,2)
Si es correcto, explique por qué, y si no, dé un caso en el que con esas etapas, no se obtenga de manera única.

Cuatro estudiantes respondieron que era incorrecto justificando con un caso particular el cual se obtiene de varias maneras por combinación de las etapas, dos estudiantes respondieron que era incorrecto pero la justificación era incorrecta y tres estudiantes lo dejaron en blanco.

Lo anterior nos muestra que este tipo de problemas son difíciles, y que se debe dedicar más tiempo de enseñanza en ellos. No obstante, los casos expuestos por los estudiantes que respondieron correctamente, nos dejan satisfechos y creemos que esta forma de abordar estos problemas por casos y etapas y la debida interpretación de la regla del producto, contribuirá en un mejor control del proceso de conteo de un determinado problema.

VI. A modo de Conclusión:

Los problemas de conteo se caracterizan por ser muy difíciles y porque a menudo, queda la sensación de haber hecho un conteo incorrecto. Lo anterior se debe a que, por lo general, la solución que se da es escueta y carece del rigor matemático con que se resuelven problemas de otros dominios de la matemática, por ende, no se tiene el control en cada etapa del proceso de conteo.
Sin embargo, una buena interpretación de la regla del producto y una correcta aplicación, permitirá tener un mejor control sobre el proceso de conteo. A menudo es complicado hacerle ver a un estudiante del error en que incurrió cuando aplicó la regla del producto, pero es de gran utilidad si comprende que dado un caso particular, debe existir una única combinación de los valores de las etapas en la que ese caso se da. Si hay varias formas en que se dé, entonces habrá un conteo incorrecto.
Pese a las aclaraciones, un porcentaje muy pequeño de los estudiantes lograron resolver el problema propuesto, similar al analizado en clases, de manera correcta. Esta experimentación nos indica que hay que trabajar más en tales conceptos, y reafirma que los problemas de conteo, no son sencillos de resolver.

VII. Bibliografía

1. Núñez, F. (2007). Problemas de conteo: ¿Por qué son tan difíciles? Basado en las ideas de André Antibí. En Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica. Memorias IV Congreso Internacional de la Matemática Asistida por Computadora (4to CIEMAC) (Vol. 1, No. 2).
2. Polya, G. (1965). ¿Cómo plantear y resolver problemas? (Trad. J. Zagazagoitia). México: Trillas. (Original en inglés, 1965).

3. Roa, R. (2000). Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada. Unpublished Doctoral dissertation. Universidad de Granada.
4. Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press.
5. Sanabria, G. (2012). Comprendiendo las Probabilidades. Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.
6. Sanabria, G. & Núñez, F. (2010). Una propuesta para introducir el estudio de las probabilidades: Probabilidad Frecuencial. En Facultad de Ciencias Naturales, Universida Estatal a Distancia. Memorias III Encuentro de Enseñanza de la Matemática UNED, realizado en el INBio Parque, Heredia, Costa Rica, 3 y 4 de setiembre 2010. InBio Parque, Heredia, Costa Rica.
7. Sanabria, G. & Núñez, F. (2011). Introducción a la probabilidad utilizando la simulación en Excel. Memorias del 1er Encuentro Internacional de Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística (EIEPE), del 12 al 15 de julio de 2011. México: Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad

Exigencia cognitiva de las tareas sobre probabilidad en el currículo de Educación Primaria

Claudia Vásquez Ortiz [1], Nataly Pincheira Hauck[2] y Danilo Díaz-Levicoy[3]

Resumen

En este trabajo se analiza el nivel exigencia cognitiva de las tareas sobre probabilidad propuestas en los programas de estudio de Educación Primaria chilenos. Dado que estos constituyen un referente a seguir a la hora de decidir cómo organizar, secuenciar y desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje, sobre todo de contenidos que han sido recientemente incorporados al currículo escolar. Los resultados muestran un predominio de tareas vinculadas a un bajo nivel de exigencia cognitiva, que reducen el estudio de la probabilidad al uso de algoritmos y fórmulas.

Palabras clave: exigencia cognitiva, probabilidad, educación primaria.

Abstract

This work analyses the level of cognitive challenge on probability tasks proposed by Chilean Primary Education programs. Such programs establish a reference to follow when deciding how to organize, sequence and develop the teaching and learning process, especially about contents which have been recently incorporated into the school curriculum. Results show a low level of cognitive challenge tasks predominance; which lessen the study of probability to the use algorithms and formulas.

Key words: cognitive challenge, probability, primary education

I. Introducción

Durante los últimos años el estudio de la probabilidad se ha incoroprado con fuerza en las directrices curriculares de diversos países. Este cambio requiere profesores capaces de implementar los nuevos temas, que cuenten con herramientas disciplinares y didácticas para poder introducir progresivamente el objeto matemático "probabilidad" a partir de sus distintos significados. Sin embargo, muchos profesores de Educación Primaria no han tenido formación sobre probabilidad y su didáctica (Vázquez y Alsina, 2014) sobre todo en países como Chile, en que la incorporación de la probabilidad en el aula de Educación Primaria es muy reciente, según lo establecido por el Ministerio de Educación (MINEDUC, 2012). Este déficit formativo origina que los profesores en ejercicio al momento de planificar su enseñanza se apoyen en las

[1] Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC), Chile. cavasque@uc.cl
[2] Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC), Chile. npincheirah@uc.cl
[3] Universidad de Granada (UGR), España. dddiaz01@hotmail.com

directrices curriculares que entrega el MINEDUC de Educación, las cuales sugieren un conjunto de actividades para guiar el cómo organizar y desarrollar los objetivos de aprendizajes que deben ser alcanzados por los alumnos. Por su parte, el MINEDUC (2012, p. 26) menciona que "estas actividades no buscan competir con el texto de estudio, sino ser una guía al docente para diseñar sus propias actividades". Por tanto, los programas de estudio se configuran como uno de los recursos preponderantes al momento de organizar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, por ende su análisis resulta de interés dado que este conjunto de actividades expone de manera concreta una transposición didáctica del saber (Chevallard, 1991).

Desde esta perspectiva es que surge esta investigación, la cual tiene por finalidad analizar la exigencia cognitiva de las tareas matemáticas sobre probabilidad presentes en las directrices curriculares en la asignatura de matemática para la Educación Primaria en Chile, la que considera ocho años de formacion (de 1º a 8º grado). Para ello, nos situamos desde la perspectiva de Smith y Stein (1998), quienes proporcionan una taxonomía para la clasificación de las tareas matemáticas a partir del tipo y nivel de pensamiento requerido para solucionarlas.

II. Niveles de exigencia cognitiva para una tarea matemática

Con el propósito de proponer una herramienta de desarrollo profesional para el profesorado, es que Smith y Stein (1998) plantea una taxonomía o guía de análisis de las tareas matemáticas que define cuatro niveles de exigencia cognitiva de acuerdo con el tipo y nivel de pensamiento que requiere para que los estudiantes puedan solucionarla: a) memorización; b) procedimientos sin conexiones; c) procedimientos con conexiones; y d) construcción de las matemáticas. Estos niveles se describen en el Cuadro 1.

Cuadro 1. *Caracterización de los niveles de exigencia cognitiva* (Smith y Stein, 1998, p. 348)

Exigencias de bajo nivel (memorización) - Incluyen la reproducción de memoria de hechos, reglas, fórmulas o definiciones previamente aprendidos o ya establecidos. - No se pueden resolver mediante procedimientos porque no existen o porque el tiempo asignado para completar la tarea es muy breve para emplear un procedimiento. - No son ambiguas. Dichas tareas involucran la reproducción exacta de material visto con antelación y aquello que se ha de reproducir se establece con claridad y de manera directa. - No tienen relación con los conceptos o el significado subyacente a los hechos, fórmulas o definiciones aprendidas o reproducidas.
Exigencias de bajo nivel (procedimientos sin conexiones) - Son algorítmicas. Usan el procedimiento que se requiere de manera específica o que es evidente a partir de instrucciones, de experiencias o de la asignación de tarea previamente establecidas. - Requieren una exigencia cognitiva limitada para su exitosa consumación. Hay poca ambigüedad sobre lo que se necesita llevar a cabo y sobre cómo hacerlas. No guardan relación con conceptos o con el significado subyacente al procedimiento empleado.

- Se enfocan en generar respuestas correctas, en lugar de desarrollar la comprensión matemática. - No requieren explicaciones o éstas se centran solamente en la descripción del procedimiento utilizado.
Exigencias de alto nivel (procedimientos con conexiones) - Enfoca la atención del estudiante en la utilización de procedimientos, con el propósito de desarrollar niveles más profundos de comprensión de los conceptos e ideas matemáticos. - Sugiere seguir caminos implícitos o explícitos, los cuales son procedimientos muy generales que tienen estrechas relaciones con ideas conceptuales subyacentes, en contraposición con los limitados algoritmos que son poco claros respecto de los conceptos subyacentes. - Suelen representarse en multitud de formas, tales como diagramas visuales, objetos manipulables, símbolos y problemas contextualizados. Llevan a cabo conexiones entre una gran cantidad de representaciones que ayudan a desarrollar el significado. - Necesitan cierto grado de esfuerzo cognitivo. Aunque pueden seguirse procedimientos generales, no se puede hacer en forma irreflexiva. Los estudiantes requieren involucrarse con ideas conceptuales que subyacen en los procedimientos (con el objeto de finalizar la tarea con éxito) y que desarrollan su comprensión.
Exigencias de alto nivel (construcción de las matemáticas) - Requieren un pensamiento complejo y no algorítmico; la tarea, sus instrucciones o un ejemplo resuelto no sugieren en forma explícita un enfoque o camino predecible y trillado. - Demandan que los estudiantes exploren y entiendan la naturaleza de los conceptos matemáticos, así como los procesos o relaciones. - Requieren la auto verificación o la autorregulación de los procesos cognitivos de uno. - Necesitan que los estudiantes tengan acceso al conocimiento o experiencias relevantes y que hagan un uso apropiado de ambas cosas al estar trabajando en la tarea. - Exigen que los estudiantes analicen la tarea y examinen de manera activa las restricciones de ésta que pudieran limitar las posibles estrategias de solución y las soluciones mismas. - Requieren un esfuerzo cognitivo significativo y pudieran entrañar un nivel de ansiedad para los estudiantes, debido a la naturaleza impredecible de los procesos de solución necesarios.

A partir de esta caracterización que utilizamos en este estudio es posible identificar y seleccionar aquellas tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas, que ofrezcan a los estudiantes la posibilidad de desarrollar una comprensión profunda de la probabilidad.

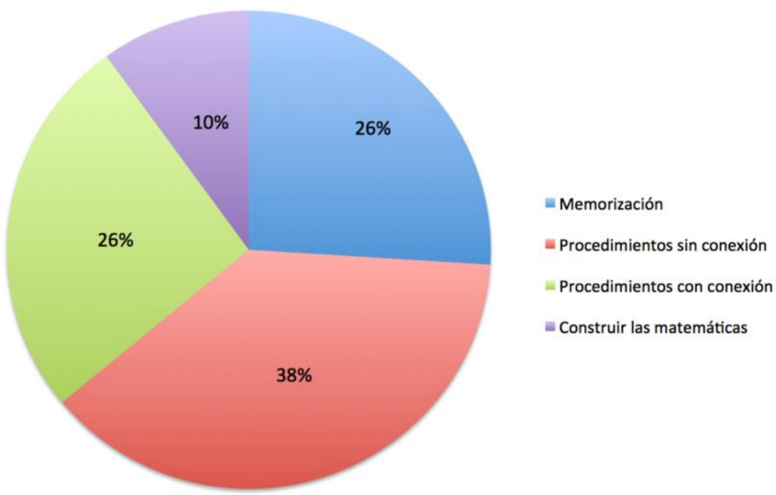
II. Método

Con el proposito de analizar la exigencia cognitiva de las tareas matemáticas sobre probabilidad presentes en las directrices curriculares para la asignatura de matemática de Educación Primaria en el contexto chileno (MINEDUC, 2013a; 2013b; 2013c; 2013d; 2013e; 2013f; 2016a; 2016b), se utilizó la metodología propuesta por Vásquez, Pincheira y Díaz-Levicoy (en prensa) que considera los siguientes cinco pasos: a) identificación en directrices curriculares chilenas de los objetivos de aprendizaje que se encuentran vinculados al estudio de la probabilidad; b) identificación en las orientaciones curriculares de ejemplos de actividades vinculadas a probabilidad; c) resolución de los ejemplos de actividades o tareas matemáticas; d) clasificación cada una de las actividades o tareas matemáticas, de acuerdo con la taxonomía de Smith y Stein (1998); y e) sistematización de la información.

III. Resultados

Una vez identificadas las distintas actividades o tareas que corresponden a las unidades de análisis, tres profesores especialistas en didáctica de la matemática resolvieron de forma individual estas actividades, una por una, para posteriormente clasificarlas de acuerdo con la taxonomía propuesta por Smith y Stein (1998), considerando además el conocimiento previo involucrado o experiencias anteriores de los estudiantes que abordarán dicha tarea, los conceptos matemáticos nucleares que deben ser abordados en la resolución y sus respectivas conexiones conceptuales y procedimentales. La Figura 1 muestra cómo se clasifican según el nivel de exigencia cognitiva las tareas sobre probabilidad a nivel general en las directrices curriculares chilenas de Educación Primaria.

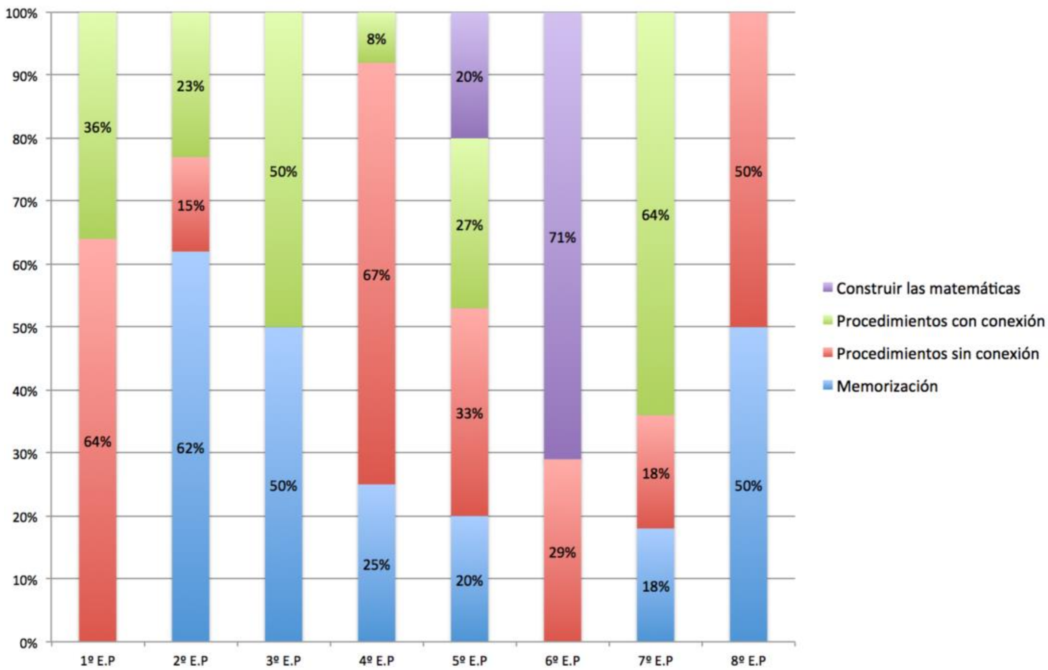
Figura 1. Clasificación de tareas sobre probabilidad según el nivel de exigencia cognitiva.



A partir de la Figura 1 se observa que en las tareas analizadas predominan aquellas de exigencia de bajo nivel (64%), donde gran parte de ellas refieren a procedimientos sin conexiones (38%) y un 26% a tareas de memorización. Por tanto, gran parte de las tareas propuestas se centran en el uso de procedimientos, fórmulas o algoritmos en formas que no se relacionan con el significado y desarrollo de una comprensión de la probabilidad, fundamentadas principalmente en la memorización o reproducción de memoria de hechos, reglas, fórmulas o definiciones previamente aprendidos o ya establecidos. Lo anterior, reduce peligrosamente el estudio de la probabilidad al uso de algoritmos y fórmulas, dejando de lado aspectos centrales tales como el desarrollo de una comprensión de la probabilidad que permita que los estudiantes usen, interpreten y comuniquen ideas e información para resolver problemas reales en que la incertidumbre está presente.

A nivel general las tareas sobre probabilidad presentes en las directrices curriculares chilenas clasificadas según su nivel de exigencia cognitiva, se distribuyen por curso como muestra la Figura 2.

Figura 2. Distribución de los tipos de tareas según el nivel de exigencia cognitiva y curso.



En el gráfico de la Figura 2, se observa que los distintos niveles de exigencia cognitiva asociados a las tareas sobre probabilidad no son desarrollados de igual manera en los distintos cursos; mostrando un predominio de tareas de bajo nivel (memorización y procedimientos sin conexión) en todos los cursos. También se evidencia que tan solo en 5º y 6º de primaria se presentan tareas de un alto nivel de exigencia cognitiva (construcción de las matemáticas), contrario a lo esperable, que sería observar un aumento gradual y progresivo de la exigencia cognitiva de las tareas, así como un mayor equilibrio en el tipo de tareas propuestas. Pues, no debemos olvidar que para un adecuado aprendizaje de las matemáticas, y de la probabilidad en nuestro caso, hay que brindar a los estudiantes distintas instancias y oportunidades que les permitan desarrollar su razonamientos por medio de la resolución de problemas, con sus distintas formas de abordarlos y estrategias de resolución (NCTM, 2015). Para ello es fundamental ofrecer distintos tipos de tareas que involucren distintos niveles de exigencia cognitiva que les permitan alcanzar de manera gradual y progresiva una comprensión en profundidad de la probabilidad.

IV. Conclusiones

El análisis realizado ha permitido evidenciar, un desbalance en las actividades tanto a nivel global a lo largo de toda la Educación Primaria como al interior de cada curso, observándose un fuerte predominio de las tareas que involucran el uso de procedimientos sin conexiones para su resolución, así como de las tareas de memorización.

En consecuencia, es necesario complementar las tareas sobre probabilidad con la incorporación de otras nuevas que consideren los distintos niveles de exigencia cognitiva, de manera tal que se observe un tránsito gradual y progresivo desde las tareas de memorización hacia las tareas de construcción de las matemáticas. No se trata de solo presentar tareas de alto nivel, sino que mas bien de que se observe un equilibrio entre los distintos tipos de tareas, pues tanto las tareas de memorización como de procedimientos sin conexiones juegan un rol importante en el aprendizaje y son necesarias para desarrollar un dominio. Sin embargo, es importante avanzar hacia el desarrollo de tareas que requieran de una exigencia cognitiva mayor, del uso de procedimientos con conexiones que permitan el desarrollo de niveles profundos de comprensión de la probabilidad para luego transitar hacia un pensamiento complejo y no algorítmico. De este modo, se estará promoviendo el desarrollo de un razonamiento probabilístico de alto nivel en el aula de Educación Primaria.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto FONDECYT INICIACIÓN Nº 11150412, financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile y desarrollado en la Pontificia Universidad Católica de Chile.

Bibliografía

[1] Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique.
[2] MINEDUC. Bases Curriculares 2012: 1º a 6º Básico. Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2012.
[3] MINEDUC. Matemática. Programa de Estudio Primer Año Básico. Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2013a.
[4] MINEDUC. Matemática. Programa de Estudio Segundo Año Básico. Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2013b.
[5] MINEDUC. Matemática. Programa de Estudio Tercer Año Básico. Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2013c.
[6] MINEDUC. Matemática. Programa de Estudio Cuarto Año Básico. Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2013d.
[7] MINEDUC. Matemática. Programa de Estudio Quinto Año Básico. Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2013e.
[8] Ministerio de Educación. Matemática. Programa de Estudio Sexto Año Básico. Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2013f.

[9] Ministerio de Educación. Matemática. Programa de Estudio Séptimo Año Básico. Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2016a.

[10] MINEDUC. Matemática. Programa de Estudio Octavo Año Básico. Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2016b.

[11] NCTM. De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics, 2015.

[12] Smith M.S. y Stein, M.K. Selecting and creating mathematical tasks: From Research to Practice. Mathematics Teaching in the Middle School, 3, p. 344-350. 1998.

[13] Vásquez, C. y Alsina, A. Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. Números, n. 85, p. 5-23, 2014.

[14] Vásquez, V., Pincheira, N. y Díaz-Levicoy, D. ¿Qué significa enseñar y aprender probabilidad? Un primer análisis desde el currículo de Educación Primaria. Educação Matemática Pesquisa, en prensa.

Probabilidad Más que Solo Suerte

Gabriel Mena Cantero[1] & Andrea Navarro Agüero[2]

Resumen

Este taller va dirigido a profesores y estudiantes universitarios de Enseñanza de la Matemática que deseen capacitarse en el tema de las probabilidades para poder ampliar sus conocimientos e impartir con mayor seguridad las clases de este tema, buscando incentivar el interés de sus estudiantes. El principal objetivo del taller es estudiar la relación que existe entre las eventualidades equiprobables, la Ley de Laplace y muchas situaciones o experimentos básicos de la teoría de las probabilidades.

Utilizando lo planteado por los Programas de Matemática del Ministerio de Educación Pública, se procurará generar un ambiente de construcción del conocimiento, utilizando para esto la integración de la historia con problemas importantes en la teoría de las probabilidades, la elaboración de materiales simples con los cuales modelar las situaciones planteadas, el uso de elementos del entorno para la modelización de fenómenos probabilísticos y se incluirá un módulo de uso del programa Excel como modelador de situaciones, en el que se pueda establecer la relación entre probabilidad frecuencial y probabilidad total, especialmente en experimentos con eventualidades equiprobables.

Palabras Clave: Probabilidad, aleatoriedad, Ley de Laplace, docentes, recursos.

Abstract

This workshop is oriented to teachers and college students primarily of Math Teaching, who wants to expand their knowledge in probability and train in different ways to attract interest and focus of students in the classroom, and also been more secure when imparting probability lessons. The main goal of the workshop is to study the relation between equiprobables eventualities, Laplace´s Law, and many situations and experiments in probability theory.

Using what states in the Mathematical Programs of the Public Education Ministry, it´ll be the intention to generate a suitable environment for the construction of knowledge, using the history through historical problems in the probability theory, the elaboration of simple and handy materials to model given situations, the use of environmental materials in order to model probabilistic situations, and also there will be a module of the program Excel as a way to model different situations and also to relate frequency probability with total probability, especially in experiments with equiprobable eventualities.

Keywords: *Probability, randomness, Laplace´s Law, teachers, resources.*

[1] Universidad de Costa Rica, Costa Rica. gabriel.mcantero@outlook.com
[2] Universidad de Costa Rica, Costa Rica. andre_na0393@hotmail.com

Introducción

Mediante un taller de aproximadamente 4.5 horas se pretende construir o reconstruir los diferentes conceptos probabilísticos asociados a la Ley de Laplace, que corresponden a los contenidos y habilidades presentes en el Programa de Estudios de Matemática para octavo año.

El taller se presenta en tres sesiones de 1.5 horas cada una, realizadas en tres días diferentes, en la primera sesión se busca la consolidación de los diferentes conceptos para ser puestos en práctica mediante el análisis pedagógico y didáctico de los mismos.

En la segunda sesión se propicia el espacio para la construcción de situaciones probabilísticas que involucren la Ley de Laplace, para analizar desde los puntos de vista de los participantes los diferentes ejercicios propuestos. Finalmente, para el último día de taller se modelan diferentes situaciones probabilísticas también relacionadas con la Ley de Laplace, mediante el programa Excel que permite acceder al uso de las TIC`s como una herramienta de aprendizaje.

Justificación

Al enfrentar los recientes cambios presentes en el programa de matemáticas de la educación costarricense, los docentes han manifestado diferentes deficiencias no solo en la formación académica referente específicamente a Probabilidad y Estadística, sino también en las decisiones pedagógicas tomadas en su planeamiento y en especial en las diversas prácticas didácticas realizadas en clase.

Referente a ésta situación Pérez, Cueto, Fernández, Filloy, Diez, Kelmansky & Pomilio en su trabajo *Mejorando Las Competencias Para La Enseñanza De La Estadística De Profesores De Secundaria En Formación A Través De Talleres Participativos* para las memorias de IASE 2015 Satellite Paper – Refereed señalan:

> "Esta escasa preparación en la disciplina con la que el profesor termina sus estudios hace que cuente con pocos recursos para su enseñanza y evidencia una actitud negativa hacia la disciplina. En ese sentido, Estrada (2004) halló que la actitud hacia la estadística del profesor en ejercicio se deteriora con la práctica docente, debido a la dificultad que él mismo encuentra en la disciplina, a la escasa importancia que se le otorga o a la dificultad para aprender que aprecia en sus alumnos. Como consecuencia, los contenidos de estadística no son habitualmente desarrollados en el ciclo lectivo o bien quedan reducidos a unas pocas clases, con un tratamiento habitualmente limitado a los aspectos procedimentales." (Pérez, Cueto, Fernández, Filloy, Diez, Kelmansky & Pomilio. 2015)

En nuestro país la situación de la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad enfrenta los mismos problemas que se señalan anteriormente, problemas que condicionan el aprendizaje de los estudiantes a procedimientos para obtener simplemente resultados numéricos y no a la interiorización de los conceptos para propiciar un análisis de significados, que es lo que busca tanto el Programa de Estudios de Matemática de secundaria para la resolución de problemas de la cotidianidad, como las disciplinas matemáticas de Estadística y Probabilidad.

Es por esto que no se está logrando el objetivo de modelar la realidad inmediata de los estudiantes mediante la Estadística y la Probabilidad y de esta manera acercar la matemática al estudiante y contextualizarla, se reducen las disciplinas y sus saberes a meros cálculos, algoritmos y números.

En relación con, esto Milagros Rodríguez señala en su artículo *El Perfil Del Docente De Matemática: Visión Desde La Triada Matemática-Cotidianidad Y Pedagogía Integral* para la revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación (Redalyc) menciona:

> “Entonces, como ha desaparecido el diálogo en el acto de enseñar el proceso de enseñanza de la Matemática se ha simplificado y se remite al dictado de una teoría ya acabada, donde el estudiante no inmiscuye su cotidianidad, su cultura, sus sentimientos.” (Rodríguez 2010, pág 4)

Desligar el dialogo que debe existir entre la escuela y el contexto limita la oportunidad del estudiante de aprender el concepto matemático, lo que genera no solo deficiencias en el desarrollo de la clase y la resolución de ejercicios sino se pierde la matemática como una herramienta útil para otras disciplinas del saber.

Con estas situaciones que acompañan a la Enseñanza de la Estadística y la Probabilidad se propone un taller dirigido a fortalecer los diferentes conceptos probabilísticos asociados al estudio de la Ley de Laplace en docentes de Matemática; para impartir en octavo grado de secundaria, el cual, será complementado con una sección de tecnología mediante el uso de Excel.

Taller

Día I

Tiempo 1 hora y 30 min

Materiales: Juego de mesa, en este caso Pictionary, Pizarra, Marcadores.

Luego de una presentación sencilla por parte de cada uno de los participantes, se procederá a realizar una actividad rompehielos, que será una adaptación del juego Pictionary, el cual consiste en lanzar un dado cuyas caras serán de seis colores, amarillo, rojo, verde, naranja , azul y morado. Los primeros 5 colores corresponden a las categorías que aparecen en cada una de tarjetas, las cuales que tienen escrita una palabra que será representada en la pizarra mediante un dibujo, el sexto color, el morado, indicará que el participante puede escoger la opción que prefiera de las palabras que aparecen en la tarjeta. Un segundo dado tendrá en cuatro de las caras una dificultad, dibujar con la mano débil, dibujar con los ojos cerrados, no levantar el lápiz del papel, hacer dos dibujos, las otras dos caras son para dibujar sin dificultad. Finalmente, se procederá a dibujar en una pizarra la palabra que se obtiene de la tarjeta, con la dificultad obtenida, tratando que los compañeros adivinen de qué se trata. Esto con el fin de que comiencen a familiarizarse con el tipo de actividades que se pueden realizar para ejemplificar situaciones probabilísticas. Después de que todos o la mayoría de los participantes hayan dibujado al menos una vez, se procederá a discutir los resultados obtenidos en los dados y los dibujos, llegando a la conclusión de que existe lo que se puede denominar un "espacio de posibles resultados" para cada uno de estos, llegando así a la construcción empírica del concepto de espacio muestral, eventualidad y evento. Seguidamente, se procederá a discutir las nociones de aleatoriedad, probabilidad y determinismo, mediante la conversación y la lluvia de ideas.

Seguidamente se presenta una actividad en la que se proponen tres situaciones clásicas de la teoría de las probabilidades

* Los jugadores A y B apuestan a cara o cruz, tirando una moneda. El jugador que primero llega a cinco puntos gana la apuesta. El juego se interrumpe en un momento en que A tiene 4 puntos y B tiene 3 puntos. ¿Cómo deben repartir la cantidad apostada para ser justos? ¿la proporción justa es de 4 a 3?
* El Caballero De Meré sabía que era ventajoso apostar por el resultado de obtener al menos un seis en una serie de 4 lanzamientos de un dado. Entonces De Meré argumentó que debiera ser igualmente ventajoso apostar por el resultado de obtener al menos un doble seis en una serie de 24 lanzamientos con un par de dados. Para ello había razonado "por regla de tres": si en 4 lanzamientos se apuesta por un resultado específico entre 6 posibles, es lo mismo que si en 24 lanzamientos se apuesta por un resultado específico entre 36 posibles, ya que $6 : 4 = 36 : 24$. La experiencia no corroboró la suposición de De Meré. ¿cómo hizo Pascal, justificar por qué la primera apuesta es ventajosa pero la segunda no lo es?
* Tres jugadores A, B y C meten 12 fichas en una bolsa de las que 4 son blancas y 8 negras. El ganador es quién primero extraiga una ficha blanca. Primero extrae A, luego B y luego C, y el ciclo se vuelve a iniciar hasta que alguno gane. Qué relación hay entre las probabilidades de ganar que tiene cada jugador si: a) hay solo una bolsa y cada vez que se extrae una ficha negra se devuelve a la bolsa; b) las extracciones son sin reemplazamiento; c) cada uno de los tres jugadores comienza con su propia bolsa de doce fichas y las va extrayendo sin reemplazamiento.

En cinco grupos los participantes deberán contestar las preguntas de cada ítem y presentar sus razonamientos probabilísticos del porqué de sus respuestas.
Esta situación anterior es de suma importancia, ya que además de integrar la historia al proceso didáctico, permite ver errores de preconcepciones y nociones que se tiene en la realidad. Así mismo, este ejercicio permite desarrollar más a fondo el concepto de espacio muestral, evento, eventualidad, además de permitir introducir los conceptos de eventualidades equiprobables, Ley de Laplace, probabilidad frecuencial, probabilidad teórica y la Ley de los Grandes Números. Lo anterior dado

que al buscar y razonar las respuestas se puede comprender de mejor manera cada concepto y verificar que se esté adquiriendo correctamente cada uno. Se discutirá cada situación y sus principales características.

Día II

Tiempo 1 hora y 30 minutos

Materiales: goma, tijeras, lápices, marcadores, cinta adhesiva, papeles de colores, cartulinas, paletas, silicón frío.

Se retomarán algunos de los conceptos adquiridos en el día anterior mediante el repaso.

Se le solicita a los participantes que, en grupos de tres personas, redacten una situación probabilística, con los conceptos que poseen de la teoría de las probabilidades, pueden usar si gustan sus teléfonos móviles o computadoras, para obtener ayudas, sin embargo se solicita que sea una trabajo original, y que no requiera de material digital para su solución, por el contrario debe realizarse con material de reciclaje cada uno de los materiales didácticos que modelan la situación tales como, dados utilizando paletas o palitos de madera y cinta adhesiva o papel y goma, monedas usando cartón, urnas con bolas utilizando canicas, o cualquier método que utilice materiales de reciclaje y que conozcan cómo hacerlos o encuentren su forma de confección con ayuda de internet. La idea es prescindir de los materiales digitales, ya que no todos los centros educativos cuentan con éstos recursos para cada estudiante, dicha situación será expuesta con su respectiva solución, objetivo específico dentro del contenido de Ley de Laplace; materiales necesarios para su realización y cómo se construye, tiempo esperado de solución, pros y contras del ejercicio y posibles errores que pueden cometer los estudiantes, se les pedirá que sean lo más específicos posibles. Esto con el fin de que el taller no se quede en el conocimiento teórico, sino que se lleve al ambiente práctico y se incentive al docente a buscar situaciones que pueda utilizar en el aula.

Seguidamente se realizará la exposición de los ejercicios planteados por cada uno de los grupos. Se recomienda a los demás participantes que tomen notas de cada una de las situaciones, sobre qué les llamó la atención, qué creen que se debe mejorar y qué cambiarían de acuerdo a su contexto. Para finalmente, producir una discusión acerca de lo expuesto por cada uno con el fin de mejorar las actividades y realizar un abordaje y planeamiento en conjunto, tratando así de expandir las opciones y posibilidades para la realización de actividades en el aula por los participantes y notando que todas estas propuestas son adaptables al contexto de cada uno.

Día III

Tiempo 1 hora y 30 minutos

Materiales: Computadora y el programa EXCEL

Para este último día se realizará un repaso de la teoría que ha visto en los últimos días, esto con el fin de que los conceptos y conocimientos sean interiorizados y manejados de la mejor manera por parte de los participantes.

Seguidamente, se procederá a trabajar con el programa Excel, para lo cual es necesario que se comience con una introducción al uso de las funciones básicas de programación que tiene este programa, como SI, CONTAR, CONTAR.SI, RAND, entre otras que se consideren necesarias.

A continuación, se demostrará cómo es que se puede modelar una situación probabilística básica como el lanzamiento de un dado en este programa y al finalizar esto se procederá a explicar cómo se puede programar el conteo de los resultados de los posibles eventos.

Se modelarán los siguientes experimentos cuyo grado de dificultad es creciente.

- Si se lanza un dado legal, ¿cuál es la probabilidad de que salga un múltiplo de 2?
- Si se lanzan dos dados legales ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados sea menor a 8?
- Si se lanzan 3 monedas al mismo tiempo, ¿cuál es la posibilidad de que salgan por lo menos 2 escudos?

Y para finalizar, se propondrá comparar la probabilidad frecuencial de que suceda un evento de los que fueron programados anteriormente en forma escalada de 10, 100, 1000, 3000 y 5000 repeticiones del mismo, y la probabilidad teórica de que suceda, esto con el fin de que se evidencie cómo a mayor cantidad de repeticiones la probabilidad frecuencial y la teórica se van acercando, siendo esto una manifestación de lo planteado por la Ley de los Grandes Números.

Conclusiones

El desarrollar un taller para la construcción y análisis de los diferentes conceptos de probabilidad asociados a la Ley de Laplace, propicia un espacio que permita facilitar ideas que los participantes pueden poner en práctica en una clase de Estadística y Probabilidad en secundaria. Además, se cuenta con un espacio donde se puede construir, conversar y analizar desde diferentes puntos de vista los distintos conceptos y ejercicios propuestos para corregir posibles errores y mejorar el ambiente del aula, haciéndolo más interesante y atractivo para los estudiantes, propiciando así un aprendizaje significativo y participativo.

Los diferentes problemas propuestos en el taller, para el análisis del razonamiento, posibles errores y aciertos, son situaciones que propiciaron el avance en el pensamiento probabilístico a lo largo de la historia, de manera, el taller incluye la historia como parte de la construcción que se propone buscando un desarrollo integral de los diferentes conceptos que se buscan fortalecer y promoviendo el uso de la misma como una poderosa herramienta en el quehacer docente, especialmente en matemática.

El trabajo de construir con materiales de reciclaje diferentes objetos que permitan modelar y ejemplificar las diferentes situaciones y problemas de probabilidad que pueden resolverse en una clase de secundaria permite a los participantes reflexionar sobre lo que se tiene como recursos y no sobre las carencias que se le presentan promoviendo así la proactividad docente, de manera que es posible un trabajo creativo y eficiente que permita a los estudiantes de secundaria obtener mediante diferentes medios los conocimientos que se requieren, sin tener que recurrir exclusivamente a herramientas tecnológicas u otro material didáctico muchas veces inaccesible para el estudiantado por su costo.

El uso de las tecnologías dentro de nuestro sistema educativo es un tema del cual no se puede prescindir dentro de las conversaciones de didáctica de la matemática, ya que en una cultura globalizada como la que vivimos, se busca relacionar cada aspecto de nuestra vida con objetos que faciliten nuestras tareas, de esta manera nuestros estudiantes se ven influenciados por los diferentes aparatos tecnológicos que tienen a su alcance. Para los que sí los tienen, pues no es posible generalizar la presencia de dichos recursos en todas las instituciones educativas y para todos los estudiantes por igual, se busca, mediante el taller, modelar diferentes situaciones probabilísticas que permitan a los docentes crear una nueva perspectiva que puedan desarrollar en su clase de probabilidad en secundaria, logrando de esta manera acercar al estudiante a los conceptos y ofreciéndole una perspectiva diferente y novedosa de aprender, la cual se ajusta a sus intereses y facilidades, potenciando el aprendizaje.

Bibliografía

[1] Pérez. A, Cueto. G, Fernández. M, Filloy. J, Diez. S, Kelmansky.D & Pomilio. C. Mejorando Las Competencias Para La Enseñanza De La Estadística De Profesores De Secundaria En Formación A Través De Talleres Participativos, Memorias de IASE Satellite Paper – Refereed. Argentina 2015

[2] Rodríguez. M. El Perfil Del Docente De Matemática: Visión Desde La Triada Matemática-Cotidianidad Y Pedagogía Integral, Vol. 10: Redalyc. Costa Rica 2010

¿Conectan los futuros profesores las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad?

Rafael Parraguez[1], María M. Gea[2], Danilo Díaz-Levicoy[3] y Carmen Batanero[4]

Resumen

En la última década, el currículo de muchos países ha incorporado contenidos de probabilidad desde los primeros niveles de educación primaria, lo que puede suponer un reto para el profesorado encargado de su enseñanza. Los programas educativos sugieren utilizar un enfoque frecuencial de la probabilidad, donde se realicen experimentos, recojan datos de sus resultados y obtengan conclusiones sobre la probabilidad de diferentes sucesos. En este trabajo se analiza la forma en que los futuros profesores de educación primaria en España relacionan los significados clásicos y frecuencial de la probabilidad y las dificultades que puedan tener en diferenciar y poner en relación dichos significados. Entre los resultados obtenidos destacamos, la dificultad en estimar la frecuencia esperada de veces que ocurre un suceso.

Palabras clave: Probabilidad (significado frecuencial y clásico), Futuros profesores.

Abstract

In the last decade, the curriculum of many countries has incorporated probabilistic content from the first levels of primary school, which can be challenging for teachers in charge of teaching. Educational programs suggest using a frequentist approach to probability, where children conduct experiments, collect data and obtain conclusions on the likelihood of different events. In this work the way prospective primary school teachers in Spain relate classical and frequency meanings of probability, as well as the difficulties they have in differentiating these meanings and relate them are analyzed. Among the results we highlight the difficulty in estimating the expected frequency of times an event occurs.

Keywords: Probability (Frequency and Classic Meaning), Prospective teachers.

I. Introducción

Un cambio importante que se ha producido en la última década en el currículo de educación primaria de muchos países es la incorporación de contenidos de probabilidad (e.g., MECD, 2014). La principal razón que apoya este cambio es que vivimos en un

[1] Universidad de Granada, España. rafparra@correo.ugr.es
[2] Universidad de Granada, España. mmgea@ugr.es
[3] Universidad de Granada, España. dddiaz01@hotmail.com
[4] Universidad de Granada, España. batanero@ugr.es

mundo con fuerte presencia del azar, por lo que hemos de preparar a los niños y niñas para afrontar dichas situaciones y tomar decisiones correctas. Así, autores como Gal (2005) reclaman la alfabetización probabilística de todos los ciudadanos, entendida como el conjunto de conocimientos, capacidades y actitudes que les permitan desenvolverse ante fenómenos aleatorios. Será entonces necesario proporcionar una formación adecuada de los futuros profesores que han de impartir estos contenidos, teniendo en cuenta las características específicas de la probabilidad y sus aspectos didácticos.

En este trabajo nos hemos interesado por esta problemática y más concretamente, por analizar la forma en que los futuros profesores de este nivel educativo relacionan los significados clásicos y frecuencial de la probabilidad y las dificultades que puedan tener al diferenciar y poner en relación dichos significados. Para ello se analizan las respuestas escritas a una actividad práctica resuelta por una muestra de futuros profesores de educación primaria en España. Dicha actividad se ha tomado de un trabajo previo de Rivas y Godino (2015), quienes también la utilizaron en la formación de profesores. Nuestro análisis completa el suyo, puesto que los autores citados sólo describen la resolución colectiva en la pizarra por el profesor y alumnos. En nuestro caso, comparamos las respuestas en un grupo de estudiantes que la resuelven individualmente y otro que la resuelven trabajando en parejas, en ambos casos por escrito.

II. Fundamentos

El concepto de probabilidad tiene diversas interpretaciones, aunque en el presente trabajo nos centramos en las definiciones de probabilidad clásica y frecuencial, por su papel en el currículo de educación primaria. Según Batanero (2005), ambos han de ser comprendidos por los estudiantes y, en nuestro caso, los futuros profesores, quienes deben ponerlos en relación para que puedan ser enseñados de manera significativa al alumnado.

La interpretación clásica tiene su origen en los juegos de azar; la correspondencia entre Pascal y Fermat en la década de 1650 se considera el primer estudio matemático de la probabilidad, aunque en esta correspondencia todavía no se presenta una definición del concepto. La primera definición formal la entrega de Moivre (1967) en *The Doctrine of Chances*:

> Si constituimos una fracción cuyo numerador es el número de chances (posibilidades) con la que el suceso podría ocurrir y el denominador el número de chances con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de la probabilidad de ocurrencia (p. 1).

Seguido a esto, Laplace (1995) publica un texto donde estableció la definición que actualmente conocemos como probabilidad clásica o regla de Laplace: “como una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el número de todos los casos posibles” (p. 28). Esta definición, desde su comienzo, no estuvo ajena a la controversia.

Según Godino, Batanero y Cañizares (1987), la definición es circular, pues el término “equiprobable” se incluye en la definición de probabilidad; además, solo se puede aplicar esta definición a experimentos con un número finito de posibilidades. Esta definición se usa en la escuela, porque a los niños les gustan los juegos y de este modo se interesan por el tema, pero el rango de aplicaciones que se puede mostrar con este enfoque es muy limitado.

Al tratar de superar los inconvenientes y controversias filosóficas del enfoque clásico, algunos autores definen la probabilidad desde un punto de vista frecuencial. Los estudios sobre tablas de vida en Inglaterra, en que se recopilaron muchos datos sobre edad y causas de muerte, habían hecho observar que la frecuencia relativa de un suceso (por ejemplo, una causa de muerte) se estabiliza en el tiempo (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). El primero en demostrar que la probabilidad de un suceso se puede estimar con la precisión que se desee a partir de la frecuencia relativa, observada en una serie grande de ensayos del mismo experimento, fue Bernoulli (1987). La ley débil de los grandes números establece que dados $\varepsilon > 0$ y $\alpha > 0$ tan pequeños como queramos, podemos encontrar un valor $n > \frac{pq}{\varepsilon\alpha^2}$, siendo p la probabilidad teórica y $q = 1 - p$, de forma que se verifica que la diferencia entre la frecuencia relativa h_n en n ensayos y la probabilidad cumple que: $P(|h_n - p| < \varepsilon) \geq 1 - \alpha$.

La convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica se consideró como un apoyo al carácter objetivo de la probabilidad, pero hubo que esperar a Von Mises (1952), quien fue el primero en definir la probabilidad en su concepción frecuencial como el valor hacia el cual tiende la frecuencia relativa en un gran número de ensayos.

Esta definición amplía la posibilidad de aplicar el cálculo de probabilidades, pues no se exige la equiprobabilidad de los sucesos elementales. Con ello, la estadística y probabilidad comienzan a aplicarse en todos los campos de las ciencias y ramas de la actividad humana (Godino, Batanero y Cañizares, 1987). Sin embargo, esta definición presenta algunos problemas. El primero de ellos es que, al partir de la frecuencia relativa, no obtenemos un valor exacto de la probabilidad, sino una estimación de la misma, por tanto, puede variar cada vez que tratamos de estimarla. La segunda cuestión es que, en la mayor parte de los casos, es imposible realizar los experimentos exactamente en las mismas condiciones y hay circunstancias (por ejemplo, en medicina, en inversiones, etc.) donde con seguridad sabemos que las condiciones de una y otra repetición son diferentes. Por último, es difícil comprender cuál es el número de experimentos que debemos realizar para que el valor de la probabilidad estimado sea válido o considerado bueno.

Según Godino, Batanero y Cañizares (1987), en la enseñanza, esta definición permite establecer la unión entre la estadística y la probabilidad, pues utiliza el concepto de frecuencia relativa de la estadística aplicándolo en el cálculo de probabilidades. Además, gracias a la tecnología, es muy sencillo aplicar este enfoque, usando la simulación para repetir un cierto experimento un número grande de veces y observar empíricamente la convergencia. Se aborda así la dificultad de la ley de los grandes números, sustituyéndola por una aproximación empírica e intuitiva de la misma.

El futuro profesor, que como recomienda el currículo ha de enseñar en la educación primaria con estos dos enfoques, ha de diferenciarlos claramente y dominar los elementos que caracterizan a cada uno. También debe relacionarlos, comprendiendo las exigencias de cada enfoque, la diferencia entre estimación a partir de la frecuencia relativa y probabilidad teórica. Esta comprensión relacional es la que tratamos de evaluar en nuestro trabajo.

III. Antecedentes

Las investigaciones previas sobre los conocimientos de la probabilidad de los futuros profesores de educación primaria indican dificultades en el tema, lo cual es hasta cierto punto razonable, ya que la probabilidad sólo se ha incluido recientemente en el currículo escolar desde los primeros niveles. Por ello, no se consideraba necesario formar a los futuros profesores de educación primaria sobre este tema en las Escuelas de Formación del Profesorado. A continuación, destacamos las más relacionadas con nuestro estudio.

Azcárate (1995), que estudió las respuestas a un cuestionario de 57 futuros profesores de educación primaria, muestra que la mayoría relacionaron la aleatoriedad con la causalidad, no comprendiendo la utilidad de la probabilidad para estudiar los fenómenos aleatorios. También observó el predomino de esquemas causales, así como dificultades en el uso y comprensión de información frecuencial en la cuantificación de probabilidades y en la idea de juego equitativo.

Serrano (1996) plantea, a una muestra de 130 futuros profesores, un cuestionario para evaluar tres componentes de su conocimiento sobre la probabilidad: a) las propiedades atribuidas a las secuencias de resultados aleatorios; b) la interpretación de enunciados de probabilidad frecuencial; y c) el uso de heurísticas en la resolución de problemas probabilísticos sencillos. Encontró una fuerte presencia de la heurística de la representatividad, es decir, esperar la convergencia en muestras pequeñas (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982) y del enfoque en el resultado (Konold, 1989), es decir, interpretar un problema de probabilidad en forma no probabilística.

Batanero, Cañizares y Godino (2005) estudiaron la influencia de actividades de simulación sobre el conocimiento común de la probabilidad en 132 futuros profesores españoles de educación primaria. En las respuestas de los participantes al cuestionario propuesto, los autores observaron la heurística de la representatividad; el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), consistente en suponer todos los sucesos aleatorios como equiprobables; y el enfoque en el resultado (23% de estudiantes). Estos sesgos disminuyen bastante después de unas actividades de simulación, en que los estudiantes interaccionan directamente con el problema gracias al uso de la tecnología.

Mohamed (2012) aplicó un cuestionario, usado previamente con niños, a 283 futuros profesores de educación primaria donde las preguntas más sencillas fueron asignación de probabilidades simples, probabilidad condicionada, estimación frecuencial de la probabilidad en el corto plazo y juego equitativo en un experimento simple. Los principales errores fueron la confusión entre suceso seguro y posible, la falta de razonamiento combinatorio o ideas confusas sobre características de los fenómenos aleatorios como la falta de percepción de la independencia y dificultades asociadas al experimento compuesto.

El trabajo más completo sobre el tema fue realizado por Gómez (2014). Con base a un estudio detallado del currículo y los libros de texto, así como de los diferentes significados de la probabilidad, construye un cuestionario con una metodología rigurosa. La aplicación del cuestionario en una muestra de 157 futuros profesores y el análisis detallado de sus respuestas permite caracterizar dichos componentes de su conocimiento. Además, evalúa el conocimiento diferenciado de las aproximaciones clásica, frecuencial y subjetiva de la probabilidad. Por otro lado, las dificultades encontradas en la literatura sobre el tema son retomadas en una actividad formativa, basada en el debate de las soluciones y la simulación para desarrollar el conocimiento matemático de la probabilidad en estos futuros profesores. En los resultados obtenidos, los futuros profesores presentaron un conocimiento común adecuado respecto al enfoque clásico de la probabilidad; por ejemplo, al enumerar el espacio muestral y en el cálculo de probabilidades sencillas. Presentaron mayores dificultades en el desempeño del enfoque frecuencial, donde muchos participantes no perciben la variabilidad de las pequeñas muestras o caen en el sesgo de equiprobabilidad.

Aunque no hemos encontrado investigaciones sobre futuros profesores de educación primaria en que se analice cómo integran los significados clásico y frecuencial de la probabilidad, sí hemos encontrado algunas investigaciones con estudiantes. Entre ellas destacamos la de Valdés (2016), en que analiza el trabajo de 30 estudiantes cuando abordan una situación de muestreo en que deben predecir o bien la composición de la población, o bien los resultados en diferentes muestras. El autor caracteriza las ideas informales de aleatoriedad, variabilidad e independencia en estos estudiantes.

Para completar las investigaciones previas, en este trabajo nos centramos en una muestra de futuros profesores que, mediante un cuestionario escrito, se enfrentan a un conflicto en el que se les ofrecen datos empíricos sobre un juego, que contradicen las probabilidades calculadas en sentido clásico. Esta situación motivará la reflexión entre las aproximaciones clásica y frecuencial de la probabilidad, que es uno de nuestros propósitos.

IV. Método

La muestra estuvo compuesta por 60 estudiantes, de los cuales 20 realizaron la actividad en forma individual y los 40 restantes en parejas (un total de 20 parejas). Estos estudiantes cursaban el segundo año del Grado de Maestro de educación primaria en la Universidad de Granada y en el año anterior cursaron la asignatura *Bases Matemáticas para la Educación Primaria*, en que se estudian los contenidos relativos a la probabilidad durante aproximadamente una semana. La recogida de datos formó parte de una práctica realizada en el transcurso de la asignatura de segundo curso denominada *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria*, cuando ya habían estudiado la mayoría del temario centrado en la Didáctica de la Matemática.

Para explicar la situación y facilitar la recogida de datos, se dio a los estudiantes una ficha de trabajo como se muestra en la Figura 1, en la que se describe una secuencia de enseñanza de la probabilidad llevada a cabo por una maestra, que es tomada de la investigación de Rivas y Godino (2015). Los estudiantes debieron responder por escrito a cada pregunta de la actividad y, además de la situación inicial presentada en la Figura 1, también contestar a las preguntas siguientes:

1. Analiza la actividad 1. Indica quién tiene ventaja en el juego y por qué. Determina la probabilidad teórica.
2. Si realizáramos muchas tiradas, ¿Con cuánta frecuencia esperarías que saliera cada una de las sumas? ¿Con cuánta frecuencia ganaría *A* o *B*?
3. Analiza la Actividad 2 ¿Piensas que la tabla con los datos de toda la clase es suficiente para sacar conclusiones del experimento realizado y las cuestiones planteadas? ¿Podríamos tomar como probabilidad de ganar *A* la frecuencia relativa de veces que gana *A*?

Raquel es maestra de Primaria y lleva unos días trabajando algunas nociones de probabilidad en su clase de 6º. Sus estudiantes asignan sin dificultad probabilidades a ciertos sucesos simples, como los resultados de lanzar un dado o una moneda o de girar una ruleta con todos los sectores iguales. Para hoy decide plantear la siguiente actividad:

Actividad 1. Suma de puntos al lanzar dos dados:

"*Vamos a jugar con dos dados por parejas. Lanzamos los dados y sumamos los puntos obtenidos. Si resulta una suma de 6, 7, 8, o 9 entonces gana A una ficha; si la suma es distinta de esos números gana B una ficha. ¿Qué prefieres ser jugador A o B?*

Juega con un compañero 10 veces y anota los resultados de las sumas que obtienes. ¿Quién ha ganado más veces A o B? ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué?

Actividad 2. Recogida de datos de la clase:

A continuación Raquel recoge en la siguiente tabla los datos de las 10 parejas de estudiantes que hay en la clase y les pide construir un diagrama de barras con estos datos.

	Suma de puntos	Número de veces	Frecuencia relativa
Gana B	2	2	0,02
	3	9	0,09
	4	12	0,12
	5	20	0,2
Gana A	6	7	0,07
	7	12	0,12
	8	14	0,14
	9	9	0,09
Gana B	10	8	0,08
	11	4	0,04
	12	3	0,03

Raquel plantea a los niños las siguientes preguntas: ¿Quién ha ganado más veces los jugadores *A* o los *B*? ¿Quién tiene más probabilidad de ganar?

Figura 1. Ficha de trabajo de los estudiantes

Nuestro análisis se centra en las respuestas de los futuros profesores a estas cuestiones, ya que nos interesamos por la comprensión relacional de estos estudiantes en las aproximaciones clásica y frecuencial de la probabilidad. Previamente, y para elaborar sus argumentaciones, los futuros profesores deberán haber resuelto las dos actividades que componen la situación de enseñanza planteada (Figura 1).

V. Resultados y discusión

Análisis del juego desde el significado clásico. Aproximación intuitiva al enfoque frecuencial

1. Analiza la actividad 1. Indica quién tiene ventaja en el juego y por qué. Determina la probabilidad teórica.

Para llegar a la solución de la actividad 1 (Figura 1), el futuro profesor podría utilizar algún tipo de esquema basado en la enumeración sistemática del espacio muestral del experimento, como el mostrado en la Tabla 1. Se observa que no todas las sumas de puntos de los dados tienen la misma probabilidad de ocurrir, siendo más probables las sumas intermedias, que justamente corresponden a las posibilidades de ganar el jugador *A*; siendo menos probables las posibilidades extremas. Puesto que, aplicando el principio de indiferencia, todos los sucesos elementales tienen igual probabilidad de ocurrir, a partir del esquema dado se deduce que *B* gana 16 veces de 36. Con un razonamiento semejante se deduce que *A* gana 20 veces de 36. Utilizando la regla de Laplace, como cociente entre casos favorables y posibles, se deducen las probabilidades teóricas de A: P(*A*)= 20/36=0,55 y de B: P(*B*)= 16/36= 0,45. Por tanto, *A* tiene ventaja en este juego. Se espera que los futuros profesores posean una comprensión, al menos intuitiva, de la ley de los grandes números cuando argumenten que la variabilidad de éxito en la ganancia en 10 jugadas no se tiene que repetir si el experimento se realizase unas 100 veces.

Tabla 1. *Enumeración sistemática para resolver la tarea 1*

	Suma de puntos	Casos: (dado1, dado2)
Gana B	2	(1,1)
	3	(1,2); (2,1)
	4	(1,3); (2,2); (3,1)
	5	(1,4); (2,3); (3,2); (4,1)
Gana A	6	(1,5); (2,4); (3,3); (4,2); (5,1)
	7	(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)
	8	(2,6); (3,5); (4,4); (5,3); (6,2)
	9	(3,6); (4,5); (5,4); (6,3)
Gana B	10	(4,6); (5,5); (6,4)
	11	(5,6); (6,5)
	12	(6,6)

Hemos encontrado las siguientes categorías de respuestas:

R1. Respuesta correcta. Se identifican correctamente todos los sucesos del espacio muestral producto en el lanzamiento de dos dados, haciendo una enumeración sistemática y teniendo en cuenta el orden. A partir de ello, se identifican correctamente los sucesos correspondientes a las sumas en las que ganan *A* y *B*, y se calcula las probabilidades correspondientes aplicando la regla de la suma, o bien el sucesos complementario. Mostramos a continuación un ejemplo (Figura 2), en que el estudiante usa una tabla de doble entrada para formar el espacio muestral producto. En el cuerpo de la tabla, introduce una notación numérica para identificar cuáles de ellos tienen la misma suma. Con dos colores marca los sucesos favorables al jugador *A* o *B*, según corresponda, que expresa mediante un código situado al margen de la tabla. Además, calcula las probabilidades aplicando la regla de Laplace.

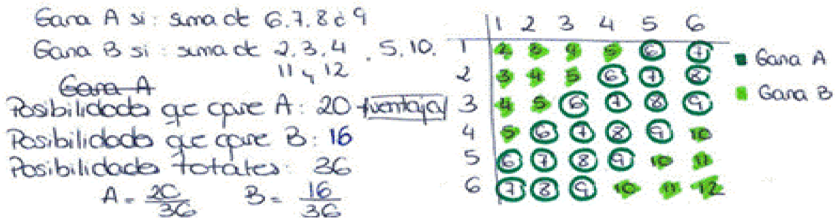


Figura 2. Respuesta correcta al apartado 1.

R2. Respuesta correcta relacional. Algunos estudiantes dan la respuesta correcta, calculando la probabilidad de ganar el juego los jugadores *A* y *B*, pero también indican que si se tiene en cuenta los resultados de la suma, sin considerar los diferentes resultados para obtenerla, aparentemente ganaría *B* y se cometería un error. Por tanto, ponen en relación los dos enfoques de la probabilidad. En el siguiente ejemplo (Figura 3), el estudiante analiza, en primer lugar, los resultados empíricos del juego, en donde *B* gana. Además, indica que este resultado lleva a cometer un error, pues en la probabilidad teórica, el que gana el juego es *A* con probabilidad 20/36 frente a *B*, con probabilidad 16/36. Esta última probabilidad está calculada correctamente.

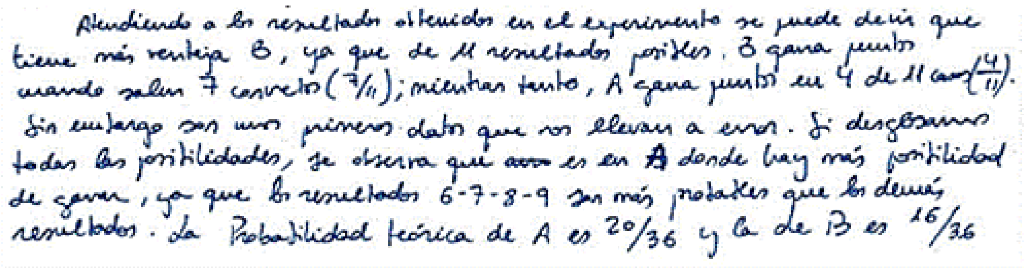


Figura 3. Respuesta correcta relacional al apartado 1.

R3. Parcialmente correcta. El estudiante afirma que tiene ventaja *A* sobre *B*, considerando que es más probable que al lanzar dos dados la suma de puntos sea favorable al jugador *A*. Sin embargo, el argumento utilizado, no es correcto. En el siguiente ejemplo (Figura 4), el estudiante da una respuesta correcta, pero su argumentación no lo es, ya que, por un lado, comete un error en el cálculo de probabilidades al considerar que los sucesos son equiprobables, es decir, presenta el sesgo de equiprobabilidad, (Lecoutre, 1992). Por ello deduce que *A* tiene una probabilidad de ocurrencia de 4/11, un 36% aproximadamente, y *B* de 7/11, un 64%. Añade que es difícil o raro que salgan dos números pequeños o dos grandes en el lanzamiento de los dados, sesgo de razonamiento que no hemos encontrado descrito en la literatura previa.

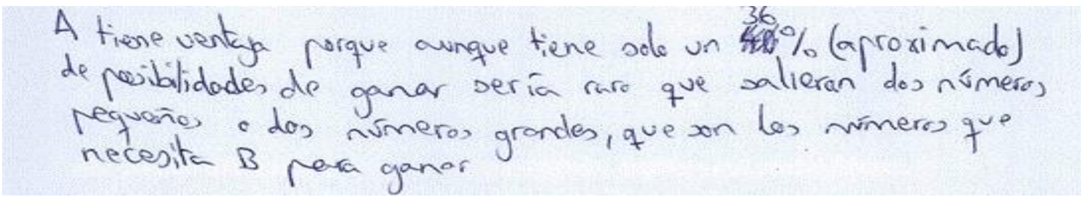


Figura 4. Respuesta parcialmente correcta al apartado 1.

R4. Incorrecta por sesgo de equiprobabilidad. Algunos estudiantes indican que *B* tiene ventaja, pues consideran que todas las posibles sumas de los dos dados tienen igual probabilidad de ocurrencia, es decir, son consideradas sucesos equiprobables (sesgo de equiprobabilidad, Lecoutre, 1992). La diferencia con el caso anterior es que también fallan en identificar el jugador que tiene ventaja en el juego. En el siguiente ejemplo (Figura 5), el participante considera que las sumas de puntos al lanzar dos dados (del 2 al 12) son sucesos equiprobables. No forma el espacio muestral producto para analizar cuáles sucesos de este espacio conducen a cada posible suma. Es decir, considera todas las sumas con igual probabilidad de ocurrencia, lo que lleva a contestar erróneamente esta pregunta, considerando que gana *B* con probabilidad 7/11 frente a *A* que obtiene probabilidad 4/11.

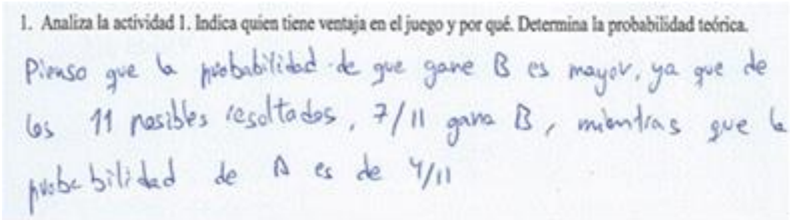

1. Analiza la actividad 1. Indica quien tiene ventaja en el juego y por qué. Determina la probabilidad teórica.
Pienso que la probabilidad de que gane B es mayor, ya que de los 11 posibles resultados, 7/11 gana B, mientras que la probabilidad de A es de 4/11

Figura 5. Respuesta incorrecta por sesgo de equiprobabilidad al apartado 1.

R5. Incorrecta por espacio muestral reducido. Algunos estudiantes consideran dos sumas que aparecen en distinto orden como un único suceso. Este error, que también aparece con frecuencia en la resolución de problemas combinatorios, fue denominado por Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1997) como *error de orden*. En el caso que nos ocupa es comprensible, pues la suma tiene la propiedad asociativa; pero a pesar de ello, hay que diferenciar los resultados según el orden en los dados para el cálculo de probabilidades. Si se comete el error, el espacio muestral queda reducido, lo que lleva a responder de manera incorrecta a esta pregunta; como se muestra en el siguiente ejemplo (Figura 6).

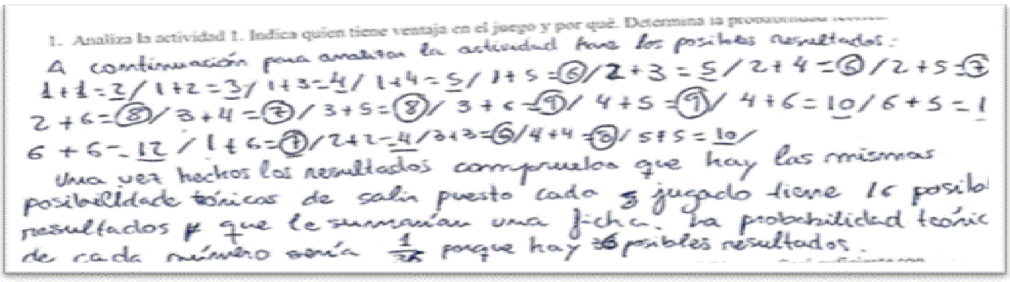

1. Analiza la actividad 1. Indica quien tiene ventaja en el juego y por qué. Determina la probabilidad teórica.
A continuación para analizar la actividad hare los posibles resultados:
1+1=2/1+2=3/1+3=4/1+4=5/1+5=6/2+3=5/2+4=6/2+5=7
2+6=8/3+4=7/3+5=8/3+6=9/4+5=9/4+6=10/6+5=11
6+6=12/1+6=7/2+2=4/3+3=6/4+4=8/5+5=10/
Una vez hechos los resultados compruebo que hay las mismas posibilidades teóricas de salir puesto cada jugador tiene 16 posibles resultados que le suman una ficha. La probabilidad teórica de cada número sería 1/36 porque hay 36 posibles resultados.

Figura 6. Respuesta incorrecta por espacio muestral reducido al apartado 1.

En la Tabla 2, se presentan las respuestas a este apartado de la tarea. Podemos observar que contestaron correctamente esta pregunta 43 estudiantes de los 60 (35% de los estudiantes en forma individual y el 90% de quienes responden en pareja), pero solo uno trata de relacionar explícitamente los dos significados de probabilidad. En las respuestas incorrectas, el error detectado con mayor frecuencia fue el sesgo de equiprobabilidad, presente en 12 estudiantes de la muestra (50% de los estudiantes que responden de modo individual y el 5% de quien responde en pareja), a los que hay que añadir tres estudiantes, que contestaron en forma parcialmente correcta, pero en su argumento cometieron el error de sesgo de equiprobabilidad. Solo un estudiante (5%) respondió incorrectamente a esta pregunta por error del espacio muestral reducido.

Tabla 2. *Frecuencia de respuestas de los estudiantes a la primera tarea*

Respuesta	Estudiantes	Parejas	Total de estudiantes
R1 Correcta	7	18	43
R2 Correcta relacional	1	0	1
R3 Parcialmente correcta	1	1	3
R4 Incorrecta por sesgo de equiprobabilidad	10	1	12
R5 Incorrecta por espacio muestral reducido	1	0	1

Al comparar los resultados de esta pregunta con la experiencia de aula de Rivas y Godino (2015), hacemos notar que en ambos trabajos predominan los mismos errores, que son el sesgo de equiprobabilidad y el espacio muestral reducido. Los autores no indican la frecuencia en sus estudiantes; en nuestro trabajo, contestaron correctamente a este apartado el 71,6% aproximadamente, el 20% de los participantes manifestó el sesgo de equiprobabilidad, y uno estudiante el error de espacio muestral reducido. Finalmente, tres estudiantes (5% de la muestra), contestaron de manera parcialmente correcta a esta pregunta.

Estimación del valor esperado mediante el enfoque frecuencial

2. Si realizáramos muchas tiradas, ¿Con cuánta frecuencia esperarías que saliera cada una de las sumas? ¿Con cuánta frecuencia ganaría *A* o *B*?

La frecuencia esperada de un suceso *S* en *n* repeticiones de un experimento viene dada por $Fe(S) = n \cdot P(S)$. En el apartado 1 se calcularon las probabilidades teóricas P(*A*)= 0,556 y P(*B*)= 0,444. Por tanto, en 1000 repeticiones, la frecuencia esperada sería que *A* ganaría 556 veces y *B* 444 veces, aproximadamente. Por otro lado, si se piensa en lanzar los dos dados 36 veces, y teniendo en cuenta los casos favorables para cada suma, se deduce que *A* ganaría 20 veces de 36 frente a 16 de cada 36 que ganaría *A*, o lo que es igual a 5 veces de 9 para *A* frente a 4 veces de 9 para *B*. Se encontraron las siguientes categorías de respuestas a esta actividad:

R1. Respuesta correcta. La mayoría de los estudiantes utilizaron los resultados de la pregunta 1 para responder a este apartado. Se da un valor correcto para la frecuencia esperada de resultados en que gana *A* y *B*, utilizando uno de los dos métodos expuestos anteriormente. Observamos este tipo de respuesta en el siguiente ejemplo (Figura 7), en que un estudiante primero presenta la probabilidad teórica con que gana *A* y *B* (deducida del cálculo de la probabilidad en el apartado 1). También afirma que la frecuencia esperada es 5 de cada 9 para que gane *A* y la de *B* es 4 de cada 9; por tanto, ha usado el cálculo de posibilidades del primer apartado.

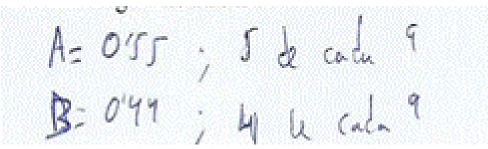


Figura 7. Respuesta correcta al apartado 2.

R2. Incorrecta por sesgo de equiprobabilidad. Como la mayoría de los estudiantes consideró la respuesta de la pregunta 1 para responder a este apartado, si cometieron el sesgo de equiprobabilidad en la primera pregunta, lo siguen manteniendo en este apartado, como podemos observar en el ejemplo (Figura 8) que se reproduce a continuación.

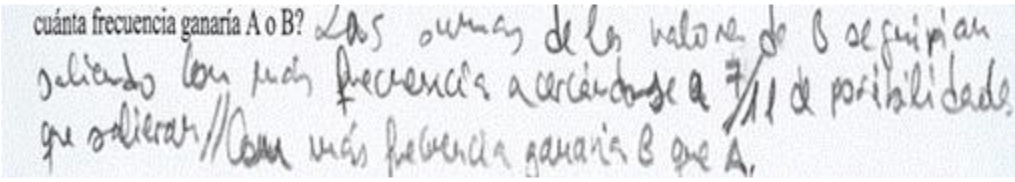

cuánta frecuencia ganaría A o B? Las sumas de los valores de B seguirían saliendo con más frecuencia acercándose a 7/11 de posibilidades que salieran // Con más frecuencia ganaría B que A.

Figura 8. Respuesta incorrecta por sesgo de equiprobabilidad al apartado 2.

R3. Incorrecta por espacio muestral reducido. Algunos estudiantes que tuvieron este error en el primer apartado lo mantienen en este otro, lo que lleva a responder de manera incorrecta a esta pregunta. Un ejemplo es el siguiente, en el que el estudiante utiliza su respuesta de la pregunta 1, donde solo considera los pares (3,4) y (5,4) y no (4,3) y (4,5). Al omitir posibles sumas, su espacio muestral queda reducido a sólo 11 posibilidades (cuando, sin tener en cuenta el orden deberían ser 21 y 36 teniéndolo en cuenta). El estudiante muestra una falta de capacidad de enumeración sistemática, error típico del razonamiento combinatorio de acuerdo a Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1997).

En la Tabla 3 se presenta la frecuencia de estudiantes que respondió al apartado 2 de la tarea, en que contestaron correctamente 21 estudiantes de los 60, es decir, sólo la tercera parte y no hay respuestas parcialmente correctas, de lo que se deduce que esta pregunta fue difícil. El error más frecuente fue el sesgo de equiprobabilidad, presente en 10 estudiantes de la muestra y 4 estudiantes contestaron incorrectamente por espacio muestral reducido. Hubo muchos estudiantes (25 de 60) que no respondieron, confirmando la dificultad de la misma. Rivas y Godino (2015) no la plantean.

Tabla 3. *Respuestas de los estudiantes a la segunda tarea*

Respuesta	Estudiantes	Parejas	Total de estudiantes
R1 Correcta	7	7	21
R2 Incorrecta por sesgo de equiprobabilidad	10	0	10
R3 Incorrecta por espacio muestral reducido	2	1	4
R4 No responde	1	12	25

Comparación de los significados clásico y frecuencial de la probabilidad

3. Analiza la Actividad 2 ¿Piensas que la tabla con los datos de toda la clase es suficiente para sacar conclusiones del experimento realizado y las cuestiones planteadas? ¿Podríamos tomar como probabilidad de ganar *A* la frecuencia relativa de veces que gana *A*?

En esta pregunta se pretende que el estudiante reflexione sobre la diferencia que se ha observado entre el valor teórico de la probabilidad y la frecuencia relativa de los datos en 100 repeticiones del experimento. Se espera que el estudiante detecte la gran diferencia y rechace la posibilidad de estimar la probabilidad de ganar *A* mediante la frecuencia relativa. El estudiante debe responder que no serían suficientes los datos de esta tabla. La frecuencia relativa obtenida en el experimento es una estimación mala, en este caso, de la probabilidad. Las respuestas obtenidas fueron clasificadas de acuerdo a las siguientes categorías:

R1. Respuesta correcta. El participante responde correctamente a este apartado, al señalar que no es suficiente la tabla con los datos de toda la clase para obtener conclusiones del experimento realizado, porque observa que la frecuencia relativa obtenida en el experimento es una estimación errónea de la probabilidad. En el siguiente ejemplo (Figura 9), el estudiante indica que los resultados obtenidos en la tabla no son suficientes para poder sacar conclusiones del experimento realizado y expone que el número de veces que gana *B* en dicha tabla es superior al de *A*, con lo que observa que la probabilidad teórica y su estimación empírica no coinciden. Por lo tanto, no se puede considerar aceptable, pues da vencedor del juego a *B* y no a *A*, que sería lo correcto.

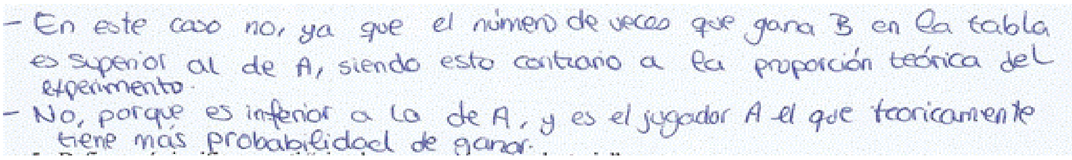

- En este caso no, ya que el número de veces que gana B en la tabla es superior al de A, siendo esto contrario a la proporción teórica del experimento.
- No, porque es inferior a la de A, y es el jugador A el que teoricamente tiene más probabilidad de ganar.

Figura 9. Respuesta correcta al apartado 3.

R2. Parcialmente correcta. Se considera en esta categoría de respuesta, aquella en que el estudiante responde correctamente una de las dos preguntas planteadas en el apartado pero no ambas. En el ejemplo que sigue (Figura 10), el estudiante considera que las tiradas de los dados en la tabla son suficientes para determinar un ganador en el juego. Pero, por otro lado, responde correctamente que no se debe considerar la probabilidad de ganar *A* según la frecuencia relativa, pues ésta indica solo las veces que gana *A* y no la probabilidad. Ello supone una contradicción entre las respuestas a las dos partes, de la que el estudiante no es consciente, lo que muestra su poca capacidad argumentativa.

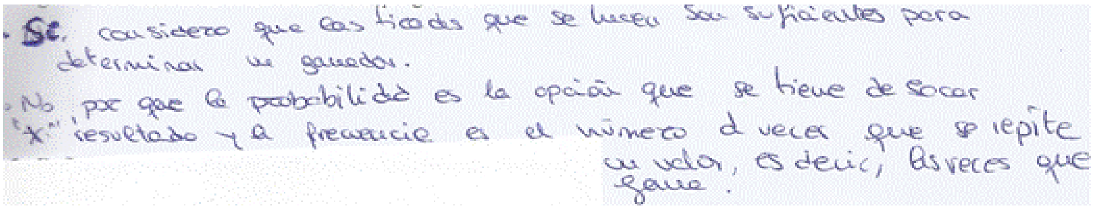

· Sí, considero que las tiradas que se hacen son suficientes para determinar un ganador.
· No, por que la probabilidad es la opción que se tiene de sacar "X" resultado y la frecuencia es el número de veces que se repite un valor, es decir, las veces que gane.

Figura 10. Respuesta parcialmente correcta al apartado 3.

R3. Respuesta incorrecta. Serían los estudiantes que responden incorrectamente las dos preguntas del apartado, como el siguiente ejemplo (Figura 11), donde el estudiante considera que las dos respuestas deben ser afirmativas. Por un lado, cree que es suficiente sacar conclusiones del experimento realizado con 100 tiradas. Por otro lado, considera que se puede tomar como probabilidad de ganar *A*, a la frecuencia relativa de veces que gana *A*, calculada a partir de los datos empíricos.

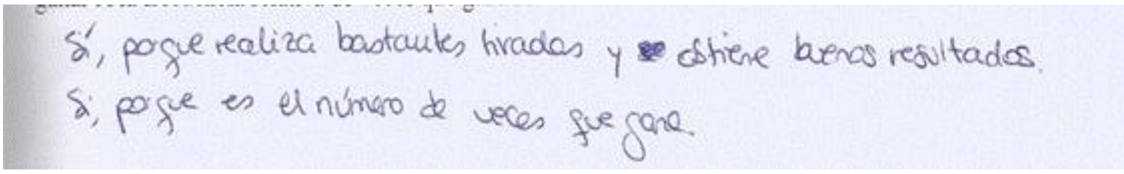


Figura 11. Respuesta incorrecta al apartado 3.

En la Tabla 4 se presenta la frecuencia de estudiantes que respondió al tercer apartado, de las cuales 48 fueron correctas. Esto muestra una buena comprensión de la relación entre la probabilidad en sentido clásico y su estimación frecuencial. Encontramos respuestas parcialmente correctas de seis estudiantes, que, aunque responden bien una de las preguntas, son inconsistentes en su argumentación. Hay también cinco respuestas incorrectas; finalmente, solo un estudiante no responde a esta pregunta, aludiendo que no sabe la respuesta. Los resultados son mejores en aquellos que trabajan en parejas.

Tabla 4. *Respuestas de los estudiantes a la tercera tarea*

Respuesta	Estudiantes	Parejas	Total de estudiantes
R1 Correcta	8	20	48
R2 Parcialmente correcta	6	0	6
R3 Incorrecta	5	0	5
R4 No responde	1	0	1

VI. Conclusiones

En nuestro estudio, resultaron sencillas la primera pregunta, en que los estudiantes determinan cuál de los dos jugadores tiene ventaja, calculando la probabilidad en el enfoque clásico, y la última en la que ponen en relación las definiciones clásicas y frecuencial de la probabilidad, pues la mayoría de los futuros profesores las resuelve correctamente. Fue mucho más difícil estimar la frecuencia esperada de veces que ocurre un suceso, en la segunda pregunta, lo que indica que estos futuros profesores no comprenden con profundidad la ley de los grandes números, ni siquiera en forma intuitiva, ya que sólo un futuro profesor ofrece un argumento relacionando ambos enfoques de probabilidad en la segunda parte de la actividad 1.

Al comparar los resultados con la experiencia en aula de Rivas y Godino (2015), podemos hacer notar que en ambos trabajos predominan los mismos errores en el cálculo de probabilidades, que son el sesgo de equiprobabilidad y el cálculo del espacio muestral reducido. También aparece la heurística de representatividad (Kahneman et al., 1982) cuando los estudiantes dan respuestas sin comprender la ley de los grandes números, sino que lo hacen en base a los resultados obtenidos en el juego empírico, a pesar de que a nivel declarativo (cuando se les pregunta) deciden que la muestra es de tamaño pequeño para obtener conclusiones. Se confirma, de este modo, la existencia en los futuros profesores de educación primaria de la heurística de la representatividad, encontrada en investigaciones previas (Azcárate, 1995; Serrano, 1996; y Batanero, Cañizares y Godino, 2005). Batanero, Cañizares y Godino (2005) indican que sus estudiantes superan en parte estos sesgos mediante actividades de simulación.

Aunque nuestros estudiantes habían llevado a cabo alguna de estas actividades, se realizaron en grupo (sin interacción personal con el ordenador, que sí hubo en el caso de Batanero et al., 2005). Deducimos que sería necesario un mayor tiempo dedicado a estas actividades y en lo posible, permitir la interacción de los estudiantes con la tecnología en la realización de las simulaciones.

Todos estos resultados nos plantean una problemática en la formación de los profesores, que se supone han de enseñar la probabilidad bajo estos dos enfoques en la educación primaria. Se necesitaría insistir más sobre este tema, para preparar mejor a los profesores para su futura labor docente.

Bibliografía

[1] Azcárate, P. El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Tesis doctoral. Universidad de Cádiz. 1995.
[2] Batanero, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2005), 8(3), 247- 263.
[3] Batanero, C.; Cañizares, M. J.; Godino, J. Simulation as a tool to train preservice school teachers. En J. Addler (ed.), Proceedings of ICMI First African Regional Conference. [CD-ROM], Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction, 2005.
[4] Batanero, C.; Henry, M.; Parzysz, B. The nature of chance and probability. En G. A. Jones (ed.), Exploring probability in school: challenges for teaching and learning, New York: Springer, 2005, p. 15–37.
[5] Bernoulli, J. Ars Conjectandi- 4ème partie (N. Meunier, Trans.) Rouen: IREM. (Original work published in 1713), 1987.
[6] Gal, I. Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning, Nueva York: Springer, 2005, p. 39–63.
[7] Godino, J. D.; Batanero, C.; Cañizares, M. J. Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Síntesis. 1987.
[8] Gómez, E. Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria. Tesis doctoral. Universidad de Granada. 2014.
[9] Kahneman, D.; Slovic, P.; Tversky, A. (eds.) Judgment under uncertainty: Heuristic and biases. New York: Cambridge University Press, 1982.
[10] Konold, C. Informal conceptions of probability. Cognition and Instruction (1989) 6, 59-98.
[11] Laplace P. S. Théorie analytique des probabilités [Analytical theory of probabilities]. Paris: Jacques Gabay. (Original work published 1814), 1995.
[12] Lecoutre, M. P. Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. Educational Studies in Mathematics (1992) 23(6), 557-568.
[13] Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación. Autor. 2014.
[14] Mises, R. von. Probabilidad, estadística y verdad. Madrid, España: Espasa-Calpe [Trabajo original publicado en 1928], 1952.
[15] Mohamed, N. Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad. Tesis doctoral. Universidad de Granada. 2012.

[16] Moivre de, A. The doctrine of chances. New York: Chelsea Publishing (Trabajo original publicado en 1718), 1967.
[17] Navarro-Pelayo, V.; Batanero, C.; Godino, J. D. Razonamiento combinatorio en alumnos de Secundaria. Educación matemática (1997) 8(1), 26-39.
[18] Rivas, H.; Godino, J. D. Hechos didácticos significativos en el estudio de nociones probabilísticas por futuros maestros. Análisis de una experiencia formativa. En J. M. Contreras; C. Batanero; J. D. Godino; G.R. Cañadas; P. Arteaga; E. Molina; M.M. Gea; M.M. López-Martín (eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2, Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística, 2015, p. 339-346.
[19] Serrano, L. Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. Tesis doctoral. Universidad de Granada. 1996.
[20] Valdés, J. C. Las grandes ideas de probabilidad en el razonamiento informal de estudiantes de bachillerato. Tesis doctoral en curso. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados en México. 2016.

V Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

Análisis Ontosemiótico de Tareas que Involucran Gráficos Estadísticos en Educación Primaria

Onto-semiotic tasks analysis involving statistical graphs in Primary Education

Belén Giacomone[1], Danilo Díaz-Levicoy[2], & Juan D. Godino[3]
Universidad de Granada, España

Resumen

El objetivo de este trabajo es mostrar un análisis pormenorizado de tareas escolares, que permita comprender potenciales conflictos en el aprendizaje matemático. Se trata de una metodología descriptiva sobre la diversidad de objetos y significados puestos en juego en tareas que involucran gráficos estadísticos, utilizando la noción teórica y metodológica llamada *configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos*. Las tareas que se analizan fueron seleccionadas previamente de libros de texto de Educación Primaria de España. Los resultados que aporta este trabajo reflejan la necesidad de incorporar este tipo de análisis a la formación de profesores de matemáticas, para que puedan comprender la complejidad de los objetos matemáticos que intervienen y emergen en la resolución de problemas y mejorar así, la enseñanza de la estadística.

Palabras clave: análisis de tareas, enfoque ontosemiótico, gráficos estadísticos, libros de texto, educación primaria.

Abstract

The aim of this research is propose a detail analysis of school tasks for understanding potential conflicts in mathematical learning. The methodology is descriptive based on the diversity of objects and meanings put at stake in tasks involving statistical graphics, using as theoretical tool the notion of*: onto-semiotic configuration of practices, objects, and processes.* The tasks discussed

---

[1] Universidad de Granada, España. giacomone@correo.ugr.es
[2] Universidad de Granada, España. dddiaz01@hotmail.com
[3] Universidad de Granada, España. jgodino@ugr.es

were previously selected of Primary Education textbooks from Spain. The results provided by this study reflect the need to incorporate this kind of analysis to the mathematics teachers education. This is important to understand complexity of mathematical objects, which are involved and emerge in problem solving activity, and thus improve statistics teaching.

Keywords: tasks analysis, onto-semiotic approach, statistical graphs, textbooks primary education

I. Introducción

La constante presencia de los gráficos estadísticos en diferentes aspectos de la vida cotidiana es confirmada por diversos autores (e.g., Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras, 2011; Díaz-Levicoy, 2014) dado su carácter esencial para analizar, describir y analizar datos. Arteaga *et al* (2011) hablan de la diversidad de información estadística presente a través de gráficos y tablas en Internet e incluso en las redes sociales y de la variedad de temas que se tratan.

Por su papel esencial en la organización, descripción y análisis de datos, estas representaciones son un instrumento esencial de transnumeración, uno de los modos esenciales de razonamiento estadístico que consiste en obtener una nueva información de un conjunto de datos al cambiar el sistema de representación (Wild y Pfannkuch, 1999).

La importancia de estas representaciones hace necesario indagar en las posibles dificultades que pueden tener los estudiantes al abordar situaciones-problemas o tareas que los pongan en juego. Es por ello, que para este trabajo, se han seleccionado tareas propuestas en libros de texto de matemáticas para la Educación Primaria española. Se han extraído de los libros ya que estos recursos son de gran tradición en las aulas (Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín, 2015), resultado de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), es decir, es un producto de la adaptación de los contenidos para ser enseñados en un determinado nivel educativo. Los libros de texto son un paso intermedio entre las directrices curriculares y el currículo plasmado en el aula (Herbel, 2007), lo que Alsina (2000) ha denominado *currículo potencial*, es decir, que podría trabajarse en el aula, ocupando un punto intermedio entre el *currículo oficial* e *impartido.*

Los libros de texto presentan apoyo a profesores, estudiantes y familiares. A los primeros les son de utilidad para preparar del proceso de enseñanza y aprendizaje (aporta ejemplos, ejercicios, problemas, evaluaciones, etc.), ya que muestra en forma secuencial los temas que se deben abordar; para los estudiantes es una fuente de apoyo constante, al que pueden recurrir en cualquier instante siendo más efectivo que internet, ya que pese a tener menos variedad de tareas, están adaptadas (o debiesen estarlo) al desarrollo cognitivo de los estudiantes; y finalmente, permiten que la familia colabore con el proceso de formación de los estudiantes, siendo de gran ayuda para aclarar dudas de los estudiantes en el desarrollo de sus tareas y hacer un seguimiento de su formación (Díaz-Levicoy, Giacomone y Arteaga, en prensa).

Este trabajo forma parte de un estudio más amplio en el que ya se han analizado los gráficos estadísticos presentes en textos españoles de Educación Primaria para el área de matemática (Díaz-Levicoy, 2014). En dicha investigación se ha considerado como unidades de análisis: *el tipo de gráfico utilizado* (barras, circular, líneas, dispersión, mapa temático, histograma, pictograma, entre otros tipos), *la actividad pedida* (calcular, leer, completar, construir, justificar, ejemplificar y traducir), *el nivel de lectura* según la categorización de Curcio (1989) y Friel, Curcio y Bright (2001) y *complejidad semiótica del gráfico* descrita por Arteaga (2011). Los resultados indican que, el análisis de los textos españoles muestra un predomino de los gráficos de barras, líneas y circulares; del nivel de lectura 'leer dentro de los datos'; del nivel de complejidad 'representación de una distribución de datos'; del tipo de actividades de leer, ejemplificar y construir.

Sin embargo, para reflexionar sobre la dificultad que el aprendizaje de ciertos conceptos representa para los alumnos, es necesario comenzar por hacer análisis epistemológicos de su significado (Cobo y Batanero, 2004). De esta manera, el objetivo de este trabajo está puesto en mostrar un tipo de análisis (que llamaremos ontosemiótico) sobre los objetos y significados matemáticos que se movilizan en el enunciado de dos tareas sobre gráficos estadísticos, seleccionadas de dos libros de texto español, analizados previamente en Díaz-Levicoy, Giacomone, López-Martín y Piñeiro (2016) junto con una de sus posibles soluciones. Se trata de libros de texto vigentes de acuerdo a las directrices curriculares en España, por eso se seleccionan de la mencionada investigación.

En la segunda sección se profundiza en el problema de investigación, se sintetizan las herramientas teóricas y metodológicas que soportan el tipo de análisis aplicado y se describe el método empleado. En la tercera sección se concretiza el análisis ontosemiótico a partir de dos tareas escolares seleccionadas previamente. Finalmente en la última sección, se plantean las implicaciones de este trabajo en el campo de la formación de profesores.

II. Problema de investigación, marco teórico y método

Vásquez y Alsina (2015) estudian los libros de texto chilenos y presentan un modelo para el análisis de los objetos matemáticos centrado específicamente en los elementos lingüísticos, conceptos implicados y situaciones-problemas sobre la probabilidad, en el contexto de la educación primaria. Por otro lado, Font y Godino (2006) argumentan que el análisis de libros de texto ha de ser una de las competencias contemplada en la formación de profesores. Estos autores muestran la utilidad de usar herramientas epistémicas (más bien, refieren a la herramienta de configuración ontosemiótica) tanto para el análisis global de una unidad didáctica, como para el análisis de un texto puntual.

En diversas investigaciones, se reconoce que las relaciones entre los objetos matemáticos, sus posibles representaciones y la construcción del significado son conflictivas (Duval, 2006). El uso de gráficos estadísticos, visto como sistema de representaciones materiales, visuales o diagramáticos, llevan consigo un conglomerado de objetos matemáticos abstractos, no ostensivos, los cuales no pueden pasar desapercibidos a la hora de seleccionar las tareas de los libros de texto.

Godino, Giacomone, Blanco, Wilhelmi y Contreras (2016) intentan clarificar el problema epistemológico, semiótico y educativo, entre las representaciones visuales, diagramáticas o gráficas, y los objetos matemáticos no ostensivos que les acompañan necesariamente. Estos autores discriminan los distintos tipos de objetos que intervienen en la práctica matemática escolar, apoyada en el uso de diversos sistemas de representación y siendo conscientes de las relaciones sinérgicas entre los mismos.

Las situaciones anteriores motivan este trabajo, en el que se pretende afrontar un tipo de análisis de tareas en torno a los gráficos estadísticos, el cual permitirá identificar los objetos matemáticos que se movilizan, pudiendo establecer si son adecuadas al desarrollo cognitivo de los estudiantes; de esta manera, es posible tomar consciencia de las relaciones complejas que están presentes en el uso de gráficos estadísticos.

Para lograr dicho análisis, se requiere contar con herramientas que permitan realizar análisis microscópicos de las prácticas matemáticas puestas en juego en la resolución de tareas. Para eso, se utiliza un enfoque teórico inclusivo llamado Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) el cual aporta nociones teóricas y metodológicas para abordar el estudio de los diversos factores que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007). A continuación se presenta una breve descripción de la herramienta incluida en este enfoque que vamos a utilizar, y servirá de base para establecer implicaciones específicas para mejora de la enseñanza de la estadística.

Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos

El enfoque ontosemiótico es un sistema teórico que articula diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática. El EOS incluye una tipología explícita de objetos matemáticos (y de sus respectivos procesos), que facilita la descripción y el análisis de la actividad matemática; estos objetos matemáticos primarios son (Godino *et al*., 2007, p. 130):

– Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
– Situaciones-problemas (aplicaciones intra o extra-matemáticas, ejercicios).
– Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función).
– Proposiciones (enunciados sobre conceptos).
– Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
– Argumentos (enunciados usados para justificar o explicar las proposiciones y

procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Todos los objetos están interconectados entre sí mediante funciones semióticas referenciales y operacionales, formando configuraciones ontosemióticas de prácticas, objetos y procesos (Figura 1).

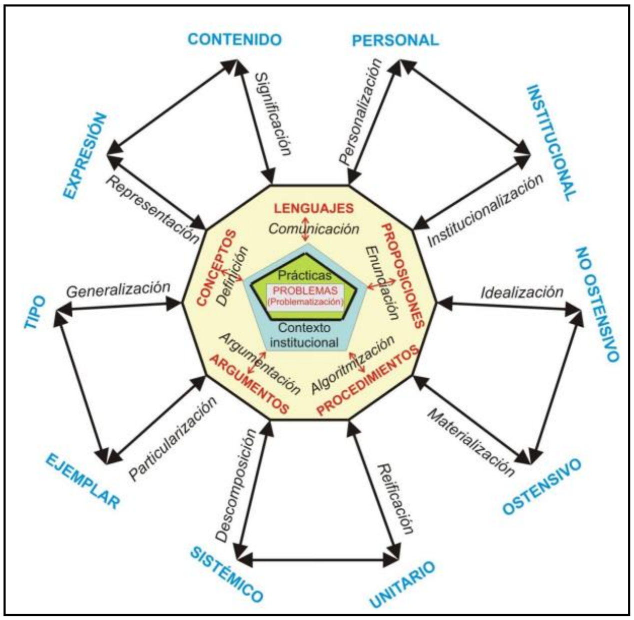


Figura 1. Objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas

A partir de la Tabla 1 y la Tabla 2, discutiremos el papel que algunos de estos procesos (particularización - generalización; idealización - materialización; significación - representación; personalización - institucionalización) juegan en la aparición de los objetos primarios implicados, tanto en el enunciado de las tareas (Figura 2 y Figura 3) como en la construcción de su solución.

Para llevar a cabo el análisis, se han seleccionado dos tareas de dos libros de texto de Educación Primaria española, de segundo y quinto grado de la editorial Santillana. La primera actividad conjuga la lectura literal de información con el desarrollo de cálculos simples; la segunda es la construcción de un gráfico de sectores a partir de la información dada en una tabla estadística. Estas se han seleccionado por estar entre las actividades más frecuentes en las investigaciones previas sobre estas representaciones en libros de texto (Díaz-Levicoy, 2014; Díaz-Levicoy *et al.*, 2015; Díaz-Levicoy *et al.*, 2016; Díaz-Levicoy, Giacomone y Arteaga, en prensa). La metodología es descriptiva, a partir del análisis ontosemiótico de las prácticas, objetos y procesos de dichas tareas.

III. Análisis ontosemiótico de tareas escolares con gráficos estadísticos

Para cada una de las situaciones-problemas diseñadas e implementadas en los procesos de enseñanza, se espera que los estudiantes realicen unas prácticas operativas y discursivas. A continuación, se pone de manifiesto una posible solución para cada una de las tareas mostradas en las Figuras 1 y 2. Las prácticas matemáticas puestas en acción están guiadas por la trama de objetos y procesos no ostensivos que desvelamos en la tercera columna de las Tablas 1 y 2; además, en la primera columna de ambas tablas, indicamos el rol que desempeña cada práctica en el proceso resolutivo, así como su intencionalidad.

Tarea 1 y su configuración ontosemiótica

En la Figura 2 se presenta el enunciado de la tarea 1 seguido de una posible solución; luego en la Tabla 1 se presenta el análisis ontosemiótico propuesto.

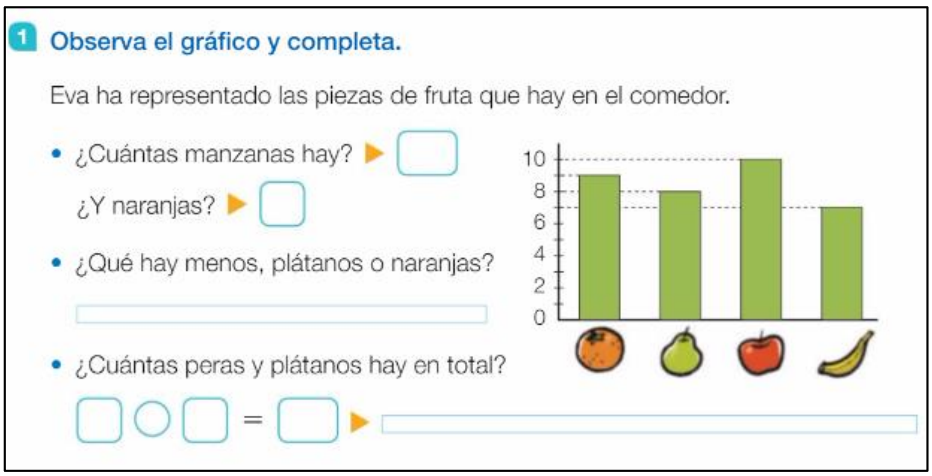


Figura 2. Actividad de 'leer' (Texto Santillana 2º, p. 90)

– Respuesta esperada:

- ¿Cuántas manzanas hay? 10
  ¿Y naranjas? 9
- ¿Qué hay menos, plátanos o naranjas? Plátanos
- ¿Cuántas peras y cuántos plátanos hay en total?
  8 + 7 = 15; 15 peras más plátanos

– Secuencia de prácticas estadísticas operativas y discursivas para resolver la tarea:

1) Se realiza una mirada global del gráfico, en la que se identifican cuatro barras, relacionadas a cuatro frutas y sus respectivas frecuencias.

2) Hay 10 manzanas porque el eje de ordenadas representa la frecuencia correspondiente al valor de la variable estadística expresado como "manzana" en el eje de abscisas.

3) Hay 9 naranjas porque es posible hacer una lectura literal de la altura de la barra construida sobre el ícono de ésta fruta.

4) Hay menos plátanos porque, al comparar las alturas de las barras, es menor la que corresponde a los plátanos.

5) Al hacer una lectura literal de la altura de las barras que corresponden a los plátanos y las peras, sabemos que: la cantidad de plátanos es 7 y la cantidad de peras es 8.

6) Luego, se suman estos valores obteniendo un total de 15 frutas.

Tabla 1. *Análisis ontosemiótico de la tarea 2*

Uso e intencionalidad de las prácticas	**Enunciado y prácticas elementales para resolver la tarea**	**Objetos referidos en las prácticas**
Introducir la situación problemática; representar los datos del problema	<u>Enunciado</u> Observa el gráfico y completa  Eva ha representado las piezas de frutas que hay en el comedor.	Elementos lingüísticos: lenguaje gráfico; relación entre lenguaje gráfico y lenguaje natural. Conceptos: distribución de frecuencias de una variable estadística cualitativa (variable, valor, frecuencia absoluta) gráfico de barras (ejes cartesianos, proporcionalidad entre frecuencias y altura de las barras; escala de graduación del eje de ordenadas; distribución en el eje de abscisas de los valores de la variable cualitativa.
Enunciar la cuestión problemática de la tarea	¿Cuántas manzanas hay? ¿Y naranjas?	Concepto: cardinal de un conjunto; valor de variable estadística cualitativa; frecuencia absoluta.
Enunciar la cuestión problemática de la tarea	¿Qué hay menos, plátanos o naranjas?	Conceptos: ordenación de números naturales.
Enunciar la cuestión problemática de la tarea:	¿Cuántas peras y plátanos hay en total?  	Conceptos: adición de números naturales; variable, como registro de valores numéricos; igualdad, como resultado de operación; ecuación aritmética.
Dar respuesta al problema planteado	– <u>Respuesta</u> • ¿Cuántas manzanas hay? 10 ¿Y naranjas? 9 • ¿Qué hay menos, plátanos o naranjas? Plátanos • ¿Cuántaas peras y cuántos plátanos hay en total? 8 + 7 = 15 peras + plátanos	Proposiciones: se enuncian las 4 proposiciones.
Reconocimiento de las	– <u>Prácticas matemáticas:</u>	Elementos lingüísticos: dominio del

Uso e intencionalidad de las prácticas	Enunciado y prácticas elementales para resolver la tarea	Objetos referidos en las prácticas
partes que componen el diagrama de barras como representación de una distribución de frecuencias.	1) Se realiza una mirada global del gráfico, en la que se identifican cuatro barras, relacionadas a cuatro frutas y sus respectivas frecuencias.	registro gráfico Conceptos: distribución de frecuencias; gráfico de barras y sus elementos. Procedimientos: Lectura literal de datos representados
Respuesta y argumentación a la primera pregunta del problema.	2) Hay 10 manzanas porque el eje de ordenadas representa la frecuencia correspondiente al valor de la variable estadística expresado como “manzana” en el eje de abscisas.	Conceptos: variable estadística, valor, frecuencia; elementos del gráfico de barras. Procedimientos: lectura literal de la altura de la barra (frecuencia asociada a las manzanas). Proposición y su argumentación: basada en el concepto de distribución de frecuencias y los convenios de representación del diagrama de barras y los datos del problema.
	...	
Respuesta y argumentación a la tercera pregunta del problema.	4) Hay menos plátanos porque, al comparar las alturas de las barras, es menor la que corresponde a los plátanos...	Conceptos: variable estadística, valor, frecuencia; elementos del gráfico de barras. Procedimientos: lectura literal de los datos y comparación de alturas y de frecuencias absolutas. Proposición y argumentación: basada en el concepto de distribución de frecuencias y los convenios de representación del diagrama de barras y los datos del problema.
	...	

Si bien la tarea seleccionada es muy sencilla de resolver y no implica grandes cálculos, dado que se trata de segundo grado de educación primaria, observando la tabla, es necesario señalar que los conocimientos matemáticos que realmente debe poner en juego el alumno, se dan en los momentos de argumentación de proposiciones o procedimientos. Sin embargo, la tarea no promueve el uso de éstas en el transcurso de la situación didáctica. Aunque es posible que el alumno aprenda a responder correctamente a las cuestiones planteadas de una manera instrumental o algorítmica, el aprendizaje con comprensión se revela complejo para este nivel educativo, si tenemos en cuenta la complejidad del concepto de distribución de frecuencias de una variable estadística cualitativa y los convenios de representación de los diagramas de barras que se ponen en juego en la tarea.

Tarea 2 y su configuración ontosemiótica

En la Figura 3 se propone la segunda tarea para ser analizada seguida de una posible solución. Al igual que en el caso anterior, en la Tabla 2 se muestra su análisis ontosemiótico.

2 Fíjate en la tabla y representa sus datos en un gráfico de sectores.

En un hotel hay alojadas muchas personas de varios continentes.

Continente	N.º de huéspedes
Europa	50
África	15
América	20
Asia	35

Figura 3. Actividad de ‘construir’ (Texto Santillana 5º, p. 239)

– Respuesta esperada:

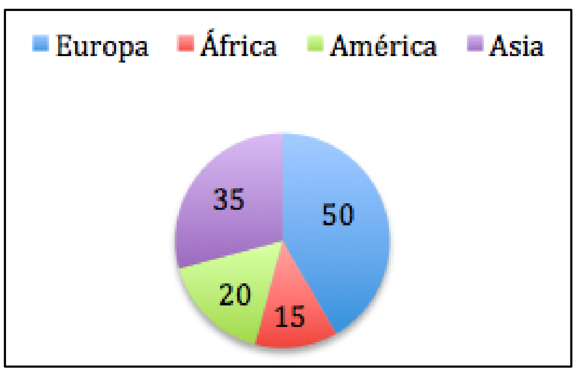


Figura 4. Gráfico de sectores de la distribución de frecuencias de la variable “continente de procedencia de las personas alojadas en un hotel”

– Secuencia de prácticas estadísticas operativas y discursivas para resolver la tarea:

1) El gráfico circular estará formado por 4 sectores circulares que representan el número de europeos, africanos, americanos y asiáticos alojados en el hotel.

2) En la tabla se muestran las frecuencias absolutas correspondientes al número de huéspedes de cada continente: 50; 15; 20; 35.

3) Se calcula el total de datos **N**, sumando todas las frecuencias absolutas: N=120.

4) Luego, se divide cada frecuencia absoluta por **N**, para calcular las frecuencias relativas **n**:

n-europeo = $\frac{50}{120} = \frac{5}{12}$

n-africano = $\frac{15}{120} = \frac{3}{24}$

n-americanos = $\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

n-asiáticos = $\frac{35}{120} = \frac{7}{24}$

5) Las amplitudes angulares de cada sector deben ser proporcionales a las frecuencias relativas de cada valor de la variable estadística.

6) Como la suma de todas las amplitudes debe ser 360º, multiplico cada frecuencia relativa n por 360º para obtener el ángulo central **(a)** que representará a cada sector circular.

a-Europa = $\frac{5}{12}$. 360º = 150º

a-África = $\frac{3}{24}$. 360º = 45º

a-América = $\frac{1}{6}$. 360º = 60º

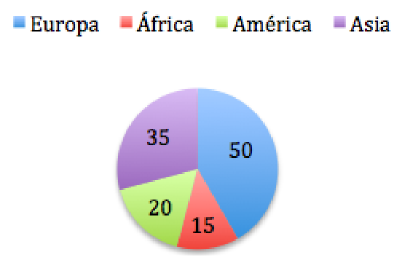
a-Asia = $\frac{7}{24}$. 360º = 105º

6) Represento los datos en sectores circulares disjuntos y contiguos de un círculo, para eso:

a) Trazo un círculo con un compás.
b) Trazo un radio.
c) Usando el transportador, se coloca el centro del transportador en el centro del círculo, y sobre el radio trazado se mide el primer ángulo.
d) Luego se repite el proceso con cada uno de los ángulos.

Tabla 2. *Análisis ontosemiótico de la tarea 2*

Uso e intencionalidad de las prácticas	**Enunciado y prácticas elementales para resolver la tarea**	**Objetos referidos en las prácticas**
Introducir la situación problemática; representar los datos del problema.	Enunciado: Fíjate en la tabla y representa sus datos en un gráfico de sectores:	Elementos lingüísticos: representación tabular de una distribución de frecuencias; relación entre los datos de la tabla y gráfico de sectores.

<table>
<tr><th>Uso e intencionalidad de las prácticas</th><th>Enunciado y prácticas elementales para resolver la tarea</th><th>Objetos referidos en las prácticas</th></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><th>Continente</th><th>N.º de huéspedes</th></tr><tr><td>Europa</td><td>50</td></tr><tr><td>África</td><td>15</td></tr><tr><td>América</td><td>20</td></tr><tr><td>Asia</td><td>35</td></tr></table>En un hotel hay alojadas ...</td><td>Conceptos: distribución de frecuencias de una variable estadística cualitativa (variable, valor, frecuencia absoluta); gráfico de sectores.</td></tr>
<tr><td>Respuesta al problema expresada gráficamente.</td><td><u>Respuesta</u>:
</td><td>Conceptos: distribución de frecuencias de la variable estadística cualitativa “continente de procedencia de las personas”;
gráfico de sectores, relación de proporcionalidad entre la amplitud angular de los sectores y las frecuencias absolutas.
Procedimientos: construcción de un gráficos se sectores
Proposiciones: el gráfico estadístico construido representa la solución del problema porque se cumple la proporcionalidad requerida entre frecuencias y amplitudes angulares.</td></tr>
<tr><td>Organizar la información: determinación de la cantidad categorías que compondrán el gráfico.</td><td><u>Prácticas matemáticas</u>:
1) El gráfico estará formado por 4 sectores circulares, correspondientes a los cuatro valores de la variable: Europa, África, América y Asia,</td><td>Elementos lingüísticos:
identificación de los elementos de la tabla respecto a cada sector circular.
Concepto: variable estadística, valor; gráfico de sectores.</td></tr>
<tr><td>Paso necesario para calcular el total de datos y realizar los cálculos siguientes.</td><td>2) En la tabla se muestran las frecuencias absolutas de cada valor de la variable: 50; 15; 20; 35.</td><td>Elementos lingüísticos:
interpretación de la tabla de frecuencias.
Concepto: frecuencia absoluta de cada valor de la variable estadística.</td></tr>
<tr><td></td><td>...</td><td></td></tr>
<tr><td>Obtener el ángulo de cada sector</td><td>5) Como la suma de todas las amplitudes debe ser 360º, multiplico a cada frecuencia relativa n por 360º.</td><td>Procedimiento: cálculo de la amplitud angular de cada sector circular; multiplicación de una fracción por un ángulo.
El procedimiento está justificado
por la proporcionalidad que debe existir entre las frecuencias y las amplitudes angulares.</td></tr>
</table>

Uso e intencionalidad de las prácticas	Enunciado y prácticas elementales para resolver la tarea	Objetos referidos en las prácticas
Construcción de la respuesta al problema	6) Represento los datos en un sector circular, para eso: (...)	Elementos lingüísticos: relación entre los datos obtenidos y la construcción del gráfico pedido. Conceptos: círculo, radio, sector circular. Procedimientos: construcción con regla y compás del gráfico circular a partir de los datos obtenidos.

El diagrama circular dado como respuesta, es explicativo del proceso de resolución para quién conozca las convenciones asumidas por el resolutor, así como los conocimientos y procedimientos implicados. Sin embargo, cuando se trata de estudiantes de primaria, la justificación y explicación de la solución requiere realizar las prácticas operativas y discursivas que se han señalado para cada tarea. Asimismo, se puede ver que el uso de este tipo de gráficos, construcción, cálculo de ángulos, etc. no es tan intuitivo para los estudiantes, tal como sugieren algunos autores (Díaz-Levicoy, 2014). La comprensión de la relación de proporcionalidad que debe existir entre las amplitudes angulares y las frecuencias de los respectivos valores de la variable estadística puede resultar conflictiva para la mayoría de los alumnos de quinto curso de primaria.

IV. Discusión

El análisis ontosemiótico realizado deja a la luz que los distintos tipos de lenguajes utilizados en este proceso educativo tienen un rol fundamental para la comprensión de la tarea, el cual se pone de manifiesto en este análisis a través de la gran variedad de representaciones empleadas por las dos situaciones didácticas seleccionadas. Tal como sugieren Cobo y Batanero (2004, p. 16) "es necesario tratar en la enseñanza, de manera consciente este tema que, en muchas ocasiones, parece trivial y, sin embargo, entraña dificultades para los estudiantes".

Se ha constatado que las justificaciones, argumentaciones o explicaciones no aparecen tratadas explícitamente en los libros de texto en general y en estas tareas en particular. Asimismo, el análisis que se manifiesta en dichos momentos sugiere entender la dificultad que puede suponer la lectura, interpretación y construcción de gráficos a estudiantes de estas edades. De la misma manera, se destaca que dada la respuesta al problema, es necesario prescindir de otro tipo de respuestas, dada por el sistema de prácticas operativas y discursivas, las cuales tampoco son pedidas en el contexto de la situación-problema. En este sentido, pareciera importante que las editoriales tengan en cuenta estas recomendaciones educativas, pero principalmente, que los profesores sean conscientes de la necesidad de pedirle a sus alumnos que justifiquen sus respuestas, ya que son a partir de ellas en las cuales se manifiestan sus conocimientos.

El análisis de cada una de las prácticas individualizadas en las Tablas 1 y 2 se puede hacer más detallado de acuerdo a los procesos involucrados; así por ejemplo, la aplicación sistemática de la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos nos lleva a reconocer que el sujeto que lee el enunciado debe hacer un proceso de interpretación (semiosis o atribución de significado) de cada uno de los diagramas mostrados en las Figuras 1 y 2 (gráfico de barras y tabla). Seguidamente, debe hacer un proceso de materialización de los conceptos y operaciones implicadas en los enunciados. Otros procesos interactúan en la respuesta, por ejemplo, para construir el gráfico circular como respuesta a la tarea 2, el resolutor debe realizar procesos de composición de los resultados parciales que va obteniendo.

Por último, tal como indican los resultados de Giacomone (2015) y Godino *et al* (2016), a partir de las tablas hemos mostrado que existe una estrecha relación entre:

- los objetos ostensivos (materiales–gráficos estadísticos) y los no ostensivos (inmateriales, ideales);
- los objetos extensivos (particulares) y los intensivos (generales).

V. A modo de conclusión: implicaciones para la enseñanza de la estadística

En diversos trabajos (Giacomone, 2015; Giacomone et al., 2016; Godino, 2009; Godino *et al.*, 2012; Pino-Fan y Godino, 2015) se ha iniciado el estudio de las posibilidades y retos ofrecidos por la aplicación de las herramientas teóricas del EOS al campo de la formación de profesores de matemáticas. Se asume que el profesor de matemáticas debe desarrollar la competencia específica de análisis e intervención didáctica, entendida como la capacidad de abordar los problemas propios de su profesión. Esto implica que el profesor debe conocer y saber usar las herramientas conceptuales y metodológicas pertinentes que le ayuden a describir, comprender y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Particularmente, con el análisis mostrado en este trabajo, se considera que el profesor de matemáticas debe conocer y comprender la idea de configuración de objetos y procesos, y usarla de manera competente para la elección de las tareas de los libros de texto, las cuales formarán parte del proceso de diseño didáctico.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869, EDU2013- 41141-P y EDU2015-64646-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO, España).

Bibliografía

[1] Alsina, C., *Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro*, Goñi, JM (ed.), «El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI», 2000: 13-21. Barcelona: Graó.

[2] Arteaga, P., *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores* [Tesis Doctoral], Granada, Universidad de Granada, 2011.

[3] Arteaga, P.; Batanero, C.; Cañadas, G.; Contreras, J.M., «Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales», *Números*, 2011, **76**, p. 55-67.

[4] Chevallard, Y. *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aique. Buenos Aires. 1991.

[5] Cobo, B.; Batanero, C., «Significado de la media en los libros de texto de secundaria», *Enseñanza de las Ciencias*, 2004, **22** (1), p. 5-18.

[6] Curcio, F. R., *Developing graph comprehension*. NCTM. Reston, VA. 1989

[7] Díaz-Levicoy, *D., Un estudio empírico de los gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria española* [Trabajo Fin de Máster], Granada, Universidad de Granada, 2014.

[8] Díaz-Levicoy, D.; Batanero, C.; Arteaga, P.; López-Martín, M.M., «Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de Educación Primaria chilena», *Educação Matemática Pesquisa*, 2015, **17** (4), p. 715-739.

[9] Díaz-Levicoy, D.; Giacomone, B.; Arteaga, P., «Caracterización de los gráficos estadísticos en libros de texto argentinos del Segundo Ciclo de educación primaria», *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, en prensa.

[10] Díaz-Levicoy, D.; Giacomone, B.; López-Martín, M. M.; Piñeiro, J. L., «Estudio sobre los gráficos estadísticos en libros de texto digitales de educación primaria española», *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 2016, **20** (1), p. 133-156.

[11] Duval, R., «A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics», *Educational Studies in Mathematics*, 2006, **61** (1-2), p. 103-131.

[12] Font, V.; Godino, J.D., «La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores», *Educação Matemática Pesquisa*, 2006, **8** (1), p. 67-98.

[13] Friel, S.N.; Curcio, F.R.; Bright, G.W., «Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications», *Journal for Research in mathematics Education*, 2001, **32** (2), p. 124-158.

[14] Giacomone, B., *Perspectiva ontosemiótica del razonamiento diagramático en educación matemática. Implicaciones para la formación de profesores* [Trabajo Fin de Máster], Granada, Universidad de Granada, 2015.

[15] Giacomone, B., Godino, J.D.; Wilhelmi, M.R.; Blanco, T,, «Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas», *Investigación en Educación Matemática XIX*. Málaga, 2016, en prensa.

[16] Godino, J.D.; Batanero, C.; Font, V., «The onto-semiotic approach to research in mathematics education», *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 2007, **39** (1), p. 127-135.

[17] Godino, J.D.; Batanero, C.; Font, V.; Giacomone, B., «Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM», *Simposio de Investigación en Educación Matemática XIX*. Málaga, 2016, en prensa.

[18] Godino, J.D.; Giacomone, B.; Blanco, T.; Wilhelmi, M.R.; Contreras, Á., «Onto-semiotic configurations underlying diagrammatic reasoning», *Proceedings of the 40th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education-PME 40*. Szeged, 2016.

[19] Godino, J.D.; Rivas, M.; Castro, W.F.; Konic, P., «Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas», *REVEMAT. Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 2012, **7** (2), p. 1-21.

[20] Herbel, Beth A., «From intended curriculum to written curriculum: Examining the" voice" of a mathematics textbook», *Journal for Research in Mathematics Education*, 2007, **38** (4), p. 344-369.

[21] Vásquez, C.; Alsina, Á., «Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad», *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 2015, **19**, p. 441-462.

[22] Wild, C.; Pfannkuch, M., «Statistical thinking in empirical enquiry», *International Statistical Review*, 1999, **67** (3), p. 223-265.

Investigaciones sobre gráficos estadísticos en Educación Primaria: revisión de la literatura

Danilo Díaz-Levicoy[1], Pedro Arteaga[2] & Carmen Batanero[3]

Resumen

En este trabajo se presentan resultados de una revisión de la literatura sobre los gráficos estadísticos con estudiantes de Educación Primaria. Para ello, se resumen investigaciones relacionadas a la lectura y construcción de estas representaciones, estableciendo similitudes entre los estudios. Esto nos permite generar marco de referencias para futuros estudios sobre esta temática, evidenciando las dificultades de los estudiantes frente a la lectura y los errores asociados a la construcción de diferentes gráficos.

Palabras clave: Gráficos estadísticos, Educación Primaria, Revisión de la literatura.

Abstract

In this paper, results of a literature review on statistical graphs with primary school students are presented. For this purpose, investigations that are related to reading and construction of such representations, establishing similarities between studies, are summarized below. This allows us to generate frameworks for future researches about this subject; highlighting students' difficulties at reading and errors associated with the construction of different graphics.

Keywords: Statistical graphs, Primary Education, Literature review.

I. Introducción

La alta cantidad de información estadística que se trasmite por diferentes medios, exige que los ciudadanos tengan la capacidad para leerla e interpretarla, además de poder comunicar ideas en forma clara y precisa sobre el tema en cuestión. Una parte importante de esta información se transmite por medio de gráficos estadísticos (barras, líneas, sectores, pictogramas, entre otros), que son considerados elementos de la *cultura estadística* (Gal, 2002) y, por consecuencia, del sentido estadístico (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013). Autores, como Del Pino y Estrella

[1] Universidad de Granada, España. dddiaz01@hotmail.com
[2] Universidad de Granada, España. parteaga@ugr.es
[3] Universidad de Granada, España. batanero@ugr.es

(2012) conciben la cultura estadística como un derecho ciudadano, implicando diferentes tareas, como:

> (…) leer e interpretar los datos; usar argumentos estadísticos para dar evidencias sobre la validez de alguna afirmación; pensar críticamente sobre las afirmaciones, las encuestas y los estudios estadísticos que aparecen en los medios de comunicación; leer e interpretar tablas, gráficos y medidas de resumen que aparecen en los medios; interpretar, evaluar críticamente y comunicar información estadística; comprender y utilizar el lenguaje y las herramientas básicas de la estadística; apreciar el valor de la estadística en la vida cotidiana, la vida cívica y la vida profesional en calidad de consumidor de datos, de modo de actuar como un ciudadano informado y crítico en la sociedad basada en la información (p. 55).

Por su parte, las directrices curriculares de diferentes países han incorporado los contenidos de estadística y probabilidad desde los primeros cursos de la formación obligatoria (e.g., MECD, 2014; MINEDUC, 2012), entre ellos los gráficos estadísticos, como una forma de entregar herramientas a los estudiantes para enfrentarse con éxito a estos temas en diferentes situaciones de la vida cotidiana (social, personal y profesional). Estos gráficos estadísticos muchas veces son manipulados para sacar provecho de una determinada situación; por tanto se espera que los ciudadanos estadísticamente cultos identifiquen estas situaciones y puedan formarse una opinión fundada al respecto, lo que implica el dominio de los elementos específicos de cada gráfico sepan interpretarlos. Más aún, en muchas ciencias, los gráficos estadísticos cumplen un papel fundamental para organizar los datos que permiten observar relaciones entre variables, útiles para detectar los patrones, propiedades y relaciones en determinados fenómenos (Glazer, 2011).
Lo anterior, motiva el desarrollo de un estudio en el que se desea aproximarse al estado del arte respecto a las investigaciones sobre lectura y construcción sobre gráficos estadísticos en Educación Primaria.

II. Los gráficos estadísticos y sus elementos

La comprensión de un gráfico estadístico se puede entender como "las habilidades de los lectores de gráficos para interpretar el significado de gráficos creados por otros o por ellos mismos" (Friel, Curcio y Bright, 2001, p. 132). Esta visión supone entender la función y utilidad de cada elemento que constituye el gráfico estadístico con el que se esté trabajando. Es así, como diferentes autores han analizado y caracterizado los elementos, tal como lo describimos a continuación.
Kosslyn (1985) menciona que para trabajar con gráficos estadísticos nos debemos fijar en los siguientes elementos:

- *El plano de fondo*. Corresponde a la parte del gráfico estadístico que se utiliza como soporte del mismo; aunque con frecuencia es simplemente un fondo liso, en algunos gráficos se incluyen dibujos o fotografías que aluden a su contenido.
- *Estructura del gráfico*. Componentes que proporcionan información sobre lo que se está representado y la forma en que se representan. Dependiendo del gráfico, dicha estructura puede estar formada por un sistema de ejes cartesianos dimensional o tridimensional. Una estructura diferente aparece, por ejemplo, en los gráficos de sectores o el gráfico de cajas.
- *Contenido pictórico*. Son los elementos que se usan para representar los datos, por ejemplo los rectángulos en los histogramas, los puntos en los diagramas de puntos y dispersión, las líneas en los gráficos de líneas, polígono de frecuencias y ojivas, entre otros.
- *Rótulos*. Palabras y números que proporcionan información sobre las variables representadas y escalas de medida. Se colocan en el título del gráfico y los ejes.

Curcio (1987) indica los siguientes elementos constituyentes de los gráficos estadísticos.

- *Palabras o expresiones*. Se refiere al texto que aparece en el texto, etiquetas en ejes y escalas, y permiten entender el contexto de la información proporcionada en el gráfico, así como las variables y la relación que se establece entre ellas.
- *Contenido matemático* que subyace en el gráfico estadístico. Ejemplo de ellos son los conjuntos numéricos que se utiliza, la longitud de las líneas en un gráfico de líneas o polígono de frecuencia, así como el área en el gráfico de sectores o pictograma, etc.
- *Convenios específicos*. Se refiere a aspectos propios de cada tipo de gráfico, y que son necesarios para abordar con éxito la lectura y construcción de cada gráfico, por ejemplo la proporcionalidad entre amplitud del sector circular y la frecuencia de cada categoría cuando se trabajo con un gráfico de sectores.

Más tarde Friel, Curcio y Bright (2001) los reformulan en la forma siguiente:

- *Título y etiquetas*. Relacionado con el contenido contextual de la información mostrada en el gráfico, por ejemplo permite identificar las variables que se están representando.
- *Marco del gráfico*. Se relaciona con la información que se muestra en los ejes, escalas y marcas, con ellas se puede conocer, entre otras cosas, las magnitudes utilizadas y rango de valores que se consideran.
- *Especificadores*. Son elementos propios y específicos de cada gráfico estadístico, que son utilizados para la representación de la información. Como ejemplo por ejemplos las líneas en los gráficos de líneas y polígono de frecuencias.
- *Fondo*. Hace referencia los colores, cuadrículas e imágenes sobre la que se construye en gráfico estadístico.

Finalmente citamos a Alaminos (1993) proporciona recomendaciones para la construcción de un gráfico, como las siguientes:

- *Título y subtítulos* que informa sobre el contenido del gráfico.
- *Etiquetado de ejes*. Deben estar marcadas las escalas en los ejes, así como las unidades de medida que se estén empleando, con suficientes divisiones. En los gráficos en que intervengan ejes cartesianos se debe indicar el cero cuando este forme parte de la escala. Igualmente se debe indicar el rango o valor máximo de los datos representados. En el caso que una parte del gráfico no es utilizado se debe señalar la discontinuidad, pero indicando siempre la base de referencia.
- *Otros elementos*. Sugiere la necesidad de diferenciar con claridad las diferentes variables y categorías, usando colores o líneas de diferente tipo. También se debe indicar la fuente del gráfico y proporcionar la información complementaria necesitada para su interpretación, así como cuadriculado, si esto facilita la lectura. También comparan la forma en que se visualiza la información usando longitud, área y volumen, donde la forma más efectiva es la primera.

II. Comprensión de gráficos estadísticos

Bertin (1967) entiende un gráfico estadístico como un sistema semiótico complejo, que necesita la compresión de cada uno de sus elementos por separado y una interpretación conjunta de los mismos. Es así, como este último autor plantea una teoría semiótica respecto al proceso de lectura de un gráfico, con los siguientes pasos.

- *Identificación externa*. Es la identificación de elementos conceptuales y de la vida cotidiana que están representados en el gráfico estadístico, los que se obtienen tras observar los rótulos alfanuméricos (título y etiquetas). Con ello se obtiene información sobre las variables representadas, el origen de los datos, el propósito del gráfico, tamaño de la muestra o población de datos, etc.
- *Identificación interna*. Es la valoración de la variabilidad del gráfico, estableciendo una relación entre los ejes cartesianos y las dimensiones visuales (escalas del gráfico), con las magnitudes y variables representadas en cada eje, el rango de variación de las mismas, las unidades de medidas y el factor de escala, si corresponde.
- *Percepción de la correspondencia*. Es el último paso, consiste en la puesta en relación o correspondencia de cada uno de los elementos del gráfico con la realidad representada. Con ello se obtienen conclusiones sobre las variables, su rango de variación, su distribución y sus características, así como sobre la relación entre las variables en la situación real representada.

Que una persona sepa establecer las relaciones anteriores en la interpretación o la construcción de gráficos significa que tiene una comprensión gráfica.

Wu (2004), por su parte, menciona cuatro componentes para la comprensión de los gráficos estadísticos.

- *Lectura gráfica*. Corresponde a la capacidad de leer correctamente la información estadística contenida en un gráfico. Por ejemplo, obtener algún valor máximo o mínimo.
- *Construcción gráfica*. Consistiría en la construcción del gráfico estadístico de manera correcta a partir de datos obtenidos de diferentes fuentes (datos brutos, en tablas o otros gráficos).
- *Interpretación gráfica*. Va más allá de la lectura y consiste en interpretar la información del gráfico de acuerdo a su contexto.
- *Evaluación de gráficos estadísticos*. Está asociado a la calidad de la información mostrada y a la pertinencia del gráfico estadístico usado en la representación.

Otros autores han puesto su interés en estudiar las dificultades al abordar cuestiones sobre la información de un gráfico estadístico, ya que sobre una misma representación se pueden formular distintas preguntas y relacionar diferentes elementos (objetos matemáticos).
En tal sentido, Wainer (1992) clasifica en tres los tipos de preguntas que se pueden plantear a partir de un gráfico estadístico:

- *Nivel elemental*. Preguntas relacionadas únicamente con la extracción de datos directos del gráfico estadístico.
- *Nivel intermedio*. Preguntas relacionadas con la evaluación de tendencias basándose en una parte de los datos.
- *Nivel avanzado*. Preguntas acerca de la estructura profunda de los datos presentados en su totalidad, usualmente comparando tendencias y viendo agrupaciones.

Más tarde, Curcio (1989) y Friel, Curcio y Bright (2001) definen los siguientes niveles:

- *Leer los datos*. Es la lectura literal de información del gráfico estadístico, es decir, no se realiza interpretación ni cálculos. Por ejemplo, determinar la frecuencia para una determinada categoría o bien la operación inversa, dada una frecuencia encontrar a qué categoría corresponde.
- *Leer dentro de los datos*. Es la lectura basada en los datos proporcionados en el gráfico, pero que no se presentan explícitamente; en este nivel se realizan cálculos o se buscan relaciones en función a la información mostrada en el gráfico estadístico. Un ejemplo es calcular la media aritmética con la información del gráfico.
- *Leer más allá de los datos*. Es la realización de inferencias o predicciones con la información del gráfico. Concretamente, consiste en predecir tendencias o valores, de acuerdo al contexto del la información. También puede consistir en interpolar o extrapolar un valor del gráfico.

Como ejemplo, podemos mencionar la estimación de los valores de una distribución con el paso del tiempo y que no están explicitados en el gráfico.

- *Leer detrás de los datos*. Es el nivel más alto y está asociado a una valoración crítica de los datos, del tipo de gráfico utilizado, de la manera en que se han obtenido y analizado los datos. Por ejemplo, analizar si la elección de la muestra considerada en el estudio es la adecuada; o si las conclusiones obtenidas son adecuadas a la información y el contexto representado.

Del mismo modo, autores han centrado su interés en la construcción de gráficos. Es así como Arteaga (2011) y Batanero, Arteaga y Ruiz (2010) proponen cuatro niveles asociados a la construcción de gráficos estadísticos, bajo la premisa que la construcción de gráficos estadísticos es una actividad semiótica que puede ser compleja según los objetivos matemáticos que intervienen. Estos autores proponen los siguientes niveles de complejidad semiótica.

- *Representación de datos individuales*. Se asocia a la representación de datos aislados (puede ser un dato o una porción de ellos), sin realizar una representación conjunta de ellos. En esta construcción no son utilizadas las ideas de variable y distribución, por lo que no se realiza un análisis global de la información. Esta situación ocurre cuando un estudiantes es capaz de graficar solo su edad, y quizás de algunos compañeros más de clase, frente a la tarea de construir un gráfico con las edades de toda la clase.
- *Representación de un conjunto de datos sin llegar a resumir su distribución*. Está asociado a la representación de cada dato, de la distribución sobre un gráfico, sin agruparlos y sin usar las ideas de frecuencia y distribución de frecuencias, aunque ya se maneja la idea de variable. Un estudiante alcanza este nivel si realiza un gráfico con 20 barras, donde cada barra representa la edad de cada compañero de clase.
- *Representación de una distribución de datos*. Se refiere a la representación de una distribución, agrupando los datos y calculando las frecuencias respectivas; los datos son mostrados en forma ordenada, en general, según los ejes cartesianos. Un estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de agrupar las edades de una clase, calculando frecuencias y representen las edades en orden (dado por el eje X).
- *Representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico*. Se alcanza este nivel cuando se es capaz de representar de dos o más distribuciones de frecuencias en el mismo gráfico estadístico. Una situación que ejemplifica esto es cuando un estudiante puede graficar las edades de sus compañeros de clase separando por género.

Lo anterior permite confirmar la complejidad de las actividades asociadas a los gráficos estadísticos, aportando elementos que se pueden considerar en estudios futuros. En lo que sigue se exponen los resultados, sobre lectura y construcción, de algunas investigaciones con estudiantes de Educación Primaria, resultados que pueden aportar al estado del arte de los estudios en esta área.

IV. Investigaciones sobre lectura de gráficos estadísticos

Investigaciones sobre la lectura de gráficos estadísticos son emergentes en la Educación Primaria, muchas de ellas motivadas por la inclusión de este temática en las directrices curriculares desde los primeros cursos y la necesidad de formar estudiantes estadísticamente cultos. A continuación, se describen los resultados de algunos de los estudios.

Guimarães (2002) estudia la interpretación de los gráficos de barras por 107 estudiantes de 3º de Educación Primaria en Brasil, plantando 3 actividades (dos con datos nominales y uno con datos ordinales). Los resultados muestran que el 72% del estudiantes logran la lectura puntual (encontrar máximos, mínimos y localizar frecuencias o categorías), presentado dificultades aquellas actividades en donde se debe leer una frecuencia que no está explicita. Se observan dificultades cuando se aborda una comprensión variacional, en las que se debe localizar la parte del gráfico en que la variable estudiada sufre su mayor aumento o disminución, que alcanza solo un 26,3% de respuestas correctas. Finalmente, el 54,2% de los estudiantes responde con éxito la actividad en que deben realizar una extrapolación.

Pagan, Leite, Magina y Cazorla (2008) estudian la lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos de 399 estudiantes (159 de 5º grado y 80 de 8º grado de Educación Primaria y 160 de 2º de Educación Secundaria) en Brasil. Dos de sus ítems están relacionados con gráficos. Sus resultados muestran un porcentaje de logro de 67,3%; obteniendo mejores resultados en las actividades que demandan un nivel de lectura 1 (84% de respuestas correctas) frente al 43% en las actividades que se exige un nivel 2 de lectura, según los niveles descrito por Curcio.

Fernandes y Morais (2011) estudia los niveles de lectura que alcanzan 108 estudiantes de 9º grado de Educación Fundamental en Portugal. Para ello, se aplica un instrumento con tres actividades, en la primera se presenta un gráfico de barras, la segunda un diagrama de sectores y la tercera un diagrama de líneas dobles. Cada actividad tenía tres o cuatro preguntas que se corresponde a los niveles de lectura descritos por Curcio. Los resultados muestran que los estudiantes no presentan mayores dificultades para abordar las preguntas de nivel 1, el de lectura literal, no así en los niveles 2 y 3. Las preguntas de nivel 2 presentan una diferencia levemente mayor que las de nivel 3, que los autores relacionan a la falta de conocimiento matemático y errores de interpretación. Las dificultades de las preguntas de nivel 1 se deben a que no se observó todos los elementos del gráfico o por una lectura errada del enunciado. En las preguntas de nivel tres se observa que los estudiantes no conocían el contexto, lo que impedía hacer predicciones o inferencias.

Carvalho, Campos y Monteiro (2011) presentan los resultados de dos estudios relacionados con la inferencia (relación) directa e inversa en la interpretación de gráficos de líneas, por niños ingleses de 11 a 14 años de edad. La muestra de estudiantes estuvo constituida por 270 niños pertenecientes a cuatro escuelas públicas del Distrito de Oxfordshire (Inglaterra). En primer estudio consideró una muestra de 84 estudiantes de 7º, 8º y 9º años de escolaridad de Oxford, se basa en actividades de inferencia directa e inversa. En el segundo estudio, con 186 estudiantes de los mismos niveles educaciones de Cowley, Kidlington y Holton, se abordan problemas de inferencia directa e inversa en gráficos de pendientes positivas y negativas. Los resultados muestran que los estudiantes responden con mayor éxito las actividades de inferencia directa, y que estos son mejores a medida que avanzan en los niveles de escolaridad. Como principal error está el considerar la situación en que interviene una inferencia inversa como directa, ya que sus respuestas se centran en aspectos visuales.

Evangelista (2013) analiza el desempeño de una muestra de 60 niños de 5º curso de Educación Primaria en Brasil al trabajar con gráficos de barras y de líneas. En la investigación se propone a los niños 8 actividades de lectura e interpretación de gráficos con actividades de nivel de lectura 1 y 2 según Curcio. Los resultados muestran que los niños contestan correctamente el 51% de las actividades planteadas. Los mejores resultados se alcanzan en los gráficos de barras y los de menor nivel de logro (31%) en un diagrama de líneas dobles. En promedio, los estudiantes responden correctamente el 59% de las actividades relacionadas con gráficos de barras y el 43% a las de gráficos de líneas. Sobre el tipo de pregunta vemos que las actividades de localización de frecuencias o categorías tienen un nivel de logro de 60%, seguido las de localizar la moda con un 51% y suma las de valores con un 41%.

Cruz (2013) estudia las dificultades al leer gráficos estadísticos, en una clase de 21 estudiantes de 3º de Educación Primaria en Lisboa. La investigación contempla la aplicación de un pre test, una intervención de aula y un post test. Este incluye dos actividades relacionadas a la lectura de gráficos (un pictograma y un gráfico de sectores). Los resultados muestran que los estudiantes alcanzan mejores resultados al trabajar con el pictograma que con el gráfico de sectores, con un 70% y 21,3% de éxito, respectivamente. Respecto a los niveles de lectura de Curcio (1989) los estudiantes, independiente del tipo de gráfico, responden correctamente el 53,8% de las actividades de nivel 1; el 46,8% de las del nivel 2; y 24,5% de las que se encuentran en un nivel 3. Además, se muestra que los estudiantes han mejorado sus resultados tras la intervención de aula.

V. Investigaciones sobre construcción de gráficos estadísticos

La construcción de gráficos no es una actividad sencilla, pese a que muchas veces se considere así. Esto se debe a que cada gráfico estadístico ocupa diferentes objetos matemáticos que intervienen en la construcción, por ejemplo no usamos los mismos conceptos matemáticos al construir un gráfico de barras o un gráfico de sectores, en este último caso se usa la noción de área. Además, en la construcción de un gráfico estadístico se debe considerar la naturaleza de los datos, pues no todos los gráficos son adecuados para su representación (Díaz-Levicoy, 2014), errores que ya han sido observados por autores como Li y Shen (1992).

En lo que sigue describimos algunos estudios en los que se da cuenta de los errores cometidos por estudiantes de Educación Primaria.

Guimarães, Gitirana y Roazzi (2001) reportan los resultados de dos actividades que se relacionan con la construcción de gráficos de barras por 107 estudiantes de 3º de Educación Primaria en Pernambuco (Brasil). Los resultados muestran que la construcción de gráficos para datos nominales (47,7%) es más sencillo que la de datos ordinales (25% aprox.), aunque dichos resultados pueden verse influidos por el ámbito numérico que se trabaja, así como por la escala que deben usar, que son diferentes en cada actividad. Sobre este último punto (las escalas) se observan su ausencia y dificultades para construirlas en forma adecuada, aunque la ausencia se podría justificar a que no se percibe su utilidad, por tener una visión del gráfico de barras como si fuese un pictograma.

Fernandes, Morais y Lacaz (2011) muestran los resultados de una investigación sobre el desempeño, dificultades y errores en la construcción de gráficos estadísticos de108 estudiantes de 9º año de Educación Fundamental en Braga (Portugal). Para recoger la información se pidió a los estudiantes que desarrollaran dos actividades de construcción del gráfico más apropiado de acuerdo a la naturaleza de los datos —en la primera se presentan las edades y sexo de 28 estudiantes, de esta información se pide dos tareas: construir un gráfico que represente las edades (cuantitativa discreta) y otro que represente las edades según sexo (comparación de cuantitativas discretas según una cualitativa); la segunda está basada en la construcción de un gráfico con los años de vida de 21 animales (cuantitativa continua)—. Entre los resultados se destacan: la dificultad de los estudiantes para construir gráficos estadísticos; los estudiantes presentaron mejor desempeño en la representación de una variable cuantitativa discreta (61%), seguida de la representación para comparar un variable cuantitativa discreta de acuerdo a una cualitativa(35%), y con un rendimiento muy bajo la de representar una variable cuantitativa continua (2%). Los errores observados están asociados a la elección de un gráfico inadecuado, ausencia de títulos y etiquetas de los ejes, escalas inadecuadas y falta de rigor al construir.

Walichinski y Santos Junior (2013) describen los resultados que se han obtenido en una secuencia didáctica para el trabajo con gráficos y tablas estadísticas con 22 estudiantes de 7º grado de Educación Primaria en Ponta Grossa (Brasil), los que tenían una edad media de 12 años. Para el desarrollo de esta secuencia didáctica se usaron tres momentos: pre-test, intervención didáctica y pos-test. Los resultados de la experiencia muestran que los niños despertaron interés por participar de las clases, mejoraron la disposición a trabajar las actividades que se planteaban, y generaban una mayor interacción entre el profesor y los niños. Además, se observó un avance significativo en relación a la adquisición de conocimiento, es decir, se logró que los niños percibieran la necesidad de colocar título, categoría a los ejes o la fuente de los datos al construir gráficos estadísticos.

Evangelista, Oliveira y Ribeiro (2014) describe los resultados de una investigación que analizaba el desempeño de 46 estudiantes de 5º año de una escuela pública de Olinda (Brasil). A los estudiantes se les pidió construir dos gráficos estadísticos, sin especificar su tipo. Los resultados indican que el 88,1% de los estudiantes fue capaz de construir los dos gráficos; ningún estudiante colocó título a los gráficos construidos; solo el 3,3% del total de los estudiantes fue capaz de asignar nombre a los ejes. También, la mayoría de los estudiantes (77,2%) consiguió describir las variables del eje X, y solo el 19,6% consiguió establecer adecuadamente la escala; situación que confirma lo expresado por (Silva, 2014), al expresar las dificultades que tienen los estudiantes al trabajar con escalas no unitarias. En general, los estudiantes son capaces de realizar los gráficos pedidos, pero pocos son capaces de asignar correctamente títulos, nombre de los ejes y escalas.

Ruiz (2015) realiza un estudio con 31 escolares de quinto grado de Educación Primaria en un colegio de Bogotá (Colombia), para indagar sobre los errores y dificultades que presentan ante una actividad de construcción de gráficos. En las producciones de los estudiantes se observan los siguientes errores y dificultades:

- Usar un gráfico no adecuado a la naturaleza de los datos representados
- Dificultades en el manejo de las escalas en la presentación de los datos. Esto es, ejes que presentan divisiones no proporcionales, que la escala es inadecuada.
- Problemas de simetría o paralelismo entre figuras.
- Ausencia de rótulos que permite una mejor comprensión de la información mostrada en el gráfico.

Cruz (2013), en su estudio con estudiantes de tercero de primaria, mencionado anteriormente, observa los siguientes errores asociados a la construcción de un gráfico de barras:

- Falta de leyendas en los ejes horizontales y verticales
- Barras con diferente ancho y con separación no uniforme entre ellas.
- No colocar correctamente las categorías de las variables mostradas en el gráfico.
- No seleccionar una unidad constate para definir la escala y no indicarlas en los respectivos ejes.

VI. Conclusión

Los estudios anteriores relacionados con la lectura de gráficos estadísticos dejan en evidencia dificultades que conlleva para los estudiantes. Del mismo modo, las investigaciones sobre construcción de gráficos muestran que los estudiantes de Educación Primaria presentan errores, tales como: elección inadecuada del gráfico; falta de proporcionalidad en sus elementos (barras con alturas no proporcionales y separación no uniforme de las mismas, iconos no proporcionales en los pictogramas, etc.); dificultad para identificar los ejes, ausencia de leyendas y rótulos.

Algunas de estas dificultades se pueden atribuir a que estos temas no se trabajan en forma adecuada y rigurosa, pues diversas investigaciones muestran los problemas que presentan los mismos profesores, en formación o en activo, al trabajar con estas representaciones (e.g., Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas, 2016; González, Espinel y Ainley, 2011; Rodríguez y

Sandoval, 2012) o, como mencionan Wall y Benson (2009), porque los profesores no se siente cómodos enseñando estos temas.

Esta revisión de la literatura puede aportar elementos teóricos y antecedentes para el desarrollo de estudios en aquellos países que la investigación sobre gráficos estadísticos es más escasa (ejemplo, Chile, España, México, entre otros), teniendo en cuenta que los temas de estadística y probabilidad se han incluido recientemente en las directrices curriculares de Educación Primaria.

Bibliografía

[1] Alaminos, A. *Gráficos. Cuadernos metodológicos*, Madrid, Centro de Investigaciones Sociológicas, 1993.

[2] Arteaga, P., *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores* [Tesis Doctoral], Granada, Universidad de Granada, 2011.

[3] Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J.M.; Cañadas, G. Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 2016, **19**(1), p. 15-40.

[4] Batanero, C.; Arteaga, P.; Ruiz, B., Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas, *Enseñanza de las Ciencias*, 2010, 28(1), p. 141–154.

[5] Batanero, C.; Díaz, C.; Contreras, J.M.; Roa, R., El sentido estadístico y su desarrollo, *Números*, 2013, **83**, p. 7-18.

[6] Bertin, J. *Semiologie graphique*, Paris, Gauthier-Villars, 1967.

[7] Carvalho, L.M.T.L.; Campos, T.M.D.M.; Monteiro, C.E.F. Aspectos visuais e conceituais nas interpretações de gráficos de linhas por estudantes, *Boletim de Educação Matemática*, 2011, **24**(40), p. 679-700.

[8] Cruz, A., *Erros e dificuldades de alunos de 1º ciclo na representação de dados estatísticos* [Tesis de Máster], Lisboa, Universidade de Lisboa, 2013.

[9] Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1987, **18**(5), p. 382-393.

[10] Curcio, F. R., *Developing graph comprehension*, Reston, NCTM, 1989.

[11] Del Pino, G.; Estrella, S., Educación estadística: Relaciones con la matemática, *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana*, 2012, **49**(1), p. 53-64.

[12] Díaz-Levicoy, D., *Un estudio empírico de los gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria española* [Trabajo Fin de Máster], Granada, Universidad de Granada, 2014.

[13] Evangelista, B., *Aprendendo a representar escalas em gráficos: um estudo de intervenção* [Tesis de Mestrado], Recife, Universidade Federal de Pernambuco, 2014.

[14] Evangelista, B.; Oliveira, F.S.M.A.; Ribeiro, P.M. Analizando a construção de gráficos de alunos do 5º ano do ensino fundamental. *Congresso Nacional de Educação (CONEDU)*, Campina Grande, Brasil. 2014.

[15] Fernandes, J.A.; Morais, P.C., Leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade, *Educação Matemática Pesquisa*, 2011, **13**(1), p. 95-115.

[16] Fernandes, J.A.; Morais, P.C.; Lacaz, T.V.S. (2011). Representação de dados através de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Recife, Brasil. 2011.

[17] Friel, S.; Curcio, F.; Bright, G. Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2001, **32**(2), p. 124-158.

[18] Gal, I., Adult´s statistical literacy: Meaning, components, responsibilities, *International Statistical Review*, 2002, **70**(1), p. 1-25.

[19] Glazer, N., Challenges with graph interpretation: a review of the literatura, *Studies in Science Education*, 2001, **47**(2), p. 183-210.

[20] González, M.T.; Espinel, M.C.; Ainley, J., Teachers' graphical competence, en C. Batanero, G. Burrill y C. Reading, C (eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education*, New York, Springer, 2011, p. 187-197.

[21] Guimarães, G.L., *Interpretando e construindo gráficos de barras* [Tesis doctoral], Pernambuco, Universidade Federal de Pernambuco, 2002.

[22] Guimarães, G.L.; Gitirana, V.; Roazzi, A. Interpretando e construindo gráficos. *24 Reunión Anual de ANPeD*. Caxambu, Brasil. 2001.

[23] Kosslyn, S. M. Graphics and human information processing. *Journal of the American Statistical Association*, 1985, **80**(391), p. 499-512.

[24] Li, D. Y.; Shen, S. M., Students'weaknesses in statistical projects, *Teaching Statistics*, 1992, **14**(1), p. 2-8.

[25] MINEDUC, *Matemática educación básica. Bases curriculares*, Santiago, Unidad de Currículum y Evaluación, 2012.

[26] MECD, *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*, Madrid, 2014.

[27] Pagan, A.; Leite, A.P.; Magina, S.; Cazorla, I. A leitura e interpretação de gráficos e tabelas no Ensino Fundamental e Médio. *2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEMAT)*. Recife, Brasil. 2008.

[28] Rodríguez, F.; Sandoval, P.R., Habilidades de codificación y descodificación de tablas y gráficos estadísticos: un estudio comparativo en profesores y alumnos de pedagogía en Enseñanza Básica, *Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior*, 2012; **17**(1), p. 207-235.

[29] Ruiz, A., Un estudio de caso sobre errores y dificultades observadas en la elaboración de algunas gráficas estadísticas, *Revista Góndola. Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 2015, **10**(1), p. 26-39.

[30] Wainer, H., Understanding graphs and tables, *Educational Researcher*, 1992, **21**(1), p. 14-23.

[31] Walichinski, D.; Santos Junior, G., Contribuições de uma sequência de ensino para o processo de ensino e aprendizagem de gráficos e tabelas segundo pressupostos da contextualização, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 2013, **35**, p. 19-42.

[32] Wu, Y. Singapore secondary school students´understanding of statistical graphs. *10th International Congress on Mathematics Education*. Copenhagen, Dinamarca. 2004.

Feedback em Aulas de Estatística com Recursos Tecnológicos

Carolina Carvalho*, Maria Niedja Martins*, Carlos Monteiro**

Resumo: Em muitas salas de aula o feedback do professor é oral, quando interage com os alunos ou escrito, quando avalia as suas produções escritas. Mas os recursos tecnológicos e o software educacional estão a criar novos contextos de aprendizagem. Nesta comunicação os objetivos são (a) retomar ideias sobre o feedback em situações de aprendizagem de conteúdos de Estatística mediadas pelo uso de recursos tecnológicos; (b) refletir como estes recursos geram potencialidades no envolvimento com as tarefas; (c) revelar a necessidade de os professores terem a oportunidade de trabalhar com estes recursos antes de os usarem com os alunos. Os resultados ilustram como quando os professores têm oportunidade de explorar contextos onde se recorre a estas ferramentas também eles desenvolvem conhecimentos e competências que lhes dão confiança para os implementar nas suas salas de aula.

Palavras-Chave: Aulas de Estatística, Feedback do professor, Recursos tecnológicos

Abstract: In many classrooms, the teacher's feedback is oral, when assessing with the students or written, when assess their papers. However, technological resources and educational software are creating new learning contexts. The aims of this communication are (a) refresh ideas about feedback in situations of learning of Statistical contents mediated by the use of technology; (b) reflect how these resources generate potential in the engagement with tasks; (c) reveal the need for teachers to have the opportunity to work with these resources before using them with students. The results illustrate that when teachers have the opportunity to explore contexts where these tools are used they also develop knowledge and skills that give them confidence to implement them in their classroom.
.

Key words: Statistical classes, Teacher’s feedback, Technological resources

Introdução

Nos últimos anos, uma das alterações mais profundas no ensino da Estatística foram trazidas pela mão da tecnologia (Jolliffe, 2007). De facto, assistimos a um significativo número de recursos tecnológicos que podem ser utilizados nas aulas quando se trabalha com este conteúdo disciplinar. Calculadoras, computadores e *software* educacional provocaram, a par de uma crescente facilidade de acesso a dados reais na *internet*, uma revolução em muitas salas de aula. Em diversas situações de ensino da Estatística recorre-se a investigações estatísticas com dados reais, usando contextos ricos e significativos de aprendizagem (Garfield & Ben-Zvi, 2010). Os avanços na tecnologia e

* Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal. cfcarvalho@ie.ulisboa.pt; marianiedjamartins@campus.ul.pt
** Universidade Federal de Pernambuco, Brasil. cefmonteiro@gmail.com

os múltiplos recursos tecnológicos hoje disponíveis quando incorporados na educação estatística de modo diversificado, em particular como instrumento de apoio aos alunos (e aos próprios professores) durante a exploração e análise de dados reais, na resolução dinâmica de atividades estatísticas ou na compreensão de conceitos e ideias estatísticas têm promovido o desenvolvimento do raciocínio estatístico dos alunos (Ben-Zvi & Garfield, 2004).

Segundo Ben-Zvi (2000), são vários os atributos dos computadores que parecem contribuir para o desenvolvimento do sentido e dos significados dos alunos, nomeadamente: a capacidade de operar de forma rápida e precisa; ligar dinamicamente múltiplas representações; simplificar procedimentos; fornecer feedback e transformar uma representação como um todo num objeto manipulável. Ou seja, "implicam uma reorganização da atividade cognitiva e uma mudança do foco de atenção para um nível cognitivo superior" (p. 141).

No entanto, o acesso a recursos tecnológicos não garante, por si só, uma aprendizagem efetiva, é fundamental o papel ativo do professor no estabelecimento e suporte do desenvolvimento do raciocínio dos alunos, focando-se tanto nas representações gráficas construídas, como nas questões a serem exploradas de modo a assegurar que eles desenvolvem compreensão da necessária articulação entre estes aspetos (Henriques & Antunes, 2014). É por isso que o feedback do professor, que ocorre após um comportamento, um desempenho ou uma atitude, consistindo na informação recebida sobre o esforço desenvolvido para alcançar um determinado objetivo e concretizar uma determinada tarefa (Wiggins, 2012) numa situação mais dinâmica como quando o aluno trabalha como *software*, precisa também ele de ser revisitado.

Num contexto de sala de aula, e pensando no professor, o feedback é uma consequência da atuação de um aluno e a sua finalidade é fornecer informações relacionadas com a tarefa ou processo de aprendizagem, cujo objetivo é melhorar o desempenho numa tarefa específica e/ou o entendimento de um determinado assunto (Sadler, 1989). Este feedback pode influenciar em muito como estudantes aprendem certos conteúdos, mas a literatura ainda não é consensual sobre o que se considera como um feedback eficaz (Bergh, Ros & Beijaard, 2013).

Feedback e recursos tecnológicos

Ainley e Monteiro (2008) ao analisar conteúdos de currículos de Estatística no Brasil e no Reino Unido e sua implementação enfatizam um certo abismo entre o que se planeia e o que se concretiza nos primeiros anos de escolaridade, considerando que apesar dos responsáveis pela elaboração dos currículos valorizarem a participação ativa dos estudantes na construção dos conhecimentos, não há uma especificação clara nos documentos de como os professores poderiam desenvolver tal abordagem. Os autores vão mesmo mais longe quando referem que esses objetivos ao serem formulados de forma vaga constituem-se em grandes desafios para os professores dos primeiros anos que podem, eles próprios ter um conhecimento pouco aprofundado sobre ideias estatísticas, e que, portanto, precisam muitas vezes de materiais de apoio mais detalhados (*e.g*. livros didáticos, orientações curriculares, exemplos de atividades, critérios de avaliação). Em ambos os contextos nacionais mencionados, a interpretação dos objetivos curriculares nesses materiais de apoio afasta-se das orientações mais desafiadoras de resolução de problemas e realização de investigações, sendo ainda necessários encaminhamentos na formação dos professores para que eles estejam conscientes do seu papel no processo de aprendizagem dos alunos (Quintas, Tomás Ferreira & Oliveira, 2013). E mais ainda quando se recorre a tecnologias para criar ambientes de aprendizagem mais envolventes para os alunos.

De facto, como alertam Pratt, Davies e Conner (2011) há muito que se aponta para a necessidade de modificar a formação de professores quanto à educação estatística, atendendo às dificuldades dos professores em lidar com os conhecimentos estatísticos e como os trabalhar recorrendo à tecnologia, uma vez que, durante a sua formação raramente estão imersos em situações semelhantes às que mais tarde devem promover junto dos seus alunos.

Concretamente, o *software TinkerPlots* tem como principal objetivo favorecer as explorações de dados estatísticos e não apresenta funções que ofereçam feedback automático aos utilizadores sobre se as análises e representações dos dados estão corretas ou erradas. Portanto, cabe ao professor atuar (ou dar feedback) de modo a fazer com que o aluno perceba se as resoluções encontradas estão adequadas.

De acordo com Hattie (2009), o feedback visa a redução das discrepâncias entre a compreensão e o desempenho atuais e uma intenção ou objetivo de aprendizagem. Por outras palavras, deverá fazer com que o aluno consiga ir mais longe nos seus desempenhos e raciocínios.

Embora o termo feedback faça parte do discurso dos professores e esteja presente em muitas situações da sua prática letiva a literatura refere-o como sendo complexo e nem sempre utilizado de forma eficaz pelo professor (Fonseca *et al*., 2015). Vários autores têm vindo a considerar o feedback como tendo três dimensões: cognitiva, motivacional e afectiva. Por exemplo, Brookhart (2008) descreve o feedback eficaz em termos de duas dimensões: a cognitiva e a motivacional. A dimensão cognitiva tem a ver com o fornecimento de informações necessárias aos alunos para poderem compreender onde se encontram na sua aprendizagem e o que têm de fazer a seguir para melhorar desempenhos. A dimensão motivacional diz respeito ao desenvolvimento nos alunos da “sensação de que têm controlo sobre sua própria aprendizagem” (Brookhart, 2008, p.2).

Há um consenso geral na literatura de que o feedback deve ser dado a um nível que os alunos o possam compreender (Orsmond, Merry, & Reiling, 2005), e será mais eficaz se for fornecido num clima de sala de aula onde a resposta mesmo quando incorreta é valorizada como uma oportunidade de reflexão ao invés de ser oferecido como um juízo de valor (Weaver, 2006). Ser eficaz é ser claro, ter um propósito, ser significativo, compatível com o conhecimento prévio dos alunos e fornecer-lhe conexões lógicas que o levem a concentrar-se em como melhorar desempenhos (Hattie, 2009).

A dimensão afetiva do feedback revela-se quando a informação fornecida pelo professor se centra na pessoa do aluno e não no desempenho ou compreensão. Quando tal acontece, os alunos poderão aumentar o medo do fracasso, minimizar o seu esforço ou evitar os riscos que resultam de uma abordagem de tarefas desafiadoras (Black & William, 1998).

Grieshaber (2010) argumenta que quando os alunos usam computadores na sala de aula existem diversas oportunidades de feedback e interacção geradores de envolvimento com as tarefas. Assim, aquela autora ressalta que em situações de ensino e de aprendizagem mediados por computadores, a organização e gestão dos pequenos grupos também afeta o que ocorre entre os alunos e a produtividade do grupo. Ao trabalhar com estas ferramentas cria-se a possibilidade de ativar conhecimentos anteriores e amplia-los, gerando-se uma oportunidade de se verificar uma mudança conceptual entre conceitos anteriores incompletos ou incorretos e novas (re)configurações mais robustas.

Para isso o professor deve identificar os momentos críticos e fornecer o feedback que permita esta mudança conceptual.

Situações de ensino mediadas por recursos tecnológicos remetem para uma conceção da atividade cognitiva onde a mediação e o papel de artefactos e ferramentas cognitivas estão presentes. A mediação refere-se ao facto de a nossa interação com o mundo recorrer a signos e artefactos e, o computador é um artefacto que potencializa conhecimentos e processos de aprendizagem mas que torna mais complexas as situações de uso do feedback por parte dos professores. As atividades que recorrem ao computador em sala de aula tendem a fomentar a colaboração entre os alunos ao externalizam verbalmente o trabalho cognitivo realizado individualmente para os colegas. Seguidamente iremos apresentar algumas considerações sobre o feedback em situações de formação de professores.

Feedback em situação de aprendizagem de Estatística mediada pelo TinkerPlots: potencialidades para a formação de professores

A fim de discutir o feedback do professor em situações de sala de aula onde se utilizou recursos tecnológicos, iremos discutir episódios referentes a situações de aprendizagem de um estudo desenvolvido no Brasil (Martins, 2014) que explorou a aprendizagem do conceito de amostra com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Refira-se que o foco do estudo de Martins não era o feedback do professor, mas o processo de aprendizagem de noções e conceitos estatísticos recorrendo ao *software TinkerPlots* (Konold & Miller, 2005).

No Brasil, a investigação em torno do uso do *TinkerPlots* entre professores e estudantes de diferentes níveis de escolaridade tem revelado resultados positivos em termos da aprendizagens de conceitos e desenvolvimento de raciocínios estatísticos mais complexos entre os sujeitos (Monteiro, Carvalho & Ainley, 2013; Monteiro, Martins & Carvalho, 2015). Talvez por este *software* criar um ambiente dinâmico, no qual os estudantes podem organizar e explorar diferentes representações gráficas de dados recorrendo a sofisticadas e rápidas formas de os processar que numa forma tradicional obrigava a cálculos rotineiros e morosos. As possibilidades de produzir uma diversidade de representações oferecem condições para análise de hipóteses no processo de interpretação de dados mas também acentua a necessidade de os alunos e os professores não desvalorizarem a necessidade do pensamento estatístico mesmo quando se recorre à tecnologia (Pratt, Davies & Conner, 2011).

A professora participante do estudo de Martins (2014) tinha 30 anos e experiência de 5 anos como professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental, tendo concluído o curso de graduação em Pedagogia à cerca de ano e meio. A professora afirmou que utilizava o computador diariamente, mas não conhecia o *software TinkerPlots*, nem utilizava qualquer outro *software* educativo com os alunos bem como não tinha realizado nenhuma aprendizagem formal sobre amostragem.

Após uma sessão de familiarização ao *software* (Raberdel & Waern, 2003), sendo-lhe apresentada as principais ferramentas do *TinkerPlots,* a professora analisou uma questão no *software,* sobre um piscicultor que armazenou num tanque uma população de 625 peixes, onde alguns tinham sido geneticamente modificados. Para identificar qual grupo depeixes apresentava um cumprimento maior, o piscicultor deveria retirar gradualmente os peixes do tanque e analisá-los em função do tamanho. Os dados sobre os peixes eram apresentados no *TinkerPlots*, e a partir da seleção de casos, era possível visualizá-los por meio de uma tabela e da ferramenta *Plot, na qual era possível visualizar uma representação gráfica dos casos*. A professora deveria fazer o papel do piscicultor e identificar qual o grupo de peixes com um cumprimento maior ao retirar amostras crescentes dos peixes.

Campos et al. (2011) compreendem que o raciocínio sobre amostragem é um conhecimento necessário à construção de um racícinio estatístico. Isso porque, adquirir conhecimentos estatísticos pressupõe, dentre outras coisas, “entender a relação entre a amostra e a população, o que pode ser inferido com base em uma amostra e desconfiar de inferências feitas a partir de pequenas amostras” (Campos et al., 2011, p. 481).

Na tarefa proposta no estudo de Martins (2014) sobre os peixes normais e geneticamente adulterados, está presente a noção de que amostras maiores são mais seguras para realizar inferências à população, uma vez que, ao aumentar a amostra se visualiza melhor as particularidades da população a que ela pertence. Em outras palavras, amostras maiores conseguem melhor representar a variabilidade da população. Na visão de Lopes, a questão da varibilidade é um conceito-chave na Estatística.

> O raciocínio estatístico tem a variabilidade como o centro do processo de fazer relações sobre o problema investigado, de

> elaborar a construção e a análise dos dados. A variabilidade presente nos dados determina uma forma de pensar que exige uma combinação de ideias, o que nos remete a uma intersecção entre os raciocínios combinatório, probabilístico e estatístico (Lopes, 2012, p. 167).

No entanto, em sujeitos que não passaram por um ensino formal sobre a Estatística, não pode-se esperar que a ideia da procura por uma melhor representação da variabilidade da população nas amostras, surja espontaneamente. Ao contrário do que se pode imaginar, algumas pessoas que entram em contato pela primeira vez com problemas sobre a representatividade de amostras, tendem a acreditar que: 1) amostras são sempre representativas da população, não importando o seu tamanho ou a forma em que foram selecionadas; ou 2) de maneira geral as amostras são pouco confiáveis, pois são apenas parte de uma população (Rubin, Bruce & Tenney, 1991).

Uma maneira de fazer com que os sujeitos enfrentem essas intuições, segundo o Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE, 2005) envolve a necessidade destes retirarem amostras e analisem a variação de uma mesma medida estatística e a comparem com o parâmetro da população respetiva. Tal design de tarefa poderia levá-los a perceber que amostras aleatórias de uma mesma população podem variar um pouco e não serem necessariamente um retrato fiel da população, mas ainda assim, com base numa amostra representativa, se pode estabelecer inferências para a população.

Para Monteiro e Martins (2016), o uso do software educacional, por meio da simulação, pode ser um elemento interessante para sondar as ideias iniciais sobre Estatística e Probabilidade que as pessoas trazem consigo e. progressivamente, confrontar tais intuições. Ben-Zvi, Bakker e Makar (2015), por sua vez, esclarecem que ao retirar amostras de um simulador repetidas vezes, um indivíduo pode chegar progressivamente a conclusões mais claras do que porque aquela amostra é ou não representativa ao analisar as distribuições, compará-las e tecer comparações entre a variabilidade dos dados e as estatísticas extraídas de cada amostra.

A estratégia da investigadora centrou-se em apresentar as amostras crescentes de peixes no *TinkerPlots*, verificar a confiança da professora sobre as suas inferências, sugerir ou não a necessidade de aumentar as amostras e de utilizar ferramentas do *software* que facilitassem a interpretação dos dados. Esse processo só pôde acontecer a partir da troca de feedback entre a docente e a investigadora. Somente assim poderiam ser oferecidas sugestões que auxiliassem a professora a avançar na tarefa, visando o objetivo final da aprendizagem.

Um exemplo desse processo de trocas aconteceu quando a investigadora selecionou aleatoriamente alguns peixes no *TinkerPlots* e pediu para que a participante analisasse a sua representatividade, conforme os excertos da entrevista:

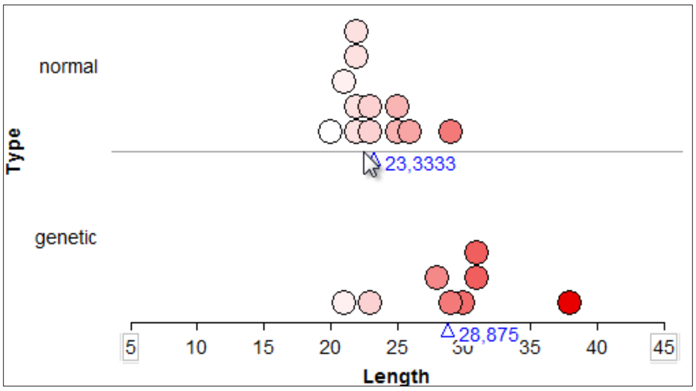


Figura 1. Tela do *TinkerPlots* 2.0 com uma amostra de 10 peixes.

Professora: Agora a gente tem pouco mais de 3% (da população). Eu acho que 3% não é um valor significativo pra comprar uma espécie pra colocar num aquário e fazer um teste. Se fosse assim... 6% eu acharia significativo... 10% está ótimo! Mas, pra fazer um teste... para afirmar... (com 3%) eu acho muito pouco.

- ***Conforme a solicitação da investigadora, a professora analisa a representatividade da amostra, indicando que a amostra não é significativa para realizar uma inferência à população.***

Investigadora: (...) Você está dizendo que talvez isso não seja significativo pro resto?

Professora: Exato! (...) Eu acho assim, se eu fosse o piscicultor, eu não aceitaria esses dados. Mesmo os peixes genéticos estarem apresentando… é porque a gente nem sabe quanto tem (total de cada tipo de peixe na população). Se fosse 50% aí a gente poderia dizer… Mas, aí, eles foram jogados lá… pode ser que ele tenha jogado apenas 10, apenas 5.

- ***Com base no questionamento da investigadora, a professora explica de uma outra maneira a impossibilidade de realizar uma inferência com aquela amostra.***

Investigadora: Ok. Você pode ver que vieram 12 normais e 8 geneticamente

- ***Nesse trecho a investigadora identifica que a resposta da professora não apresentou um nível de confiança, nem uma inferência. A partir disso, a*** modificados. Como você ainda não está mostrando certeza em sua resposta, vamos pegar mais 10 peixes, ok?

investigadora propõe uma alternativa para que a professora ofereça esses elementos.

A interacção estabelecida entre a investigadora e a professora centra-se na compreensão da professora sobre a representatividade da amostra. Quando a professora admite não considerar a amostra suficientemente representativa da população em função do seu tamanho, a investigadora sugere acrescentar mais casos a amostra. Essa estratégia revelou-se adequada para clarificar a ideia de que a amostra era suficiente pequena para realizar uma inferência. .

A partir do acréscimo de 10 casos na amostra, conforme sugestão da investigadora, a professora conseguiu estabelecer um nível de confiança elevado para a inferência dos dados à população, conforme mostra o diálogo:

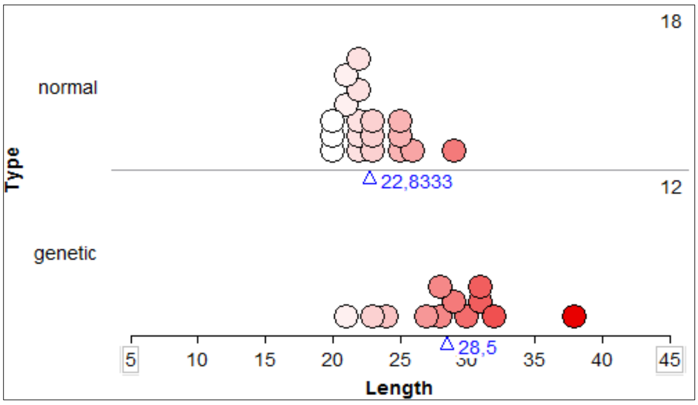


Figura 2. Tela do *TinkerPlots* 2. com uma amostra de 30 peixes.

Professora: A gente tem uma amostra de quase 24%. Aí… é! Quase 25%! Aí, bombou!

Investigadora: E, aí? Tu achas que esses daqui vão ficar maiores? (referindo-se ao grupo de peixes modificados geneticamente).

Professora: É, eu acho que vai.

Investigadora: Aí, agora sim... Quanto de certeza você tem?

- ***A investigadora em vários momentos confirma a resposta da professora e oferece oportunidade para a professora justificar-se.***

Professora: 8% (...) Numa escala de 0 a 10, nota 8. *(...)* É, porque vê só... 12 e 18 (quantidade de peixes por tipo). A gente não sabe a quantidade por tipo de peixes que ele colocou (População)...

Investigadora: Mas, o que te faz achar que eles vão ficar maiores?

Professora: São as informações, é o agrupamento... A gente tem um peixe que ocupa mais de 35 centímetros. E o maior dos normais está em 30 (cm), entendeu?

Investigadora: É o agrupamento?

Professora: Eu acho! Olha aqui... os genéticos vão de 25 até 40. E aqui (normais) vai de 25 a menos de 30. Então isso pra mim é significativo. Então, o grupo genético está entre 25 e 40, enquanto os normais, eles não passaram nem de 28. Então, eu acho que os genéticos podem superar e, de acordo com os dados, eu acredito em torno de 80%. Porque temos 25% de peixes na amostra. Oh! Não é isso tudo não (sobre os 25%). Eu estou doida (risos). É bem menos! 300, 150. Ainda está em 3%.

- ***Atendendo às solicitações da investigadora a professora oferece explicações que indicam que ela estava avançando na compreensão da relação entre representatividade e amostra, uma vez que utiliza a ideia do "agrupamento" o que pode sugerir que recorreu a comparação da distribuição das amostras .***

- ***A professora retificou o cálculo percentual do tamanho da amostra, oferecendo um valor mais aproximado da percentagem correta, mas permaneceu com uma confiança baseada na primeira estimativa.***

É possível notar que a tentativa de estabelecer um nível de confiança pela professora se relacionou com o percentual do tamanho da amostra faceo tamanho da população. Nota-se que a professora realiza um cálculo equivocado do percentual que representava o tamanho da amostra, mas não recebe uma orientação da investigadora para repensar o seu cálculo. Uma intervenção nesse momento poderia ter sido eficaz se a investigadora estivesse questionado a relação estabelecida pela professora entre o percentual do tamanho da amostra e o nível de confiança. Percebe-se ainda, que não ter aproveitado o erro da professora, para que a mesma reformulasse o seu nível de confiança informal, teve consequências para o desenvolvimento da tarefa e dos níveis de confianças seguintes oferecidos..

Por algumas vezes, a investigadora utilizou novamente a estratégia de aumentar a amostra, mas em todos esses momentos, a docente afirmou que a confiança sobre sua certeza não aumentava, conforme é exemplificado nos trechos a seguir:

Investigadora: Então, a gente adicionou mais dez casos. Ficaram quarenta casos aí. E você tinha dito que tinha uma certeza de 8, não é?! A média, de 28 passou para 27,8 e nos normais, ficou 23. Então, tu acha que eles ainda vão ficar maiores? Tua confiança aumentou ou continua a mesma?

- ***A investigadora centra sua explicação na tarefa para recapitular o que a professora fez até aquele momento.***

Professora: (...) A confiança ainda é a mesma.

Investigadora: Se ao invés de eu pegar mais dez (peixes), eu pegar o dobro dos que têm aqui? Então, eu vou pegar mais cinquenta e vai ficar uma amostra com 100 peixes. E agora?

- ***A investigadora opta também por aumentar o dobro dos casos, tentando garantir a estratégia de aumento das amostras, conforme a Figura 3.***

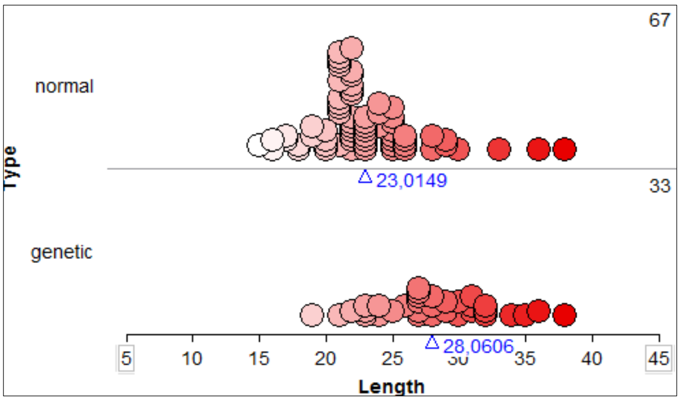


Figura 3. Tela do *TinkerPlots* 2.0 com uma amostra de 100 peixes.

Professora: Espera aí... Agora eu estou com quantos? Espera aí... 600 casos, 300... 150... Repete a pergunta.

Investigadora: Eu adicionei o dobro dos casos que estavam aqui. Então, agora eu tenho 100 casos na amostra e com um tanque que tem 625 (peixes). Então, agora, olhando para cá (*Plot*), eu posso afirmar com mais certeza ou não, que os peixes geneticamente modificados vão ter um comprimento maior? Para o tanque todo, não é?!

- ***A investigadora esclarece o tamanho da amostra relativamente ao tamanho da população.***

Professora: Vão! Se eles vão ser maiores? Vão!

Investigadora: E a certeza que você tinha antes era de oito, agora ela aumentou ou não?

Professora: Continua a mesma.

- ***A estratégia de aumentar a amostra realizada pela investigadora não pareceu surtir efeito na compreensão da professora sobre a ideia de que ao aumentar a amostra, mais representativa ela seria.***

Como discutimos, o elevado nível de confiança já atribuído pela professora pode ter influenciado a permanecer com o mesmo nível de confiança. No entanto, se analisarmos as tentativas de feedback nesse trecho, percebemos que a investigadora continua a estabelecer a mesma estratégia (aumentar a amostra) e as mesmas formulações de perguntas. Assim, uma das possíveis causas para o feedback da investigadora não ter funcionado, refere-se também a clareza com que ela questionava sobre o nível de confiança. A investigadora, então, reformulou a sua pergunta envolvendo o nível de confiança informal sobre a inferência:

Investigadora: Quantos casos seriam necessários adicionar nessa amostra para que eu tivesse uma certeza de 100% de que os geneticamente modificados realmente vão apresentar um comprimento maior do que os normais?

Professora: Deveria ver todos os casos.

Investigadora: Mas, aí tem 625. Tu

- ***A investigadora oferece um feedback por meio de um novo questionamento*** achas que seria possível do piscicultor pegar essa quantidade de peixes tão rapidamente?

Professora: Ele ia passar muito tempo. A gente já pegou quantos casos?

Investigadora: 110.

Professora: (passa um tempo pensando) Acho que 150.

Investigadora: Então eu pegaria mais 40, não é?

à professora. Ao invés de indicar simplesmente a impossibilidade de realizar o que professora sugere, a investigadora relembra a situação problema do piscicultor relacionada à tarefa.

- ***A investigadora oferece um tempo para a professora pensar e formular uma resposta.***

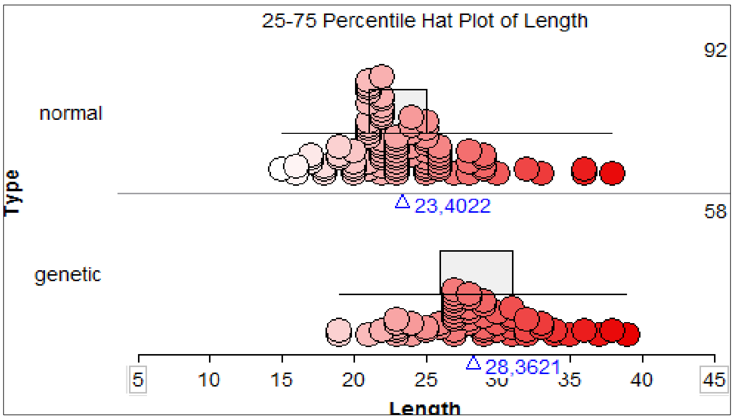


Figura 4 . Tela do *TinkerPlots* 2.0 com uma amostra de 150 peixes.

Professora: Acertei em cheio, viu?

Investigadora: (risos). E aí?

Professora: Agora eu fico satisfeita

- ***A reação da professora denota um envolvimento na tarefa e o reconhecimento da resposta certa.***
- ***A investigadora demonstra empatia explicitando a dimensão afetiva do diálogo.***

O processo estabelecido aqui ocorreu por meio de uma constante negociação entre a investigadora e a docente, a fim de ajustar os questionamentos relacionados a tarefa às impressões que a professora mantinha sobre os dados, com vistas que a entrevistada obtivesse maior confiança sobre as suas respostas.

O uso de determinadas ferramentas também foi uma estratégia adotada pela investigadora e que pareceu contribuir para que a professora consolidasse a análise que fazia das amostras.

Pesquisadora: Tu percebeste o quanto

- ***A pesquisadora coloca uma questão a*** que a média variou? (...)A média variou de quanto a quanto?

Professora: Ela foi 27 aqui (geneticamente modificados) e aqui 23... (normais). A média foi constante e com poucas variações.

Pesquisadora: E isso mostra alguma coisa pra você?

Professora: Mostra que eu to certa! Porque assim, não teve alterações. Se a média tivesse oscilado muito, aí seria preocupante. Mas, ela se manteve constante na medida em que a gente foi pegando mais informações.

Pesquisadora: Então isso ajudou?

Professora: É.

fim de estimular a professora perceber que outros aspetos foram importantes para identificar a representatividade das amostras. Ela fez isso por meio de uma pergunta direta sobre a variação da média.

Utilizar a ferramenta *de identificação da média* do *TinkerPlots* poderia ter sido uma estratégia interessante de feedback visual a ser explorada no desenvolvimento da tarefa se as variações das médias em função do tamanho das amostras fossem sendo registradas pela pesquisadora e confrontadas a cada nível de confiança estabelecido. O registro visual da variação da média em uma tabela ou por meio de outros recursos do *TinkerPlots*, poderia servir como um suporte à professora durante toda a tarefa para que a mesma pudesse identificar os progressos da média e o seu próprio progresso na compreensão e significação da média sobre os dados. Dessa maneira, o feedback direcionado contribuiria para a professora ampliar o seu raciocínio sobre os dados, uma vez que, com essa estratégia, a pouca variação da média poderia ter sido sistematicamente percebida.

Como uma maneira de finalizar a tarefa, a investigadora optou por apresentar a população de peixes à professora e solicitar que confirmasse se as análises que ela desenvolveu ao longo da tarefa foi adequada à tendência encontrada na população, conforme o trecho de diálogo a seguir:

Investigadora: Ótimo. Então você tem agora uma certeza de 100%?

Professora: Tenho.

Investigadora: Então vamos ver a resposta.

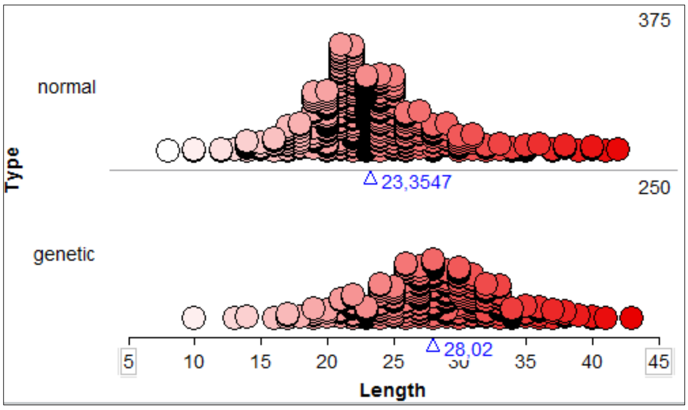


Figura 14. Tela do *TinkerPlots* 2.0 utilizada na intervenção com a professora com a população de 625 peixes.

Investigadora: Então, aqui a gente tem 625 casos. E, a média de comprimento de cada grupo. E aí? Sua hipótese se confirmou? Ela foi validada aí nesses dados?

- ***A professora apresenta os dados da população e incentiva a docente a confrontar suas análises e o resultado final.***

Professora: Eu acho que sim. Agora eu tenho certeza que sim.

Investigadora:Por que você acha que nós pegamos amostras ao invés de estudar todos os casos que tinham aqui? (...)Mas, porque então que a gente não pega tudo numa situação real?

Professora: É que tem que contar tudo, não é!? E a amostra é a parte significante, não é? É o que tem em comum entre os grupos que você vai poder retirar.

Investigadora: É! Então você pode estudar todos os casos por meio de alguns deles, é isso? Em quê situações?

- ***Neste trecho final da realização da tarefa, a professora solicita mais explicitamente um feedback da investigadora sobre as suas conclusões.***

Professora: Desde que seja um grupo significativo à pesquisa. Entendeu? Digamos, a gente vai fazer uma pesquisa sobre combustível. Quem seriam as pessoas interessadas? As pessoas que

- ***A investigadora oferece um feedback curto para as questões colocadas pela professora ao mesmo tempo em que***

têm carro, entendeu? Você vai pesquisar um pedestre que não consome combustível? Não! Então, esse grupo é favorável à pesquisa. Tua amostra deve ser feita com esse grupo.	***lança uma questão sobre situações de utilização das aprendizagens sobre amostragem.*** • ***A professora demonstra compreender os contextos de uso das amostras.***

Ao apresentar toda a população à professora, a pesquisadora possibilita comparar as conclusões retiradas sobre as amostras com a tendência de todos os casos. Isso pôde ajudar a professora perceber que suas análises estavam de fato concordando com a real tendência dos casos, ou seja, levando-a a perceber que as suas amostras representavam bem a variabilidade encontrada na população.

Nas análises desta situação de aprendizagem mediada pelo *TinkerPlots* com a professora, consideramos o seu processo de compreensão do conceito de amostra. Avaliamos essa como uma situação potencial para a formação de professores mesmo que, tinha-se desenvolvido num contexto não convencional. Mesmo com essas condições foi possível explorar estratégias de feedback, uma vez que, foi também um contexto de aprendizagem.

Considerações finais

Nos diálogos apresentados temos uma realidade que pode facilitar a eficácia do feedback do professor e ultrapassar uma limitação da sua operacionalização. O esforço a que convidamos o leitor que se dedicou a analisar essa discussão é o de perceber que, em situações de ensino com o uso de *software*, o professor pode revestir-se de uma abordagem instrucional a fim de que as informações para o desenvolvimento de uma tarefa no computador possam ser suficientemente claras e demonstradas por meio de manipulação. Nessas situações, o feedback também pode surgir como forma de garantir que o desempenho do aprendiz seja melhor quando manipula uma ferramenta. As estratégias de feedback apresentadas nesse capítulo tiveram em sua maioria essa função.

No entanto, para que esse processo possa garantir verdadeiras aprendizagens aos alunos, é ideal que o professor direcione seu feedback para a construção de um conhecimento relacional das ferramentas tecnológicas em causa. De outro modo, as abordagens instrucionais não devem limitar-se a especificar as funções das ferramentas, mas visar a exploração das ferramentas para que, frente a novas situações de uso, os aprendizes possam identificar quais os recursos mais adequados de serem utilizados face a uma tarefa concreta que têm de realizar e ao conhecimento que lhe está associado e porquê da decisão que tomaram.

A defesa de que um conhecimento relacional sobre as ferramentas tecnológicas deve ser alcançado pelos sujeitos tem sido contemplada em diferentes estudos (por exemplo, Rabardel & Waern, 2003). Esses autores reconhecem que a inclusão das pessoas em atividades que utilizam um artefacto tecnológico não é suficiente para garantir uma interação completa entre o sujeito, a máquina e o objeto do conhecimento. Antes disso, é importante considerar nessas atividades os processos pelos quais as pessoas transformam o artefacto tecnológico em instrumento de apropriação de conhecimento. No âmbito dessas tarefas, o feedback do professor pode ser um importante elemento.

Conforme enfatizamos, nossa proposta era de iniciar uma discussão sobre o uso de estratégias e conteúdos de feedback que poderiam ser eficazes nos processos de ensino e aprendizagem mediados pelo uso de recursos tecnológico. Para tanto, em pesquisas futuras deve-se investigar o feedback em situações reais em sala de aula de Estatística, bem como em simulações na formação inicial de professores que vão ensinar essa disciplina, e que podem não ter sido induzidos nessas práticas durante a formação inicial.

Na medida em que há tantos fatores que fogem ao controlo do professor, mas que concorrem para os processos de ensino e aprendizagem, o feedback constitui-se numa das poucas ferramentas que os professores podem utilizar de maneira autônoma e que está sob o seu controlo, pois é ele quem decide que conteúdo ou estratégia de feedback a utilizar numa determinada situação durante a sua prática. Assim, em comparação com aspetos escolares que são impostos pelas realidades complexas, tais como: condições sociais dos alunos; os predeterminados conteúdos curriculares e as diversas questões de gestão e organização do tempo escolar, pode-se afirmar que o feedback apresenta-se como um elemento que pode ser usado pelos professores enquanto protagonistas e facilitadores do ensino e da aprendizagem dos alunos.

Referências

Ainley, J., & Monteiro, C. (2008). Comparing curricular approaches for statistics in primary school in England and Brasil: a focus on graphing. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the Joint ICMI /IASE Study Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education*. (pp. 1-6). México: Monterrey. Recuperado de http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/

Ben-Zvi, D. (2000). Toward understanding the role of technology tools in statistical learning. *Mathematical Thinking and Learning, 21*(1&2), 127-155.

Ben-Zvi, D., Bakker, A., & Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(3), 291-303.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (Eds.) (2004). The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bergh, L. Ros, A. & Beijaard, D. (2013). Teacher feedback during active learning: Current practices in primary schools. *British Journal of educational Psychology*, 83, 341-362.

Black, P., & Wiliam, D. (1998). *Inside the black box: Raising standards through classroom assessment*. London: School of Education, King's College.

Brookhart, S. (2008). *How to give effective feedback to your students*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Campos, C. R,, Jacobini, O. R., Wodewotzki, M. L; Ferreira, D.H L (2011). Educação Estatística no contexto da Educação Crítica. *Bolema. Boletim de Educação Matemática (UNESP-Rio Claro), 24*(39) p. 473-494.

Fonseca, J., Carvalho, C., Conboy, J., Valente, M.O., Gama, A.P., Fiúza, E., & Salena, H. (2015). Changing Teachers' Feedback Practices: A Workshop Challenge. *Australian Journal of Teacher Education*, *40*(8).

GAISE Report (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report, A Pre-k-12 curriculum framework*, Alexandria, VA: August 2005 –American Statistical Association. (Acesso em 30 de outubro de 2016) http://it.stlawu.edu/~rlock/gaise/

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2010). Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Grieshaber, S. (2010). Beyond discovery: a case study of teacher interaction, young children and computer tasks. *Cambridge Journal of Education*, *40*(1), 69–85.

Hattie, J. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to* *achievement.* New York: Routledge.

Henriques, A., & Antunes, P. (2014). A exploração da covariação estatística por alunos do 10.º ano com o TinkerPlots. *Quadrante, 23*(2), 95-122.

Jolliffe, F. (2007). The changing brave new world of statistics assessment. In Phillips B. and Weldon L. (Eds.), *The Proceedings of the ISI/IASE Satellite on Assessing 91 Student Learning in Statistics*. Voorburg: International Statistical Institute, The Netherlands, CD-ROM.

Konold, C., & Miller, C.D. (2005). *TinkerPlots: Dynamic Data Explorations* [software, Version1.0]. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Lopes, C. E. (2012). A Educação Estocástica na Infância. *Revista Eletrônica de Educação (São Carlos)*, 6, 160-174.

Martins, M.N.P (2014). *Análise das concepções de professores sobre amostragem com o uso do software TinkerPlots 2.0.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco, Brasil.

Monteiro, C.E.F., Carvalho, L.M.T.L., & Ainley, J.M. (2013). O TinkerPlots como recurso para o ensino e a aprendizagem de conteúdos de Estatística no Ensino Fundamental. In R. Borba & C. Monteiro (Eds.), *Processos de Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática* (pp. 133-166). Recife, PE: Universitária UFPE.

Monteiro, C.E.F., & Martins, M.N.P. (2016). Possibilidades de recursos para o ensino de probabilidade nos anos iniciais. *Em Teia*, *7*(1) pp, 1-5.

Monteiro, C. E. F. ; Carvalho, C. F. ; Martins, M. N. (2015). O feedback em situações de aprendizagem mediadas por recursos tecnológicos. In: Carvalho, C.; Conboy, J.. (Org.). *O feedback em situações de aprendizagem mediadas por recursos tecnológicos.* 1ed. (pp. 377-414) Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Orsmond, P., Merry, S., &Reiling, K. (2005). Biology students' utilization of tutors' formative feedback: A qualitative interview study. *Assessment and Evaluation in Higher Education, 30*, 369–386.

Pratt, D., Davies, N. & Conner, D. (2011). The Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. In: In C. Batanero, G. Burril, & C. Reading, (Eds), *Teaching statistics in school mathematics – challenges for teaching and teacher education* (pp.97-107). Dordrecht: Springer.

Quintas, S., Tomás Ferreira, R., & Oliveira, H. (2013). O conhecimento didático do professor no ensino da variação estatística. En J. M. Contreras, G.R., Cañadas, M. M. Gea &P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria: Vol.1.* (pp. 439-446). Granada: Universidad de Granada.

Rabardel, P., & Waern, Y. (2003). From artefact to instrument. *Interacting with Computers, 15* (5), 641-645.

Rubin, A, Bruce, B, &Tenney, Y (1991). Learning about sampling: Trouble at the core of statistics. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics*. Vol. 1 (pp. 314-319). Voorburg: International Statistical Institute.

Sadler, D.R. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional Science*, *18*, 119–144.

Weaver, M.R. (2006). Do students value feedback? Student perceptions of tutors' written responses. *Assessment and Evaluation in Higher Education*, *31*, 379–394.

Wiggins, G. (2012). Seven keys to effective feedback. *Feedback for learning*, *70*(1), 10–16.

Edición de textos dinámicos con LaTeX y R

M.Sc. Jose Andrey Zamora-Araya[1] M.Sc. Jorge Arroyo-Hernández[2]

Resumen

Uno de los aspectos más importantes que debe incluir cualquier trabajo escrito de investigación es la presentación de la información numérica y gráfica en forma rigurosa. Para esto, es necesario contar con paquetes informáticos que agilicen su edición y producción. A través de la conjunción de los software LaTeX y R es posible editar documentos utilizando el paquete Knitr para Análisis Estadísticos y representaciones gráficas de forma dinámica. El objetivo de este documento es mostrar la forma en que se pueden generar documentos dinámicos con LaTeX y que procese datos estadísticos en tiempo real con R, utilizando el software Rstudio en GNU-Linux (Ubuntu). Se deja abierto los procedimientos para que puedan repetirse en otros sistemas operativos como Windows o Mac OS X.

Palabras Claves: Knirt, Bibliografía, LaTeX, RStudio.

Abstract

One of the most important aspects that should be included in written research work is the rigorous presentation of numeric and graphical information. For this, you must have software packages that streamline the editing and production process. Using LaTeX and R software in conjunction with the package Knitr you can edit documents for statistical analysis and dynamic representations. The purpose of this document is to show how you can generate dynamic documents using LaTeX and process statistical data in real time with Rstudio and GNU-Linux (Ubuntu). It leaves open procedures that can be replicated in other operating systems such as Windows or Mac OS X.

Keywords: Knirt, Bibliography, LaTeX, RStudio.

1 Introducción

Hoy en día, la sistematización de los datos a través del uso de software especializado agiliza y mejora la presentación de la información. La generación de reportes, tablas, gráficas necesitan ser construidas de forma fiable de manera que la información que se detalle sea lo más explícita posible. Asimismo, se busca que el proceso de obtención de esta sea lo más eficiente, en el menor tiempo pero sin dejar de lado aspectos la calidad y el formato de exhibición de los mismos.

Es por esto, que es necesario contar con herramientas digitales que faciliten el acceso dinámico a los datos, de forma oportuna y que satisfaga las pautas y requerimientos que se establecen. El software Rstudio [4] y el paquete Knitr [5] es una excelente opción para la edición de documentos en látex que incorporen datos estadísticos, gráficos y tablas de información de forma dinámica. El objetivo es acceder a las bases de datos de información directamente mientras que se escribe el documento y que pueda ser cambiada o actualizada con relativa facilidad.

El objetivo de este trabajo es mostrar la forma de como generar documentos dinámicos accediendo directamente a la información de las bases de datos mediante trozos de códigos de lenguaje estadístico R incrustados

[1]jzamo@una.cr, Costa Rica. UNA - UCR
[2]jarroy@una.cr. Costa Rica. UNA

en código látex. Se incluye una pequeña sección de cómo incluir referencias de forma automática usando el paquete Bibtex en formato APA.

Por otra parte, este trabajo ha sido desarrollado de la mano de un conjunto de herramientas digitales de acceso libre, de alta calidad en cuanto al formato y una riqueza para la edición de documentos formales que incluyen texto matemático. Aspecto que debe motivar a utilizar estos recursos a quienes esten escribiendo documentos formales como como tesis, libros, reportes, reportes técnicos y artículos en áreas afines en las cuales la presentación de información cuantitativa es preponderante.

La estructura de este documento consiste en una guía para la generación automática de documentos con Rstudio y el paquete Knitr. Se describirá el software y paquetes necesarios. Una sección de código R incrustado en código látex con ejemplos que ilustran la aplicación de estas herramientas, una sección de generación de bibliografía automática, y finalmente algunas recomendaciones y conclusiones del trabajo realizado.

Es menester aclarar que este documento ha sido desarrollado en GNU-Linux UBUNTU[3], el software para la edición de texto en látex y código R en RStudio [4]. Todos bajo licencia pública general GNU[5].

2 Software y paquetes necesarios

Como parte del proceso para la generación de documentos dinámicos con RStudio es necesario la instalación de los siguientes software: R (usaremos la versión 3.3.1), RStudio (usaremos la version 0.99.902) y LaTeX.

Además, para el caso de los ejemplos que usaremos, es necesario descargar los paquetes 'knitr', 'xtable','faraway'(que contiene la base de datos que servirá como ejemplo) y si se desea un mejor acabado para las gráficas 'ggplot2'. En el caso de LaTeX, se requiere cargar en el preámbulo una serie de paquetes para una presentación adecuada del documento final.

Según [1]:

- R es un software estadístico muy usado actualmente y que también funciona como un lenguage de programación. Permite almacenar, ordenar, clasificar, representar y analizar datos. De hecho dentro de sus utilidades está el cálculo de medidas y pruebas estadísticas; así como la representación gráfica de variables, análisis univariados y multivariados, entre otros.
- LaTeXes un entorno para la edición de documentos que involucren texto matemático. Es utilizado para crear presentaciones, artículos, libros, tesis, informes técnicos entre otros.
- Knitr es un paquete de R que incluye herramientas para trabajar dinámicamente datos almacenados, analizarlos para su posterior presentación de manera que puedan ser fácilmente reproducibles.
- RStudio es un entorno integrado de desarrollo que permite manipular todas estas herramientas a la vez.

3 Creación de documentos dinámicos con RStudio

Cuando se realiza un investigación, dependiendo de su naturaleza, es necesario la recolección de datos para su posterior análisis. Unido a ello se requiere presentar los resultados del estudio tanto de forma textual (informes, artículos, entre otros.) que suelen incluir para su mejor comprensión gráficos y cuadros.

RStudio permite trabajar de manera conjunta todos estos elementos de forma tal que si es necesario realizar algún cambio en los datos (por ejemplo un error de digitación o la incorporación de nueva información), el

[3]Puede obtenerse en: http://www.ubuntu.com/
[4]Puede obtenerse en: https://www.rstudio.com/home/
[5]Ver: http://www.gnu.org/licenses/gpl-3.0.en.html

documento escrito queda actualiado de manera automática.

Este documento permite ejemplificar la manera en que puede editarse un documento, donde se requiere hacer referencia a información proveniente de una base de datos. Para esto se deben seguir algunos pasos básicos como el diseño del documento, la creación de tablas y la creación de figuras.

3.1 Edición del documento

Para la creación del documento con código LaTeX desde RStudio, se crea un archivo con extensión .Rnw que automáticamente mostrará un ambiente tipo LaTeX. Debe incorporarse en el preámbulo los paquetes de LaTeX que se requieran para la edición del documento y de acuerdo al sistema operativo que utilice. Hay que asegurarse de instalar el paquete Knirt con RStudio.[6].

Además, es importante generar la estructura desde el inicio del documento. Por ejemplo, por secciones, capítulos y bibliografía. En este sentido, aunque se esta trabajando desde RStudio, se usan los mismos comandos que se usarían con un editor de LaTeX convencional como Kile, MiKTeX, TeXMaker, entre otros.

Para generar los textos dinámicos con trozos de código R es necesario el uso de RStudio. Para esto, se abre el archivo con el software y se compila con la opción en el menú principal o se teclea a la vez Ctrl+Shift+K. Se recomienda compilar el archivo sin trozos de código R al inicio para constatar que la parte de LaTeX sea correcta.

Luego, debe asegurarse en lo posible de tener acceso a Internet por si necesita algún paquete o actualización.

3.2 Chunks

Los chunks son trozos de código que se utilizan en RStudio tano en documentos de Markdown como de Sweave, que son incorporados en el cuerpo del documento de LaTeX para realizar operaciones, cargar paquetes, cargar bases de datos, crear tablas, crear gráficas o en fin las acciones que usualmente un usuario de R haría cuando trabaja en el análisis de sus datos.

Para el caso de un documento con extensión .Rnw el aspecto del chunk sería el siguiente

```
<<>>=



@
```

Como se mencionó anteriormente, dentro del chunk se pueden realizar cálculos, representaciones gráficas o tabulares y además es posible elegir entre una serie de opciones, como por ejemplo si se desea mostrar o no el contenido del chunk en el documento; si se desea solo mostrar el resultado de los análisis, pero no los comandos para generarlos o bien si no se desea mostrar nada del chunk en el documento.

A manera de ejemplo usaremos como caso de estudio la base de datos "pima"del paquete faraway de R.

La base contiene datos sobre un estudio realizado por The National Institute of Diabetes and Digestive and Kidney Diseases (Instituto Nacional de diabetes y enfermedades digestivas y del Riñon) a 768 mujeres adultas indígenas; pertenecientes al pueblo Pima que habitan cerca de Phoenix. Arizona. citation("faraway")

[6] Para instalar el paquete Knirt diríjase al menú principal de RStudio, en la pestaña Herramienta y luego instalar paquetes

3.3 Creación de Tablas

Antes de crear tablas o gráficos es necesario cargar la base de datos en el documento. Para ello insertamos el siguiente chunk:

```
<< carga.paquete, echo = FALSE >>=

library(faraway)

library(xtable)

@
```

El nombre del chunk es carga.paquete, aunque no es necesario poner un nombre. La opción echo= FALSE le indica al programa que no muestre los comandos en el texto, pero si se cargan los paquetes faraway para usar la base 'pima' y xtable que es un paquete para la construcción de tablas.

Ahora, a manera de ejemplo, supongamos que deseamos construir una tabla que relacione el índice de masa corporal (variable bmi de la base pima) con el hecho de si la paciente presenta signos de diabetes (variable test de la base pima 0: si es negatico 1: si es positivo).

En este caso es necesario recodificar la variable bmi de tal manera que pueda interpretarse el índice de masa corporal como paciente con bajo peso, peso normal, sobre peso y obesidad. Además la variable test debe trabajarse como una categoría. Para realizar esas tareas podemos insertar el siguiente chunk

```
<< tabla1, echo = FALSE, results =' hide' >>=
imc< −pima$bmi
imc[ pima$bmi <= 18.5 ] < − "Bajo peso"
imc[ pima$bmi <= 24.99 & pima$bmi >18.5 ] < − "Normal"
imc[ pima$bmi <= 29.99 & pima$bmi >= 25 ] <- "Sobrepeso"
imc[ pima$bmi >=30 ] < − .Obesidad"
pima$test< −factor(pima$test)
levels(pima$test)< −c("negativo","positivo")

@
```

De esta manera, una vez redefinidas las variables, podemos construir la tabla mediante las siguientes instrucciones

```
<< results =' asis', echo = FALSE >>=
t<-table(imc,pima$test)
print(xtable(t, caption='Relación imc vrs resultados de glucosa'),label = ”,caption.placement = getOption("xtable.caption.placement", "top"))

@
```

Note que es importante poner en las opciones del chunk la instrucción results='asis', pues esto es lo que permite que la tabla se vea así:

Tabla 1: Relacion imc vrs resultados de glucosa

	negativo	positivo
Bajo peso	13	2
Normal	95	7
Obesidad	253	219
Sobrepeso	139	40

3.4 Creación de graficas

En el caso de las gráficas las instrucciones para su construcción son similares al de las tablas, solo que la inserción del chunk puede hacerse dentro del entorno 'figure' de LaTeX. Supongamos que deseamos construir un histograma de la variable 'diastolic' (presión sanguínea diatólica), esto puede hacerse mediante las siguientes instrucciones:

```
\begin{figure}
<< echo = FALSE >>=
hist(pima$diastolic,xlab = "Diastolic",main="Figura 1: Presion sanguinea diastolica de las mujeres del pueblo PIMA",,col = "blue")
@
\caption{Pima 1}
\end{figure}
```

Da como resultado la figura 1. También pueden construirse otro tipos de gráficos con instrucciónes muy similares. Ver ejemplos de las gráficas 2 y 3.

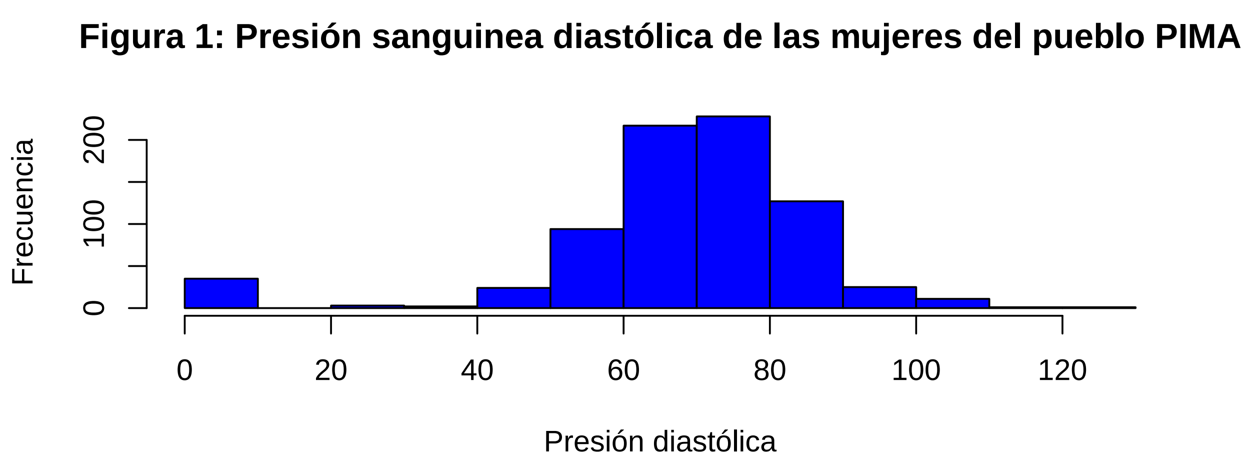


Figura 1: Pima 1

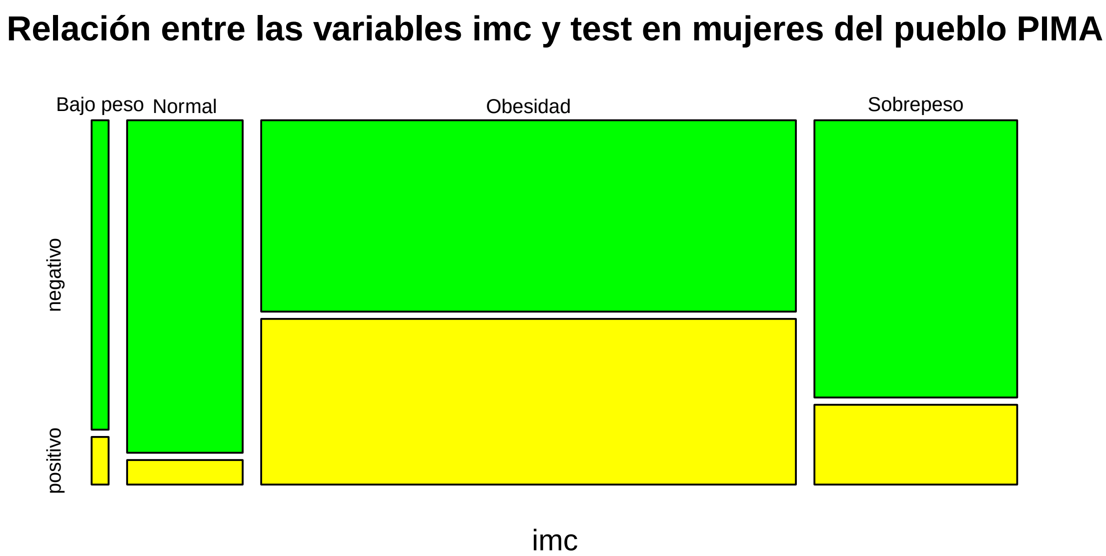


Figura 2: Pima 2

4 Generación de bibliografía automática

Para la generación automática de la bibliografía, se debe recolectar y sistematizar la información acerca de las referencias en archivos con extensión .bib[7]. Para realizar este proceso, es necesario incluir dos secciones de código LaTeX en el documento. La primera es referida a los paquetes necesarios que se deben incluir en el preámbulo del documento:

```
\usepackage{natbib}
\usepackage{apalike}
```

Posteriomente, hay que inlcuir en la sección de referencias el siguiente comando:

```
\bibliographystyle{apalike}
\bibliography{archivo}
```

En el cual, el archivo se refiere al archivo.bib (la extensión no es necesario agregarla). Después de completar el archivo .bib con la información correspondiente, se exhibirá la sección de referencias únicamente el archivo que sea citado a través del comando \cite{ID}, del cual ID es el identificador de la documento dado en el archivo .bib. Para mayor información sobre el paquete apacite puede consultar a [3] y [6].

[7] Para mayor información sobre los archivos .bib y software especializado puede visitar el sitio web: http://home.gna.org/kbibtex/ y consultar [2]

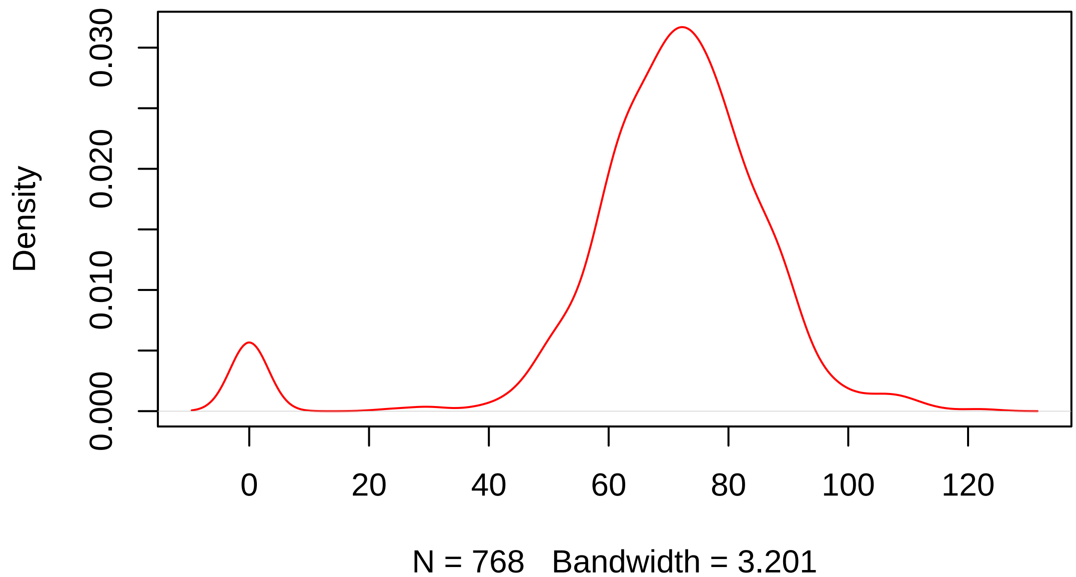


Figura 3: Pima 3

5 Conclusiones y recomendaciones

El proceso explicado en este documento es una recapítulación de una de las muchas facilidades que brinda el software libre. La generación de documentos dinámicos que es un proceso que simplifica diferentes formas de presentar la información y la bibliografía en formato correcto, usando prácticas de escritura actuales el software. La facilidad que brinda este proceso permite al usuario ejecutar otras tareas y así optimizar su tiempo.

Cabe destacar que esto es únicamente una guía de inicio para la elaboaración de documentos. Quedará al lector adecuar cada uno de los requerimientos según le sean solicitados. Para esto, es imprescindible seguir en la búsqueda de opciones que se lo permitan hacer.

Es importante que el lector este familiarizados con la edición de textos en LaTeX pues se parte que se tiene conocimiento de los mismos y que lo nuevo presentado en este documento sea la conjunción con RStudio y el paquete Knirt.

Finalmente, se recomienda siempre hacer una revisión exhaustiva de los resultados en el documento con el fin de asegurarse que vayan de acorde lo que se requiere.

Referencias

[1] Christopher Gandrud. *Reproducible Research with R and RStudio*. Chapman & Hall/CRC The R series. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC Press, 2014. ISBN: 978-1-4665-7284-3. URL: `http://www.crcpress.com/product/isbn/9781466572843`.

[2] George Grätzer. "Bibtex". En: *More Math Into Latex*. Springer, 2016, págs. 421-446.

[3] Erik Meijer. *The apacite package*. 2013.

[4] RStudio Team. "RStudio: integrated development for R". En: *RStudio, Inc., Boston, MA URL http://www. rstudio. com* (2015).

[5] Yihui Xie. *Dynamic Documents with R and knitr*. Vol. 29. CRC Press, 2015.

[6] Ista Zahn. "Learning to Sweave in APA style". En: *The PracTEX Journal* (2008).

edepa 5