XI CIEMAC

Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora

Memorias

4, 5 y 6 de diciembre, 2019

Escuela de Matemática

Cartago, Costa Rica

TEC Tecnológico de Costa Rica

CONICIT

micitt MINISTERIO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA Y TELECOMUNICACIONES

www.tec.ac.cr/ciemac

Celebrado del 4 al 6 de diciembre del 2019 en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, organizado por la Escuela de Matemática. Cartago, Costa Rica

Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (XI : 2019 diciembre 4-6: Costa Rica) - Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica, 2019.

175 páginas

ISBN 978-9930-541-76-0

1. Matemática 2. Educación

M.Sc. Rebeca Solís Ortega

Editora

No cabe duda sobre la complejidad que encierra enseñar matemática. Una y otra vez en la historia de la educación surgen factores que nos obligan como docentes a reflexionar sobre porqué resulta tan difícil para muchos de nuestros estudiantes empoderarse con algunos de los principios más básicos de la matemática y, hacer de ellos sus aliados para ser mejores estudiantes, mejores profesionales y en general estar mejor preparados para enfrentar con éxito muchos desafíos que encontrarán a lo largo de sus vidas.

Vivimos un tiempo de mucho cambio. La tecnología y los avances científicos de hoy empujan con fuerza a nuestros ciudadanos hacia escenarios de trabajo y de vida inimaginables hace apenas 30 años. Conceptos como Internet de las cosas, Big Data, Realidad Aumentada, entre muchos otros más, no hacen mas que alertarnos sobre cambios radicales en la forma en que vivirán nuestras próximas generaciones o inclusive nosotros mismos y sobre el compromiso por ayudar con las transformaciones necesarias.

La educación es un instrumento poderoso para generar cambios positivos en nuestros jóvenes, cambios que les permitan enfrentar con mayor éxito su vida. La enseñanza de la matemática ha sido siempre un pilar fundamental en la formación de los jóvenes y nosotros como educadores tenemos el compromiso de asumir con entusiasmo los retos de formación y capacitación que nos ayuden a transformar positivamente nuestras prácticas.

En las últimas décadas ha emergido en algunas latitudes la necesidad de generar cambios en educación hacia un metodología que busca crear condiciones para que surjan mayores vocaciones por carreras hacia áreas de ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM por sus siglas en ingles) y el concepto ha evolucionado hacia lo que hoy se llama educación STEM, una metodología que busca promover procesos formativos que favorezcan una enseñanza que permita integrar estas disciplinas de manera que el estudiante nos las vea como áreas aisladas sino como parte de un engranaje científico orientado hacia la resolución de problemas. También, y en cierta complementariedad con la educación STEM se ha empezado a hablar sobre los desafíos de la educación en el contexto de la cuarta revolución industrial. Revolución que lleva por estandarte palabras como cambio constante, pensamiento crítico, habilidad de las personas de resolver problemas y capacidad de reinventarse.

Sabemos bien que los retos son muchos y en este XI CIEMAC hemos querido brindar a nuestros participantes la oportunidad de conocer sobre algunas de las tendencias que ocuparán muchas de las discusiones en educación en los próximos años con la esperanza de generar en los participantes conocimientos y conciencia sobre la importancia de que poco a poco cada uno de nosotros mismos nos reinventemos como docentes. Hemos elegido una temática que de seguro es actual y no podemos menos que agradecer a nuestros conferencistas invitados y los investigadores que generosamente han decidido aportar sus talleres y ponencias para este evento.

Dr. Mario Marín Sánchez, Coordinador

Comité organizador

- Dr. Mario Marín Sánchez, Instituto Tecnológico de Costa Rica (coordinador).
- M.Sc. Rebeca Solís Ortega, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- M.Sc. Christian Paéz Paéz, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- M.Eng. Angie Solís Palma, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Lic. Ivonne Sánchez Fernández, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- M.Sc. Jorge Luis Chinchilla Valverde, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Lic. Andrés Márquez González, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Comité científico

- M.Sc. Rebeca Solís Ortega, Instituto Tecnológico de Costa Rica (coordinadora).
- Dr. Zuleyka Suárez Valdez Ayala, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Dr. Luis Gerardo Meza Cascante, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Dr. Erick Chacón Vargas, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- M.Sc. Félix Núñez Vanegas, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Mag. Randall Blanco Benamburg, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Lic. María Gabriela Roldán Villalobos, Instituto Tecnológico de Costa Rica
- Dr. Rafael Crespo García, Universitat de Valencia, España.
- Dr. Juan Miguel Ribera Puchades, Universidad de La Rioja, España.

Índice

Conferencias

C01: Reto STEM: problemas de empleabilidad, cuestiones de género, futuro de las titulaciones, transversalidad, formación del profesorado de secundaria y bachillerato

Dr. Rafael Crespo García.

Investigador de la Universidad de Valencia.

C02: Videos y realidad aumentada para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en el contexto de la educación STEM

Dr. Juan Miguel Ribera Puchades.

Investigador de la Universidad de la Rioja.

C03: Entendiendo las habilidades cognitivas detrás del razonamiento matemático

Dr. Mario Marín Sánchez.

Investigador y profesor del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

C04: Industria 4.0, desafíos de una educación matemática para la Ingeniería

Dr. Eric Fabián Forcael Durán.

Investigador en Gestión de la Construcción y en Educación en Ingeniería. Universidad Bio Bio, Chile.

C05: Investigación subgraduada como herramienta para entender conceptos de Álgebra Abstracta

Dr. Omar Colon.

Profesor de la Universidad de Puerto Rico, Mayaguez.

C06: Aprendizaje basado en proyectos

Dr. Luis F. Cáceres

Profesor de la Universidad de Puerto Rico, Mayaguez.

C07: Educación STEM en el contexto nacional

Personero del MICITT.

Ponencias

P01: La matemática como dominio masculino: un estudio en la educación media costarricense

Dr. Luis Gerardo Meza Cascante, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Dra. Evelyn Aguero Calvo, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Dra. Zuleyka Suárez Valdés-Ayala, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

M.D. Laura Sancho Martínez, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Dr. Rodolfo Jiménez Céspedes, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Resumen: En la ponencia se presentan los resultados de una investigación cuantitativa de la “percepción de la matemática como dominio masculino”. El denominado “dominio masculino en matemática” hace referencia a la creencia, no compartida por los autores del estudio, de que los hombres tienen mejores condiciones para aprender matemática que las mujeres y en general, para desenvolverse en ambientes relacionados con esa disciplina.

La investigación se realizó en Costa Rica en el año 2018, con estudiantes de educación secundaria pública, académica y diurna, conformándose una muestra de 3581, aplicando la subescala “La matemática como dominio masculino” de la “Escala de Actitudes hacia la Matemática” de Fennema-Sherman (Fennema-Sherman, 1976), por tener una amplia validación en múltiples investigaciones por más de 40 años.

La validación psicométrica de la subescala arrojó valores adecuados (KMO de 0.883, índice de Bartlet $p < 0{,}05$, evidencia de unidimensionalidad con un primer factor que explica más del 40 % de la varianza e índices de discriminación de los ítems superiores a 0.3). La confiabilidad se estudió con la técnica “Alfa de Cronbach” y se obtuvo un valor de 0.827, que se interpreta como “confiabilidad muy adecuada”.

Los hallazgos señalan diferencias entre hombres y mujeres, mostrando los primeros niveles superiores en la variable, con tamaño del efecto moderado. Se detectaron diferencias también entre el estudiantado de sétimo y octavo nivel con los de noveno, décimo y undécimo, con valores superiores para los dos primeros niveles. También se encontraron diferencias entre los colegios ubicados en zonas urbanas con los de las zonas rurales, manifestando niveles mayores de percepción de la matemática como dominio masculino los segundos, con tamaño del efecto moderado.

La investigación devela que aproximadamente un 84 % del estudiantado tiene niveles de percepción de la matemática como dominio masculino entre bajos y muy bajos, lo que se aprecia como un hallazgo positivo.

P02: Metodologías exitosas en cursos iniciales universitarios

Dra. Zuleyka Suárez Valdés-Ayala, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Lic. Carlos Alberto Monge Madriz, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Resumen: En el curso de Matemática General y otros cursos iniciales del Instituto Tecnológico de Costa Rica, se implementan desde el 2015, dos metodologías para la enseñanza: el aprendizaje entre pares (Peer Instruction) y la enseñanza justo a tiempo (Just in Time Teaching Learning). Los resultados obtenidos a nivel académico y el que los estudiantes se sientan a gusto en estas clases, según encuestas aplicadas, hacen pensar que estas metodologías mejoran considerablemente la actitud de los estudiantes, repercutiendo en una mejor asistencia a clases y en un mejor desempeño a nivel de la asignatura.

P03: El contexto en la enseñanza de la matemática

MSc. Giovanni Sanabria Brenes, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Resumen: El contexto es de suma importancia en la resolución de problemas en la Didáctica de las Matemáticas. El presente trabajo pretende dar una concepción adecuada del contexto, justificar la existencia de diferentes tipos de contextos a través de la historia y hacer evidente la necesidad de utilizar los diferentes tipos. Se parte del concepto de contexto que brindan los programas de educación vigentes del Ministerio de Educación Pública. Luego se expone la importancia del contexto en la resolución de problemas. Posteriormente, se pretende dar respuesta a la pregunta ¿qué es la matemática?, con el objetivo de ver la influencia que tiene la respuesta en la concepción del contexto. Finalmente se plantea una definición de contexto acorde con la clasificación de tipos de contexto que actualmente plantean algunos autores.

P04: Resolución justa de problemas: El pastel, la pizza y el campeonato de surf

MSc. Giovanni Sanabria Brenes, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Resumen: La resolución justa de diversas situaciones ha intrigado a la humanidad y a la vez ha permitido a la matemática y la computación mostrar su potencial para brindar algoritmos que permitan resolverlos. En el presente trabajo se analizan tres problemas: repartición de un pastel, formar los equipos para cada eliminatoria en un torneo de surf, elegir quién va por la pizza con una moneda. Para el problema del pastel, resuelto en el 2017 con un algoritmo muy complejo, se expone una solución si el pastel se reparte a tres personas. Para cada uno de los otros dos problemas, se expone un intento fallido y una solución dada por el autor. Estos problemas pueden ser interesantes para motivar a nuestros estudiantes a que los modelen matemáticamente y traten de resolverlos.

P05: Exploración matemática: Elabora tu empresa

Lic. Marcela Vanessa Ortiz Molina, Angloamerican School, Costa Rica

Resumen: En la actualidad es necesario enforcarse en una enseñanza de la matemática para la vida, donde el estudiantado conozca la aplicación de su conocimiento, y no se quede en solo recitar fórmulas o ejercicios; es por ello que Elabora tu empresa, busca en los estudiantes de sextos grado un pensamiento crítico donde conozcan que el tema de porcentajes va más allá de una simple aplicación de regla de tres y puedan utilizarlo para temas como emprender una propia empresa, aplicando conceptos de descuento, impuesto, comisión e interés simple.

P06: La Metodología STEAM: Una iniciativa para reducir la brecha de género en Costa Rica

MEd. Hidelia Meza González, Universidad Nacional – Ministerio de Educación Pública.

MEd. Eilyn Duarte Abarca, Universidad Nacional – Ministerio de Educación Pública.

Resumen: Costa Rica ha logrado asegurar el acceso a la educación para los niños y jóvenes, logrando un camino igualitario a la educación constitucionalmente gratuita y obligatoria. El reto pendiente es la mejora en las condiciones inclusivas en las que las mujeres estudian. Si bien se dice que actualmente se vive en un mundo en el que el tiempo trascurre rápidamente atendiendo múltiples compromisos, llega un momento en que todo se paraliza con una de las decisiones más importantes de la vida de todos los seres humanos, cuando alguien hace la siguiente pregunta, ¿qué te gustaría estudiar? Actualmente, el impulso de iniciativas STEAM se ha convertido en un pilar fundamental en la forma que se realiza la planificación educativa de muchas potencias mundiales; grandes corporaciones cuentan con programas altamente reconocidos que apoyan e impulsan programas de STEAM, esto como respuesta a la gran demanda de profesionales que se tiene hoy en día, donde buscan despertar el interés en los jóvenes en edades tempranas para el desarrollo vocacional de los mismos en carreras STEAM, además de impulsar el interés del estudio en habilidades STEAM en niñas colaborando así con la diversidad en estas ramas de estudio que por muchos años ha sido predominada por los hombres, la diversidad es clave para el crecimiento innovador. El currículo educativo de nuestro país debe cambiar sin duda alguna, se debe invertir hoy en las capacitaciones de las generaciones futuras en el ámbito de STEAM, para apostar en una sociedad de innovación, fundamental para el desarrollo económico del país.

P07: Crossover: Web API + Geogebra + Unity3D para la enseñanza de las Ciencias Naturales

José Pablo Jiménez Cucanán, Universidad Nacional de Costa Rica.
Jesús Rodríguez Rodríguez, Universidad de Costa Rica.
Oscar Sáenz Rosales, Universidad de Costa Rica.

Resumen: Nuestro trabajo consta en mostrar los avances del desarrollo de una plataforma virtual adaptada al modelo de aula invertida (flipped classromm) para la enseñanza de las ciencias naturales. "El aula invertida, es un modelo pedagógico centrado en el estudiante, que consiste en deliberadamente trasladar una parte o la mayoría de la instrucción directa fuera del aula, para aprovechar el tiempo en clase maximizando las interacciones del profesor con sus estudiantes". (blog.reformamatematica.net) Nos hemos informado en la documentación sobre applets de geogebra insertadas en web. Esta herramienta nos permite ampliar el potencial de interacción del usuario a través de inputs que ofrece la tecnología HTML5. Además, con el uso común del lenguaje Javascript en ambas plataformas, podemos crear ítems y registrar respuestas del usuario en una base de datos, esto para manejar analítica y puntualizar aspectos que el usuario necesita reforzar en la resolución de problemas matemáticos. Queremos poner a disposición de la comunidad el uso libre de la web, registro de cuentas de diversos roles y la opción de integrar otras API con propósitos de investigación. Desarrollado con el framework Django.

P08: Uso de la tecnología en actividades de modelización matemática

M. Sc. Karen Porras Lizano, Universidad Nacional de Costa Rica
M. Sc. Jorge Arroyo Hernández, Universidad Nacional de Costa Rica

Resumen: Este trabajo analiza el proceso de aprendizaje de estudiantes, usando como recurso de enseñanza el software GeoGebra, al resolver actividades de modelización matemática. Se utiliza un estudio de casos con dos grupos, para comparar la abstracción de conocimientos usando software. Se utilizaron diversas técnicas de recolección de información: la observación participante, el análisis de las producciones escritas de los estudiantes y la entrevista clínica. Se encuentra resultados como: el uso del software GeoGebra permitió un mejor razonamiento y análisis del objeto matemático; mejoró el proceso de abstracción de los conocimientos, también propició la motivación y actitud del estudiante hacia la matemática. Además, se encontró evidencias de la relación entre la matemática con otras disciplinas y en la misma línea de la metodología STEM, se encontró que los estudiantes generaron las soluciones del problema sin intervención del docente, propiciando el papel activo del estudiante en su aprendizaje matemático.

P09: Diferenciación primeros pasos hacia la individualización en los salones de clase

Msc. M. Alejandra Chacón Fonseca, Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica.

Resumen: Se busca proporcionar al profesor de matemática de secundaria y estudiantes en general, técnicas y estrategias de diferenciación que permitan mediar pedagógicamente las clases de matemática. Se diseñan, implementan y validan, estrategias de diferenciación, con el objetivo de desarrollar recursos de calidad que sirvan de base para una mediación pedagógica innovadora en matemática, que responda al contexto del estudiante y a los requerimientos metodológicos de la estrategia resolución de problemas. Se desarrolla una investigación -acción -participante, bajo el enfoque cualitativo que diagnosticó y sistematizó experiencias de planificación e implementación de estrategias de diferenciación didáctica en el salón de clase como herramienta para la individualización, con el objeto de conocer las ventajas y desventajas de mediar pedagógicamente estrategias de diferenciación en clase de matemática con estudiantes de sétimo nivel, durante el curso lectivo del 2019. El estudio se realiza durante el curso lectivo 2019, en el Colegio Saint Clare, específicamente en el departamento de matemática, se impacta a la población de estudio, profesores participantes, equipo base, generando un aporte a la población en general; de manera que se convierte en una herramienta de acción, en el área de la individualización del estudiante en el salón de clase, también se comparte y socializa el conocimiento en el marco de la responsabilidad social.

P10: Apoyar la enseñanza de conceptos matemáticos basados en la matemática usada por civilizaciones antiguas: Los Egipcios

Lic. Luis Eduardo Amaya Briceño, Universidad de Costa Rica, Sede Guanacaste.

Lic. Lisseth Angulo Jhonsson, Colegio de Moravia, Costa Rica.

Resumen: La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas. La perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante y en ocasiones falible. El conocimiento es la herramienta que inmortaliza la civilización, no es de extrañar que los egipcios se desarrollaran durante más de tres mil años y aún hoy quedamos maravillados de sus logros a pesar que muchos de sus escritos se han perdido con el tiempo debido a lo delicado que resulta el papiro. Como era usual, el conocimiento escrito era acaparado por la élite socio política de diversos pueblos. Esto no es un impedimento para las matemáticas básicas, ellas en sus primeros años de desarrollo, respondía a necesidades concretas y perfectamente verificables por métodos concretos: medir terrenos, cobrar impuestos, realizar censos entre otros. Este aspecto propicia la aplicabilidad en diversos momentos de la historia. En nuestro trabajamos describimos los métodos de resolución de los egipcios de temas aritméticos como la multiplicación, las fracciones y aproximaciones del número áureo, con ello buscamos evidenciar que dichos procedimientos se dieron por una necesidad de resolver problemas del entorno, siendo útil para explicar dichos temas en primaria o secundaria.

P11: Análisis comparativo entre una medición clásica de la memoria de trabajo y una medición alternativa orientada hacia la matemática y sus relaciones con el razonamiento matemático y el desempeño escolar

Lic. Catalina Robles Núñez, Liceo de Pacayas, Costa Rica.

Dr. Mario Marín Sánchez, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Lic. María Gómez Jiménez, Canguro Matemático, Costa Rica.

Resumen: Este artículo resume algunos de los resultados de la tesis de licenciatura presentada en el contexto de la carrera de enseñanza de la matemática en entornos tecnológicos realizada por Catalina Robles Núñez y María Gómez Jiménez. El objetivo central fue obtener información sobre la relación entre el concepto general de memoria de trabajo (Baddeley y Hitch, 1974) y la memoria de trabajo en el contexto de tareas de procesamiento relacionadas con la matemática (Marín, 2017). Se trata de un trabajo exploratorio, que permitió obtener información relevante sobre este concepto asociándolo con el pensamiento matemático. Se utilizaron dos mediciones específicas de la memoria de trabajo, una en el sentido tradicional bajo un contexto verbal (Daneman y Carpenter, 1980) y la otra bajo un contexto matemático validada en el contexto costarricense (Marín, 2017) y entre éstas y el razonamiento matemático y rendimiento escolar de los estudiantes en las materias de Matemática y Español. Los hallazgos dan indicios de la existencia de una habilidad de memoria de trabajo específica al razonamiento matemático que correlaciona con el desempeño en el razonamiento matemático mejor que la memoria de trabajo general.

P12: Experiencias del proyecto RENACE en el tema de estadística

Dra. Evelyn Aguero Calvo, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Resumen: El proyecto RENACE fue un proyecto de extensión de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica orientado a la capacitación y formación de docentes de matemática de la educación media ejecutado durante el año 2019 con la participación de 37 profesores de matemática de colegios públicos de las Regiones Educativas de Cartago y de Turrialba. RENACE se ejecutó como un esfuerzo concreto para dar respuesta, al menos parcialmente, a los hallazgos del proyecto de investigación REMEYC, que develaron la falta de coherencia entre la dinámica desarrollada en el aula y lo que plantean los programas aprobados en el año 2012. En esta ponencia se sistematiza parte de la experiencia del proyecto RENACE, particularmente en el tema de estadística y se muestran algunos de los materiales utilizados en el desarrollo de los talleres y algunos de los productos generados por las personas participantes en el proyecto.

Talleres: Secundaria

T01: Desarrollo de documentos con un formato computable

Mtr. Enrique Vílchez Quesada, Universidad Nacional de Costa Rica.
Dr. Juan Félix Ávila Herrera, Universidad Nacional de Costa Rica.

Resumen: Los documentos con un formato computable (CDFs por sus siglas en inglés) constituyen un mecanismo de publicación de archivos personales interactivos. Los CDFs se construyen empleando el software comercial Wolfram Mathematica, con la ventaja de poder ser consultados para su lectura e interacción, al instalar un plug in gratuito denominado Wolfram CDF Player Free. Un CDF a diferencia de un PDF (documento con un formato portable) ofrece no solo la alternativa de lectura, sino también, la posibilidad de que el usuario interactúe de manera no pregenerada con objetos de manipulación dinámica. El presente trabajo explica los fundamentos básicos que deben ser considerados en el diseño de documentos con un formato computable, se presenta un recorrido robusto sobre su forma de elaboración, atributos, exportación y ejemplos de uso.

T02: Utilizando Python para mejorar la visualización y modelización de problemas en matemáticas

Carlos Alberto Monge Madriz, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
José Pablo Salazar Granados, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Resumen: Este es un taller dirigido a aquellas personas que tengan interés de aprender nociones básicas de un lenguaje de programación aunado con varios complementos del área de las matemáticas, como elaboración de gráficos en 2D, 3D, gráficos estadísticos, utilizar herramientas del cálculo simbólico y algebraico que le permitan simplificar, expandir expresiones algebraicas, resolver ecuaciones o realizar cálculos estadísticos. Lo anterior, con la finalidad de poder modelar distintas situaciones matemáticas y tener una visualización gráfica de los resultados, aprovechando el potencial de la programación. Se utilizará el lenguaje Python pues se caracteriza por poseer una sintaxis sencilla y fácil de aprender, es gratuito y con las librerías adecuadas se pueden obtener resultados similares a programas como Mathematica, Maple o Matlab. Al finalizar el taller los participantes podrán: programar y diseñar pequeños programas, tener una noción de cómo las matemáticas y la programación se complementan, manejar herramientas que permiten la visualización gráfica de resultados, experimentar con nuevas estrategias que podrían ser de apoyo a la enseñanza de las matemáticas por medio de las TIC.

T03: GeoGebra en la Creación de Evaluaciones Interactivas

B.Sc. Didier Alberto Castro Méndez, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Jordy Jesús Alfaro Brenes, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Resumen: En este taller se utilizará el software gratuito GeoGebra para generar algunas evaluaciones interactivas que involucren diversos tópicos de secundaria, de tal manera le permita al docente generar cambios en los procesos de enseñanza aprendizaje innovadores empleando el uso de tecnología educativa. Con ello el discente se convierta en protagonista de su aprendizaje pues puede elegir dónde hacerlas, cómo hacerlas (con el ordenador, con el móvil, con una tableta) y garantizar un aprendizaje activo.

T04: Uso del holograma como estrategia didáctica apoyada en STEM para la enseñanza de secciones cónicas en Matemáticas

Priscilla Angulo Chaves, Estudiante UCR, Costa Rica.

Adriana Jiménez Ruíz, Estudiante UCR, Costa Rica.

Javier Picado Bermúdez, Estudiante UCR, Costa Rica.

Katherine Solórzano Jandres, Estudiante UCR, Costa Rica.

Yanitza Varela López, Estudiante UCR, Costa Rica.

Resumen: Se presenta un taller que aborda la holografía como estrategia didáctica apoyada en la metodología STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics), esto para la enseñanza de las secciones cónicas en la educación secundaria matemática. El objetivo principal es motivar la posible incorporación y el uso, por parte de los docentes de Matemáticas, de esta estrategia en sus clases de Geometría de décimo año de la Educación Diversificada costarricense. La actividad consta de dos etapas; en la primera se explica la teoría, mientras que en la segunda fase se construye y elabora un video para analizarlo holográficamente, esto mediante la confección de una pirámide holográfica. Los participantes podrán reflexionar sobre la estrategia presentada para estudiar otras habilidades matemáticas en clase, lo cual quedará a criterio de la iniciativa y creatividad de los partícipes.

T06: Uso del software CODAP para el análisis de datos

Greivin Ramírez Arce, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Resumen: CODAP (Common Online Data Analysis Platform) es un paquete libre diseñado para la enseñanza del análisis exploratorio de datos. Tiene la característica de ser dinámico: permite visualizar los conceptos abstractos explorándolos a través de investigaciones con el manejo de datos reales, se pueden arrastrar y soltar objetos y la variación de un dato en algún elemento del paquete hace que varíe en cualquier otro donde éste intervenga. En el taller se desarrollan dos actividades relacionadas con el análisis de datos mediante el uso de bases que presenta el programa (relación entre variables: edad, peso y tamaño en niños de escuela; así como análisis de la distribución del día, mes y año de nacimiento de los estadounidenses desde el 2000 hasta el 2014). La otra actividad se relaciona con el análisis del índice de masa corporal de los miembros del taller y su representación gráfica por género y clasificación según categorías de peso que pueden llevar a problemas de salud. Se espera que los participantes puedan utilizar en sus análisis medidas de tendencia central y variabilidad, construir tablas y gráficos de distinto tipo, establezcan relaciones entre variables y puedan apreciar las virtudes del paquete para llevar a cabo su uso en la enseñanza primaria o secundaria.

T07: Modelo de calificación bancaria utilizando análisis multivariante con nociones de scoring

Welman Rosa Alvarado, Universidad de El Salvador (UES).

Resumen: La Estadística juega un papel importante en lo que respecta en las Finanzas, aportando técnicas y herramientas para un mejor desarrollo de soluciones a problemas que se dan en este ámbito, con la ayuda de los avances tecnológicos, en la construcción de software científicos creados específicamente para la minería de datos, hacen que el análisis estadístico sea lo más preciso en la toma de decisiones. En Finanzas, se encuentra el concepto de riesgo de crédito, el cual, se entiende como la probabilidad de que un deudor incumpla, en cualquier grado, con el repago de sus obligaciones, de modo que se traduzca en pérdidas para la Entidad Financiera. En la actualidad, se han desarrollado herramientas informáticas, donde utilizan modelos analíticos, matemáticos y estadísticos para la aceptación o rechazo de una solicitud de crédito. La virtud de estas herramientas es que buscan predecir el desempeño que tendría un deudor si se le otorgaré un crédito mediante la asignación de un puntaje estimado a partir de ciertas características del cliente. Todo ello aplicando metodologías de cuantificación como modelos scoring y credimetrics. En donde no sólo existen modelos de evaluación, sino que también, a la medición del portafolio de préstamo una vez el deudor cae en incumplimiento. A continuación, se presenta el contenido de un taller mediante dos módulos, el primero, donde se aplica las nuevas nociones al riesgo de crédito como la aplicabilidad del análisis multivariante. El segundo, se presenta una metodología para la calificación de entidades financieras llamado CAMELS. Todo esto utilizando las herramientas SPSS y Statools como módulo de Decisión Tools.

T08: Matemática en el arte: Técnica de Hilorama

Bach. Andrés Ramírez Contreras, Los Angeles School.

Lic. Katherine Abarca Mena, Colegio Marista.

Bach. Dayana Calderón Prado, Los Angeles School.

Resumen: En este taller se realizará una propuesta para motivar a estudiantes de todos los niveles, relacionando la matemática con el arte mediante la técnica de Hilorama. La técnica consiste en utilizar hilos tensados para crear curvas de Bézier y con éstas realizar distintas creaciones artísticas. Se trata de una aplicación de herramientas matemáticas sencillas que permiten la creación de cuadros artísticos llamativos, realizados de una forma lúdica con la creatividad del estudiante. Se compartirá además la experiencia de la aplicación de este taller tanto en el Colegio Marista, Alajuela como en Los Angeles School, San José.

T09: GYM MATE: Memoria de Trabajo en acción

Marcial Enrique Cordero Quirós, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Resumen: La idea central del taller GYM MATE consiste en que los participantes puedan conocer sobre el concepto de memoria de trabajo en educación matemática, así como sus implicaciones en el éxito académico. También realizar diferentes actividades para poder entrenar y mejorar nuestra capacidad de memoria de trabajo. Desde el punto de vista didáctico las actividades planteadas pueden llevarse a la práctica de aula considerando la diversidad de aprendizajes. Se fundamenta en la posibilidad de establecer un contrato didáctico, por medio del juego como herramienta principal para llevar los conceptos matemáticos a nuestra comprensión y asimilación, en un entorno de aprendizaje cooperativo y amigable con el contexto. La educación matemática en la actualidad requiere un docente comprometido con explorar los diferentes aspectos que puedan favorecer la forma en que los conceptos matemáticos pueden llegar a ser significativos a largo plazo, para ser evocados en los momentos que se requieran.

T10: Creación de unidades didácticas tecnológicas utilizando la plataforma Webbly

Julissa Paola Bosque Chaves, Estudiante ITCR, Costa Rica.
Steven Gabriel Sánchez Ramírez, Estudiante ITCR, Costa Rica.

Resumen: El taller que se impartirá tiene como objetivo proveer a los participantes de las herramientas, tanto prácticas como teóricas de la creación de páginas web con la herramienta Weebly, con el fin de que estas sean unidades didácticas de aprendizaje de libre acceso para los y las estudiantes. Se enseñarán los conceptos más relevantes a tomar en cuenta para la creación de unidades didácticas y cómo hacer su montaje en la web.

T11: Implementación de clases Classwiz para la enseñanza de la Matemática

Bach. Rolando Navarro Rodríguez, Casio Académico, Costa Rica.
Dr. Salomón Chaves Cascante, Casio Académico, Costa Rica.

Resumen: En 1957, CASIO lanzó al mercado su primera calculadora, tenía el tamaño de un escritorio y permitía resolver las cuatro operaciones básicas. Actualmente, las calculadoras CASIO no solo son más pequeñas, sino que también cuentan con un sinfín de funciones que las convierten en valiosas herramientas didácticas. Este es el caso de la aplicación EDU+ de CASIO, misma que complementa la serie de calculadoras científicas CASIO Classwiz, lanzadas al mercado en 2016. En Costa Rica, el Ministerio de Educación Pública avala y recomienda el uso de la calculadora CASIO FX-570 LAX en secundaria. Sin embargo, en muchos casos la calculadora es subutilizada debido a que los docentes desconocen de sus características y funciones. El objetivo del presente taller es mostrar las innovaciones más significativas de este modelo y a la vez orientar a los participantes en el proceso de creación de clases Classwiz a través de la aplicación CASIO EDU+. Se espera incentivar a los docentes a explorar estas herramientas y a implementar la tecnología para generar clases más dinámicas y participativas.

T13: Matemáticas en el mundo antiguo

Dr. Rafael Crespo García, Investigador de la Universidad de Valencia.

Resumen: Este taller estará compuesto de dos sesiones de dos horas dirigida a profesores de educación media costarricense. La temática del taller se centra explorar diversas civilizacionez y momentos como lo son: Mesopotamia, Egipto, Grecia, Mesoamérica (mayas), con el fin de analizar cómo se hacían matemáticas en esas épocas.

T14: Actividades para el Desarrollo del Razonamiento Lógico Matemático en Estudiantes de III Ciclo

Bach. Tatiana Mora Bonilla, Canguro Costarricense, Costa Rica.

Dr. Mario Marín Sánchez, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Bach. Dayana Calderón Prado Los Ángeles School, Costa Rica.

Resumen: El razonamiento lógico y matemático, en el contexto de este taller, ha de apreciarse como una habilidad que nos ayuda a pensar de manera crítica, buscamos incidir en habilidades como gestión de información alrededor de un problema y toma de decisiones, además organizar, planificar, explorar y en general aprender nuevos conocimientos y aprender a usar sistemáticamente aquellos conocimientos que ya tenemos.

Este taller está dirigido a docentes dedicados a la enseñanza de III ciclo. Se realizarán actividades que ayudarán a los docentes a familiarizarse con el razonamiento matemático y de esta forma realizar un acercamiento al pensamiento lógico. Lo que se pretende es promover el desarrollo del pensamiento matemático entre los docentes y que ésto sea un apoyo para entrenar a sus estudiantes.

Principalmente se abordarán aspectos centrales en el razonamiento lógico y matemático como lo son la memoria de trabajo, el pensamiento aditivo y multiplicativo, el razonamiento deductivo y el razonamiento Inductivo.

T15: Introducción a la Programación con Arduino Enseñando programación de forma intuitiva e interactiva

Ing. Esteban Arias-Méndez, Escuela de Computación, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Resumen: Hoy en día, aprender programación es una de las habilidades más importantes para el futuro. Acá brindamos ideas sobre la experiencia de enseñar programación de una forma diferente al método de clase tradicional usando herramientas más interactivas para atraer mejor la atención e interacción sobre los conceptos de. Esto lo alcanzamos con el uso de la plataforma Arduino. Durante este proceso, hemos aplicado diferentes herramientas para probar la mejor manera en que los estudiantes obtengan las habilidades de programación de forma natural. Este taller busca brindar una muestra de una clase introductoria a la programación en la cual al cabo de 2 horas un estudiante habrá comprendido qué es programar una computadora.

T16: Modelación GeoGebra: Regla de Laplace

Gustavo Núñez Morales, Estudiante ITCR, Costa Rica.

Verónica Segura Siles, Estudiante ITCR, Costa Rica.

Resumen: En el taller que se impartirá se mostrará como un software tan sencillo pero a la vez tan complejo, como lo es GeoGebra, es abierto a toda la población, ya que si no se sabe programar, el software presenta todas las herramientas básicas desde su pantalla principal. Permite mediante diferentes herramientas crear actividades que puedan ser de gran utilidad para la enseñanza de la Matemática. En este taller nos centraremos en una de sus grandes ramas como lo es la estadística y la probabilidad. Se buscará crear un juego por medio de Geogebra, sobre el tema de probabilidades, específicamente con la regla de Laplace, ya que aprender jugando mejora el aprendizaje de los estudiantes. Esto ayudará a aumentar el interés de los alumnos sobre lo que sucede no solamente algebraica o teóricamente si no también aplicado en distintos eventos.

T17: Empleo del software GeoGebra, para el estudio de la concavidad y las intersecciones con el eje de las abscisas de una función cuadrática

Lic. Samuel Valverde Sánchez, Universidad de Costa Rica.

Lizbeth Alvarado Vargas, Estudiante ITCR, Costa Rica.

Ariana Inés Rodríguez Flores, Estudiante ITCR, Costa Rica.

Resumen: Este trabajo tiene como finalidad aportar herramientas de uso tecnológico a docentes de secundaria mediante el uso del software GeoGebra, utilizando su lenguaje de programación y las herramientas que este incluye. La base de este proyecto está fundamentada en los programas de estudio de matemáticas del Ministerio de Educación Pública (MEP), específicamente en décimo año. Se trabajará en el análisis gráfico y algebraico de la función cuadrática por medio de dos programas relacionados con dichos temas.

También se pretende motivar tanto a docentes como estudiantes a implementar la tecnología educativa en el aula, utilizando paquetes ya existentes y adaptando cada una de las actividades a las habilidades estipuladas por el MEP, esto para que las lecciones se impartan de una manera más creativa, entretenida y enriquecedora para los estudiantes.

T18: Paridad: un concepto importante en ejercicios de Olimpiadas Matemáticas

Dr. Luis F. Cáceres, Universidad de Puerto Rico, Mayaguez.

Resumen: Una de las áreas de las matemáticas favorita en las competencias matemáticas es la teoría de números. Dentro de esta, la paridad es un concepto simple de los números enteros, pero a la vez poderoso para resolver problemas. Usando propiedades de paridad en operaciones como suma y multiplicación se puede resolver una gran cantidad de problemas, que sin esta técnica podrían llegar a ser muy complicados. Presentamos problemas que envuelven directamente el concepto de paridad de los números enteros y otros que directamente no se relacionan con este concepto, pero que pueden ser resueltos con la idea fundamental de que algunos enteros son pares y otros no lo son.

T19: Aprendizaje tecnocooperativo en el aula de matemáticas

Dr. Juan Miguel Ribera Puchades, Universidad de la Rioja, España.

T20: Implementando el modelo STEM: experimentos de física en la clase de matemáticas

Prof. Melania Campos Rodríguez, Escuela de Física, ITCR.

T21: Una metodología práctica para la formulación y diseño de investigaciones en educación en Ingeniería, Cienca y Tecnología

Dr. Eric Forcael Durán, Universidad del Bío-Bío, Chile

Talleres: Primaria

TP01: Plataformas educativas para enseñar matemática en educación primaria, mediante el uso de tecnología

MSc. Adriana Solís Arguedas, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Resumen: En el taller de desarrollarán actividades que involucran el uso de la tecnología para la enseñanza de la matemática con las plataformas educativas:

Quizziz: Es una plataforma que permite hacer evaluaciones en el aula, a manera de juego. Tiene elementos como avatares y memes que hacen que sea muy divertida y lúdica. Además, tiene la opción de que los estudiantes realicen las evaluaciones como tarea.

Educaplay: Plataforma que permite crear y compartir actividades multimedia educativas como crucigramas, sopas de letras, dictados, mapas interactivos, videoquices y otros.

TP02: Creando evaluaciones en plickers

Mag. Marcela Marrero Calvo, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Lic. Lourdes Quesada Villalobos, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Resumen: El objetivo principal del taller es ayudar a los docentes a construir un banco de ítems en Plickers sobre el tema que cada uno de ellos elija (por lo que en el taller puede haber profesores de primaria y de secundaria). Cada docente deberá logiarse en la plataforma de Plickers tanto en la computadora como en el celular, ya que mediante este dispositivo obtendrá las respuestas de sus estudiantes. Se espera también que cada docente debe traer preguntas de selección y/o de falso verdadero, ya que en el taller aprenderá a transcribir esas preguntas con ayuda de Power Point formato con el cual podrá incluirlas en la biblioteca de Plickers, además deben tener una lista de estudiantes que serán incorporados en una "clase" en la aplicación y se les explicará cómo generar las tarjetas con código QR que utilizarán los alumnos en la evaluación

TP03: Enseñanza de geometría en primaria, por medio de resolución de problemas

M.Sc. Natalia Rodríguez Granados, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Licda. María Gabriela Roldán Villalobos, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Resumen: El objetivo de este taller es contribuir a la actualización de los docentes de segundo ciclo de Educación General Básica, en temas específicos de geometría como por ejemplo: rectas paralelas y perpendiculares, construcciones geométricas y áreas.

Se hará énfasis a la resolución de problemas. La idea principal del mismo es que los docentes se conviertan en facilitadores del proceso enseñanza aprendizaje en esta área de la Matemática.

TP05: Matemática de colores

Marcial Enrique Cordero Quirós, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Resumen: La idea central del taller MATEMÁTICA DE COLORES consiste en que los participantes puedan realizar proyectos con material concreto para la enseñanza de la matemática en la educación primaria, los cuales van dirigidos a temas específicos del programa de estudio del Ministerio de Educación Pública, como lo son la recta numérica, fracciones, números, probabilidades y geometría. Se trabajará con materiales de bajo costo y de reciclaje.

La práctica de una didáctica tangible favorece el aprendizaje significativo y duradero, por tal motivo las actividades están orientadas al salón de clase con un sentido de pertenencia que favorezca la motivación hacia la matemática.

Dentro de los proyectos que realizaremos están Discos de probabilidad, máquina de tablas, PI en mis manos, Rectaplas, El día D y Matebook entre otros.

Póster

PT01: Propuesta educativa para el abordaje del tema de la Trigonometría de noveno año

José Pablo Calderón Gairaud, Estudiante ITCR, Costa Rica.
Miguel Ángel Gamboa Leiva, Estudiante ITCR, Costa Rica.
Dorin Amelia Morales Monge, Estudiante ITCR, Costa Rica.

PT02: Propuesta educativa para el abordaje del tema de visualización espacial

José Adrián Carballo Martínez, Estudiante ITCR, Costa Rica.
Ricardo Cordero Flores, Estudiante ITCR, Costa Rica.
Leder Zumbado Chacón, Estudiante ITCR, Costa Rica.

PT03: Propuesta educativa para el abordaje del tema de transformaciones en el plano

Mariana Montenegro Granados, Estudiante ITCR, Costa Rica.
Christhian Chaves Montoya, Estudiante ITCR, Costa Rica.
Saúl Peraza Juárez, Estudiante ITCR, Costa Rica.

Artículos seleccionados

EL CONTEXTO EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Giovanni Sanabria Brenes
Instituto Tecnológico de Costa Rica –
Universidad de Costa Rica, Costa Rica
gsanabria@itcr.ac.cr

Resumen: El contexto es de suma importancia en la resolución de problemas en la Didáctica de las Matemáticas. El presente trabajo pretende dar una concepción adecuada del contexto, justificar la existencia de diferentes tipos de contextos a través de la historia y hacer evidente la necesidad de utilizar los diferentes tipos. Se parte del concepto de contexto que brindan los programas de educación vigentes del Ministerio de Educación Pública. Luego se expone la importancia del contexto en la resolución de problemas. Posteriormente, se pretende dar respuesta a la pregunta ¿qué es la matemática?, con el objetivo de ver la influencia que tiene la respuesta en la concepción del contexto. Finalmente se plantea una definición de contexto acorde con la clasificación de tipos de contexto que actualmente plantean algunos autores.
Palabras clave: didáctica, epistemología, contexto, resolución de problemas.

Abstract: The context is of the utmost importance in solving problems in Mathematics Teaching. This paper aims to give an adequate conception of the context, justify the existence of different types of contexts throughout history and make clear the need to use different types. It is based on the concept of context provided by the current education programs of the Ministry of Public Education. Then the importance of context in problem solving is exposed. Subsequently, it is expected to answer the question, what is mathematics?, in order to see the influence that the response has on the conception of the context. Finally, a definition of context is proposed in accordance with the classification of types of context currently posed by some authors.
Keywords: teaching, epistemology, context, problem solving.

1. Introducción

Cualquier docente de matemáticas a escuchado de la necesidad de plantearle al estudiante problemas contextualizados para que este comprenda mejor la matemática. Pero, ¿qué entendemos realmente por contexto?

Algunos docentes, en formación y en ejercicio, suelen confundir los “problemas contextualizados” con “problemas de la vida real”. Lo ven como una manera de responderle al estudiante la pregunta “Profe, ¿esto para que me sirve?”. Pregunta que muchas veces causa cierta frustración en los docentes para determinados temas. Esto refleja un concepto de matemática utilitarista.

Sin embargo, el Ministerio de Educación Pública (2012) señala:

> *Los contextos donde un problema puede emerger pueden ser diversos. Una situación de salud en el país, asuntos económicos, ambientales, culturales. Contextos escolares, familiares, comunitarios, profesionales, científicos. Pero también un problema puede diseñarse a partir de pasajes de la historia de las Matemáticas, de una representación artística donde es posible encontrar matemáticas, incluso un juego, un rompecabezas, un video, etc.*

Así existen diversos contextos para introducir un problema. Si bien el Ministerio de Educación Pública (2012) hace especial énfasis en el uso de los contextos reales, también señala:

> *Favorecer problemas en contextos reales no implica dejar de lado problemas abstractos. Es una orientación general y flexible que debe adaptarse con lucidez. Hay áreas matemáticas y tópicos donde no tiene sentido el trabajo en contextos reales. Pero además, no se debe olvidar nunca que las Matemáticas refieren a dimensiones generales y abstractas de lo real. En esencia, es una práctica que cultiva lo abstracto. De lo que se trata en la acción educativa es de construir los objetos abstractos con base en una estrategia que permita asociaciones con los entornos en ciertos momentos para favorecer los aprendizajes. Los problemas abstractos son cruciales para poner en juego distintas habilidades y procesos. En los abstractos se entrena, por ejemplo, la justificación y demostración, el uso de lenguaje matemático, el razonamiento riguroso abstracto.*

En este trabajo nos enfocaremos en la importancia de los contextos abstractos.

2. El contexto y la resolución de problemas

Actualmente, las teorías en didáctica de las matemáticas se centran en una enseñanza basada en la resolución de problemas, donde el uso del contexto para emerger los problemas es sumamente importante.

Un referente inicial sobre resolución de problemas es el matemático George Polya. Polya (1965) señala la necesidad de educar nuestra intuición para desarrollar una heurística o arte para resolver los problemas.

Sin embargo, Schoenfeld (1985) lleva a cabo una serie de investigaciones en las que concluye que las heurísticas planteadas por Polya no son suficientes para tener éxito en la resolución de problemas. Señala que además de las heurísticas planteadas por Polya es necesario agregar otras tres dimensiones:

1. Recursos (conocimientos previos)
2. Control (habilidad para monitorear y evaluar el proceso de resolución del problema)
3. El Sistema de Creencias (creencias sobre lo que es conocer y hacer matemática)

Según Schoenfeld, el sistema de creencias establece el contexto dentro del cual funcionan las restantes tres dimensiones (heurísticas, recursos y control). Así, las concepciones que tiene el estudiante sobre lo que es hacer matemática delimitarán el contexto de un problema. Esto sin duda pone al descubierto la necesidad de que los docentes fortalezcan el sistema de creencias del estudiante, desde edades tempranas, frente a las creencias de sus padres, de los medios de comunicación, y de otros que influyen en las concepciones sobre matemática que se forma el estudiante. Incluso el sistema de creencias de los docentes que tenga el estudiante influirán en su concepción del contexto.

Por otro lado, la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau es un referente teórico relevante en el diseño de los Programas de Estudio. Brousseau (1986) señala que el profesor debe diseñar situaciones problema cuya solución sea el conocimiento que se quiere enseñar. Así, se plantean uno o varios problemas al estudiante (situación a-didáctica), el cual por medio de sus conocimientos previos, logre resolverlos y así lograr la devolución de la situación, en la que le devuelve la responsabilidad de su aprendizaje al profesor. La situación a-didáctica es un problema o conjunto de problemas contextualizados, temporalizados y personalizados. Cuando se logra la devolución de la situación, el profesor toma este conocimiento para institucionalizarlo, es decir, el profesor relaciona este conocimiento contextualizado adquirido con el saber formal pretendido. Además, Brousseau (1986) señala:

> *El trabajo del profesor es en cierta medida inverso al del investigador, debe producir una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos. Estos van a convertirse en conocimientos del alumno, es decir una respuesta natural, en unas condiciones relativamente particulares, condiciones indispensables para que tengan un sentido para él. Cada conocimiento debe surgir de la adaptación a una situación específica, pues no se crea el concepto de probabilidad en el mismo tipo de contexto y de relaciones con el medio que en los que se inventa o utiliza la aritmética o el álgebra.*

Note que el contexto es esencial en la Teoría de Situaciones. Sobre el concepto del contexto, Brousseau (1986) indica "si el contexto no da una cierta importancia a la cuestión de saber si la información es verdadera, cómo y por qué, o si esta validez es

susceptible de establecerse sin dificultad, entonces el mensaje será clasificado como simple información". Aquí encontramos una característica importante del contexto, que concuerda con lo indicado por Schoenfeld, el contexto es una condición personal que le otorga un individuo a un problema que dependerá de su sistema de creencias y su objetivo es que este provoque en el individuo la necesidad de saber resolver el problema.
Por otro lado, sobre los tipos de contextos, Zamora (2013) señala:

> *Cuando hablamos de aprendizaje en contexto, nos referimos al amplio abanico de posibilidades con las cuales el profesor puede motivar al alumno y despertar su curiosidad. Esos contextos, pueden ir desde la explicación histórica de un tema (contexto histórico), a la relación con el resto de asignaturas (contexto interdisciplinar), haciendo a los alumnos ponerse en el papel de cualquier profesión (contexto laboral) o incluso, proponiéndoles ser auténticos científicos con la demostración de teoremas o experimentos (contexto científico).*

Nuevamente vemos la necesidad de que el contexto motive al alumno a resolver el problema. Dentro de estas maneras de motivarlo se encuentra el contexto científico. Otra clasificación de contextos es dada por Santos (sf):

> ***Contexto puramente matemático**. El referente en donde se desarrolla la situación involucra solamente aspectos matemáticos. Por ejemplo, ¿cuáles son los números primos que se pueden representar como la suma de los cuadrados de dos enteros?*
>
> ***Contexto del mundo real.** En este caso, el entendimiento del problema se relaciona con la identificación de variables de la situación real que pueden ser examinadas a partir de recursos matemáticos. Por ejemplo, "el comportamiento del tránsito vehicular en la ciudad de México".*
>
> ***Contexto hipotético.** La actividad se diseña a partir de una colección de supuestos acerca del comportamiento de las variables o parámetros que explican el desarrollo de una situación hipotética. Es decir, dicho comportamiento de los parámetros no se basa en datos o información real o de laboratorio. Sin embargo, en el tratamiento matemático se puede resaltar*

el uso de diversas representaciones y estrategias que muestran no sólo el potencial de diversos contenidos matemáticos, sino también contrastar diversas cualidades asociadas a las diversas formas de solución. Por ejemplo, la información puede ser representada y analizada en una tabla, una lista ordenada, a partir de una gráfica o en forma algebraica.

Note que el contexto puramente matemático concuerda con el contexto científico de la clasificación anterior y con el contexto abstracto planteado por el Ministerio de Educación.

Aquí surgen varias dudas: ¿Por qué varios tipos de contexto? ¿Realmente es justificable la existencia de estos tipos de contexto? ¿Qué dice la historia de la matemática al respecto?

3. Un poco de historia: ¿Qué es la matemática?

La matemática surge como un modelo para establecer y controlar las relaciones sociales, la sociedad debía regirse por una serie de normas para controlar las relaciones. Ya desde la prehistoria cada sociedad se ha enfrentado a una serie de situaciones problemáticas, y han ido encontrando diferentes métodos para resolverlas, de acuerdo con los medios que se tenían. La aparición de nuevos problemas junto con la utilización de nuevas tácticas hizo que el conocimiento matemático fuera evolucionando para colaborar en la búsqueda de soluciones de los distintos problemas. Según Hogben (1941) las primeras necesidades "matemáticas" que se presentaron fueron las de contar y medir: contar objetos, calcular áreas, etc. Y así una serie de destrezas matemáticas se han ido desarrollando a medida que ha sido necesario resolver todas las situaciones problemáticas que fueron apareciendo a lo largo de la historia.

Así, surge en la historia una primera concepción de matemática, la matemática no es una ciencia por sí misma, sino su función es servir a la sociedad, la sociedad le da sentido a la matemática y la matemática le da al individuo las herramientas para que funcione bien en la sociedad. Al respecto Kolmogorov (1980) indica:

A pesar de su abstracción (de la matemática), sus conceptos y resultados tienen origen en el mundo real y encuentran muchas y diversas aplicaciones en otras ciencias, y en todos los aspectos prácticos de la vida diaria.

> *Reconocer esto es el requisito más importante para entender las matemáticas.*

¿Será que esa concepción de matemática se mantiene? ¿Será que se mantiene a nivel didáctico? Vemos en las primeras etapas de la historia, una concepción de matemática muy ligada a su uso y aplicación y por un ende un predominio del contexto real en los problemas que se presentaban.

Sin embargo, conforme la historia de matemática avanza y se interesa por dotarla de rigurosidad surgen problemas en Matemática donde el contexto real deja de ser importante. Esto inicia con la axiomatización de la matemática, la controversia del quinto postulado de Euclides y logra su punto más alto con Georg Cantor.

Georg Cantor nació el 3 de marzo de 1 845 en San Petersburgo, Rusia. Obtuvo su doctorado en Matemáticas en la Universidad de Berlín, donde Kronecker fue uno de sus maestros. Según Ruiz (2003), Kronecker, en una carta dirigida a matemático Hermann Von Helmholtz, indicó "*La riqueza de su experiencia práctica con problemas sanos e interesantes, dará un nuevo sentido y un nuevo ímpetu a las Matemáticas. La especulación matemática unilateral e introspectiva conduce a campos estériles*".

Cantor se empieza a interesar por el concepto del infinito y en su teoría de Conjuntos señala que la cardinalidad de los conjuntos infinitos puede variar y ciertos conjuntos son más infinitos que otros. Solaeche (1995) señala que para Kronecker los trabajos de Cantor eran estériles, y se dedicó a destruir públicamente el trabajo del infinito de Cantor, lo calificaba como "renegado" y "corruptor de la juventud estudiosa". Debido al poder que Kronecker tenía, detuvo intencionalmente en 1877 toda publicación de quien antes fuera su más excelente alumno.

Además, Solaeche (1995) indica que Cantor defendía un concepto de Matemática libre, él señalaba "La Matemática es completamente libre en su desarrollo, y sus conceptos sólo se ven restringidos por la necesidad de ser no contradictorios y están coordinados con los conceptos previamente introducidos mediante definiciones precisas. La esencia de la Matemática es su libertad".

Así, se presenta una controversia entre la matemática libre vs la matemática útil. Analicemos esto controversia histórica en términos educativos en un sentido metafórico.

Por un lado tenemos a Kronecker que lo podemos ver como el defensor de los contextos reales, para él no tenía sentido hacer matemática por arte, eso eran campos estériles, él indica que los problemas sanos e interesante son el motor de las matemáticas. Kronecker tiene una concepción de una matemática al servicio de la sociedad, simboliza a aquel estudiante que nos indica “profe, este tema que estamos viendo para qué me va a servir”. Por otro lado, Cantor es un defensor de los contextos abstractos y científicos en los problemas. Para él la matemática es libre, no está condicionada a ser útil solamente a que esté rigurosamente fundamentada. Para él hacer matemática es un acto científico y artístico. Como se puede apreciar, la concepción de Matemática de Cantor es más ligada a la importancia del razonamiento matemático para obtener resultados que a la aplicación de los resultados.

La historia le dio la razón a Cantor parcialmente. Según Solaeche (1995), David Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticos de París, en 1 900 menciona la célebre frase “Nadie puede expulsarnos del paraíso de los pensamientos de Cantor”. En este evento Hilbert resume la trayectoria y las perspectivas de las matemáticas al entrar el siglo XX, formulando 23 problemas pendientes de la matemática, el primero de ellos, era el problema de Cantor: la hipótesis del continuo.

Con Hilbert se introduce los sistemas formales y su intención era ver toda la matemática como un sistema formal con un número finito de axiomas. Y dado que todo cambio en la concepción de la matemática autoriza una didáctica, esto posteriormente llegó a los centros educativos. Sin embargo, la transposición de la matemática libre al sistema educativo no fue positiva, y la versión para educación del paraíso de Cantor que promulgaba Hilbert se convirtió en un infierno.

En efecto, pese a que Gödel demuestra que la intención de Hilbert está condenada al fracaso al probar que no existe ningún sistema de axiomas adecuado para toda la Matemática, pues sería incompleto (Solaeche, 1995), este episodio de la Historia no incide en los sistemas educativos. Cantor es considerado uno de los propulsores de la matemática moderna, donde Hilbert y otros matemáticos vieron a la lógica y la teoría de conjuntos como la base de la matemática. Es así como en los centros educativos, a nivel de secundaria, se comenzó a enseñar una serie de simbología ligada a la lógica y teoría de conjuntos, una matemática sintáctica carente de significados e interpretaciones, pues la matemática es libre.

Las matemáticas modernas en el sistema educativo fracasaron. Al respecto Kline (1986) indica:

> *Presentar las matemáticas como generadas por si mismas no solo supone una negación de la historia, sino que oculta sus conexiones vitales con otras ramas del conocimiento. Desde el punto de vista pedagógico este intento es más desafortunado, por que renuncia a la oportunidad y gran necesidad de dar motivación y significado a las matemáticas.*

¿Qué paso con el paraíso de Cantor en educación? En realidad este fue mal interpretado o tergiversado por los sistemas formales de Hilbert. La concepción de matemática de Cantor era más semántica, ligada a la manera en que se razona matemáticamente, para él la belleza de la matemática se haya en poder armar un rompecabezas con los resultados u objetos matemáticos que se tienen para deducir un nuevo resultado. Sin embargo, en educación, se convirtió la matemática libre en una matemática sintáctica donde se debía manejar una serie de simbología y memorizar resultados sin comprenderlos. A mi parecer la Concepción de Matemática libre está más ligada a un curriculum por habilidades o competencias, que a un curriculum basado en contenidos. Desgraciadamente, en la época de la reforma de las matemáticas modernas el curriculum era basado en contenidos.

Por otro lado, el paraíso de Cantor, es solo una cara de las matemáticas. Con Gödel, se termina la intensión de desterrar a la intuición de las matemáticas. Kronecher no fue un ser malvado que se dedicó a hacerle la vida imposible a Cantor, su posición es importante actualmente. Por otro lado, Cantor no tenía la verdad absoluta.

Así se adopta un punto intermedio. Este se ve muy bien reflejado en una frase de Morales (1987):

> *Resumiendo se puede decir que la enseñanza de la matemática debe atender a dos aspectos: el informativo y el formativo. El primero proporciona los contenidos para vivir el mundo actual y el segundo tiene como meta que el individuo piense y razone lógicamente.*

Así, se llega a una concepción de Matemática: La Matemática es una ciencia cuyos resultados se obtuvieron ya sea como producto de diseñar un modelo para resolver un determinado problema o como producto razonado y justificado de ligar otros resultados matemáticos.

A nivel educativo, esta concepción de matemática amplia el concepto del problema (puede ser real o abstracto) y da igual importancia a los diferentes contextos.

4. Conclusiones

Producto de un pequeño análisis bibliográfico se evidencia en la historia de la matemática la existencia de dos tipos de dos concepciones de matemática: la matemática útil y la matemática libre. Ambas se mezclan para formar una sola concepción de matemática como una ciencia que permite la resolución de problemas reales y abstractos.

En una enseñanza basada en resolución de problemas, el contexto tiene por objetivo lograr que el estudiante se interese por generar conocimiento para resolver el problema. Bajo la concepción planteada de matemática, existen diversos contextos en los que un problema puede emerger.

Sin embargo, la eficacia del tipo del contexto a utilizar dependerá del sistema de creencias del estudiante, es decir, de la concepción que se tenga de las matemáticas.

Así, se fundamenta la siguiente relación entre conceptos:

$$\text{Contexto} \leftrightarrow \text{Concepción de matemática}$$

Estos conceptos están sumamente ligados. El uso de diferentes contextos alimentará la concepción que tenga el estudiante de las matemáticas, y a la vez la concepción que tenga el estudiante de las matemáticas, producto de diversos factores, definirá si un problema es contextualizado o no.

La historia nos indica que ha existido una controversia en torno al concepto de las matemáticas, que varía entre dos extremos: una matemática útil vs una matemática libre. Y la misma historia nos señala que las posiciones extremas fracasaron.

Por lo tanto, se llega a una concepción de Matemática: La Matemática es una ciencia cuyos resultados se obtuvieron ya sea como producto de diseñar un modelo para resolver un determinado problema o como producto razonado y justificado de ligar otros resultados matemáticos. Es decir:

Matemática= (Modelación Matemática) + (Razonamiento matemático)

Estas dos componentes de la matemática no son aisladas, funcionan dialécticamente.

A nivel educativo, esta concepción de matemática da pie al uso de los diferentes contextos en los problemas. Y a la vez, el uso de diferentes de contexto se vuelve una condición necesaria para alimentar esta concepción en los estudiantes. El pretender usar solo contextos reales en los problemas degradará la concepción de matemática e inevitable tendremos la pregunta del estudiante: “profe, este tema que estamos viendo para que me va a servir”. La matemática no es solo un conjunto de contenidos y reglas a memorizar, es más que eso, es el arte de poder encadenar razonamientos debidamente justificados para obtener un nuevo resultado o para justificar o refutar una conjetura. Desde el punto de vista del razonamiento matemático: matemática no es un contenido a adquirir, es una habilidad a desarrollar, se hace o crea matemática.

Es por ello que es importante desde la primaria que el estudiante vea las matemáticas no solo como una herramienta para resolver problemas sino como el arte de razonar. Problemas como ¿cuántos números hay?; ¿hay número más grande que todos?; un primo es bonito si al dividirlo entre 3 da residuo 1, halle 10 primos bonitos; pueden despertar el interés del estudiante de primaria.

Finalmente, note que ante la pregunta del estudiante “profe, este tema que estamos viendo para que me va a servir”, quizás un respuesta estilo Cantor es “no tiene que servir para nada”, que aunque algo tajante quizás es mejor que las respuestas de tipo “más adelante te puede servir”, lo cual puede no ser cierto y pone el contexto realista por encima de los otros. Sin embargo, una mejor respuesta es “como contenido puede que no te sirva pero sin duda los problemas a resolver mejoraran tu habilidad de razonar”.

5. Referencias bibliográficas

Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de Estudio de Matemáticas. I, II y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica.

Zamora, Pedro (2013). La contextualización de las matemáticas. Almería: Universidad de Almeria.

Luz, Santos (sin fecha). Apropiación y Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Aprendizaje y Resolución de Problemas Matemáticos. Recuperado de http://www.matedu.cinvestav.mx/~santos/atat/

Hogben, L. (1941) La matemática en la vida del hombre. Barcelona. Iberia

Kolmogorov y otros 1980. La Matemática su contenido, métodos y significado. Madrid. Alianza Editorial

Kline, M (1986) El fracaso de la matemática moderna. Madrid. Siglo XX1 de España Editores

Ruiz Zúñiga, Á. (2003). Historia y filosofía de las matemáticas. San José: EUNED.

Solaeche, M. (1995). La controversia entre L. Kronecker y G. Cantor acerca del infinito. Divulgaciones matemáticas, 3(1/2), 115-120.

Morales, Marta (1987). Tesis: El aprendizaje de las matemáticas. Facultad de Educación, Universidad de Costa Rica.

Brousseau, G (1986). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas. Traducción al castellano del artículo "Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques" publicado en la revista Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2):33-115, y realizada por Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas (Trad. J. Zagazagoitia).México: Trillas. (Original en inglés, 1965).

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press.

Resolución justa de problemas: el pastel, la pizza y el campeonato de surf

Giovanni Sanabria Brenes
Instituto Tecnológico de Costa Rica –
Universidad de Costa Rica, Costa Rica
gsanabria@itcr.ac.cr

Resumen: La resolución justa de diversas situaciones ha intrigado a la humanidad y a la vez ha permitido a la matemática y la computación mostrar su potencial para brindar algoritmos que permitan resolverlos. En el presente trabajo se analizan tres problemas: repartición de un pastel, formar los equipos para cada eliminatoria en un torneo de surf, elegir quién va por la pizza con una moneda. Para el problema del pastel, resuelto en el 2017 con un algoritmo muy complejo, se expone una solución si el pastel se reparte a tres personas. Para cada uno de los otros dos problemas, se expone un intento fallido y una solución dada por el autor. Estos problemas pueden ser interesantes para motivar a nuestros estudiantes a que los modelen matemáticamente y traten de resolverlos.
Palabras clave: resolución de problemas, justicia, distribución uniforme, repartición.

Abstract: The fair resolution of various situations has intrigued humanity and at the same time has allowed mathematics and computing to show their potential to provide algorithms that allow them to be solved. In this paper, three problems are analyzed: distribution of a cake, forming the teams for each tie in a surf tournament, choosing who goes for pizza with a coin. For the cake problem, solved in 2017 with a very complex algorithm, a solution is exposed if the cake is distributed to three people. For each of the other two problems, a failed attempt and a solution given by the author are presented. These problems can be interesting to motivate our students to model them mathematically and try to solve them.
Keywords: problem solving, justice, uniform distribution, distribution.

1. Introducción

La resolución justa de una determinada situación ha sido un problema que ha intrigado a la humanidad desde tiempos antiguos. Por ejemplo, el reparto justo entre dos personas se solucionó desde tiempos antiguos bajo el lema “yo corto, tú escoges” (Klarreich, 2017), y consistía en que una de las personas reparte en dos partes el objeto y la otra escoge qué parte elegir. Aquí la justicia se daba en el sentido de que debía ser la persona que no repartía la escogiera con qué parte quedarse, pues de lo contrario, se cae en la injusticia: “El qué parte y reparte se queda con la mejor parte”.

A lo largo de la historia se han desarrollado diferentes algoritmos para resolver diferentes situaciones problemáticas de la manera más justa, como por ejemplo, el reparto de una herencia.

En el caso del reparto justo y equitativo de un objeto, en las últimas décadas, este problema ha sido abordado metafóricamente como “el problema de repartir un pastel entre n personas”. Este problema fue resuelto para n=3, Bosch (1992) indica:

> *Este problema interesó a los matemáticos a principios de este siglo. En 1948, el matemático polaco Hugo Steinhaus escribió en uno de sus apuntes: "Al haber encontrado una solución para el problema del reparto del pastel entre tres personas, les propuse la generalización a mis compañeros B. Knaster y S. Banach." Los tres fueron matemáticos de excelente reputación internacional.*

En el problema de repartición del pastel, el concepto de justicia está subordinado a que cada persona considere que le tocó un pedazo justo.

Además del problema del pastel (problema 1), otros tipos de problemas que buscan una resolución justa son:

- Problema 2: ¿Cómo distribuir, de manera lo más justa posible, los jugadores de un campeonato en equipos, que en la medida de lo posible, tenga la misma cantidad de personas?
- Problema 3: ¿Cómo elegir de manera justa la persona que debe ir a comprar la pizza?

El problema 2, es un problema determinista y no hay justicia absoluta cuando el número de jugadores no es divisible entre el número de equipos a formar. El tercer problema, es aleatorio, y para que la elección sea justa, las personas deben tener igual probabilidad de ser elegidas para ir por la pizza.

Seguidamente se presentan un caso particular para cada uno de estos tipos de problemas y su respectiva solución.

2. ¿Cómo repartir un pastel entre n personas?

Una de las maneras más conocida para repartir el pastel entre 3 personas es dada en Bosch (1992), donde llama a las tres personas Sofía, Pablo y Claudia:

1. Sofía corta el pastel en dos partes que piensa son mitades.
2. Pablo elije y Sofía se queda con la otra mitad.
3. Pablo y Sofía dividen sus pedazos respectivos en tres partes que consideran iguales.
4. Claudia elije una tercera parte de cada uno.
5. Pablo y Sofía se quedan con lo restante.

El problema para n personas fue solucionado en el 2017. Al respecto Klarreich (2017) indica:

> *En abril del año pasado, sin embargo, dos teóricos de la computación superaron todas las expectativas cuando publicaron un artículo en línea en el que describían un algoritmo de reparto justo cuyo tiempo de cómputo solo dependía del número de jugadores, no de sus preferencias individuales. Uno de ellos, Simon Mackenzie, por entonces investigador posdoctoral de 27 años en Carnegie Mellon, presentó el resultado el pasado 10 de octubre en el Simposio sobre Fundamentos de la Teoría de la Computación del Instituto de Ingeniería Eléctrica y Electrónica (IEEE), uno de los congresos anuales más prestigiosos en ciencias de la computación. El algoritmo resulta extraordinariamente complejo: dividir un pastel entre n comensales puede requerir hasta n^n^n^n^n^n pasos (donde el símbolo ^ se usa aquí para expresar «elevado a») y un número equiparable de tajadas. Incluso para unos pocos jugadores, dicha cifra supera la cantidad de átomos existentes en el universo.*

Se infiere que no es una solución práctica pues para pocos jugadores parece que habrá que partir el pastel en boronas. Sin duda el reto ahora es hallar una mejor solución que sea más factible en la práctica.

3. ¿Cómo definir los equipos en un torneo de surf?

En el 2017 la Asociación Costarricense de Surf (ACOS) me planteó la siguiente problemática que tenían: la asociación organiza torneos de Surf e incluso minutos antes del inicio de un torneo se aceptan inscripciones por lo que no se sabe con antelación cuántos participantes tendrá el torneo. En cada eliminatoria se realizan grupos de 4 participantes o eventualmente de 3 participantes (se intenta que sean de 4). Cada grupo sale a surfear y es evaluado por tres jueces. El juez evalúa diferentes olas de cada participante. Para cada participante, se toman las puntaciones de las dos mejores olas evaluadas por cada juez, estás seis puntuaciones se promedian. De cada grupo clasifican, a la siguiente eliminatoria, los dos participantes con mejores promedios. Al final en la última eliminatoria debe haber 2 ganadores. El problema es cómo desarrollar un programa computacional que determine cuántos grupos se debe hacer y en general realice el proceso de clasificación en cada ronda.

El problema se intentó resolver bajo las condiciones dadas. Es decir, no se consideró la opción de hacer la competición de otra forma para generar más equidad en el torneo a la hora de elegir los ganadores. Esto, pues la forma de realizarlo responde quizás a una tradición o a un reglamento o a la naturaleza del deporte.

El gran problema era: Si se inscriben n participantes, ¿cuántos grupos se deben hacer (de 3 o 4 participantes) en cada eliminatoria para que al final "todo cierre bien" y se obtengan los 2 ganadores?

Note que no hay equidad perfecta si el número de competidores en cada eliminatoria no es múltiplo de cuatro. Esto pues al haber grupos de tres, es más fácil clasificar en un grupo de tres que en uno de cuatro, pues de acuerdo a las reglas, de cada grupo clasifican dos competidores. Además, como regla se deben evitar los grupos de tres, esto quizás por un asunto de no alargar el torneo.

3.1. Primer acercamiento al problema

Bajo condiciones ideales, si vamos del final al inicio del torneo, para obtener dos ganadores, estos se obtuvieron de un grupo de 4, es decir la última eliminatoria está formada por un grupo de 4. Entonces en la penúltima hay dos grupos de 4 y en la antepenúltima hay 2^2 grupos de 4:

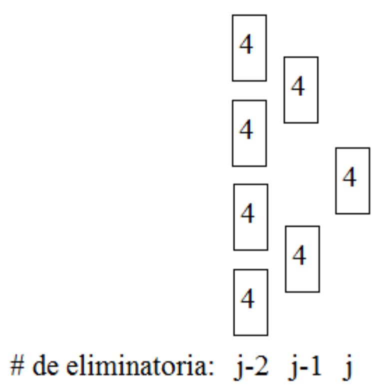


Figura 1. Intento de solución al problema de Surf

Bajo condiciones ideales, si en total hay j eliminatorias: en la eliminatoria j hay 4 competidores, en la eliminatoria j-1 hay $2^1 \cdot 4$ competidores, en la eliminatoria j-2 hay $2^2 \cdot 4$ competidores,…, en la primera eliminatoria hay $2^{j-1} \cdot 4$ competidores. Por lo tanto, si el número n de personas inscritas es de la forma $2^{j-1} \cdot 4$ el problema tiene una solución satisfactoria: en la primera eliminatoria se realizan 2^{j-1} grupos de 4, en la segunda se realizan 2^{j-2} grupos de 4,… y en la última eliminatoria un grupo de 4.

¿Qué sucede si n no es de esa forma? Por el principio del Buen Orden podemos hallar el natural j que cumpla que

$$2^{j-2} \cdot 4 < n < 2^{j-1} \cdot 4$$

Así, en la primera eliminatoria, no se pueden realizar 2^{j-2} grupos de 4 pues quedaría por fuera competidores, y si se realizan 2^{j-1} grupos de 4, faltarían competidores. En definitiva, se necesitan realizar grupos de tres. Dado que $2^{j-2} \cdot 4 = 2^{j-1} \cdot 2$, entonces $2^{j-1} \cdot 4$ es el doble de $2^{j-2} \cdot 4$, por lo tanto, n varía en un intervalo muy amplio.

Si insistimos en nuestro modelo de solución de hacer en la primera eliminatoria 2^{j-1} grupos, en la segunda se realizan 2^{j-2} grupos,… y la última eliminatoria un grupo, donde algunos grupos pueden ser 3, esto va a fracasar. En efecto, como

$$2^{j-1} \cdot 2 < n < 2^{j-1} \cdot 4$$

Suponga que se realizan 2^{j-1} grupos, algunos de 4 y otros de 3 competidores. Si nos vamos al caso extremo en que todos los grupos son de 3, entonces se tendrían $2^{j-1}\cdot 3$ competidores. El problema es que entre $2^{j-1} \cdot 2$ y $2^{j-1} \cdot 4$, justo en el centro se encuentra $2^{j-1} \cdot 3$ y si el n cumple que $2^{j-1} \cdot 2 < n < 2^{j-1} \cdot 3$, entonces haciendo solo grupos de 3 no es posible realizar 2^{j-1} grupos, algunos tendrán que ser de dos, lo cual es absurdo.

Por lo tanto, este primer acercamiento no resulta útil.

3.2. Una solución al problema

En la solución anterior, más que buscar un número par de grupos para cada eliminatoria, si intentó que el número de grupos por eliminatoria fuera siempre una potencia de dos. En realidad, el número de grupos por eliminatoria no tiene que ser par.

Sean n_i el número de competidores en la eliminatoria i. Si dividimos este número entre cuatro, por el Algoritmo de la División existen c_i y r_i tales que:

$$n_i = 4c_i + r_i, \text{ con } 0 \leq r_i < 4$$

Si $c_i > 1$, el número de grupos será:

Valor del residuo	Grupos de 4	Grupos de 3	Total de grupos
$r_i = 0$	c_i	0	c_i
$r_i = 1$	$c_i - 2$	3	$c_i + 1$
$r_i = 2$	$c_i - 1$	2	$c_i + 1$
$r_i = 3$	c_i	1	$c_i + 1$

Tabla 1. Solución al problema de surf

Note que c_i no puede ser cero, salvo que se inscriban solo 2 o 3 competidores, de lo contrario esto no puede ocurrir en la última eliminatoria pues:

- Si solo quedan 2 competidores, estos serían los ganadores y el torneo terminó en la eliminatoria anterior.
- No puede haber tres competidores en la última eliminatoria, pues clasifica un número par de participantes.

Además, si $c_i = 1$ entonces la tabla anterior funciona bien excepto cuando $r_i = 1$, en este caso $n_i = 5$. Esto no puede ocurrir en ninguna eliminatoria excepto en la primera, pues en cada eliminatoria, después de la primera, hay un número par de competidores.
Así, los casos no cubiertos por el algoritmo presentado son cuando inicialmente se inscriben solamente 2,3 o 5 competidores.

¿Siempre se obtendrá dos ganadores en la última eliminatoria? En efecto, observe que:

Valor del residuo	Total de grupos	# de competidores en eliminatoria i	# de competidores en eliminatoria i
$r_i = 0$	c_i	$n_i = 4c_i$	$n_{i+1} = 2c_i$
$r_i = 1$	$c_i + 1$	$n_i = 4c_i + 1$	$n_{i+1} = 2c_i + 2$
$r_i = 2$	$c_i + 1$	$n_i = 4c_i + 2$	$n_{i+1} = 2c_i + 2$
$r_i = 3$	$c_i + 1$	$n_i = 4c_i + 3$	$n_{i+1} = 2c_i + 2$

Tabla 2. Decrecimiento par del número de competidores por eliminatoria

Como c_i no es nulo, se puede asegurar $n_{i+1} < n_i$. Es decir, la cantidad de competidores va decreciendo estrictamente. Dado que, en cada eliminatoria después de la primera, hay un número par de competidores y esté va decreciendo estrictamente, necesariamente existirá un k tal que $n_k = 2$. Es decir, el proceso tiene fin (hay un número finito de pares entre 1 y n_1) y la última eliminatoria será la k-1.

El algoritmo se programó en Excel y se ha venido utilizando en los torneos de ACOS. En la primera hoja se ingresan los datos:

	A	B	C	D	E	H	I	J
1		**Total de competidores:**			**22**	# de eliminatoria:		1
2	**Nombre de competidores**					# de grupos		Total de
3	**#**	**Nombre**		Eliminatoria	# competidores	De 4 personas	De 3 personas	grupos
4	1	luis		1	22	4	2	6
5	2	ana		2	12	3	0	3
6	3	juan		3	6	0	2	2
7	4	beto		4	4	1	0	1
8	5	jose		5	2			
9	6	Luisa						
10	7	Fabiola						

Figura 2. Programa de cantidad de grupos por eliminatoria diseñado en Excel

En la siguiente hoja aparecen los diferentes grupos con los espacios para que los jueces ingresen las calificaciones:

Grupo																		
1	Nombre	color		ola1	ola2	ola3	ola4	ola5	ola6	ola7	ola8	ola9	ola10	ola11	ola12	Las 2 olas mejores		promedio
	luis		juez1	1	2	1										2	1	1,333333
			juez2	1	1	4										4	1	
			juez3													0	0	
			Promed:															
	ana		juez1													0	0	0
			juez2													0	0	
			juez3													0	0	
			Promed:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
	juan		juez1													0	0	0
			juez2													0	0	
			juez3													0	0	
			Promed:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
	beto		juez1													0	0	0
			juez2													0	0	
			juez3													0	0	
			Promed:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			

Posición	Competidor	Puntaje	Diferencia para subir una posición
1	luis	1,333333	
2	ana	0	1,333333333
3	juan	0	0
4	beto	0	0

Figura 3. Programa para calificación de jueces diseñado en Excel

La tercera hoja indica los clasificados a la siguiente eliminatoria y los puntajes obtenidos:

Clasificados de la eliminatoria

#	Nombre	Pts
1	ana	2,166666667
2	luis	1,333333333
3	jose	1,333333333
4	Luisa	0

Figura 4. Lista de clasificados diseñada en Excel

Actualmente ACOS está en proceso de contratar un profesional en informática que programe el algoritmo como una aplicación independiente que permita el ingreso de datos de forma remota, esto para que cada juez ingrese los datos desde su computadora personal.

4. ¿Quién va por la pizza?

El siguiente problema lo plantearon unos estudiantes de Ingeniería Computación del Tecnológico de Costa Rica en el primer semestre del 2019 al autor de este trabajo. Al parecer una empresa, para definir a quiénes va a contratar, les dio una lista de problemas a los oferentes y éstos tenían un plazo para entregarlos.

El problema dice (se modificó levemente): En una reunión hay n personas, numeradas del 1 al n, y desean comer pizza. Defina un algoritmo que permita elegir de manera justa a la persona que debe ir por la pizza, por medio de una moneda.

No se puede dar un algoritmo determinista para resolver el problema, pues al introducir la utilización de la moneda, nos introduce en un mundo azaroso. El concepto de justicia se operacionaliza en que todas las personas tengan la misma posibilidad de ser elegidas. En realidad, el problema matemáticamente se reduce a hallar una distribución uniforme para la variable X (número de persona que debe ir por la pizza) de rango {1,2,3,…,n}, utilizando una moneda.

4.1. Primer acercamiento al problema

Una solución común a este problema sería lanzar la moneda n-1 veces y sea Y la variable aleatoria que indica el número de escudos obtenidos, entonces va por la pizza la persona número X=Y+1. Por ejemplo, si son cinco personas, lanzamos la moneda 4 veces, si se obtiene 3 escudos, entonces la persona número 4 es la elegida.

El gran problema de esta solución es que la distribución de X no es uniforme. Note que si Y es el número de escudos en n –1 lanzamientos, entonces:

Y~B(n-1,½)

Así, la función de distribución de X es $\mathrm{f_X}(k) = \mathrm{f_Y}(k-1)$, la cual no es uniforme. Por ejemplo, si n=5 el histograma de X es:

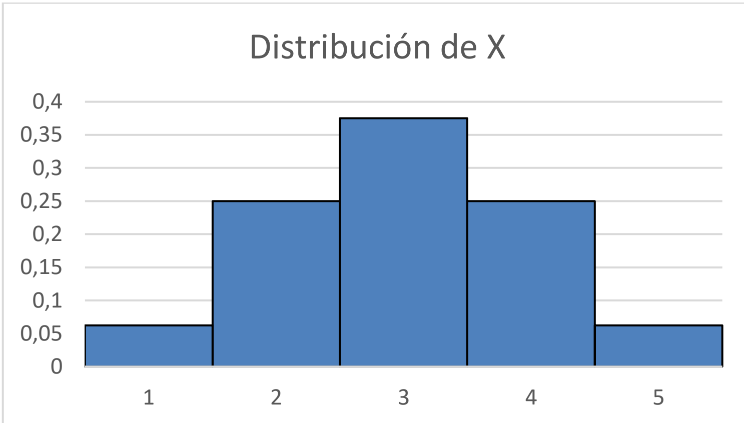


Figura 5. Histograma de X: # de persona que va por la pizza para n=5

Así, en el ejemplo con n=5, la elección de la persona que debe ir por la pizza no es justa, pues la persona 3 tendrá más posibilidad de ser elegida que las otras. Por lo tanto, se descarta esta forma de solucionar el problema.

4.2. Una solución al problema

El formar una distribución uniforme para una variable de rango {1,2,3,…,n} con una moneda no es para nada sencillo. De hecho, se cuestiona si realmente existirá dicho método.

Sin embargo, seguidamente se plantea una solución justa al problema pero un poco más compleja.

La solución surge al analizar la distribución de la variable aleatoria Y: # de escudos al lanzar la moneda m veces. Note que Y sigue una distribución binomial donde la probabilidad de éxito es ½ por lo tanto

$$\mathrm{F_Y(k)} = \frac{\mathrm{C(m,k)}}{2^{\mathrm{m}}}, \mathrm{k} = 0,1,2,\dots,\mathrm{m}.$$

Donde el coeficiente binomial $\mathrm{C(n,k)}$, en realidad agrupa resultados equiprobables. Simbolicemos los resultados al lanzar una moneda con E (escudo) y C (Corona). Por ejemplo para m=3, observe que:

K	Resultados favorables a Y=k	$F_Y(k)$
0	CCC	$\frac{1}{8}$
1	CCE, CEC, ECC	$3 \cdot \frac{1}{8}$
2	CEE, ECE, EEC	$3 \cdot \frac{1}{8}$
3	EEE	$\frac{1}{8}$

Tabla 3. Distribución de Y: # de escudos al lanzar la moneda m=3 veces

Así encontramos resultados equiprobables, para m=3 los posibles resultados al lanzar una moneda son 8 (CCC, …, EEE) y cada uno tiene una probabilidad de 1/8. Estos resultados nos ayudarán a resolver el problema.

Note que, si se lanza una moneda una vez, los posibles resultados son 2; si se lanza dos veces, los posibles resultados son 2^2; …; si se lanza m veces, los posibles resultados son 2^m. Así el problema tiene una solución perfecta si el número de personas reunidas es de la forma 2^m. En efecto, si hay 2^m personas, vamos a lanzar la moneda m veces, anotamos su resultado con C y E, luego cada E del resultado la cambiamos por 1 y cada C por cero. El resultado obtenido con los cambios hechos es un número en binario, que al pasarlo a base 10 y sumarle 1, da el número de la persona que debe ir por la pizza.

Por ejemplo, si hay 2^3 personas reunidas lanzamos la moneda 3 veces, hay 8 posibles resultados, cada uno está asociado aún número de persona:

CCC -> 000 -> 0+1=1

CCE -> 001 -> 1+1 =2

CEC -> 010 -> 2+1 =3

ECC -> 100 -> 4+1 =4

CEE -> 011 -> 3+1 =5

ECE -> 101 -> 5+1 =6

EEC -> 110 -> 6+1 =7

EEE -> 111 -> 7+1 =8

Así, si se lanza la moneda 3 veces y se obtiene CEE entonces la persona número 5 debe ir por la pizza.

¿Qué sucede si n no es de la forma 2^m? Por el principio del Buen Orden podemos hallar el natural m que cumpla que

$$2^{m-1} < n < 2^m$$

Por lo tanto, se lanzará la moneda m veces y se procederá de la misma manera que anteriormente: anotamos su resultado con C y E, luego cada E del resultado lo cambiamos por 1 y cada C por cero, obteniendo un número en binario, que al pasarlo a base 10 y sumarle 1, da un número N.

Como $n < 2^m$, entonces N no necesariamente está entre 1 y n. La regla será la siguiente: si $N \leq n$, la persona número N debe ir por la pizza, sino se debe volver a lanzar la moneda N veces y proceder de la misma manera hasta elegir quién va por la pizza.

¿Funciona este algoritmo? Primero note que cada persona tiene la misma probabilidad de ser elegida, esta es $1/2^m$. Por otro lado, note que la probabilidad de que ninguna persona sea elegida es

$$\frac{2^m - n}{2^m}$$

Como $n > 2^{m-1}$ entonces $-n < -2^{m-1}$ y la probabilidad de que ninguna persona sea elegida cumple:

$$\frac{2^m - n}{2^m} < \frac{2^m - 2^{m-1}}{2^m} = \frac{2^{m-1}}{2^m} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Quiere decir que es más probable elegir a alguien que no elegirlo, al lanzar la moneda m veces. Por la ley de los grandes números, si la moneda es legal, el proceso deberá terminar. Es decir, existirá un grupo de m lanzamientos de la moneda en el cual se logre elegir la persona que irá por la pizza. Y dado que la probabilidad es mayor al 50%, es probable que para este grupo de m lanzamientos, suceda no se tenga que esperar mucho.

Por ejemplo, si son n=5 personas, note que $2^2 < 5 < 2^3$, por lo tanto, m=3 y se lanza la moneda 3 veces. De los 8 posibles resultados, solo hay 3 que no asignan a la persona que va por la pizza, estos son: ECE, EEC, EEE. Si uno de estos resultados sucede, si seguirá lanzando la moneda tres veces, hasta que uno de estos resultados no se dé y se pueda elegir a la persona. Note que en cada grupo de tres lanzamientos de la moneda, la probabilidad de que no se asigne a la persona es de 3/8.

El algoritmo lo podemos simular en algún software. Por ejemplo en Matemática

```
Pizza[n_] :=  Module[{m = 0, respuesta = n + 1, Lanzar, k = 0},
  (*Hallar el m *)
  While[2^m < n,  m = m + 1;   ];
  Print["El número de lanzamientos de la moneda es ", m];
  (*elegir a la persona *)
  While[respuesta > n - 1,
            Lanzar = RandomInteger[1, m];
            k = 0;
            respuesta = 0;
            While[k <= m - 1,
                    respuesta = respuesta + (Lanzar[[k + 1]]*2^k);
                    k = k + 1;
                  ];
            Print["Se elige a la persona # ", respuesta + 1, " para ir por la pizza"];
             If[respuesta + 1 > n,
            Print["Como solo hay ", n, " personas, se vuelve a lanzar la moneda ", m," veces"];
                 ];
             ];
  respuesta = respuesta + 1;
  respuesta
  ];
```

Para 50 personas el resultado fue el siguiente:

```
In[7]:= Pizza[50]
        El número de lanzamientos de la moneda es 6
        Se elige a la persona # 55 para ir por la pizza
        Como solo hay 50 personas, se vuelve a lanzar la moneda 6 veces
        Se elige a la persona # 63 para ir por la pizza
        Como solo hay 50 personas, se vuelve a lanzar la moneda 6 veces
        Se elige a la persona # 16 para ir por la pizza
Out[7]= 16
```

Figura 6. Ejemplo del programa en Mathematica para el problema de la pizza

5. Conclusión

Sin duda la resolución justa de problemas ha intrigado a la humanidad. Desde el punto de vista matemático, son problemas muy interesantes que pueden despertar el interés de los estudiantes, de diferentes niveles. Aquí se presentaron tres tipos de estos problemas: repartición de un pastel, formar los equipos para cada eliminatoria en un torneo de surf, elegir quién va por la pizza con una moneda. Puede resultar interesante plantear estos problemas a estudiantes de primaria, secundaria y a nivel universitario y analizar como ellos utilizan las herramientas matemáticas que tienen para modelar los problemas y dar una solución parcial a estos.

Para estos problemas, se brindó una posible solución, pero no una solución óptima. De hecho, son problemas abiertos, donde el lector puede buscar mejores soluciones a las planteadas en este documento.

En el caso de los dos últimos problemas, se brindaron soluciones fallidas, pero muy ricas matemáticamente y pedagógicamente. En el torneo de surf, se muestra contundentemente que se debe renunciar a seguir el primer camino de solución. En el problema de la pizza, además de que se muestra que la primera aproximación es errónea, esta genera la solución brindada.

Por otro lado, es importante notar cómo se combina la matemática y el uso de software para resolver este tipo de problemas.

6. Referencias bibliográficas

Klarreich, E. (2017, abril). Un algoritmo para repartir una tarta. Revista Investigación y Ciencia. Volumen (487). España.

BOSCH, C. (1992) El que parte y reparte se queda con la mejor parte. Ciencias. Volumen (025). México.

LA METODOLOGÍA STEAM: UNA INICIATIVA PARA REDUCIR LA BRECHA DE GÉNERO EN COSTA RICA

MEd. Hidelia Meza González
Universidad Nacional – Ministerio de Educación Pública
hideliamezag@gmail.com

MEd. Eilyn Duarte Abarca
Universidad Nacional – Ministerio de Educación Pública
eimyeily@yahoo.com

Resumen: Costa Rica ha logrado asegurar el acceso a la educación para los niños y jóvenes, logrando un camino igualitario a la educación constitucionalmente gratuita y obligatoria. El reto pendiente es la mejora en las condiciones inclusivas en las que las mujeres estudian. Si bien se dice que actualmente se vive en un mundo en el que el tiempo trascurre rápidamente atendiendo múltiples compromisos, llega un momento en que todo se paraliza con una de las decisiones más importantes de la vida de todos los seres humanos, cuando alguien hace la siguiente pregunta, ¿qué te gustaría estudiar? Actualmente, el impulso de iniciativas STEAM se ha convertido en un pilar fundamental en la forma que se realiza la planificación educativa de muchas potencias mundiales; grandes corporaciones cuentan con programas altamente reconocidos que apoyan e impulsan programas de STEAM, esto como respuesta a la gran demanda de profesionales que se tiene hoy en día, donde buscan despertar el interés en los jóvenes en edades tempranas para el desarrollo vocacional de los mismos en carreras STEAM, además de impulsar el interés del estudio en habilidades STEAM en niñas colaborando así con la diversidad en estas ramas de estudio que por muchos años ha sido predominada por los hombres, la diversidad es clave para el crecimiento innovador. El currículo educativo de nuestro país debe cambiar sin duda alguna, se debe invertir hoy en las capacitaciones de las generaciones futuras en el ámbito de STEAM, para apostar en una sociedad de innovación, fundamental para el desarrollo económico del país.
Palabras claves: STEAM, diversidad, educación, innovador, planificación educativa

Abstract: Costa Rica has managed to ensure access to education for children and young people, achieving an equal path to constitutionally compulsory and free education. The pending challenge is the improvement in the inclusive conditions in which women study. Although it is said that currently one lives in a world in which time passes quickly in response to multiple commitments, there comes a time when everything is paralyzed with one of the most important life decisions of all human beings, when someone makes the Next question, what would you like to study? Currently, the promotion of STEAM initiatives has become a fundamental pillar in the way in which the educational planning of many world powers is carried out; large corporations have highly recognized programs that support and promote STEAM programs, this in response to the great demand of professionals that are nowadays, where they seek to arouse interest in young people at an early age for their vocational development in STEAM careers, in addition to boosting the interest of studying STEAM skills in girls thus collaborating with the diversity in these branches of study that for many years has been dominated by men, diversity is key to innovative growth. The educational curriculum of our country must change without a doubt, we must invest today in the training of future generations in the field of STEAM, to bet on a society of innovation, fundamental for the economic development of the country.
Keywords: STEAM, diversity, education, innovative, educational planning

1. INTRODUCCIÓN

A inicios de la década del 2000 muchos estudios realizados alrededor del mundo han demostrado un decremento considerable en la cantidad de estudiantes que se encontraban en disciplinas de ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas, 15 de cada 1000 personas habían finalizado estudios en las áreas anteriormente mencionadas, esto evidenciaba un posible impacto de acuerdo con los análisis realizados con respecto a la proyección de la fuerza laboral en el ámbito tecnológico y científico. Esta realidad se afronta en Costa

Rica actualmente; muchas empresas desean invertir en el país, pero no hay suficiente mano de obra calificada en el ámbito tecnológico, que logre satisfacer esas necesidades.

Hoy en día, el impulso de iniciativas STEAM se ha convertido en un pilar fundamental en la forma que se realiza la planificación educativa de muchas potencias mundiales. Grandes corporaciones cuentan con programas altamente reconocidos que apoyan e impulsan programas de STEAM, esto como respuesta a la gran demanda de profesionales que se tiene hoy en día, donde buscan despertar el interés en los jóvenes en edades tempranas para el desarrollo vocacional de los mismos en carreras STEAM, además de impulsar el interés del estudio en habilidades STEAM en niñas colaborando así con la diversidad en estas ramas de estudio que por muchos años ha sido predominada por los hombres, teniendo claro que la diversidad es clave para el crecimiento innovador de cualquier país.

En un artículo del elmundo.cr, Mata y Ramírez (2019), mencionan:

> STEAM proviene de la combinación de cinco importantes disciplinas, ciencias, tecnología, ingeniería, arte y matemáticas, por sus siglas en inglés; la cual tiene como objetivo principal fomentar la enseñanza de esas disciplinas en edades tempranas ayudando a incrementar el interés en seguir carreras profesionales relacionadas con la ciencia y las habilidades necesarias para trabajar en el campo de la tecnología.

Cabe mencionar que STEAM es un programa que permite despuntar las brechas de género existentes en la educación a nivel centroamericano. Con esto, se contribuye a desarrollar competencias eficaces en los docentes para empoderar a las niñas y adolescentes y así ampliar sus oportunidades profesionales y académicas, haciendo frente al gran reto del siglo XXI de formar ciudadanas con las capacidades suficientes para desenvolverse en un mundo globalizado, en el cual, es fundamental impulsar la educación en las áreas de ciencia, tecnología, ingeniería, arte y matemáticas.

El currículo educativo costarricense debe cambiar sin duda alguna, se debe invertir hoy en las capacitaciones de las generaciones futuras en el ámbito de STEAM, para desafiar en una sociedad de innovación, fundamental para el desarrollo económico del país. Las políticas públicas que beneficien a la educación especializada son de suma importancia, así como las capacitaciones para los educadores en general, con el único propósito de que estimulen el razonamiento crítico, enseñar el por qué y cómo funcionan las cosas, y no solo el instruir para memorizar, sino más bien en busca de la construcción individual de su propio conocimiento. Por otro lado, es de suma importancia como padres de familia y educadores animar a los niños y niñas a explorar en áreas de STEAM; tomando en cuenta que en Costa Rica ya existen organizaciones sin fines de lucro que promueven la enseñanza de tecnología y razonamiento crítico y que por ende pueden ser de gran apoyo para el proceso educativo de los mismos.

2. Aspectos Teóricos

Para enfrentar las problemáticas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las diferentes asignaturas existen numerosas maneras de inducir al discente al proceso educativo, que proponen desde enseñar con problemas reales, incorporar tecnologías y articular contenidos a estudiar con otras ciencias e ingeniería, entre otros. Estas propuestas, se encuadran a su vez, en teorías que manifiestan la importancia de instaurar cambios epistemológicos, didácticos y pedagógicos, en los senos de las instituciones educativas, que emerjan desde preescolar hasta secundaria y más aun incorporando la educación universitaria, convirtiendo al estudiante en un actor activo del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Desde el año 2009 ha surgido en Estados Unidos la enseñanza basada en STEM. Corresponde a un acrónimo de los términos en inglés Science, Technology, Engineering and Mathematics (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas) que se refiere a agrupar grandes áreas del conocimiento en las que trabajan científicos e ingenieros.

El propósito de STEM es desarrollar una nueva manera de enseñar conjuntamente Ciencia, Matemáticas y Tecnología, enfocados a la resolución de problemas tecnológicos. Sin embargo, recientemente se ha empezado a incluir en estas actividades selectas para la innovación la letra "A", perteneciente a las de **Arte más Diseño** (artes plásticas y diseño en nuestro ordenamiento académico) que están detrás de los impulsos vitales para transformar de forma positiva la educación del siglo XXI. De ese modo, el acrónimo STEM se ha transformado en **STEAM.**

El propósito de este estudio es fomentar la enseñanza de esas disciplinas en edades tempranas ayudando a incrementar el interés de las personas estudiantes en seguir carreras profesionales relacionadas con la ciencia y las habilidades necesarias para trabajar en el campo de la tecnología, con el fin de propiciar el desarrollo de la creatividad y la capacidad de innovación. Con esto se pretende, cambiar la forma de pensar de muchos estudiantes, así como también de los docentes los cuales cumplen un rol de guía de aprendizaje ante este modelo educativo, en donde el individuo, a la hora de elegir una carrera universitaria, desestima algunas opciones por el solo hecho de contener asignaturas relacionadas con la matemática en su plan de estudios.

Los objetivos que se plantean ante este estudio corresponden a:

- Desarrollar acciones que permitan la incorporación de las áreas STEAM en el currículo nacional con el fin de relacionarlas con la elección de carreras afines a estas áreas, procurando la reducción de la brecha de género en la educación costarricense.
- Propiciar experiencias pedagógicas que permitan la exploración individual y grupal de habilidades, intereses, aptitudes y valores en la población estudiantil.
- Sensibilizar a la población costarricense en torno a la importancia del respeto y la igualdad de género en el sistema educativo.

Según la Organización de las Naciones Unidas, *"De las personas que investigan a nivel mundial solo el 30% son mujeres";* esto motivó a impulsar la metodología STEAM en diferentes países, considerando esta como una iniciativa mundial que empodera a las niñas y adolescentes para optar por carreras en ciencias, tecnología, ingeniería, arte/diseño y matemáticas para disminuir las brechas de género y el bajo nivel de ingreso a estas carreras por parte de las mujeres, en las diferentes universidades del país.

La metodología STEAM se basa en el aprendizaje integrado de las disciplinas científicas y el arte (Fenyvesi, Téglási y Szilágyi, 2014). Esta integración tiene lugar principalmente mediante la resolución de actividades o proyectos, trabajando conjuntamente los contenidos y herramientas de las disciplinas mencionadas anteriormente (Rocard et al., 2007). Estas actividades o proyectos son situaciones abiertas, no estructuradas, en las que se provocan de forma intencionada procesos de investigación científica dentro de un marco práctico de diseño y resolución de problemas reales. La metodología suele, por lo tanto, dar como resultado el desarrollo de un producto por parte de los estudiantes, en el que se ponen en práctica los conocimientos científicos de los mismos para resolver diversos problemas. También puede darse el proceso contrario, en el que el tratamiento de situaciones reales requiere al alumno el estudio teórico de contenidos de las materias implicadas (Fortus et al., 2005).

2.1. Aprendizaje STEM o STEAM

El aprendizaje STEAM es un modelo que persigue la integración y el desarrollo de las materias científico-técnicas y artísticas en un único marco interdisciplinar (Yakman, 2008). El acrónimo surge en 2008 cuando Yakman, intentando fomentar la interdisciplinariedad, introduce la A inicial de “Arts” dentro de otro acrónimo ya existente que recogía las iniciales de las disciplinas de Ciencias (S), tecnología (T), ingeniería (E) y matemáticas (M): STEM.

Al revisar el concepto de aprendizaje STEM, Yakman (2008) distingue dos enfoques muy diferentes: (1) el enfoque tradicional, que entiende el aprendizaje STEM como cuatro parcelas individuales que se desarrollan de forma independiente y (2) el enfoque reciente o integrador, que entiende las cuatro materias del aprendizaje STEM de forma conjunta. La propia autora para enfatizar la separación entre las materias describe de forma diferenciada estos dos conceptos, el primero como S-T-E-M y el segundo como STEM (Yakman, 2008; Yakman y Lee, 2012).

El enfoque STEAM, con integración de las artes y diseño, ha sido adoptado en otros países tanto por su énfasis en innovación como porque la evidencia sugiere que ofrece un mayor atractivo para aquellos estudiantes que no se identifican tan cercanamente con las ciencias como con las artes creativas. El enfoque STEAM busca facilitar la conexión de los procesos de pensamiento lógico y creatividad en los estudiantes y ayudar a superar la supuesta dicotomía entre el pensamiento lógico y la creatividad, que ha sido desmentida por grandes personajes de la ciencia y la tecnología como Leonardo Da Vinci y Charles Darwin.

La aproximación a los contenidos STEAM puede ser interdisciplinaria o integrada. Si bien algunos países como Corea del Sur han optado por una sola asignatura STEAM en su currículo, otros han trabajado la integración de dos o tres disciplinas desde una asignatura. Así lo han hecho países como Japón con Ciencias, Gran Bretaña con Ciencias y Matemáticas o Alemania con Ciencias y Tecnología.

El principal propósito del trabajo conjunto de estas disciplinas es reflejar la relación que existe entre sus diferentes aplicaciones del mundo real, en el ejercicio cotidiano de las profesiones y oficios STEAM, para ayudar a los estudiantes a una comprensión holística de los fenómenos que los rodean. Esto se fortalece con el uso de metodologías para el aprendizaje activo, experimental o por proyectos, donde las disciplinas se mezclan.

En muchos países, el debate y desarrollo de la educación STEAM ocurre también desde la sociedad civil, a través de sus universidades y establecimientos educativos u organizaciones no gubernamentales. Desde esos espacios se ha potenciado el desarrollo de la educación STEAM, que incluye el arte como disciplina fundamental para fomentar el proceso creativo y un aprendizaje integral, de acuerdo a las demandas del siglo XXI.

Esto es cada vez más evidente en el mundo actual y, ciertamente lo será aún más en el futuro, donde los problemas ya no tienen soluciones obvias, sino más bien desconocidas y, por lo tanto, para resolverlos no son suficientes los conocimientos disciplinarios específicos. Habilidades como la creatividad y colaboración permiten a las personas adaptarse, atreverse a probar nuevas opciones, lo cual en última expresión los habilita para solucionar problemas interactivos que requieren explorar más de una alternativa, obtener datos útiles para encontrar solución y aislar los factores del entorno involucrados en un problema.

2.2. STEAM en Costa Rica

En Costa Rica, STEAM busca promover en los centros educativos, desde la enseñanza preescolar hasta la universitaria, el desarrollo de habilidades y competencias del siglo XXI en el estudiantado, desde un enfoque de género, para que se exploren y se valoren las áreas de las ciencias, las matemáticas y las artes, y estas se enlacen con la ingeniería y la tecnología, en sus proyectos vocacionales y educativos, así como en sus experiencias pedagógicas, en busca de la mejora de las habilidades, intereses, aptitudes y valores de la población estudiantil.

STEAM posee un enfoque de enseñanza transdisciplinar en la cual el estudiante aprenderá los conocimientos de una forma integrada, conectando conceptos de diferentes disciplinas y logrando la comprensión de un concepto más rico y de mayor alcance, en comparación con el modo habitual dentro de los límites de cada temática. Además, le permitiría al estudiante construir conexiones entre conceptos de distintas disciplinas. Asimismo, el alumno desarrollaría competencias para combinar prácticas de dos o más disciplinas para resolver un problema o un proyecto, obteniendo el conocimiento desde distintas miradas que puede dar lugar a las innovaciones y a un mayor enriquecimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula.

Tabla 1. ¿Qué dice el currículo costarricense de las disciplinas STEAM?

Asignatura	Introducción en los planes de estudio en Costa Rica
S Ciencias Naturales	Las ciencias Naturales agrupan aquellas disciplinas que tiene por objeto el estudio de la naturaleza como la biología, la química y la física. En su conjunto, estas disciplinas abordan una amplia variedad de fenómenos naturales, como los que ocurren en los seres vivos y en sus distintas formas de interactuar con el ambiente, la materia, la energía y sus transformaciones, el sistema solar, sus componentes y movimiento, y la tierra y sus diversas dinámicas. El aprendizaje de estos fenómenos permite, por un lado, desarrollar una visión integral y holística de la naturaleza, y por otro, comprender e interpretar los constantes procesos de transformación del medio natural, ya sea para contemplarlos como para actuar responsablemente sobre él. Esta es una de las asignaturas STEAM con mayor importancia en el currículo nacional. Además, se promueven los colegios científicos de Costa Rica.
T Tecnología	La asignatura de Tecnología busca que los estudiantes comprendan la relación del ser humano con el mundo artificial. Esta comprensión implica reconocer que, a través de la tecnología, la humanidad ha intentado satisfacer sus necesidades y deseos, y solucionar sus problemas en numerosas dimensiones. En este marco, se busca que los estudiantes observen en su entorno los objetos y la tecnología que los rodea, y que vean en ellos el resultado de un largo proceso que involucra la creatividad humana, la perseverancia, el rigor, el pensamiento científico y las habilidades prácticas. Se persigue

	que los estudiantes valoren la tecnología no solo como una forma de mejorar su calidad de vida, sino también como un proceso íntimamente ligado al ingenio, emprendimiento y habilidad humana, y que ellos también pueden realizar. Esta asignatura es ligada en los centros educativos con las ciencias por medio de talleres de robótica, informática, ferias de ciencia y tecnología, método científico.
E **Ingeniería**	La asignatura de ingeniería no existe a nivel escolar, se le da mayor énfasis a nivel universitario, por medio del Instituto Tecnológico de Costa Rica y universidades especializadas en la enseñanza de estas carreras.
A **Artes**	La educación en artes se centra, por una parte, en el conocimiento y apreciación de distintas manifestaciones artísticas, tanto del pasado como del presente, y por otra, en el desarrollo de la capacidad creativa y expresiva de los estudiantes por medio del lenguaje visual. Desarrollar las facultades de expresión, creación y apreciación les permitirá participar como espectadores activos en la generación y la valoración de la cultura; en este sentido, se entiende el arte como conocimiento, porque amplía y desarrolla la mente del artista y del observador. Tanto al observar, como al crear una obra de arte, el joven amplía su comprensión de la realidad y enriquece sus facultades creativas, imaginativas y simbólicas. He aquí la creación de los Festival Estudiantil de las Artes, que tienen como propósito brindar espacios para la creación, exposición de obras de arte y presentación artística estudiantil por medio de las artes escénicas, literarias, musicales y visuales.
M **Matemáticas**	Esta asignatura es de suma importancia en el currículo nacional en todos los niveles educativos. Aprender matemática ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas necesarias para desenvolverse en la vida cotidiana. Entre estas se encuentran la selección de estrategias para resolver problemas, el análisis de la información proveniente de diversas fuentes, la capacidad de generalizar situaciones y de evaluar la validez de los resultados, y el cálculo. Todo esto contribuye al desarrollo de un pensamiento lógico,

	ordenado, crítico y autónomo y de actitudes como la precisión, la rigurosidad, la perseverancia y la confianza en sí mismos, las cuales se valoran no solo en la matemática, sino también en todos los aspectos de la vida. El aprendizaje de la matemática contribuye también al desarrollo de habilidades como el modelamiento, la representación, la argumentación y la comunicación. Dichas habilidades son tomadas en cuenta en el currículo nacional y confieren precisión y seguridad en la presentación de información y a su vez, compromete al receptor a exigir precisión de la información y en los argumentos que recibe.

Fuente: Elaboración propia

2.3. Competencias del siglo XXI.

Se le llama competencias del siglo XXI a las destrezas, conocimientos y actitudes necesarios para enfrentar exitosamente los retos de la actualidad, y que invitan a reformular las principales aspiraciones en materia de aprendizaje y a hacerlas más relevantes para esta nueva era. Se ha vuelto una prioridad para los sistemas educativos del mundo, que los estudiantes desarrollen habilidades necesarias para la vida en la sociedad del conocimiento.

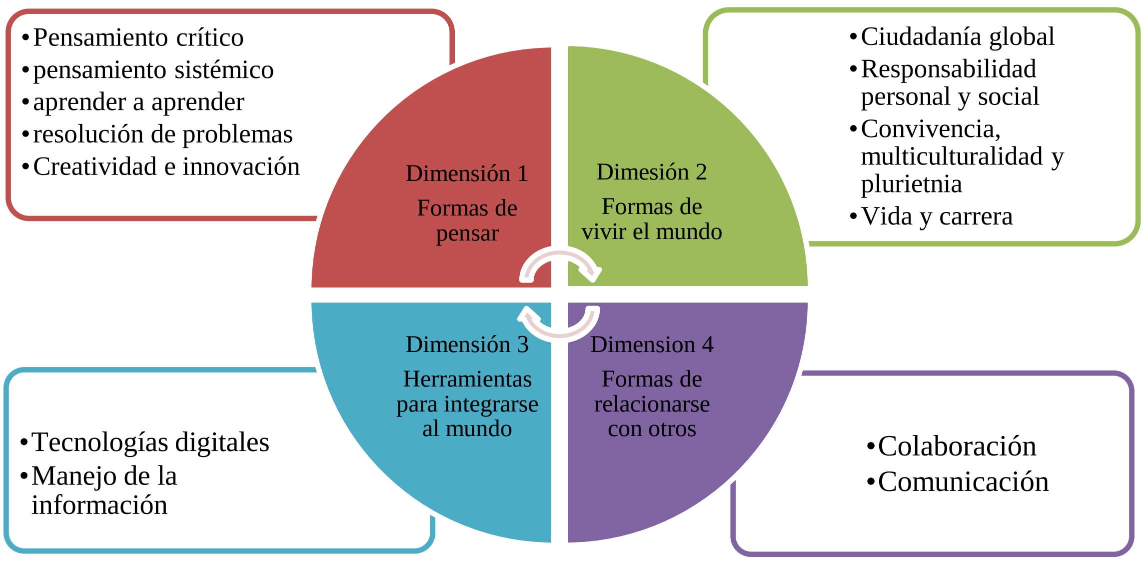
Las competencias del siglo XXI propuestas por el proyecto ATC21s (“Evaluación y enseñanza de las destrezas del siglo XXI”), el cual es un proyecto de investigación impulsado por las empresas Intel, Microsoft y Cisco, que propone nuevas maneras de

evaluar y enseñar las destrezas o competencias del siglo XXI. Estas se dividen en las siguientes categorías fundamentales:

Fuente: Competencias para el siglo XXI: Guía práctica para promover su aprendizaje y evaluación. (p.12, 13)

2.4. Abordaje en el aula de las competencias del siglo XXI en la educación STEAM en Costa Rica

Las competencias del siglo XXI son las destrezas, conocimientos y actitudes necesarias para enfrentar exitosamente los retos de esta época, y que invitan a reformular las principales aspiraciones en materia de aprendizaje y a hacerlas más relevantes para esta nueva era de aprendizaje. Estas se encuentran estrechamente relacionadas con la política curricular costarricense la cual se centra en resumen en cuatro dimensiones básicas, resumidas a continuación:



Fuente: Competencias para el siglo XXI: guía práctica para promover su aprendizaje y evaluación.

Aspirar al desarrollo de las competencias del siglo XXI va a requerir el repensar los procesos de aprendizaje: las relaciones entre estudiantes y docentes, las prácticas de enseñanza y la forma en que se evalúa. Se necesita orientar a los estudiantes hacia un nuevo modelo basado en la idea en que aprender consiste en construir nuevo conocimiento haciendo cosas en colaboración y diálogo con otras personas.

Los siguientes seis principios sintetizan algunos de los elementos claves que caracterizan el modelo de enseñanza y aprendizaje de las competencias del siglo XXI. Poner en práctica estos principios permitirá a los estudiantes apropiarse de los contenidos curriculares, al tiempo que se convierten en personas proactivas, responsables de su propio aprendizaje, menos enfocadas en adquirir y almacenar conocimientos para obtener cierta calificación, y más en crear, en conexión con otro conocimiento de valor para sí mismos y sus comunidades.

1. **Un nuevo rol para los docentes y para los estudiantes**: La fundación Omar Dengo en la Guía práctica para promover el aprendizaje y evaluación de las Competencias del Siglo XXI (2014, p.16, 17), especifica:
   - Los docentes y los estudiantes se convierten en colaboradores.
   - Todos aprenden y todos enseñan en diferentes momentos (Fullan y Langworthy, 2014).
   - El docente del siglo XXI es una persona que cree en la construcción conjunta del conocimiento en un intercambio positivo entre estudiantes y docentes.
   - El docente tiene la función de ayudar a sus estudiantes a encontrar sus intereses y talentos.
   - El docente diseña situaciones de aprendizaje que estimulan el pensamiento y la creación de conocimiento, basándose en problemas abiertos y reales que generan motivación e interés, por parte de los estudiantes.
   - El docente brinda a sus estudiantes retroalimentación efectiva sobre sus procesos de aprendizaje y los anima y fortalece en sus dificultades, promoviendo la persistencia, la reflexión, la exploración de alternativas y la mejora continua del proceso educativo.
   - A este cambio en el rol del docente le corresponde también un cambio en el rol de los estudiantes.
   - Los estudiantes del siglo XXI son personas que exploran y construyen activamente su conocimiento. Lo hacen por medio del intercambio y la colaboración con otros, por lo que la comunicación y el diálogo adquieren un lugar importante. Pueden aprender por cuenta propia, identificar necesidades, investigar, resolver problemas y producir conocimiento.
   - Los estudiantes son capaces de evaluar su proceso de aprendizaje y el de sus compañeros en un ambiente de respeto y confianza mutua.

2. Aprender haciendo

Aprender consiste en construir conocimiento haciendo cosas con otros, a partir de la experiencia y la exploración, del ensayo y error, del análisis y la ejecución. Se promueve el aprendizaje activo cuando:

- Se diseñan las actividades de aula en función de los estudiantes, sus características y lo que necesitan hacer para aprender.
- Se les ofrecen posibilidades de involucrarse o enfrentarse a tareas auténticas, de la vida real, que tienen significado y valor para ellos.
- Se fomenta que construyan, armen, diseñen, fabriquen cosas, y a descubrir en el proceso ideas poderosas que amplían su comprensión y dominio sobre cómo funciona el mundo.

3. Aprender en colaboración con otros

El aprendizaje más efectivo es el que se construye a partir de situaciones que requieren que se hagan cosas en colaboración con otros. Aprender con otras personas y de otras personas, haciendo cosas en conjunto o entrando en conversación con ellas, se convierte en una característica esencial del aprendizaje de las competencias del siglo XXI.

El aprendizaje cooperativo no solo supone poner a los estudiantes a trabajar en grupos. Para que se den procesos de verdadera colaboración se tienen que garantizar ciertas condiciones (Johnson, Johnson y Johnson Holubec, 1994):

- Objetivos: El objetivo requiere que todos colaboren para optimizar el aprendizaje de los demás. Todos son y deben considerarse responsables del logro del objetivo.
- Ayudar analizar: Los grupos analizan cómo están avanzando hacia el cumplimiento de la meta y cómo están funcionando como equipo.
- Retroalimentar compartir: Los miembros del equipo tienen que construir una producción colectiva, para la cual es necesario que se ayuden, compartan, se expliquen cosas unos a otros, etc.

4. Aprender de acuerdo con las necesidades e intereses propios

Para que los procesos de aprendizaje sean efectivos, resulta esencial conectarlos con los intereses y aspiraciones de los estudiantes y lograr que el aprendizaje tenga valor para ellos, que sea un fin en sí mismo.

Esto implica ayudarles a comprender los objetivos de aprendizaje y descubrir su utilidad. Adaptar los objetivos curriculares al contexto real de los estudiantes resulta de gran ayuda. Se puede lograr mediante la simulación de situaciones cotidianas, el uso de casos de la vida real, así como el empleo de noticias, vídeos y música cercanos a la población estudiantil.

Asimismo, con la mayor frecuencia posible, necesitamos abrir ciertos espacios de libertad para los estudiantes. Por ejemplo, que tengan la oportunidad de elegir entre actividades y dentro de las actividades (Watkins, 2003).

5. Aprender con tecnología

En un modelo de enseñanza de las competencias del siglo XXI, la tecnología juega un papel determinante. Sabemos que los recursos tecnológicos son un medio y no un fin en sí mismos, y que el fundamento de la calidad educativa reside en la efectividad de las estrategias didácticas de los docentes y en su capacidad de establecer relaciones positivas con sus estudiantes. Sin embargo, nuestros niños y jóvenes necesitan estar expuestos cotidianamente a usos productivos y creativos de la tecnología, que les ayuden a entender el mundo complejo y sofisticado que les rodea.

El valor de las tecnologías digitales en educación es que facilitan el dominio de los contenidos curriculares, al tiempo que estimulan el desarrollo de competencias esenciales para crear y usar nuevo conocimiento en el mundo (Fullan y Langworthy, 2014).

6. Conducir el propio aprendizaje

Es posible promover que los estudiantes desarrollen autonomía en sus procesos de aprendizaje. Se puede lograr si en las aulas se estimula que los estudiantes:

- Se enfrenten a situaciones de aprendizaje retadoras que les obliguen a explorar y tomar decisiones sobre cómo proceder para superarlas con éxito.
- Identifiquen cuándo necesitan ayuda y dónde podrían encontrarla.

- Revisen su experiencia, lo que hicieron y cómo lo hicieron, reflexionando sobre sus fortalezas y debilidades.
- Evalúen sus productos finales.

Se fomenta la autodirección cuando, como docentes, se restringen las intervenciones y se les cede a los estudiantes el protagonismo en el proceso educativo. Se plantea un desafío a su alcance y estando el docente cerca para brindar, cuando sea necesario, orientación y apoyo, pero estimulando que sean los estudiantes quienes exploren y se enfrenten directamente a los problemas, buscando diferentes alternativas de solución a los mismos.

2.5. Principios de la evaluación de las competencias del siglo XXI.

La evaluación es un elemento tan determinante en los procesos de enseñanza-aprendizaje, que se ha llegado a afirmar que constituye el principal motor del aprendizaje: el factor del cual acaba dependiendo la calidad y cantidad de lo que se aprende. Según la experiencia general, tanto docentes como estudiantes acaban guiando sus esfuerzos por lo que se tiene que evaluar y cómo se tiene que evaluar al final de cada periodo lectivo. Sin embargo, en manos de los docentes está enfatizar otra dimensión, igualmente poderosa, de la evaluación: su potencial para brindar información que permita corregir, reorientar y enriquecer la marcha del aprendizaje.

En la medida en que el desarrollo de las competencias centrales no sea evaluado de manera relevante en el sistema nacional de aseguramiento de la calidad y de la permanencia, difícilmente será priorizado. La creatividad plantea un desafío mayor por la dificultas de estructurar su evaluación, la cual debemos potenciar desde la mirada del modelo STEAM. El sistema educativo propone reducir la frecuencia de evaluaciones sumativas tradicionales y aumentar la exploración de nuevas habilidades como el pensamiento crítico, trabajo colaborativo y resolución de problemas.

En esta sección, presentamos los grandes principios que pueden ayudarnos a dar esta orientación a la evaluación y facilitar que contemple, no solo los contenidos curriculares, sino también las competencias que necesitan desarrollar los estudiantes para enfrentar los retos del siglo XXI.

1. Evaluar integralmente contenidos y destrezas

Tradicionalmente, la evaluación ha consistido sobre todo en pruebas de papel y lápiz centradas en medir cuánto sabe el estudiante en términos de memorización de datos y reconocimiento de conceptos. Sin embargo, para evaluar competencias, tenemos que apoyarnos más en estrategias de evaluación basadas en desempeños.

Los estudiantes demuestran lo que saben hacer mediante la ejecución de actividades que les demandan poner en práctica sus competencias, es decir, su aprendizaje integral en cuanto a conocimientos, destrezas y actitudes (Johnson, Johnson y Holubec, 1994).

La evaluación debería contemplar criterios que reflejen evidencia de progreso tanto en conocimientos, como en destrezas y actitudes. Esto supone pensar no solo en los productos (un trabajo escrito, una exposición, un examen, etc.), sino también en los procesos.

Algunos ejemplos de elementos de proceso que interesa evaluar, son: el grado de implicación en las actividades propuestas, la equidad en las contribuciones de los miembros del grupo, las conductas cooperativas presentes, el proceso de resolución de problemas, el manejo del tiempo, la capacidad de escucha, la capacidad de comprender y aceptar los puntos de vista distintos al propio, etc. (Prieto, 2007).

Por último, un requisito esencial que conlleva todo proceso de evaluación es establecer, desde el principio, de manera muy clara los objetivos de aprendizaje y compartir con los estudiantes los criterios con los que se juzgará el éxito de la tarea (inclusive, en algunas oportunidades, acordarlos con ellos).

2. Evaluar para el aprendizaje

En los sistemas educativos se ha privilegiado tradicionalmente la evaluación del aprendizaje, es decir, de los resultados finales. Esta evaluación toma casi siempre la forma de un número o letra con la que se juzga el nivel obtenido por los estudiantes al asimilar ciertos contenidos.

Por el contrario, la evaluación para el aprendizaje tiene por finalidad brindarle al estudiante información que le permita mejorar su aprendizaje, así como estimular su persistencia y la confianza en su propia capacidad de superar las dificultades. Desde esta perspectiva, los errores se consideran como parte natural del proceso de aprendizaje y como oportunidades que desafían e invitan a desarrollar nuevas ideas, conexiones y estrategias conceptuales.

Este tipo de evaluación, denominada también evaluación formativa, fomenta que los estudiantes asuman un papel más activo en sus procesos de aprendizaje, que aprendan a reflexionar sobre cómo están avanzando y cómo mejorar.

Un balance entre la evaluación del aprendizaje y para el aprendizaje permite no sólo contar con valiosa información para los actores involucrados en el sistema educativo, acerca del aprendizaje logrado por los estudiantes, sino también lograr que la evaluación logre su más alto cometido: contribuir a elevar los niveles de aprendizaje y hacer posible que estos se orienten hacia la formación de seres humanos capaces de seguir aprendiendo a lo largo de la vida.

3. Retroalimentar

La retroalimentación es una de las características más relevantes del modelo de evaluación que necesitamos para hacer realidad la educación del siglo XXI. Para que los estudiantes puedan maximizar su aprendizaje, necesitan recibir retroalimentación frecuente sobre su progreso y sus logros, así como ayuda para planear lo que necesitan hacer a continuación. Esto implica establecer productos intermedios, previos al momento de la entrega del trabajo final o de la prueba definitiva, que permitan a los estudiantes obtener realimentación oportuna.

La mejor retroalimentación es la que se da en el marco de relaciones de confianza y respeto entre estudiantes y docentes. Se centra en lo positivo y en elementos que los estudiantes pueden controlar. Confirma que están en la senda correcta o promueve la corrección o mejora de su trabajo. Usa un lenguaje descriptivo (no enjuiciador), específico y concreto (no general y abstracto), orientado hacia qué se puede hacer en concreto para mejorar. Muy importante, promueve la reflexión activa y participativa de los propios estudiantes: no se adelanta a señalar lo que se ha hecho mal, sino que da tiempo para que se pueda reflexionar y generar conciencia propia sobre el proceso y los posibles errores.

El personal docente debe ser capaz de brindar retroalimentación útil y productiva en distintos niveles: a sus estudiantes, a padres y madres, a las personas encargadas de administrar las instituciones educativas, y a quienes diseñan, transforman y deciden el rumbo del sistema educativo.

4. Incorporar oportunidades de autoevaluación y coevaluación

Involucrar de manera activa a los estudiantes en los procesos de evaluación, implica compartir y discutir con ellos los objetivos de aprendizaje y los resultados esperados, y ayudarles para que, individualmente y en grupo, puedan reflexionar sobre sus experiencias, valorar sus fortalezas y necesidades sobre la base de la evidencia, así como planear cómo progresar de acuerdo con criterios acordados con el docente.

Los estudiantes necesitan tener frecuentes oportunidades de autoevaluación para reflexionar sobre sus experiencias y sus resultados de aprendizaje. Tras cada actividad, los estudiantes pueden identificar lo que resultó bien, lo que resultó mal y por qué. Para ello, necesitan tener claros los criterios con los que se evaluará su desempeño y, algo esencial, sentir el apoyo necesario para admitir críticas y sugerencias sin poner en riesgo su autoestima.

Al comienzo, los estudiantes necesitarán ser guiados para saber cómo evaluar su propio trabajo, por lo que será de ayuda obtener insumos tanto de los compañeros como del profesor y compararlos con la propia autoevaluación. Si seguimos apoyando y valorando estos esfuerzos de autoevaluación, formaremos personas seguras de sí mismas, autónomas y autocríticas, al tiempo que obtenemos valiosos insumos para complementar nuestras propias apreciaciones como docentes.

La coevaluación resulta igualmente una poderosa herramienta que fortalece competencias de colaboración y comunicación, y que permite a los estudiantes comprender de manera mucho más profunda los criterios con los que ellos mismos serán evaluados. Además, si se entrena adecuadamente a los estudiantes, contribuye a acelerar la labor del docente, dado que ya no tiene que revisar y retroalimentar él solo todas las producciones de los estudiantes. Entrenar a los estudiantes en la coevaluación significa desarrollar su capacidad para analizar el trabajo de sus compañeros a la luz de los criterios establecidos para evaluar la actividad, así como para comunicar sus observaciones de manera sensible y eficaz.

5. Combinar estrategias y técnicas

A la hora de planificar la evaluación, se tiene que escoger el método o instrumento de evaluación más apropiado para cada actividad, aquel que sea capaz de recoger evidencias que ilustren el logro de los resultados de aprendizaje esperados, de acuerdo con los criterios de evaluación establecidos.

Entre las estrategias más frecuentes, están las pruebas escritas y la realización de productos en distintos formatos (informes, ensayos, diarios, sitios web, videos, mapas conceptuales, estudios de caso, obras artísticas, etc.).

Otra estrategia es la observación, especialmente valiosa para dar cuenta de aprendizajes procedimentales y actitudinales, y una herramienta crucial en la evaluación del trabajo cotidiano. Es importante que la observación sea una acción consciente, ojalá apoyada en el uso de escalas que midan criterios específicos de desempeño con el fin de registrar de un modo sistemático aspectos concretos de la tarea, o bien el desempeño de uno o varios alumnos seleccionados de antemano como objeto de observación. Se puede aplicar en actividades en las que los estudiantes tienen que demostrar mediante conductas las competencias adquiridas (simulaciones, dramatizaciones, presentaciones, debates, etc.), así como para evaluar el proceso seguido por los estudiantes (grado de implicación con la tarea, la actitud de escucha activa y de respeto, calidad del apoyo brindado al grupo, etc.).

2.6. ¿Cómo se puede aplicar el modelo educativo STEAM?

Aunque hay países donde el modelo STEAM se aplica en una sola asignatura, en otra gran mayoría, suelen trabajarla bajo la integración de dos o tres disciplinas en una misma materia. Algunos autores concuerdan que el aprendizaje STEAM no debe realizarse de manera aislada, sino interrelacionando varias asignaturas, conocimientos y explorando su aplicación a situaciones reales e individuales de cada estudiante.

Además, se recomienda que, dependiendo del nivel educativo y los objetivos de aprendizajes, podemos combinarlo con el Aprendizaje Basado en Proyecto (ABP), Gamificación, Juegos educativos, aprendizaje colaborativo, entre otros. La idea es orientar el desarrollo de espacios de aprendizaje bajo la concepción de: “aprender haciendo”.

A continuación, se enumeran algunas recomendaciones que debemos tener en cuenta para aplicar el modelo educativo STEAM:

1. Se debe reconocer a los estudiantes como actores principales, por lo que hay que incentivar su compromiso y el rol activo en su aprendizaje.
2. Es importante promover el aprendizaje cooperativo, con el fin de construir conocimiento.
3. El docente será un facilitador del aprendizaje, el cual generará estrategias de conocimiento y motivación, sin olvidar la emoción.
4. Para iniciar STEAM es importante saber los conocimientos previos de cada uno de los estudiantes que se encuentran en el salón de clases.
5. El Diseño instruccional bajo STEAM debe promover el trabajo arduo, ya que la idea es generar un gran reto para todos los estudiantes, sin caer en los excesos.
6. Las estrategias de aprendizaje y evaluación deben involucrar la retroalimentación a fin de apoyar el aprendizaje.
7. Se debe buscar una actividad o proyecto, cuya elaboración involucre una conexión entre las áreas del conocimiento y las distintas asignaturas, así como un vínculo con la comunidad y su entorno.

2.7. STEAM como iniciativa de reducción de la brecha de género en Costa Rica

A inicios de la década del 2000 muchos estudios realizados alrededor del mundo han demostrado un decrecimiento considerable en la cantidad de estudiantes que se encontraban en disciplinas de ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas, 15 de cada 1000 personas habían finalizado estudios en las áreas anteriormente mencionadas, esto evidenciaba un posible impacto de acuerdo con los análisis realizados con respecto a la proyección de la fuerza laboral en el ámbito tecnológico y científico; esta realidad la estamos afrontando en Costa Rica actualmente; muchas empresas desean invertir en el país, pero no hay suficiente mano de obra calificada en el ámbito tecnológico, que logre satisfacer esas necesidades.

Bajo la sigla en inglés STEAM se agrupan las disciplinas de Ciencias Básicas, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemática. Actualmente estas áreas son consideradas esenciales para el desarrollo de la sociedad y son las que demandan mayor cantidad de trabajadores técnicos y profesionales. Sumado a esto, son las disciplinas que ofrecen mejores salarios en el espacio laboral y otorgan un mayor estatus simbólico. Sin embargo, dentro de estas áreas existe un problema global de segregación ocupacional, donde históricamente se han reproducido estereotipos de género que categorizan ciertos trabajos y disciplinas como "masculinas", dificultando el acceso y la aceptación de las mujeres en diversas áreas de la economía (Anker, 1997).

La segregación ocupacional y los estereotipos de género son reproducidos en gran parte durante la formación escolar, etapa donde existen importantes diferencias en la estimulación y los resultados obtenidos en Ciencias y Matemáticas por parte de niños y niñas, haciendo que ellas se vean menos atraídas por estas disciplinas al momento de elegir una carrera técnica o profesional. Corregir la brecha de participación femenina en las disciplinas STEAM es muy relevante para el sistema político de un país, pues existe evidencia suficiente para indicar que hay una correlación positiva entre la paridad en el desempeño en Ciencias Básicas y Matemáticas y menores brechas de género en participación laboral e igualdad de género (OECD, 2015).

Costa Rica ha logrado asegurar el acceso a la educación para nuestras niñas y jóvenes, logrando un acceso igualitario a la educación constitucionalmente obligatoria y gratuita. El reto pendiente es la mejora en las condiciones inclusivas en las que las mujeres estudian. Según los resultados de las Pruebas Pisa, del 2012, los jóvenes de 15 años alcanzan un rendimiento menor que las mujeres de la misma edad. Sin embargo, la evaluación evidencia que es necesario fortalecer la confianza que las mujeres tienen en sí mismas. En la mayoría de los países participantes en PISA, entre los alumnos de buen rendimiento, las mujeres tienen peor rendimiento en matemáticas que los hombres.

Por esta razón, el Ministerio de Educación Pública implementa la Política de Equidad e Igualdad de Género de forma integral y sostenida, con el objetivo de fortalecer la equidad entre hombres y mujeres en el quehacer educativo nacional, tanto en el ámbito administrativo como académico. Entre los ejes de esta política se incorpora la promoción de Igualdad de Género y no discriminación entre personas que integran el MEP (estudiantes, docentes y administrativos), la educación con enfoque de género y la gestión administrativa con enfoque de género.

De forma paralela, el MEP trabaja en conjunto con el INAMU procesos de capacitación y programas específicos como “Escuelas para el Cambio”, el cual facilita a todo al personal docente y administrativo un sistema conceptual, metodológico y operativo para la implementación, fortalecimiento e institucionalización de prácticas a favor de la igualdad y equidad de género.

Es evidente que las áreas STEAM siguen siendo un terreno donde principalmente participan hombres, sin embargo, existen importantes diferencias entre las disciplinas que se agrupan bajo esta sigla. Además, es claro que este problema no es exclusivo, sino que las brechas de género en estas áreas del conocimiento están presentes en la mayoría de los países. Ante esto, la OCDE y la UNESCO han elaborado un listado de recomendaciones para que los países promuevan que cada una de las disciplinas sean inclusivas y atractivas para niños y niñas de igual forma (OCDE, 2013; UNESCO, 2016). Por ende, dado que gran parte de los análisis sobre el tema revelan que la intervención debe realizarse a nivel escolar, buscando la eliminación de todos los estereotipos de género para que no sigan afectando las opciones de vida de las generaciones futuras y así avanzar para que hombres y mujeres se involucren en igualdad de condiciones dentro de cada una de las disciplinas. Frente a estas recomendaciones, los países miembros de la OCDE han diseñado distintas políticas para fomentar la participación e involucramiento de niñas y adolescentes en las áreas STEAM.

Por ejemplo, desde el 2013 en Hungría se han examinado los textos escolares para asegurar que los y las niñas no se expongan a estereotipos de género, además de asegurar que todos los libros de estudio presenten ejemplos de mujeres que se desempeñan en cada una de las disciplinas. Por otro lado, hay países que han dirigido sus políticas no solamente dentro de las aulas, como es el caso de Inglaterra, que ha centrado las intervenciones tanto en estudiantes, como en padres y docentes. Por ejemplo, el programa “el futuro de su hija” busca diversificar las expectativas profesionales que tengan los padres y las madres sobre niñas y adolescentes.

Al mismo tiempo, se han elaborado guías para contrarrestar los estereotipos de género que se reproducen dentro de las salas de clase y en las instancias de asesoramiento vocacional. En Alemania y Japón las políticas de intervención están centradas en establecer alianzas entre el Estado, las empresas, la academia y los medios de comunicación para fomentar que las mujeres jóvenes opten por cursos científicos o asociados a la tecnología. Por su parte, México ha implementado un programa que busca poner en contacto a mujeres que han tenido carreras destacadas en disciplinas STEAM con niñas escolares, para compartir su experiencia y motivarlas a que sigan una carrera profesional en estas áreas.

Otro ejemplo es Israel, que ha diseñado programas de mentorías para que estudiantes de la Educación Superior cumplan el rol de tutores/ as con estudiantes de Enseñanza Media para fomentar el interés de niños y niñas en Ciencias, Computación e Ingeniería. Por último, en los Países Bajos, la política para incentivar a las mujeres jóvenes a involucrarse en carreras STEAM ha incluido campañas para sensibilizar a padres, madres y profesores respecto a los sesgos de género en las instituciones educativas y en las expectativas profesionales hacia niños y niñas, lo cual ha sido acompañado de programas que buscan que los hombres se desenvuelvan en áreas que históricamente han estado feminizadas, especialmente en la Educación.

Sumado a estas políticas, para eliminar los sesgos de género en la educación escolar, es necesario tener en cuenta el impacto que tiene la baja participación y visualización de las mujeres que se desempeñan en la investigación y en la docencia en áreas STEAM. Es por esto que la presencia y participación de mujeres que se desempeñan en estas áreas tiene un impacto importante en el avance de la equidad de género, pues permite que las mujeres que ya se encuentran en la educación superior tengan una mirada más amplia de sus trayectorias a futuro y por otro lado se transforman en modelos a seguir para niñas y jóvenes que tienen que decidir su futuro en la educación superior.

Para mejorar el escenario adverso en Costa Rica, es clave observar con detención el estado actual de las carreras STEAM y las experiencias internacionales, tanto en sus resultados como en la diversidad de políticas que son posibles de aplicar. Además, se debe tener en cuenta las diferencias que existen entre las áreas y sus problemas específicos, ya que, como se evidencia en las estadísticas universitarias, las Ciencias Básicas no presentan grandes brechas de género en cuanto a la matrícula de educación superior, sin embargo, siguen siendo las disciplinas con menos estudiantes entre todas las áreas del conocimiento, asunto que podría ser crítico si se consideran los desafíos a nivel, la evidencia indica que es de suma importancia que las estudiantes de educación superior tengan referentes de su mismo sexo dentro del ámbito académico, especialmente en disciplinas que han estado históricamente masculinizadas, pues sirven de ejemplo del éxito que las mujeres pueden llegar a tener y la posibilidad de superar las barreras tradicionales de género de productividad de nuestro país.

Ante esto, el objetivo debe estar orientado hacia un mayor desarrollo científico en general y a una mayor formación de mujeres en Ingeniería. Así, estaremos acercándonos a que en las carreras STEAM se desarrollen mujeres y hombres de manera equitativa, aportando cada uno al crecimiento de la capacidad científica e innovadora de Costa Rica.

3. Conclusiones y recomendaciones

Actualmente existen organizaciones sin fines de lucro, cuyo único objetivo es la disminución de la gran brecha de genero existente a nivel mundial. Prueba de la desigualdad de género existente es que, solo el 20% de las personas graduadas en ingeniería son mujeres, de ellas solo representan el 11% de los ingenieros activos en el mercado laboral a nivel mundial. Los números indudablemente son alarmantes, y de mayor impacto resulta saber que diez años después de graduarse, solo 3 de cada 100 mujeres continúan trabajando en campos relacionados con las STEAM.

Ante esta problemática, Costa Rica no se puede quedar atrás, las universidades públicas y privadas deben realizar campañas en los centros educativos de secundaria promoviendo la elección de carreras relacionadas con las materias STEAM por parte de las jóvenes. Claro está, que cada docente de primaria y secundaria, debe poner un granito de arena, fomentando el desarrollo de habilidades y poniendo en práctica el aprendizaje por competencias en el aula esto fundamentalmente porque son primordiales para que los niños y niñas, se inclinen notoriamente por carreras a futuro relacionadas con STEAM y que demanden gran oportunidad laboral tanto en el campo nacional como internacional.

Aunque no siempre las políticas de cambio son bien aceptadas por los seres humanos, resulta bastante alentador saber que el Ministerio de Educación Publica en conjunto con el INAMU se encuentra capacitando a los docentes de muchos centros educativos en materia STEAM.

Según datos del MEP, para el año 2022 serán 108 centros educativos de secundaria con catalogados y capacitados como Centros Educativos STEAM. Los objetivos principales que muestra este proyecto son:

1. Desarrollar acciones dentro del sistema educativo que permita la incorporación de las áreas STEAM con perspectiva de género.
2. Propiciar experiencias pedagógicas que permita la exploración individual y grupal de habilidades, intereses, aptitudes y valores en la población estudiantil.
3. Incrementar la divulgación e información de las opciones educativas, laborales u ocupacionales con mayor proyección laboral dirigido a la población estudiantil.

Con esto, se puede concluir que la metodología STEAM es sumamente necesaria para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de los centros educativos, y mucho más importante a nivel de aula. Cada docente debe tener la obligación de informarse sobre los pormenores del proyecto y así ponerlo en práctica en sus lecciones, con el único propósito de ofrecerle a sus estudiantes las mejores herramientas para su futuro, con miras a la mejor elección vocacional y a un excelente desempeño laboral.

4. Bibliografía

Anker, R. (1997). La segregación profesional entre hombres y mujeres. Repasos de las Teoría. Revista internacional del trabajo, Vol. 116, núm. 3. Otoño, pp. 343-370.

Blanco, L. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Epsilon* (25), 49-60.

Bonotto C. (2010). Realistic Mathematical Modeling and Problem Posing. In: Lesh R, Galbraith P., Haines C., Hurford A. (Eds) *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 399-408). Springer US.

Competencias para el siglo XXI: Guía práctica para promover su aprendizaje y evaluación.
/San José, Costa Rica: FOD, 2014.

Diego-Mantecón, J. M., Bravo, A., Arcera, O., Cañizal, P., Blanco, T. F., Recio, T., González-Ruiz, I. and Istúriz, M. P. (2017). Desarrollo de cinco actividades STEAM con formato KIKS. In *Proceedings of VIII CIBEM*. Madrid, Spain.

Diego-Mantecón, J. M., Sáenz de la Torre, J.J., Brzozowy, M. (2017). Proyecto STEMforYouth. In *Proceedings of VIII CIBEM*. Madrid, Spain.

Evirtualplus, M. A. C.-fundadora de, Rojas, J., Acuña, M., Heli, & Martínez, F. (2018, October 21). STEAM: modelo educativo para aprender creando. Disponible en https://www.evirtualplus.com/modelo-educativo-steam/

Fenyvesi, K., Téglási, I., & Szilágyi, I. (Eds.). (2014). Adventures on Paper-Math-Art Activities for Experience-centered Education of Mathematics. Eger: Eszterházy Károly College.

Font, V. (2006). Problemas en un contexto cotidiano. *Cuadernos de pedagogía*, *355*, 52-54.

Fortus, D., Krajcik, J., Dershimer, R. C., Marx, R. W., & Mamlok---Naaman, R. (2005). Design-based science and real-world problem-solving. *International Journal of Science Education*, *27*(7), 855-879.

Fortus, D., Krajcikb, J., Dershimerb, R. C., Marx, R. W., y Mamlok-Naamand, R. (2005). Design-based science and real-world problem solving. International Journal of Science Education, Vol 27, No. 7, pp. 855–879.

Fullan, M. y Langworthy, M. (2014). *A Rich Seam. How New Pedagogies Find Deep Learning. Pearson.* Disponible en http://www.michaelfullan.ca/wp-content/uploads/2014/01/3897.Rich_Seam_web.pdf

Iniciativa mundial Teach(her) promueve a niñas y adolescentes a ser ingenieras, matemáticas y científicas: Ministerio de Educación Pública. (n.d.). Disponible en https://www.mep.go.cr/noticias/iniciativa-mundial-teachher-promueve-ninas-adolescentes-ser-ingenieras-matematicas-cientifi

Johnson, D.W.; Johnson, R.J. y Holubec, E. (1994). *The nuts and volts of cooperative learning.* Edina: Interaction Book Company.

Mujer, C. (2017). Mujer y trabajo: Brecha de género en STEM, la ausencia de mujeres en Ingeniería y Matemáticas. *Comunidad Mujer*. *Santiago: Comunidad Mujer*.

OECD (2013). Recommendation of the Council on Gender Equiality in Education, Employment and Entrepreneurship.

OCDE (2014). Assessing problem-solving skills in PISA 2012. En PISA 2012 results: creative problem-solving (Volumen V): students' skills in tackling real-life problems. OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264208070-6-en

OECD (2015). The ABC of Gender Equality in Education: Aptitude, Behaviour, ConfIdence, PISA, OECD Publishing.

OECD (2016), *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*, OECD Publishing, Paris. (Extraído de http://dx.doi.org/10.1787/9789264255425 en 15 diciembre 2017)

OECD (2017), *PISA 2015 Results (Volume V): Collaborative Problem Solving*, OECD Publishing, Paris. (Extraido de http://dx.doi.org/10.1787/9789264285521-en,18 diciembre 2017)

Prieto, L. (2007). *El aprendizaje cooperativo.* Madrid: PPC.

Redacción. (2019, March 17). STEAM, inversión para el futuro. Retrieved from https://www.elmundo.cr/opinion/steam-inversion-para-el-futuro/

Rocard, M., Csermely, P., Walwerg-Henriksson, H., y Hemmo, V. (2007). Science Education now: a renewed pedagogy for the future of Europe. Bruselas: Comisión Europea. ISBN-978-92.

UNESCO (2016). Inequidad de género en los logros de aprendizaje en educación primaria ¿Qué nos puede decir TERCE? Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe. OREALC/UNESCO, Santiago.

Watkins, C. (2003). *Learning: a sense making guide.* Londres: Association of Teachers and Lecturers. Disponible en:https://www.ioe.ac.uk/about/documents/Watkins_03_Learning.pdf

Yakman, G. (2008). STEAM Education: an overview of creating a modelo f integrative education. En M.J. de Vries (Ed.), PATT-17 and PATT-19 Proceedings (pp. 335-358). Reston, V.A.: ITEEA

Yakman, G. & Lee, Y. (2012). Exploring the exemplary STEAM education in the U.S. as a practical educational framework for Korea. Journal of Korea Association Science Education, 32(6), 1072-1086.

USO DE LA TECNOLOGÍA EN ACTIVIDADES DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

M. Sc. Karen Porras Lizano
Universidad Nacional, Costa Rica
karen.porras.lizano@una.ac.cr

M. Sc. Jorge Arroyo Hernández
Universidad Nacional, Costa Rica
jorge.arroyo.hernandez@una.ac.cr

Resumen: Este trabajo analiza el proceso de aprendizaje de estudiantes, usando como recurso de enseñanza el software GeoGebra, al resolver actividades de modelización matemática. Se utiliza un estudio de casos con dos grupos, para comparar la abstracción de conocimientos usando software. Se utilizaron diversas técnicas de recolección de información: la observación participante, el análisis de las producciones escritas de los estudiantes y la entrevista clínica. Se encuentra resultados como: el uso del software GeoGebra permitió un mejor razonamiento y análisis del objeto matemático; mejoró el proceso de abstracción de los conocimientos, también propició la motivación y actitud del estudiante hacia la matemática. Además, se encontró evidencias de la relación entre la matemática con otras disciplinas y en la misma línea de la metodología STEM, se encontró que los estudiantes generaron las soluciones del problema sin intervención del docente, propiciando el papel activo del estudiante en su aprendizaje matemático.
Palabras clave: Modelización matemática, educación secundaria, tecnología, función cuadrática, GeoGebra.

Abstract: This document analyzes the learning process of students, using the software GeoGebra as a teaching resource when they develop mathematical modeling activities. This research has a qualitative approach, with a case study of two groups to compare the abstraction of knowledge using software. The information was collected through techniques like analysis of the observation, the written production of the students, and a clinical interview. Some of the obtained results are that the use of GeoGebra software allows a better reasoning and analysis of the mathematical object; improves the process of knowledge abstraction, also it encourages the motivation and attitude of the student towards mathematics. Also, it was found evidence of the relationship between mathematics with other disciplines and in the same line of the STEM methodology, it was found that the students generate the solutions of the problem without the teacher intervention, thus promotes the active role of the student in their mathematical learning.
Keywords: Mathematical modeling, secondary education, technology, quadratic function, GeoGebra.

1. Introducción

Con la finalidad de formar personas de acuerdo con las nuevas tendencias dominantes del mundo, el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP) pone en vigencia en 2012 el Programa de Estudios en Matemática para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado (MEP, 2012), donde se hace énfasis de la utilización de la tecnología en la resolución de problemas del entorno como una herramienta en el proceso de modelización matemática.

La modelización matemática como método de enseñanza facilita la "búsqueda de modelos matemáticos que permitan una comprensión profunda de situaciones reales" (Bassanezzi y Biembergut, 1997, p. 13), usando para esto la matemática como herramienta, al mismo tiempo que los estudiantes construyen sistemas conceptuales que son a menudo, más sofisticados que aquellos se han tratado de enseñar de forma tradicional (Lesh y English, 2005).

En esta línea, el utilizar la modelización matemática como metodología de enseñanza pretende dotar a los estudiantes de habilidades como la comunicación, el trabajo en equipo, capacidad de adoptar y adaptar herramientas conceptuales rápidamente, la capacidad de construir, describir y explicar sistemas complejos; y además, la habilidad de enfrentar con éxito problemas de alta complejidad, entre otros (Lesh, Zawojewski y Carmona, 2003).

Esta investigación tiene como objetivo analizar el apoyo que pueda brindar un software en el aprendizaje matemático durante el proceso de la modelización. El fin es analizar si la ayuda del software provee mejores opciones al estudiante para cuantificar, comparar y modelar situaciones reales de la vida cotidiana, y en consecuencia, si mejora su grado de abstracción del conocimiento.
Para este caso particular, se utilizó el contexto matemático de funciones reales de variable real de criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. Además, por ser acceso libre, sus múltiples funciones, facilidad de uso y versatilidad en geometría y álgebra, se eligió el software GeoGebra[1] (Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., y Lavicza, 2008) para el desarrollo de la actividad.

2. Aspectos teóricos

2.1. Modelización matemática en ambientes educativos

Los modelos matemáticos son concebidos como una estructura conceptual, conformada por elementos, relaciones, operaciones y reglas que rigen las acciones, los cuales se pueden expresar en otros sistemas de notación externos (Lesh y Doerr, 2003). Asimismo, los modelos pueden ser usados para "construir, describir o explicar los comportamientos de otro (s) sistema (s) tal vez para que otro sistema pueda ser manipulado o predicho de forma inteligente" (Lesh y Doerr, 2003, p. 10). Donde lo esencial del proceso de modelización radica en la forma de matematizar la realidad del entorno.
Además, según la propuesta del programa de matemática del MEP (2012), el profesor puede aplicar el proceso de modelización en el aula, a través de las siguientes etapas o pasos: (a) problema, (b) sistematización, (c) modelo matemático, (d) solución y (e) evaluación. Autores como Lesh y Doerr (2003) unen las dos primeras etapas, donde se presenta al estudiante la situación problema para ser analizada. En esta misma etapa, el estudiante extrae la información relevante de problema. En la etapa (c), se realiza una traducción de los objetos y las relaciones del paso anterior al lenguaje matemático de tal forma que se dé la creación del modelo matemático. Posteriormente, en la etapa (d) se resuelve el modelo matemático, con la finalidad de obtener una solución de la situación problema. Finalmente, en la etapa (e) se realiza una verificación de los resultados matemáticos, a la luz de las condiciones del problema.
Además, entre las virtudes que posee el poner en práctica el proceso de modelización en el aula, destacamos que al resolver problemas con contextos reales se muestra el significado y utilidad de la matemática, tiene un enorme potencial en el aula pues permite establecer andamios para la construcción de los aprendizajes desde lo concreto hacia lo abstracto (MEP, 2012; López, Molina y Castro, 2017; Plymouth, 2002) y a la vez se puede lograr un "efecto motivador y de mejora en las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas" (López, Molina y Castro, 2017, p. 76).
También, otros estudios destacan que el utilizar actividades de modelización permite mostrar el carácter interdisciplinario de la matemática, motivando el aprendizaje sobre distintas áreas disciplinarias relacionadas con esta, como lo son la ciencia, Física, Biología, Economía, Informática, entre otras; mejora a la vez la compresión conceptual e incentiva una formación integral, eficaz y significativa del estudiante (Blomhøj y Hoff Kjeldsen, 2006; Masanja, 2002; Michelsen, 2006), como es el caso de esta investigación.

[1] Puede ser obtenido en www.geogebra.org

2.2 Software GeoGebra

El software gratuito de matemática GeoGebra es utilizado en todos los niveles del sistema educativo. Permite realizar actividades dinámicas de distintas áreas de la matemática como funciones, geometría, álgebra, estadística, entre otros. Utilizando para ello, sistemas de representación como el gráfico, numérico, algebraico, entre otros (ver figura1). También agiliza los procesos matemáticos y brinda oportunidades excelentes para la experimentación en actividades interdisciplinarias, como la matemática, ciencias, ingeniería y tecnología (STEM). Ejemplo de esto es la actividad propuesta en esta investigación.

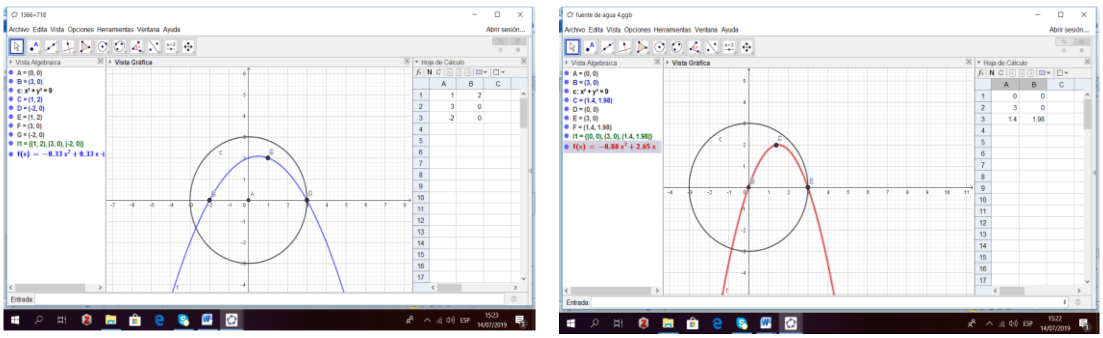


Figura 1. Modelo gráfico de la solución de la actividad la "Fuente de agua" realizado con GeoGebra.
Fuente: Elaboración propia

2.2. El uso de la tecnología en la modelización matemática

Con los grandes avances en la tecnología digital, han surgido nuevas propuestas de incorporar estrategias tecnológicas en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática. La introducción de la tecnología en el aula del sistema escolar costarricense ha sido un proceso lento, pero necesario en particular al modelar la realidad de una situación problema (MEP, 2012). Con ayuda del software para el apoyo de actividades para la enseñanza de las matemáticas tales como el *GeoGebra* (2002), *Mathematica* (1988), entre otros; el proceso de modelización matemática se realiza de una forma eficaz, ágil y fácil (Burkhardt, 2006; MEP, 2012).

En la misma línea, Araya (2016), Pérez y Silva (2016) utilizan la modelización matemática y la educación STEM, como un reto al integrar diferentes disciplinas del conocimiento que normalmente no son combinadas y se conciben sin relación entre ellas, por ejemplo, en biología, la matemática y la tecnología, entre otras. Además, se incentiva el trabajo en equipo y la participación activa en el aprendizaje del estudiante, donde el papel del profesor es de guía en el proceso.

Investigaciones como las de Plymouth (2002), Son y Lew (2006), destacan que al introducir el uso de la tecnología digital en el proceso de modelización matemática se obtiene ventajas como el lograr el desarrollo de las fases de modelado de una forma más eficaz (específicamente en las etapas de interpretación y el análisis de un problema), generalmente ahorro de tiempo y esfuerzo en la generación de las soluciones, contribuir a la formación de herramientas mentales como la criticidad y justificación válida de los conceptos matemáticos, entre otras.

3. Metodología

Esta investigación siguió un enfoque cualitativo, con propósito de exploración descriptiva (Mc Millan y Schumacher, 2008) y un diseño de estudio de casos grupal, donde se examinó exhaustivamente el fenómeno y dotando de importancia los significados de la experiencia vivida desde su propia perspectiva de los participantes (Hernández-Sampieri, Fernández y Baptista, 2014), sin perseguir ninguna clase de generalización.

3.1 Protagonistas

Los protagonistas fueron 6 estudiantes de un grupo de nivel de noveno año, de un colegio diurno académico de la provincia de San José, cuya edad promedio fue de 15 años y un estatus socioeconómico medio-bajo. Seleccionamos este tipo de estudiante, pues en las actividades realizadas se utilizó el tema de funciones cuadráticas como contexto matemático, el cual está contemplado para el nivel de noveno año según el Programa de Estudios del Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012).

Además, los 6 estudiantes fueron subdivididos en dos grupos de igual cantidad, en cada uno se distribuyó estudiantes de rendimiento académico alto, medio y bajo. Al primer subgrupo se le aplicó la actividad de modelización matemática con el uso de la tecnología (grupo experimental) y al segundo se le aplicó la misma actividad, pero sin tecnología (grupo control), con el fin de observar similitudes y diferencias en ambos grupos.

3.2 Técnicas e instrumentos de recolección de información

Para realizar la recolección de información se utilizaron técnicas como la observación participante, análisis de producciones escritas de la actividad de modelización matemática y la entrevista clínica. Con la primera técnica se obtuvo evidencias sobre la evolución del proceso de pensamiento de los dos subgrupos al utilizar el proceso de modelización matemática. La segunda técnica sirvió para analizar informes escritos y los trabajos de aula de los estudiantes. Por último, con las entrevistas se profundizó en los resultados obtenidos acerca del proceso de modelización matemática aplicado por los estudiantes participantes. Además, se grabó las sesiones con el fin realizar un análisis más exhaustivo de toda la información.

Se utilizaron dos tipos de instrumentos para recolectar los datos. El primer instrumento fue una actividad de modelización matemática denominada “Fuente de agua” (ver apéndice), la cual fue validada por medio de expertos y a través de una prueba piloto con estudiantes. La actividad utilizó el contexto matemático de funciones cuadráticas aplicado en la trayectoria parabólica de una fuente de agua. Además, este instrumento se utilizó como actividad introductoria al tema de funciones cuadráticas, es decir no se había realizado el proceso de formalización.

El personaje principal de la actividad fue Don José, un ingeniero, que debe realizar la mejor aproximación de la trayectoria del agua, utilizando para esto tres puntos del plano cartesiano como guía en una simulación virtual con el software matemático GeoGebra. Además, debe determinar la altura máxima de los chorros de agua de tal manera que la fuente represente visualmente una obra majestuosa y agradable para el observador. Específicamente, la situación problema se resume de la siguiente forma:

"*Don José, ingeniero encargado de construir una fuente de agua realiza sus cálculos matemáticos erróneamente y al probar una simulación virtual del problema descubre que el chorro de agua traspasa el centro de la fuente de radio 3cm, donde un 1cm equivale a 1m de la realidad, el utiliza tres puntos de la trayectoria parabólica para darse cuenta de esto, estos son (1,2); (3,0); (-2, 0). El punto inicial de la trayectoria es el (3,0).*

¿Qué ajustes debe realizar Don José para obtener una mejor aproximación de la trayectoria del chorro de agua? ¿Cuál podría ser la altura máxima de los chorros de agua de tal manera que Don José logre un diseño majestuoso en su obra?"

Esta actividad fue creada con la intención de relacionar los conocimientos matemáticos de funciones cuadráticas con el tema de movimientos de Ciencias a nivel de noveno año, con lo que mostramos el carácter interdisciplinario de la matemática.
El segundo instrumento fue un cuestionario particularizado con preguntas abiertas utilizado en las entrevistas clínicas, acerca del razonamiento aplicado en las soluciones al resolver la situación problema propuesto de la actividad.

3.3 Categorías de Análisis

De los referentes teóricos utilizados en este estudio, se crean las siguientes categorías con el fin de ordenar la información que recolectemos de los instrumentos:

Categoría 1. En esta parte incluimos toda la información relacionada a la aplicación de las etapas del proceso de modelización matemática al resolver la actividad propuesta, específicamente la sistematización de la información, el modelo matemático utilizado para resolver el problema, los distintos tipos de representaciones del objeto matemático, las estrategias al resolver el problema, errores cometidos durante la resolución del problema, entre otros.
Categoría 2. Información que evidencie la relación de matemática con otras disciplinas.
Categoría 3. En esta sección se contempla la información acerca las actitudes del estudiante al resolver la actividad propuesta en el estudio.

4. Análisis de resultados

A continuación, se presentan los principales resultados de la investigación distribuidos en cuatro apartados. El primer apartado describe toda la información relacionada con el proceso de modelización matemática aplicado por el grupo experimental. En el segundo apartado se describe el proceso realizado por el grupo control. En tercer lugar, se presentan los resultados al relacionar la matemática con otras disciplinas. Por último, en el cuarto apartado se encuentran los resultados acerca de las actitudes de los estudiantes al resolver la actividad propuesta.

4.1 Proceso de modelización matemática sin el uso de la tecnología

Los estudiantes participantes de este grupo estaban conformados de tal manera que representaran los distintos rendimientos académicos que poseía el grupo original de noveno, específicamente se tomaron en cuenta 1 estudiante de rendimiento bajo, 1 estudiante de rendimiento medio y 1 estudiante de rendimiento alto. Por ello, las soluciones propuestas fueron muy diversas al resolver la actividad sin el uso de tecnología.

Los tres estudiantes aplicaron las etapas (a) y (b) del proceso de modelización matemática, es decir realizaron un proceso de sistematización, extrayendo solo la información necesaria para resolver la situación problema.
De igual manera, los estudiantes participantes aplicaron la etapa (c), la creación del modelo matemático, los tres estudiantes coinciden en utilizar la circunferencia como objeto matemático que mejor se adapta a la situación. Para evidenciar esto, los estudiantes realizan una representación gráfica de la circunferencia relacionado esta con los ejes del plano cartesiano sin utilizar tecnología, como se observa en la siguiente figura:

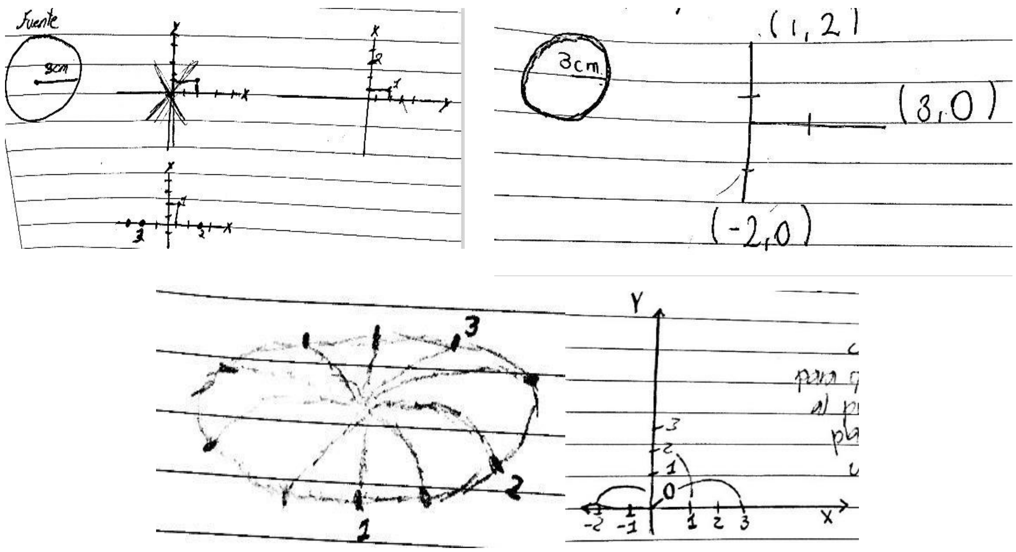


Figura 2. Ejemplo del objeto matemático utilizado por los estudiantes participantes para resolver problema propuesto sin usar tecnología.
Fuente: Elaboración propia

En cuanto, los procesos de resolución del problema fueron muy diversos, en la figura 3 encontramos la solución realizada por el estudiante participante con rendimiento bajo.

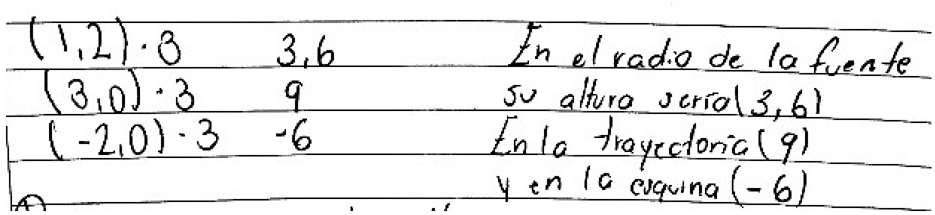


Figura 3. Ejemplo de solución del problema propuesto por el estudiante bajo rendimiento sin usar tecnología.
Fuente: Elaboración propia

El estudiante considera que los ajustes que Don José debe realizar es modificar los puntos de la trayectoria para lograr el objetivo del problema, para esto realiza el producto de cada una de las componentes del par ordenado por la medida del radio, esto se evidencia en la frase que brinda el estudiante en su solución "*Pienso que para sacar la altura de los puntos de la* *trayectoria tengo que multiplicarlos por el radio*". Por lo que, cambia el punto (1, 2) por el punto (3,6) y afirma que la altura máxima de la fuente debe obtenerse en ese punto, con lo cual encontramos un error conceptual. De igual manera, repite el mismo proceso anterior con los puntos (3,0) y (-2,0), pero en este caso afirma que en la trayectoria el punto que debe quedar es 9 y en el final de esta es -6, en estos argumentos también se presentan errores conceptuales.

Para confirmar este proceso se realizó una entrevista clínica al estudiante, los resultados se muestran en el siguiente diálogo:

> *Profesora: ¿Qué procedimiento realizó con los puntos y la medida del radio?*
> *Estudiante: Realice la multiplicación.*
> *Profesora: ¿La multiplicación del 3 por cada uno de las componentes del par ordenado?*
> *Estudiantes: Si así es profe.*
> *Profesora: Pero al realizar este proceso, que pasó con el resultado de la multiplicación del 3 por el 0 (señalando la multiplicación del escalar 3 por la segunda componente del par ordenado).*
> *Estudiante: Pues no se profe, eso fue lo que me dio con la calculadora.*
> *Profesora: ¿Cómo se realiza ese procedimiento en la calculadora?*
> *Estudiante: Le voy a mostrar cómo profe.*

Al realizar la operación en la calculadora la estudiante introduce la expresión confundiendo el punto decimal con la coma que separa las componentes del par ordenado, por ello el resultado que obtenía era 9 y no $(9, 0)$ cómo debía ser. Por lo tanto, esta solución no verifica las condiciones del problema.

En la primera imagen de la figura 4, se expone la solución del problema realizada por el estudiante de rendimiento medio.

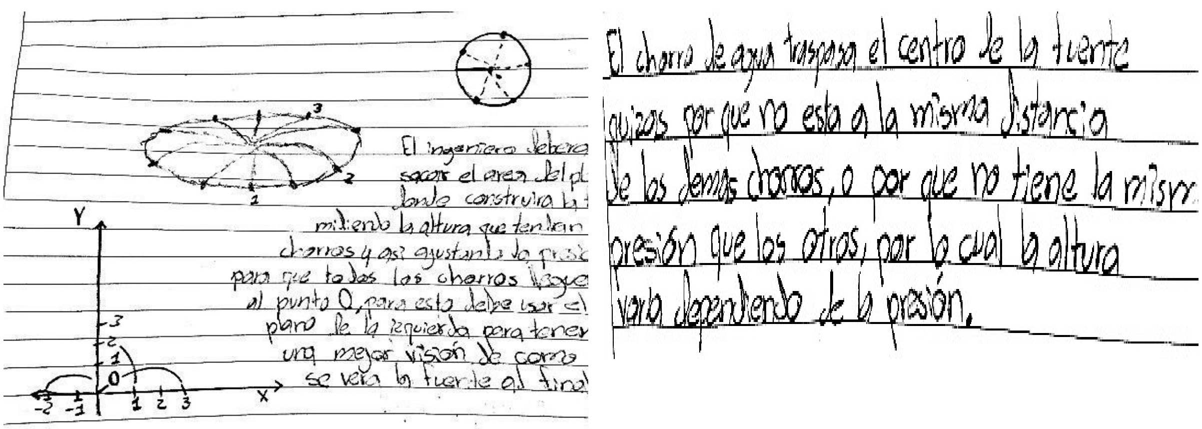


Figura 4. Ejemplo de solución del problema propuesto por el estudiante medio rendimiento sin usar tecnología.
Fuente: Elaboración propia

En esta solución, el estudiante utiliza como estrategia para resolver el problema una representación gráfica de la fuente y propone argumentos basados en su experiencia cotidiana como el "ajustar la presión de la manguera" para obtener la trayectoria de la parábola ideal

ISBN 978-9930-541-76-0

de los chorros de agua. Además, el estudiante deduce que la altura depende de la presión del agua que se le aplique a la manguera. Esto lo reafirmamos con los resultados de la entrevista clínica, expuestos en el siguiente diálogo:

> *Profesora: ¿Qué procedimiento aplicaste al resolver el problema?*
> *Estudiante: Lo resolví usando la lógica, si por ejemplo abrimos un tubo y tiene mucha presión el chorro de agua va a ser largo, pero si cerramos el tubo un poco el chorro de agua es más corto.*

Con lo cual se considera que el estudiante realizó suposiciones basadas en su experiencia cotidiana, pero a la vez con argumentos de la disciplina de Física y sin aplicar argumentos matemáticos válidos.
Otra propuesta de solución es el proceso realizado por el estudiante de rendimiento alto, que se presenta en la siguiente figura:

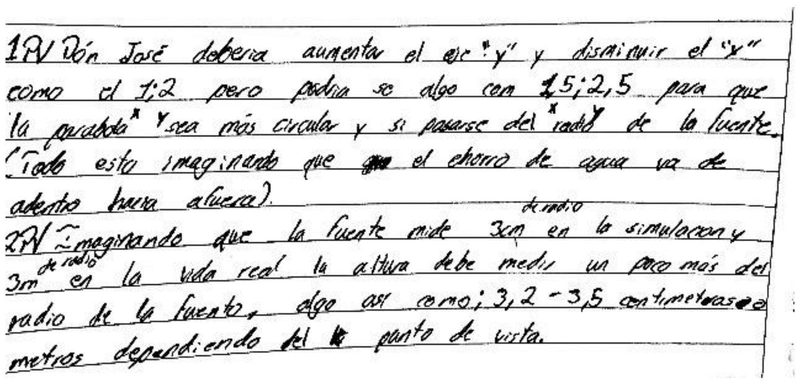

1R/ Dón José deberia aumenta el eje "y" y disminuir el "x" como el 1;2 pero podria se algo con 1,5;2,5 para que la parabola x y sea más circular y si pasarse del x radio y de la fuente. (Todo esto imaginando que el chorro de agua va de adentro hacia afuera).
2R/ Imaginando que la fuente mide 3cm de radio en la simulacion y 3m de radio en la vida real la altura debe medir un poco más del radio de la fuente, algo así como; 3,2 - 3,5 centimetros o metros dependiendo del punto de vista.

Figura 5. Ejemplo de solución del problema propuesto por el estudiante alto rendimiento sin usar tecnología.
Fuente: Elaboración propia

El estudiante realiza un planteo más analítico a través de la ubicación de los puntos en el plano cartesiano (ver imagen 1 de la figura 2), pero realizando un ajuste a la escala establecida en los ejes. También, considera que el punto máximo de la parábola puede ser dos posibles soluciones $(1, 2)$ y $(1.5, 2.5)$. Sin embargo, se inclina más por la segunda propuesta, pues la finalidad de la solución es obtener una parábola más cerrada y que la distancia entre las intersecciones con el eje X no se extiendan más allá de la distancia del radio de la fuente. El estudiante realiza una aproximación de la respuesta correcta del problema.
De igual manera, el estudiante profundiza en su argumento planteando el caso hipotético de que, si la fuente en la vida real tiene un radio de 3 metros de longitud, por lo que considera que la altura máxima debe ser 3.2 metros aproximadamente en distancias reales. Sin embargo, el estudiante no justifica el proceso utilizado para deducir este dato y por ello, se aplica una entrevista clínica para conocer más acerca de este pensamiento.

> *Profesora: ¿Cómo lograste deducir que la altura máxima es 3,2 metros?*
> *Estudiante: Lo hice aproximando, es decir si alzo un poquito el largo del chorro, no tanto para que no se salga. Digamos por ejemplo si es 1 metro, pero se queda corto, por lo que necesitamos aumentar un poquito más como 1,5 metros. Con eso no se sale de la fuente.*

> *Estudiante: Si el radio de la fuente mide 3metros, me imagino que la altura debe sobrepasar la medida del radio y quedar como a la mitad (se refiere a la mitad del radio en el eje X). Creo que la altura debe sobrepasar la medida del radio, pero que no se salga de este.*

Por lo tanto, vemos que para obtener el valor de 3,2 metros el estudiante realiza una aproximación intuitiva, sin realizar un cálculo escrito, sino más bien un cálculo mental y basado en argumentos del área de Física.

Finalmente, ninguno de los estudiantes aplicó la etapa (e) del proceso de modelización matemática, la evaluación de la solución planteada con el objetivo de observar deficiencias presentadas en los argumentos utilizados al resolver el problema, es decir realizar un análisis retrospectivo de la información a la luz de las condiciones del problema.

4.2 Proceso de modelización matemática con el uso de la tecnología

De igual manera que en el apartado anterior, para resolver la actividad con el uso de la tecnología se seleccionó un grupo de tres estudiantes con distintos rendimientos académicos, con el fin de representar las mismas condiciones que poseían el grupo original de noveno. En total se escogieron 3 estudiantes, cuyas soluciones fueron diversas en su abordaje.

Los tres estudiantes realizan las etapas (a) y (b) del proceso de modelización matemática, seleccionado la información relevante presente en la situación problema, con la finalidad de resolver esta. En cuanto a la etapa (c), el modelo matemático utilizado para resolver el problema presenta una mayor diversidad en comparación con los generados por los estudiantes que resolvieron el problema sin utilizar tecnología, esto se observó tanto en forma escrita como en forma gráfica al utilizar GeoGebra. Ejemplos de estos modelos fueron una representación gráfica de una fuente con los ejes de coordenadas, circunferencia, función cuadrática, el plano cartesiano, el triángulo, arcos de circunferencia, circunferencias secantes, entre otros; algunos de estos ejemplos se presentan en la figura 6:

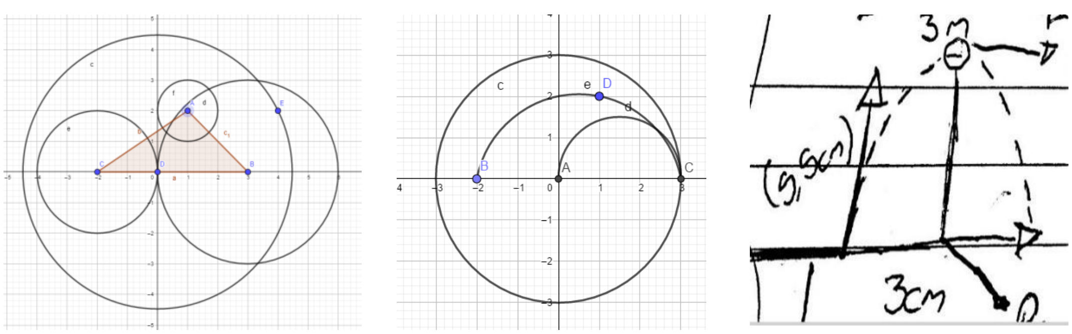


Figura 6. Ejemplo del objeto matemático utilizado por los estudiantes participantes para resolver problema propuesto al usar tecnología.
Fuente: Elaboración propia

Al aplicar la etapa (d) del proceso de modelización matemática, es decir generar una solución del modelo matemático propuesto en la etapa (c), se obtuvo tres caminos distintos propuestos por los tres estudiantes seleccionados. En la siguiente figura se presenta la solución de problema de modelización matemática, resuelto por el estudiante de rendimiento bajo.

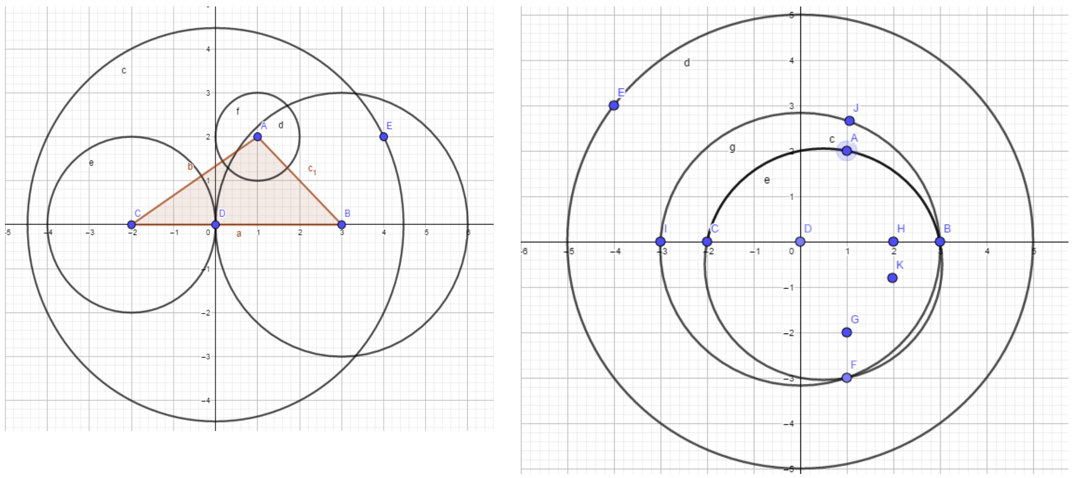


Figura 7. Ejemplo de solución del problema de modelización matemática propuesto por un estudiante de bajo rendimiento.
Fuente: Elaboración propia

En la primera imagen de la figura 7 el estudiante realiza tres circunferencias cuyos centros son los puntos propuestos por el problema, específicamente los puntos $A(1,2); B(3,0); C(-2,0)$ y la fuente es representada como la circunferencia que contiene el punto $E(4,2)$. En esta parte el estudiante considera que los tres puntos propuestos de la trayectoria del chorro de agua son puntos interiores de la circunferencia y ninguno se ubica en la circunferencia de la fuente. Además, según los resultados de la entrevista clínica el estudiante realizó otras suposiciones incorrectas, veamos en el siguiente diálogo:

> *Profesora: ¿Por qué realizó tres circunferencias cuyos centros fueron los puntos que brindaba el problema?*
> *Estudiante: Porque de cada punto sale un chorro distinto.*

También construye un triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, pero no detalla cual es el objetivo de esta construcción. Al preguntarle al estudiante a cerca de esta construcción, el estudiante afirma que la realizó para aproximar cuál de los puntos estaba más cerca del centro.

Además, en el informe escrito expresa la siguiente conjetura: "*El punto central es D, el punto B se puede aproximar al punto central D. El punto C es otro que se puede aproximar al D. El punto A es uno de los que no se pueden acercar al punto D por su radio que no se acerca al punto central.*" Esto debido a que el estudiante en su construcción coloca el punto D como punto de tangencia de las circunferencias de centros C y B. Sin embargo, afirma que el punto A no se puede acercar al punto centro D, ya que la circunferencia de centro A tiene un radio cuya distancia es más pequeña que la distancia del segmento $\overline{AD}$. Por lo que, el estudiante considera incorrecto su procedimiento y genera otro planteamiento para la solución del problema, aplicando la etapa (e) del proceso de modelización matemática.

La nueva solución representada en la segunda imagen de la figura 7 utiliza la conjetura "*A la hora de agregar un nuevo punto que sería F se podría cumplir con lo que se pide*". Ante esto, el estudiante explica en su informe "*El punto B y el punto F coinciden con su distancia y el punto C y el punto A coinciden entre ellos dos en su distancia. Si a la hora que alargamos* *los puntos C y A, C cambiaría hacer al I y el punto A cambiaría a hacer J. Entonces la circunferencia quedaría en J, B, I y F.*"

Los datos anteriores demuestran, que las suposiciones realizadas contradicen las hipótesis del problema, dejando de lado la condición del problema que detalla que los tres puntos propuestos se encuentran en la trayectoria parabólica del chorro de agua de la fuente, con lo que la solución es incorrecta.

Por otra parte, la solución del problema de modelización matemática propuesto por el estudiante de razonamiento medio se presenta en la figura 8.

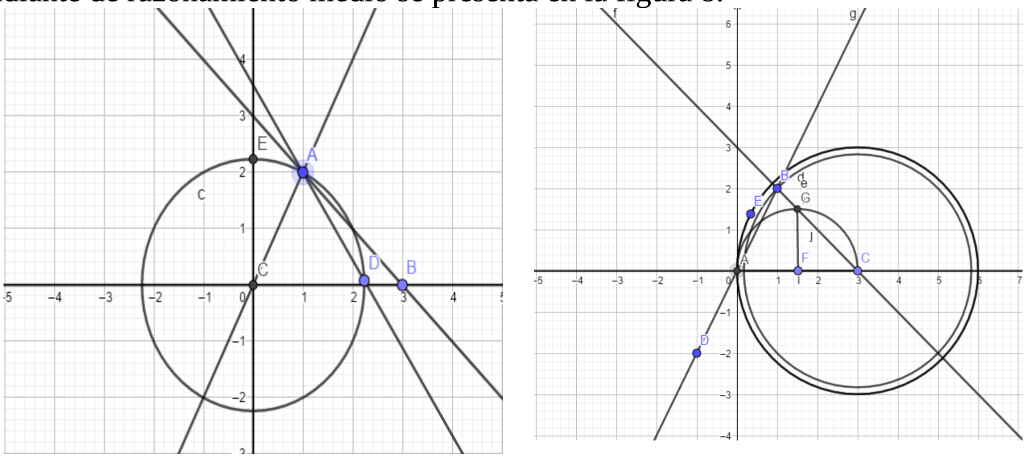
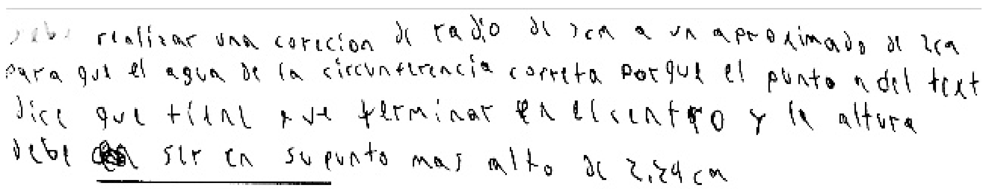


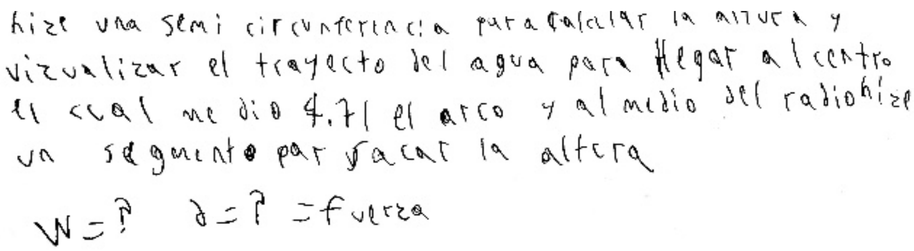
Figura 8. Ejemplo de solución del problema de modelización matemática propuesto por un estudiante de medio rendimiento.

Fuente: Elaboración propia

En la primera imagen, el estudiante representa la fuente como la circunferencia y usa una recta para trazar el radio de la circunferencia $\overline{AC}$, presentando deficiencias al construir conceptos geométricos básicos. Además, construye otra recta que pasa por el punto A y la circunferencia. Y considera que el ajuste que debe realizar el ingeniero es la distancia del punto D al punto B, es decir 1cm en el eje de las abscisas.

Al aplicar la etapa (e) del proceso de modelización, al evaluar la solución el estudiante encuentra un error, el cual es hacer la suposición "*que el chorro de agua parte de cierta altura y no del borde de la fuente*", además otro error se encuentra en la construcción realizada al suponer que el punto B se debe encontrar en el exterior de la Circunferencia y no en el borde. Por lo que, el estudiante realiza una retroalimentación y corrige los errores, para ello genera una nueva solución que se presenta en la imagen 2 de la figura 8, además brinda una descripción en el informe final de la actividad que se presenta a continuación:


Debe realizar una corecion de radio de 3cm a un aproximado de 2cm para que el agua de la circunferencia correta porque el punto A del text dice que tiene que terminar en el centro y la altura debe ser en su punto mas alto de 2,24 cm


hize una semi circunferencia para calcular la altura y
vizualizar el trayecto del agua para llegar al centro
el cual me dio 4.71 el arco y al medio del radio hize
un segmento par sacar la altura

W=? d=? =fuerza

Figura 9. Descripción de la solución final del estudiante de medio rendimiento.
Fuente: Elaboración propia

Con lo que se observa que el estudiante determina que el ajuste que Don José que la altura máxima se debe encontrar en el valor de $x = 1{,}5$ y cuya altura máxima corresponde a la longitud del segmento $\overline{FG} = 2{,}24$. Esta deducción la realiza a través de la medida de la segunda componente del punto G (1.5, 2.24). Generando la aproximación más cercana a la altura máxima correcta del problema.

Por otra parte, el estudiante de rendimiento alto para resolver el problema primero realizó una lectura detallada del problema, luego creó en forma escrita una serie de representaciones gráficas que se presentan en la figura 10 y después comenzó a resolver el problema con GeoGebra.

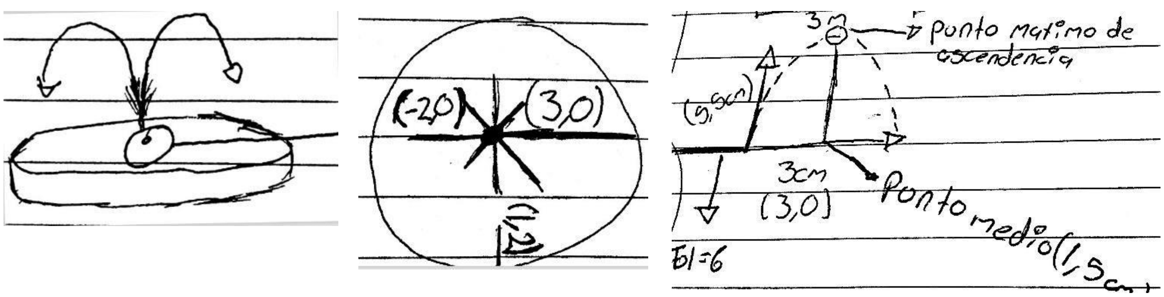


Figura 10. Ejemplos de representaciones gráficas generadas por el estudiante de alto rendimiento.
Fuente: Elaboración propia

En la primera imagen de la figura 10, el estudiante realiza una representación gráfica de la fuente en la cual los chorros del agua tienen como punto inicial el centro de la circunferencia y no como se solicita en el problema. En la segunda imagen, el estudiante representa la fuente como la circunferencia y relaciona esta con los puntos del plano cartesiano, pero se observa el punto (1, 2) mal ubicado. Finalmente, la tercera imagen muestra una representación gráfica más acertada de las condiciones del problema, dado que el objeto matemático utilizado es una gráfica de una trayectoria parabólica. Las tres imágenes son evidencias del proceso de evolución del pensamiento utilizado por el estudiante de alto rendimiento al generar un objeto matemático que ayudaría a resolver el problema propuesto.
Sin embargo, después de estudiar a fondo el problema el estudiante generó la primera solución con ayuda del programa GeoGebra (imagen 1 de la figura 11), aplicando la etapa (d) del proceso de modelización matemática. En el informe como respuesta final a la primera pregunta del problema, el estudiante expresa que don José debe "*realizar cambios en dos de los tres puntos ya que el punto* $(3{,}0)$ *cabe perfectamente en el radio de la fuente*". En la imagen, observamos que los puntos $(1{,}2)$; $(3{,}0)$; $(-2{,}0)$ no están ubicados correctamente en

el plano cartesiano. El estudiante realiza un análisis reflexivo de la solución y corrige los errores, gestionando otra solución (imagen 2 de la figura 11), con lo que aplica etapa (e) del proceso de modelización.

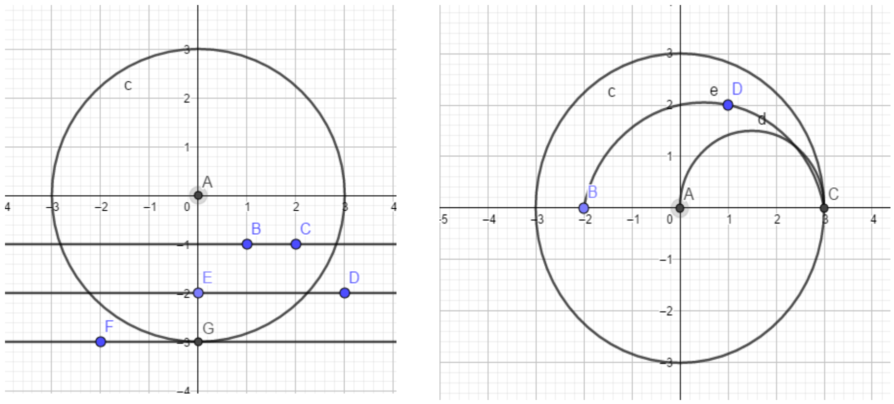


Figura 11. Ejemplo de solución del problema de modelización matemática propuesto por un estudiante de alto rendimiento.
Fuente: Elaboración propia

En la imagen 3 de la figura 10 se presenta la segunda solución que realizó el estudiante de razonamiento alto en forma escrita, en ella observamos una representación gráfica de una trayectoria en forma parabólica. De esta imagen deducimos que la altura máxima del chorro de agua se adquiere en el punto medio del radio, es decir en el valor del eje de las abscisas. Además, como respuesta a la segunda pregunta de la situación problema tenemos "*La altura de 5,5 aproximadamente daría un buen diseño de manera que al chorro de agua tomar su punto máximo de ascendencia para luego descender no rompe la distancia límite del radio*." Sin embargo, no se observa claramente el proceso utilizado para obtener 5,5cm, por lo que se aplicó una entrevista clínica para profundizar en esta conjetura.

> *Profesora: ¿Qué procedimiento aplicó para obtener la altura máxima 5,5cm?*
> *Estudiante: Me imagine que había un tubo vertical, que debe medir como 3m de altura, esta altura va a ir aumentando hasta llegar al punto de ascendencia, si la altura es más pequeña la curva es más larga. De igual forma pasaría, si coloco una manguera en forma recta, si la subo es más alta el arco del agua y si la bajo es menor alto el arco. La altura debe ser más amplia que el radio, igual depende de la inclinación del tubo o la maguera.*

Como observamos en la información anterior, el estudiante utiliza suposiciones basadas en su experiencia cotidiana, pero utilizando argumentos matemáticos ejemplificados en el plano cartesiano. Pero el estudiante, evalúa su solución anterior y gestiona otra solución, la cual es presentada en la imagen 2 de la figura 11.

En la tercera solución el estudiante construye un arco de media circunferencia que representa la trayectoria del chorro de agua, realiza primero la trayectoria de una curva que pasa por los tres puntos. Luego, crea otro arco de media circunferencia de tal forma que el punto final del arco coincide con el punto central de la fuente y afirma que la altura máxima del chorro de agua se alcanza en el valor del eje de las abscisas en este caso observa que valor de la altura máxima es debe ser aproximadamente 2,5cm, acercándose a la respuesta correcta del problema.

4.3. Relación entre matemática con otras disciplinas.

En las soluciones del problema de la actividad, los estudiantes relacionaron la matemática con otras disciplinas. Específicamente tres de los estudiantes de los seis que participaron en el estudio. Por ejemplo, esto se evidenció en el procedimiento utilizado por el estudiante de rendimiento medio que resolvió el problema sin tecnología (figura 4), en el proceso el estudiante utiliza términos relacionados con el área de Física como el “ajustar la presión de la manguera”, “la altura depende la presión del agua que se le aplique a la manguera”. De igual forma, sucedió con el estudiante de rendimiento alto que resolvió la actividad sin usar tecnología.

Otro ejemplo, se muestra en la figura 9 donde el estudiante de rendimiento medio que resolvió la actividad con el uso de tecnología, plantea en su solución variables de Física como W=? d?, pero esta idea no la continua por la falta de datos que necesitaba el problema para calcular la fuerza de la presión de la manguera.

4.4 Actitudes al resolver el problema de modelización matemática

Aunque la actividad realizada por los estudiantes en este estudio no fue contemplada como un trabajo de aula al cual se le asigna un porcentaje de evaluación (medición cuantitativa), los estudiantes participaron voluntariamente con el fin de aprender. Los estudiantes se mostraron motivados, perseverantes y críticos al formular sus soluciones. Además, esta actividad fue el primer acercamiento que los estudiantes con el programa GeoGebra, por lo que la experiencia desarrolló en los estudiantes también valores como la tolerancia y paciencia en sus procesos matemáticos, pues al inicio no poseían dominio del programa.

5. Conclusiones

Este estudio responde al objetivo de analizar el apoyo que pueda brindar un software en el aprendizaje matemático durante el proceso de la modelización, en tema de funciones cuadráticas. Para esto se utilizó dos grupos, un grupo experimental y un grupo control. Los resultados muestran que la actividad utilizada en el estudio permitió poner en práctica el proceso de modelización matemática. En ambos grupos, se encontró que los sistemas conceptuales utilizados para resolver la situación propuesta son más sofisticados que los que podríamos encontrar en la enseña tradicional del tema de función cuadrática (Lesh y English, 2005).

El grupo experimental en comparación con el grupo control, realizó las etapas del proceso de modelización de una forma más eficaz, ágil y fácil; evidenciado específicamente en las etapas de solución del modelo matemático y la evaluación de la solución. Además, el grupo generó otras soluciones con menor esfuerzo y tiempo, y a la vez, con más argumentos críticos al resolver el problema propuesto. Por tal razón, el uso del software GeoGebra sí permitió un mejor razonamiento y análisis del objeto matemático.

Se observó en las soluciones de los estudiantes la construcción de los aprendizajes desde lo concreto hacia lo abstracto tal y como se solicita en (MEP, 2012; López, Molina y Castro, 2017; Plymouth, 2002), y al mismo tiempo, se mejoró la motivación y actitudes como la perseverancia y tolerancia hacia los problemas por partes de los estudiantes hacia la matemática.

Asimismo, en las soluciones se encontró evidencias de la relación entre la matemática con otras disciplinas, se mostró una comprensión conceptual del problema a través de conceptos propios de la Física. Además, coincidiendo con la metodología STEM, los estudiantes del grupo experimental generaron soluciones sin intervención del docente, propiciando el papel activo del estudiante en su aprendizaje matemático tal y como se enfatiza en Pérez y Silva (2016).

Los resultados extienden en forma mínima, las investigaciones realizadas en cuanto al uso de la tecnología en el proceso de modelización matemática. A pesar de las limitaciones de este trabajo: pocos estudiantes y escasa duración de la intervención, hemos obtenido información valiosa e interesante para la comunidad matemática e investigativa.

6. Referencias bibliográficas

Araya, R. (2016). STEM y Modelamiento matemático. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11(15), pp 291-317. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23838

Bassanezzi, R., y Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza. *Revista de didáctica de las matemáticas*, 32, 13-25. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/32/Articulo02.pdf

Blomhøj, M., y Hoff Kjeldsen, T. (2006). Teaching mathematical modelling through project work - experiences from an in-service course for upper secondary teachers. *Revista Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 163-177. Recuperado de http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm062a6.pdf

Burkhardt, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: reflections on past developments and the future. *Revista Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 178-195. Recuperado de http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm062a7.pdf

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta ed). México: McGrall Hill

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2008, September). *Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra*. In 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Nuevo Leon, Mexico.

Hohenwarter, M., Borcherds, M., Ancsin, G., Bencze, B., Blossier, M., Delobelle, A., . . . Sturr, G. (2017). GeoGebra (Version GeoGebra 6.0.560.0) [Programa informático]. Linz, Austria: International GeoGebra Institute. Recuperado de http://www.geogebra.org/

Johnson, T. y Lesh, R. (2003). A models and modeling perspective on technology-based representational media. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 265-277). Mahwash, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-34). Mahwash, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Lesh, R. y English, L. (2005). Trends in the evolution of models y modeling perspectivs on mathematical learning and problem solving. *Revista Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(6), 487-189. Recuperado de http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm056a5.pdf

Lesh, R., Zawojewski, J. y Carmona, G. (2003). What mathematical abilities are needed for success beyond school in a technology-based age of information?. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 205-222). Mahwash, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Lombardo, D. H. y Jacobini, O. R. (2008). *Mathematical Modeling: From Classroom to the real world*. En Blomhøj, M., Carreira, S. (Eds), Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics. Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical education (pp.35-46). Monterrey, México.

López, R., Molina, M. y Castro, E. (2017). Modelización en el aula de ingeniería: un estudio de caso en el marco de un experimento de enseñanza. *PNA*, 11(2), 75-96. Recuperado de http://hdl.handle.net/10481/44147

Masanja, V. (2002). *Mathematics and Other Disciplines: The Impact of Modern Mathematics in Other Disciplines*. Recuperado de la base de datos ERIC. (ED472050)

Mcmillan, J. H., y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa: Una introducción conceptual*. Madrid, España: Pearson Educación, S. A.

Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and sciense. *Revista Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 269-280. Recuperado de http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm063a6.pdf

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada.* Costa Rica: autor. Recuperado de http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Pérez, I. E. y Silva, A. (2016). Una propuesta para la apropiación del concepto de función con base en la modelación de fenómenos enmarcado en el método STEM de enseñanza, *Revista Las Américas*, 3, 1-10.

Pineda, F. (2014). *Uso de Materiales Educativos Computarizados como recurso didáctico para el aprendizaje de las Secciones Cónicas en los estudiantes del undécimo grado del Bachiller en Ciencias del Instituto América*. (Tesis de Maestría). Universidad Especializada de las Ámericas, Cuidad Panamá, Panamá. Recuperado de https://seccionesconicasayuda.wordpress.com/aplicaciones-de-la-parabola-en-la-vida-real/

Plymouth, J. B. (2002). Developing mathematical modelling skills: The role of CAS. *Revista Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(5), 212-220. Recuperado de http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm025a5.pdf

Son, H., y Lew. H. (2006). Discovering a rule and its mathematical justification in modeling activities using spreadsheet [Descubriendo una regla y su justificación matemática en actividades de modelado usando una hoja de cálculo]. *Revista Psychology of Mathematics Education*, 5, 137-144. Recuperado de la base de datos en línea ERIC. (ED496939)

Villegas, J. L. (2002). Representaciones en resolución de problemas: Un estudio de caso con problemas de optimización. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 279-308. Recuperado de http://ojs.ual.es/ojs/index.php/EJREP/article/view/1342

7. Apéndice

Actividad: Fuente de Agua

Figura 1. Actividad "Fuente de agua".
Fuente: Tomada de Pineda (2014)

Las fuentes de agua a través de los tiempos han tenido un papel protagonista en la vida del ser humano, destacándose por utilizar el agua, elemento vital para la vida. Desde la Edad Antigua, ubicaban las fuentes en el centro de las plazas, con la función de dar de beber al ganado, a los ciudadanos y para uso casero. Fue hasta la época del Renacimiento, que diversos artistas dotaron de belleza a las fuentes, convirtiéndolas en majestuosas obras de incalculable valor artístico y de gran relevancia. Decenas de este tipo de construcciones han perdurado a lo largo de los siglos como Patrimonio de la Humanidad[2].

Algunas de estas obras son construidas con una trayectoria parabólica, debido al desplazamiento bajo la acción de la atracción gravitatoria de la Tierra que permite obtener bonitos arcos parabólicos. Además, hay fuentes de agua cuya trayectoria del chorro de agua va de dentro hacia fuera de la fuente y otras en forma inversa como la de la imagen, donde el punto final de la fuente es el centro de la circunferencia de la fuente.

Don José, ingeniero encargado de construir una fuente de agua realiza sus cálculos matemáticos erróneamente y al probar una simulación virtual del problema descubre que el chorro de agua traspasa el centro de la fuente de radio 3cm y 1cm equivale a 1m de la realidad, el utiliza tres puntos de la trayectoria parabólica para darse cuenta de esto, estos son (1,2); (3,0); (-2, 0). El punto inicial de la trayectoria es el (3,0).

¿Qué ajustes debe realizar Don José para obtener una mejor aproximación de la trayectoria del chorro de agua? ¿Cuál podría ser la altura máxima de los chorros de agua de tal manera que Don José logre un diseño majestuoso en su obra?

[2] Información tomada de https://www.aguafria.es/blog/fuentes-de-agua-en-la-historia/

DIFERENCIACIÓN PRIMEROS PASOS HACIA LA INDIVIDUALIZACIÓN EN LOS SALONES DE CLASE.

Msc. M. Alejandra Chacón Fonseca
Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica
mchacon@uned.ac.cr

Resumen: Se busca proporcionar al profesor de matemática de secundaria y estudiantes en general, técnicas y estrategias de diferenciación que permitan mediar pedagógicamente las clases de matemática. Se diseñan, implementan y validan, estrategias de diferenciación, con el objetivo de desarrollar recursos de calidad que sirvan de base para una mediación pedagógica innovadora en matemática, que responda al contexto del estudiante y a los requerimientos metodológicos de la estrategia resolución de problemas. Se desarrolla una investigación -acción -participante, bajo el enfoque cualitativo que diagnosticó y sistematizó experiencias de planificación e implementación de estrategias de diferenciación didáctica en el salón de clase como herramienta para la individualización, con el objeto de conocer las ventajas y desventajas de mediar pedagógicamente estrategias de diferenciación en clase de matemática con estudiantes de sétimo nivel, durante el curso lectivo del 2019. El estudio se realiza durante el curso lectivo 2019, en el Colegio Saint Clare, específicamente en el departamento de matemática, se impacta a la población de estudio, profesores participantes, equipo base, generando un aporte a la población en general; de manera que se convierte en una herramienta de acción, en el área de la individualización del estudiante en el salón de clase, también se comparte y socializa el conocimiento en el marco de la responsabilidad social.
Palabras clave: diferenciación, educación matemática, innovación, estrategias y técnicas de diferenciación.

Abstract: It seeks to provide the high school mathematics teacher and students in general with differentiation techniques and strategies that allow to pedagogically mediate the mathematics classes. Differentiation strategies are designed, implemented and validated, in order to develop quality resources that serve as the basis for an innovative pedagogical mediation in mathematics, which responds to the student's context and the methodological requirements of the problem-solving strategy. A research-action-participant is developed, under the qualitative approach that diagnosed and systematized planning experiences and the implementation of didactic differentiation strategies in the classroom as a tool for individualization. In order to acknowledge, the advantages and disadvantages of pedagogically mediating differentiation strategies in math class with seventh grade students, during the 2019 school year. The study is carried out during the 2019 school year, at Saint Clare School, specifically in the Mathematics Department, the study population, participating teachers, base team are impacted, generating a contribution to the general population, so that it becomes an action tool in the area of student individualization in the classroom, knowledge is also shared and socialized within the framework of social responsibility.
Keywords: differentiation, Math education, innovation, differentiation strategies and techniques.

1. Introducción

Se plantea la diferenciación en el salón de clase como una estrategia para potenciar las habilidades y destrezas de cada uno de los estudiantes en matemática. En un ambiente heterogéneo donde hay diversos factores que inciden en los procesos de aprendizaje y enseñanza de una disciplina como la matemática, la heterogeneidad debe convertirse en el motor propulsor de estrategias metodológicas, contextualizadas, que respondan a la demanda internacional de habilidades en ciencia, tecnología, ingeniería, arte y matemática (Habilidades STEAM) y al enfoque nacional de resolución de problemas contextualizados. En matemática son múltiples los factores de no logro de objetivos de aprendizaje; en niveles como sétimo se presenta una gran deserción escolar, la falta de continuidad en los procesos educativos plantean el reto docente de mantener a los estudiantes en los salones de clase, por lo que la metodología es eje fundamental de promoción, mediar estrategias de diferenciación didáctica en el salón de clase se constituye en una herramienta para la individualización y movilidad educativa y social, permitiendo a cada alumno avanzar a su ritmo, garantizando estándares mínimos de aprendizaje, cumplimento de objetivos curriculares en un entorno colectivo, lo cual permite el desarrollo de habilidades, y potencia capacidades de estudiantes aventajados, con habilidad o talento específico.

A nivel metodológico para efectos de la investigación se estableció como objetivo general: Conocer las ventajas y desventajas de mediar pedagógicamente estrategias de diferenciación en clase de matemática con estudiantes de sétimo nivel, durante el curso lectivo 2019.

Para el logro del objetivo general se establecieron los siguientes objetivos específicos

1. Capacitar a los docentes de matemática en el concepto de diferenciación en el salón de clase.
2. Determinar los objetivos fundamentales para implementar la diferenciación para las clases de matemática con estudiantes de sétimo nivel, durante el curso lectivo del 2019.
3. Diseñar estrategias de diferenciación para las clases de matemática con estudiantes de sétimo nivel, durante el curso lectivo del 2019.
4. Implementar estrategias o técnicas diferenciación en las clases de matemática con estudiantes de sétimo nivel, durante el curso lectivo del 2019.
5. Validar con expertos en la temática, la implementación de las estrategias o técnicas diferenciación en la clase de matemática con estudiantes de sétimo nivel, durante el curso lectivo del 2019.
6. Establecer estrategias de diferenciación que permitieron el logro de objetivos del currículo educativo en educación matemática en el salón de clase de matemática con estudiantes de sétimo nivel, durante el curso lectivo del 2019.

7. Identificar las ventajas y desventajas de mediar pedagógicamente estrategias de diferenciación en clase de matemática con estudiantes de sétimo nivel, durante el curso lectivo del 2019.

Se realizó la investigación cualitativa con la totalidad de la población de estudiantes matriculados en sétimo año del Sistema Educativo Saint Clare (SESC), durante el curso lectivo del 2019.

En la investigación, participaron cinco **docentes,** cuatro de matemática y uno de otra disciplina, todos de distintos niveles. Todos los docentes se capacitaron en el tema de diferenciación en el aula. Uno de los docentes era el docente de sétimo nivel, los otros tres docentes impartían clase de matemática en otros niveles y un quinto docente de otra área o departamento, se conformó así, el equipo de apoyo, observación, validación de la investigación (equipo de expertos).

Un Psicólogo, de sétimo nivel, quién facilitó información de los estudiantes, seguimiento, apoyo en la observación y validación, en calidad de miembro del equipo experto.

Estudiantes de Sétimo Nivel, participaron 112 estudiantes de sétimo nivel (4 secciones aproximadamente de 28 estudiantes por salón de clase). Los estudiantes desconocían que las estrategias y técnicas implementadas en clase respondían a una instrucción diferenciada. (Población de Estudio)

A nivel metodológico, se emplearon varias estrategias para el logro de cada uno de los objetivos, veamos:

Se capacitó a los todos docentes de matemática de Colegio Saint Clare en el concepto de diferenciación en el salón de clase. En una primera capacitación realizada en Lima Perú el 12, 13, 14 de setiembre del 2018 participó uno de los docentes, quién se encargó de capacitar al equipo de expertos (febrero, 2019). Posterior a las capacitaciones se inició el proceso de investigación y profundización matemática sobre el tema, considerando la diferenciación en la clase de matemática.

El equipo de docente determinó los objetivos fundamentales para implementar la diferenciación para las clases matemática con estudiantes de sétimo nivel, durante el curso lectivo del 2019, para definir objetivos se realizó un taller docente en febrero del

2019, en este taller fue fundamental la participación de todo el equipo de expertos, en especial del psicólogo de sétimo nivel, quien caracterizó a la población de estudio.

Se diseñó cada una de las estrategias de diferenciación que se emplearon durante el curso lectivo 2019 en las clases de matemática, para el diseño de cada una de las estrategias, se realizaron reuniones focales, cada 2 meses, en la que participan los cuatro docentes del departamento de matemática de forma regular y en casos de ser necesario el grupo de expertos.

Las estrategias de diferenciación definidas, se implementaron durante el curso lectivo del 2019. El docente a cargo de la implementación fue apoyado y observado por el equipo de expertos quien retroalimento en todo el proceso.

Se validó la temática con expertos y la implementación de las estrategias o técnicas diferenciación en las clases de matemática con estudiantes de sétimo nivel, durante el curso lectivo del 2019, mediante la observación de clase, registros de observación, bitácora, consulta a expertos, grupo focal, y entrevistas semiestructuradas a los estudiantes, y seguimiento con padres de familia en los casos que fue necesario.

De una serie de estrategias de diferenciación diseñadas, implementadas y validadas se seleccionaron las que permitieron el logro de objetivos del currículo educativo en educación matemática de sétimo nivel. La selección de las estrategias responde a un análisis de entrevista semiestructurada realizada estudiantes, docentes participantes y psicólogo de nivel, quienes también apoyaron en la identificación de las ventajas y desventajas de mediar pedagógicamente estrategias de diferenciación en clase de matemática con estudiantes de sétimo nivel, durante el curso lectivo del 2019.

2. Aspectos Teóricos: La diferenciación en el salón de clase.

La diferenciación en el aula busca estimular competencias y habilidades en conocimientos que se enmarcan en los objetivos académicos a desarrollar en los estudiantes según el currículo escolar y considerando el estilo de aprendizaje de cada alumno, según Geri Coleman Tucker algunos alumnos

> …aprenden mejor cuando leen y escriben, otros prefieren ver un video, escuchar una grabación o aprender realizando actividades. La instrucción diferenciada es una manera de enseñar que incluye diversos estilos de

> aprendizaje. Los maestros que utilizan la instrucción diferenciada diseñan su manera de enseñar para que coincida con los estilos de aprendizaje de sus estudiantes. Todos los estudiantes tienen la misma meta de aprendizaje, pero la manera de enseñanza varía de acuerdo a cómo aprende mejor el estudiante. (Coleman, s.f. p.1)

Tomlinson (2008), señala que en la instrucción diferenciada se emplean varios métodos de enseñanza para lograr el aprendizaje de cada alumno, pero esto no implica o requiere un enfoque individual para cada estudiante. Todos los estudiantes tienen acceso al mismo currículo de diversas maneras. Esto hace que la experiencia de aprendizaje sea más eficaz. Los estudiantes tienen "opciones múltiples para obtener información, encontrarles sentido a las ideas y expresar lo que aprenden" (p.5).

Entre los aspectos fundamentales para la implementación de la diferenciación en el salón de clase, se destaca la necesidad de que el docente tenga dominio amplio de una variada y amplia gama de diversas estrategias metodológicas existentes o no existentes, es decir que sea también capaz de crear nuevas estrategias metodológicas, o combinar de forma creativa estrategias metodológicas que permitan a cada uno de los estudiantes avanzar en sus procesos individuales de aprendizaje, siempre en un entorno colaborativo.

La selección de estrategias evaluativas consecuentes a las estrategias metodológicas de clase permite la evaluación todos los procesos de aprendizaje (diagnósticos, formativos o sumativos). Entre las estrategias metodológicas a emplear, se demanda elegir la más apropiada con el objeto de que cada uno de los alumnos desarrolle capacidades de extraer ideas, interpretar o inferir información de diferentes situaciones, resolver y tomar decisiones.

El desarrollo de habilidades sociales en los estudiantes se facilita mediante el trabajo en equipo (colaborativo- cooperativo), estimulando habilidades o competencias extra o adicionales llamadas competencias extracurriculares "Ex competencias". Las Ex-competencias se refiere a competencias extra que se buscan desarrollar en cada alumno como la tolerancia, respeto, valores y competencias individuales que cada alumno posee.

La diferenciación atiende las Necesidades Educativas Especiales (NEE) de los estudiantes mediante la adaptación y la individualización (es el ideal de la diferenciación).

El docente debe enfocarse en el logro del objetivo, competencia o habilidad que se pretende desarrollar según el currículo escolar, por lo debe de buscar que cada uno de los estudiantes logren alcanzar una misma meta, esta meta igual todos los estudiantes del salón de clase es un estándar mínimo aceptable, objetivos mínimos de logro que la totalidad del grupo debe alcanzar y a partir de ahí cada alumno avanza según sus potencialidades.

Siempre habrá un grupo de alumnos para los cuales alcanzar ese estándar mínimo les será complicado por razones varias. Este grupo de estudiantes requerirá apoyos adicionales para el logro de los objetivos de aprendizaje (mínimo aceptable) y es el docente (adulto, profesional en educación matemática, responsable) quién provee las ayudas necesarias a cada uno de estos estudiantes.

Un maestro utiliza la instrucción diferenciada para ofrecer a cada uno de los estudiantes varios caminos para aprender. No reemplaza los objetivos y metas establecidas, el maestro personaliza su enseñanza para ayudar al estudiante a cumplir esas metas y objetivos. (Coleman, s.f. p.1).

El docente debe trabajar en que el estudiante identifique cuando necesita ayuda y enseñarle a pedirla de forma oportuna y apropiada, también debe planear por etapas pensando en el logro de las metas o estándares finales.

2.1. La necesidad de diferenciación en las aulas de matemática, bajo el modelo educativo costarricense.

La necesidad de mejora en matemática y ciencias es una demanda de la sociedad actual en la cual los procesos industriales y los trabajos requieren cada vez más de la tecnología. Según el World Economic Forum, las habilidades científicas, tecnológicas, ingenieriles y matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés) son el eje de la cuarta Revolución Industrial. Agregando las habilidades artísticas, se tiene el término STEAM.

> En la actualidad, los gobiernos de todos los países desarrollados son conscientes de que no se está preparando a suficientes alumnos y profesores en las áreas de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas de cara a una economía basada en el conocimiento tecnológico (European Parliament, 2015; González y Kuenzi, 2012; Marginson et al, 2013; OECD Publishing, 2012; Rothwell, 2013).

Según el World Economic Forum, en el siglo XXI las competencias básicas necesarias que se deben poseer son: la resolución de problemas complejos, el pensamiento crítico, la creatividad, la colaboración, la inteligencia emocional, la toma de decisiones, las capacidades de negociación y la flexibilidad cognitiva.

A nivel nacional se han realizado cambios y reformas en currículos escolares, con el objeto de atender las demandas y estándares internacionales, sin embargo, los resultados de Costa Rica, en las pruebas PISA del 2015, reflejan que hay mucho por hacer.

> …en una prueba que se aplica cada tres años a estudiantes de 15 años de edad en los países miembros o en proceso de adhesión a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE). En el 2015 fue aplicada a 540.000 estudiantes, una muestra representativa de la población total de 29 millones de jóvenes de 15 años de las escuelas de los 72 países participantes (…) En las áreas evaluadas de matemática, ciencias y lectura, el país obtuvo resultados por debajo del promedio general, así como en la equidad social y entre hombres y mujeres…en la prueba de matemática, el promedio de los 72 países es de 490 puntos y el estudiantado costarricense logró apenas 400. (Chacón, 2016, p.1)

Según Bolaños (2019), en el marco del 5to Congreso Regional Latinoamericano de Psicología Intercultural, celebrado en la Universidad de Costa Rica (UCR) del 13 al 19 de julio, 2019, académicos e investigadores analizaron la situación del país en torno a la aplicación de las pruebas. Aspectos como que las calificaciones de Costa Rica están debajo del promedio del grupo de países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos(OCDE)" (Universidad de Costa Rica, 2019), carencia en infraestructura, laboratorios, equipos tecnológicos, universalidad de la educación, entre otros factores son un reto y oportunidad de mejora.

En la década de los sesenta del siglo XX, producto del avance en el bienestar de las sociedades se plantea y legisla la enseñanza básica obligatoria para todos los ciudadanos. Este concepto de universalidad de la educación llevaba por tanto implícito el dar respuesta educativa a todo tipo de alumno hasta una determinada edad, la cual se ha ido ampliando desde los doce hasta los dieciocho años actualmente.

> De esa manera, ese grupo intermedio de alumnado en riesgo, que no era susceptible de educación especial, pero tampoco conseguía los objetivos educativos en la enseñanza normal, se presentaba como el mayor reto ante el objetivo de dotar a la ciudadanía de unos niveles básicos y obligatorios de formación y educación. (Coronado, 2014, p.2)

Surge en concepto de respuesta a la intervención (RTI), cuyo objetivo es identificar problemas de aprendizaje lo más pronto posible. “ estudiantes que tienen dificultades para aprender se les da ayuda adicional *antes* de que se retrasen en relación a sus compañeros.” (Coleman, s.f. p.2).

Para la adecuada atención y respuesta de los estudiantes en general (no solo en riesgo), surge el concepto de diferenciación en los salones de clase, en donde el diagnóstico y la evaluación son imprescindibles en la detección de estudiantes en riesgo de presentar algún trastorno en el aprendizaje de la matemática, estudiantes talentosos, u otros, y son el parámetro inicial para elaborar formas de atención diferenciada. Por lo tanto, la instrucción diferenciada varía de salón a salón y de institución en institución, siempre compartiendo los pilares de aprendizaje recíproco y la evaluación continua.

Se diferencia para generar competencias extra en los estudiantes y habilidades científicas, tecnológicas, ingenieriles y matemáticas, es el reto nacional, en este sentido Manzano, F., Gómez M. Mozo J. (2017) apuntan que “De cara a desarrollar secuencias didácticas STEM, creemos que las propuestas presentadas, principalmente enfocadas en la Didáctica de las Matemáticas, deben ser complementadas con actividades relativas a tecnología abriendo un camino muy interesante para innovar en el aula”. (p.26)

La diferenciación en las clases de matemática busca la movilización cognitiva y física del estudiante mediante el estímulo de distintos estilos de aprendizaje que responde a variedad de inteligencias presentes en el salón de clase que se diagnostican de manera constante y continua.

2.1.1. Movilizar cognitivamente y físicamente al estudiante

Estimular la movilidad cognitiva de cada estudiante, consiste según Heinz Klippert (2018), en movilizar el conocimiento previo que posee o no el alumno mediante destrezas de pensamiento, por ejemplo, con preguntas como: ¿qué veo?, ¿qué me pregunto?, ¿qué sé?, ¿qué pienso?

De forma similar, estimular la movilidad física mediante la generación de espacios o dinámicas en las cuales el estudiante deba al menos cada cierto tiempo moverse, no es conveniente mantenerlos sentados toda la clase.

2.1.2. Estimular los distintos tipos de inteligencias que poseen los estudiantes

Consiste en estimular las diferentes inteligencias múltiples según la taxonomía de Bloom, se sugiere realizar preguntas que lleven al estudiante a verbalizar y comunicar. Ampliar el horizonte, de los estudiantes y no quemar etapas (Taxonomía de Bloom), según los niveles cognitivos de pensamiento, se redefinen o agrupan en tres niveles: Básico a nivel de **RECOPILAR** buscar y retener información, los verbos sugeridos son averiguar- elegir – señalar- enumerar- definir-**comprender- recodar.**

Intermedio se enfoca en **PROCESAR** comprender e integrar información, empleando verbos como, comparar- diferenciar- **analizar**- fundamentar- evaluar – **aplicar**- argumentar.

Avanzado consiste en CREAR conocimientos para lo que las instrucciones de proceso se asocian a verbos como, comprobar- especular – seleccionar- **crear- evaluar**- valorar- sacar conclusiones.

2.1.3. Diagnosticar en todas las etapas del proceso educativo

Es esencial diagnosticar constantemente a cada estudiante. Diagnosticar las diferencias y las semejanzas del grupo para trabajar en superar los objetivos curriculares. El diagnóstico se puede realizar de distintas maneras o una combinación de ambas. Por ejemplo, para operar 2 dígitos, se diagnostica la necesidad de un apoyo, estas ayudas pueden ser el empleo de fichas, una hoja de guía, acceso a las tablas, diagrama, prácticas diferenciadas por nivel u objetivo. Buscando con los apoyos que todos logren el estándar mínimo requerido o aceptable.

2.2. El papel de la matemática y la diferenciación en los salones de clase matemática.

La heterogeneidad de los estudiantes en el salón de clase de matemática, es un aspecto con el que todo docente debe aprender a trabajar, según Klippert:

> La heterogeneidad es la diversidad en el aula. Los estudiantes difieren según su intelecto y comportamiento, edad, sexo, idioma, y cultura, interés y salud. Sin embargo, la heterogeneidad también es una fuerza motriz importante para el aprendizaje exitoso en el aula. Aprender unos de otros y con cada uno de ellos requiere de la diferencia. (2012, p. 24).

Se diferencia o realiza la diferenciación en las clases de matemática con el propósito de lograr homogenizar niveles de aprendizaje, en un ambiente cooperativo y colaborativo, con evaluaciones individuales para lograr en cada alumno el logro de objetivos mínimos aceptables.

Se debe rescatar que el cambio en educación se logra en salón de clase, espacio donde se da la acción docente, y el aprendizaje. En el reporte *Innovación, gobernanza y reforma en educación*, el Centre for Educational Research and Innovation (CERI, 2014) de OCDE plantea un análisis comparativo entre Innovación, Reforma y Cambio. OCDE define innovación como la implementación de ideas, conocimientos y prácticas mejoradas, mientras que Reforma son procesos estructurados y conscientes para producir cambios. Según CERI (2014) la innovación es el motor principal de progreso que puede cambiar los aprendizajes de los estudiantes. El reporte destaca que, es en Educación, donde más innovación ha estado ocurriendo es en las prácticas en el salón de clase y no en las prácticas a nivel de escuela. Tenemos que pensar que es el salón de clase donde debemos cambiar e innovar.

Carol Ann Tomlinson (2008), educadora con experiencia docente en primaria y de secundaria, ha realizado algunos de los trabajos innovadores en esta área, señala que hay cuatro áreas en la que los docentes pueden realizar la instrucción diferenciada, que son:

Contenido. Averiguar qué necesita el estudiante para aprender y cuáles son los recursos que lo ayudarán a lograrlo.

Proceso. Actividades que ayudan a los estudiantes a darle sentido a lo que aprenden.

Proyectos. Una manera para los estudiantes de "mostrar lo que saben".

Ambiente de aprendizaje. Cómo se "siente" el salón de clases y cómo los estudiantes trabajan juntos. Se considera la influencia de los compañeros un estímulo que mejora la calidad del aprendizaje.

2.3. Formas de Diferenciación

Para establecer la diferenciación en clases Heinz Klippert (2012), sugiere las siguientes formas de diferenciación que se pueden adaptar a todas las materias del currículo,

2.3.1. Diferenciación por Métodos y Medios

El grupo de aprendizaje se divide según el estilo de cada uno de los estudiantes (por ejemplo, visual, auditivo, háptico), aspecto que debe ser considerado por el docente al planear su clase.

2.3.2 Cuantitativa

En salón de clase los alumnos completan o realizan tareas o trabajos a diferentes ritmos, se diferencia los ritmos de trabajo de cada alumno por cantidad de ejercicios que realicen.

2.3.3 Cualitativa

Las tareas y ejercicios varían según el grado de dificultad, (por ejemplo, prácticas diferenciadas, o productos diferenciados).

2.3.4 Social

A nivel social se diferencia por ejemplo para una práctica o trabajo el estudiante puede elegir trabajar de manera individual, en parejas, tríos o grupos de cuatro. O todo el grupo trabaja en conjunto y el profesor dirige.

2.3.5. Velocidad de aprendizaje

Los estudiantes que aprenden lentamente reciben un material más simple, los que aprenden rápidamente reciben material con un grado de mayor dificultad en comparación con los que requieren más tiempo. El Material Diferenciado, se emplea para tener a todos los estudiantes trabajando motivados e interesados según su nivel de conocimiento. Consiste en prácticas diferenciadas.

2.3.6. Intereses

Las tareas y ejercicios que responden a diferentes áreas de interés de los estudiantes en el contexto de su vida cotidiana. En el diseño de las clases se tiene en cuenta los intereses especiales de los alumnos. El profesor utiliza los intereses de los estudiantes para diseñar estrategias de aprendizaje significativas.

2.3.7. Estilos de aprendizaje o productos

Las tareas y los ejercicios pueden brindar la opción de trabajar en distintos estilos de aprendizaje.

Por ejemplo, aquellos estudiantes que aprenden más rápido con los ojos por ejemplo reciben ayudas visuales apropiadas. Los estudiantes que aprenden mejor mediante un texto, tienen la posibilidad de trabajar de esa forma.

El estudiante puede elegir realizar su producción de distintas formas, por ejemplo, explicar una definición mediante un *mind map*, realizar un acróstico, dibujo o texto.

3 Análisis de resultados

Producto de la capacitación y de todo el proceso de investigación – acción realizado, se establece que el equipo que participó aprendió formas y técnicas de diferenciación en el salón de clase. Impactando en su formación y labor como docentes.

Como objetivo fundamental para implementar la diferenciación en las clases de matemática con estudiantes de sétimo nivel, se consideró el hecho de que en sétimo nivel las características de los estudiantes es muy heterogénea, **es su primer año en secundaria**, no conocen el sistema, **el cambio de primaria a secundaria** implica una serie de retos, temores, ansiedades, motivaciones y expectativas, con las que se debía trabajar. También cambios académicos, pues los estudiantes pasan de una maestra en la mayoría de casos a varios profesores, los conocimientos previos varían según la primaria de procedencia, por lo que es necesario homogenizar, criterios, rutinas, destrezas, entre muchos otros aspectos, respetando las diferencias.

A continuación, se presenta un diagrama en que se destaca en **negrita** los aspectos fundamentales en los que la población de sétimo nivel 2019, presentaba mayor HETEROGENEIDAD, en clase de matemática.

Aspectos fundamentales en los que la población de sétimo nivel 2019, presentaba mayor HETEROGENEIDAD, en clase de matemática (se destacan con negro)

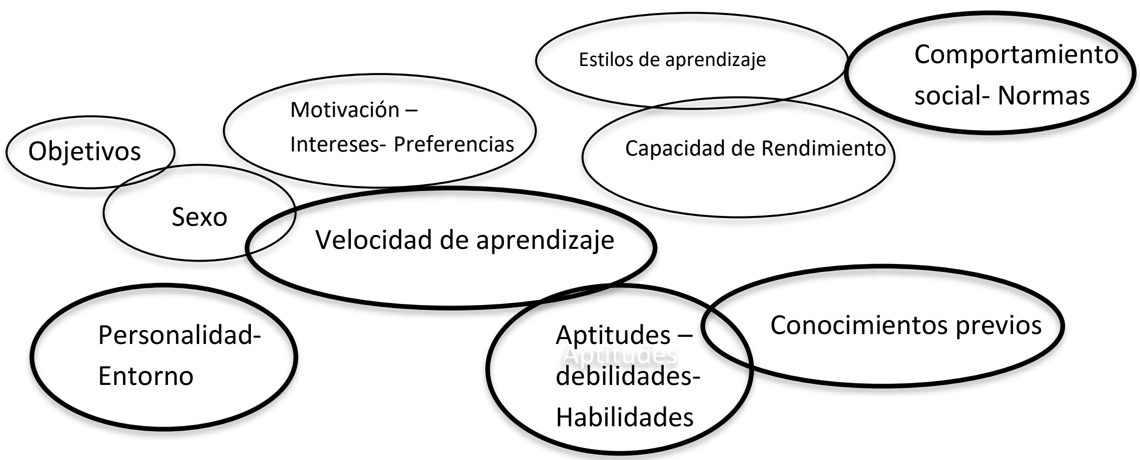


Figura1. Aspectos fundamentales en los que la población de sétimo nivel 2019, presentaba mayor HETEROGENEIDAD, en clase de matemática

Fuente: Elaboración propia

Ante la diversidad de estudiantes en una primera etapa fue fundamental conocer a los estudiantes, gracias a las características generales elaboradas previamente por el psicólogo de nivel, se obtiene características generales de los estudiantes, aunque mucha de esa información no se encontraba actualizada, o completa, debido a que fue subministrada por cada uno de los centros educativos de procedencia, cabe rescatar que conformaron un punto de partida.

Para ampliar y profundizar la información necesaria, el equipo de docentes definió una serie de actividades iniciales con el propósito de conocer sobre los intereses, preferencias y motivaciones de los estudiantes, hacia la materia y en general, esto con el objeto de considerar afinidades al momento de planear, abordar un tema o simplemente ejemplificar.

El equipo de expertos acordó implementar las "Formas de diferenciación" en matemática, para lo que se elaboró una tabla en la que se clasificaron las Formas de Diferenciación y maneras de desarrollarlas durante las clases de matemática.

Tabla 1
Formas de Diferenciación y estrategias para aplicarlas en matemática.

Formas de Diferenciación	**Desarrollo en clase**
Métodos y Medios	Los estudiantes mediante diferentes métodos abordan los conceptos matemáticos y aprenden de manera individual en un entorno colaborativo. Pueden realizar sus presentación o demostración de los aprendizajes mediante diversas formas según sea el estilo y la preferencia, dentro de una gama de estrategias de presentación que el docente previamente ha definido entre las opciones. Por ejemplo, para la resolución de una situación problema, se puede emplear el medio: oral, escrito, escénico, cartel, esquema o diagrama). Los estudiantes se pueden dividir o agrupar por afinidad de métodos uso de diferentes materiales o medios por ejemplo, un subgrupo trabaja con computadora, , otro con carteles material concreto, todos trabajan con diferentes programas o materiales, y se emplean diferentes medios de visualización del aprendizaje.
Cuantitativa	Para la práctica de un tema específico el docente asigna 40 minutos para trabajar en reforzar esos ejercicios, en ese tiempo cada alumno realiza una cantidad diferenciada de ejercicios según su ritmo de trabajo. (Placemat) (ABC-list)
Cualitativa	Según las cualidades de los estudiantes se asignan tareas diferenciadas Tipo A- B- C (mapa temático - Técnica de procesamiento de texto)
Social	Se trabajó en parejas, durante las clases, estas parejas se conforman de forma aleatoria, y cada dos semanas se cambia de pareja de trabajo.

	En prácticas abiertas, el estudiante puede elegir trabajar de manera individual, parejas o tríos. También para la resolución de situaciones problema que requerían varias sesiones de trabajo se realizaron trabajos grupales con formados por 4 o 5 integrantes. (Aprendizaje en pareja por tiempo - Kaffe klastsch)
Velocidad de aprendizaje	Consiste en prácticas diferenciadas que permita a cada alumno avanzar según su propio ritmo. Ejemplo de modalidades desarrolladas Facilitar a los estudiantes dos prácticas, una con el nivel esperado y otra con un nivel mayor al esperado, y se les solicita a los estudiantes más rápidos y avanzados realizar la práctica de mayor nivel y los demás estudiantes pueden elegir cuál práctica hacer. Indicar a los estudiantes que de una lista de ejercicios deben realizar 8, de los cuáles el 3 -5 -7 deben de hacerlos obligatoriamente, es decir solo eligen 5. Solicitar a los estudiantes que de una lista de ejercicios deben realizar todos los que puedan en 40 minutos, pero deben realizar el 3-5-7, los demás los pueden elegir. Esta técnica estimula mayor trabajo y nivel para los estudiantes más rápidos y avanzados y se garantiza que todos terminen al mismo tiempo.(Aprendizaje en pareja por tiempo)
Intereses	Los ejercicios, ejemplos y abordaje de las temáticas de clase se diseñaron según áreas de intereses especiales de los estudiantes, y el contexto. (música, deporte, uso de aplicaciones para ver películas en línea, video juegos) (Escudo -diario de diferenciación)
Estilos de aprendizaje o productos	En el planeamiento se incluyó cuatro aspectos medulares, la estimulación visual, auditiva, verbal y escrita. Para garantizar la movilización se trabajó por tiempos, de escucha, de producción, individual o grupal y presentación de resultados, en la que todos los estudiantes debían participar, para garantizar la comunicación de los aprendizajes y construcción conjunta de los mismos. En cuanto a la producción de los estudiantes no se le limitó, la creatividad, ni las formas de producción, siempre que se cumpla el objetivo de aprendizaje. (oferta de producción-diario de diferenciación)

Fuente: Elaboración propia

Se diseñaron, implementaron y validaron las siguientes técnicas de diferenciación en las clases de matemática, sétimo nivel, 2019 SESC.

La **técnica del escudo**, se empleó al iniciar el curso lectivo con el objetivo de conocer intereses y motivaciones de los estudiantes, consiste en brindar a cada uno de los estudiantes un escudo impreso, el alumno de forma individual dibuja, lo que lo caracteriza, lo que le gusta y con qué se identifica (5 minutos). Luego en pareja comparte lo dibujado a su compañero (5 minutos). Seguidamente se unen dos parejas, cada pareja presenta a su compañero a la otra pareja, mostrando el escudo y haciendo una explicación de lo que el compañero le compartió previamente. Esta técnica proporciona al docente de información sobre sus estudiantes, **intereses**, expectativas y motivaciones que deberán ser consideradas a lo largo de su planeamiento.

La técnica del ***Placemat*** la cual consiste en una hoja que tiene un pequeño rectángulo central del que sale un segmento de recta de cada uno de sus vértices a cada esquina del papel, formando 4 trapecios**)**, permite al estudiante evidenciar lo aprendido, antes de iniciar un tema preferiblemente pero también se puede aplicar durante o al finalizar el estudio de alguna temática, inicia con una pregunta que surgen alrededor de un tema y durante un tiempo establecido. En grupos de 4 estudiantes cada alumno escribe en 5 minutos en un trapecio, lo que aprendió, lo que sabe del tema o lo que le interesa conocer, esto depende de la actividad y la pregunta o instrucción. Después de 5 minutos, en grupo cada estudiante lee lo que escribió y comparten, por 5 minutos sus anotaciones. Seguidamente escriben en el centro las coincidencias, y en una tarjeta que se pegará en una pizarra. Después un miembro del grupo pega el *Placemat* en la pared. Esta técnica le permite al docente explorar conocimientos previos, de proceso o de salida, se recomienda que cada alumno escriba con un lapicero de color diferente para que así el docente pueda evaluar el aporte individual de cada alumno. Esta técnica diferencia de **forma cuantitativa** ya que cada alumno en un tiempo estimado aporta en diferente cantidad.

El **mapa temático**, se empleó para iniciar o finalizar un tema como movilización de conocimientos previos o como *sumary*. En un paleógrafo todos los estudiantes alrededor de una palabra o tema, escriben una o varias ideas referentes al tema. No hay un tiempo limitado, esto permite que cada alumno aporte según sus **cualidades**, todos deben aportar y se diferencia de manera cualitativa. Permite al docente evaluar procesos.

Oferta de producción para brindar una definición, solución o propuesta de solución a un problema (texto- acróstico- rap- juego de roles- graficador -*mind map*). Se recomienda para procesar los conocimientos según el estilo de aprendizaje de cada alumno. Se puede trabajar en grupo, pareja o individual, según intereses de los alumnos. ¿Todos los alumnos tienen una misma instrucción por ejemplo brindar la definición de …? El alumno elige la forma de presentar sus productos, dispone de un tiempo para realizarlo (15 minutos) y de materiales. Una vez finalizado en tiempo presenta a sus compañeros su producto. La producción puede ser individual, en pareja o en tríos o grupos. Según la diferenciación social que el docente considere necesaria.

Planear **preguntas** para la clase siguiendo los objetivos de Bloom**,** abiertas y cerradas, que permitan la visualización del pensamiento, como: ¿qué veo?, ¿qué pienso?, ¿qué me pregunto?, ¿qué debo investigar, saber, explicar?, justificar el porqué de la argumentación, como lo harías, entre otras. Qué es confuso, útil, inútil, o ya lo sabía.

Aprendizaje en pareja por tiempo (*LeonTempoduett)* Para que los alumnos avancen a distintos ritmos según su **velocidad de aprendizaje.** Consiste en que los estudiantes realizan una tarea de manera individual y al terminarla se ponen de pie y espera a que otro alumno también lo haga y se unen en pareja a discutir y compartir resultados y hallazgo de la actividad, en una nueva agrupación **social.**

ABC-list- permite la movilización del conocimiento. En un tiempo establecido los alumnos completan o realizan tareas o trabajos a diferentes ritmos. Esto permite la diferenciación **cuantitativa.**

Técnica de procesamiento de texto, la cual consiste en extraer de texto la información más importante. Se da la diferenciación **cualitativa** ya que las tareas y ejercicios varían según el grado de dificultad, por ejemplo, del texto extraer una idea principal, dos o tres o todas las ideas principales y secundarias. Se puede también diferenciar con el producto presentando ya sea con palabras- *mind map*- preguntas y respuestas- resumen, entre otros.

Diario de diferenciación, el cual se basa en registrar los conocimientos y avances en la evolución del aprendizaje. El alumno de forma personal registra lo aprendido y lo significativo de una manera propia. El docente revisa y asigna tema, prácticas o ejercicios para reforzar, de igual forma evalúa avances en los procesos mediante este diario. **Estimula los estilos de aprendizaje o productos.**

Kaffe klastsch, consiste en movilizar conocimientos de una temática nueva o que se investiga de manera individual y después se comparte y retroalimenta mediante el **trabajo social**, en parejas. Se asigna una tarea individual de carácter exploratoria, que se sabe, conoce o indague y anote, o responda. (10 minutos)**.** Una vez que se termina la tarea asignada, los alumnos en parejas comparten un tiempo de café o receso dentro de la clase para intercambiar sus ideas con otro compañero, y complementar o enriquecer su perspectiva sobre el tema. (10 minutos)**.** Se sugiere un cafecito y galletas mientras comparten. ¿Al finalizar el docente pregunta en plenaria qué conocimientos nuevos aprendí?, que no sabía?.

Todas las estrategias de diferenciación permitieron el logro de objetivos del currículo educativo en educación matemática en el salón de clase, sin embargo, con los estudiantes de sétimo nivel, durante el curso lectivo del 2019, destacó el diario de diferenciación, trabajo social en parejas y el tiempo en pareja según velocidades de aprendizaje, prácticas diferenciadas que permita a cada alumno avanzar según su propio ritmo.

Cabe destacar que se trabajó durante todo el proceso, con una pizarra en la cual los estudiantes podían según la temática tener acceso a respuesta, procesos, apoyo, profundización, también una mesa con materiales y recursos necesarios para realizar los trabajos asignados. Entre las principales ventajas de mediar pedagógicamente estrategias de diferenciación en clase de matemática con estudiantes de sétimo nivel, se encontró que aumentó la participación en clase, el cumplimiento de tareas y trabajos, el apoyo entre compañeros, disminuyó el ausentismo, mejoró el rendimiento en clase y en pruebas escritas y la actitud hacia la materia. También se gozó de la confianza y apoyo de padres de familia, y equipo de expertos que dieron retroalimentación constante y oportuna. La evaluación, siempre fue individual en un ambiente colaborativo, las pruebas escritas eran congruentes, respondían a estrategias de diferenciación empleadas, por ejemplo: de una lista de ejercicios, resuelva dos, justifique y argumente como resolver problemas de distintas maneras.

Entre las principales ventajas presentadas a lo largo del proceso fue la sistematización de elementos básicos de la diferenciación en el salón de clase de matemática, técnicas y estrategias, instrumentos y rúbricas.

Como desventajas, la falta de continuidad de los procesos educativos por parte de estudiantes ausentes, lo que generó en muchas ocasiones estudiantes que no tenían a su pareja para trabajar, grupos incompletos o desfase en conocimientos previos, en el caso del docente, la desventaja de no contar con un aula fija, siempre genera la necesidad de estar movilizando material y acomodando pupitres, según la dinámica de clase, planeada.

4 Conclusiones y recomendaciones

La implementación de la instrucción diferenciada varía de una clase a otra, ya que no funciona en todos los salones de clase de la misma manera y requiere evaluación continua en todo el proceso para tomar decisiones y planear.

Los estudiantes aprenden los unos de los otros en los salones de clases donde la instrucción es diferenciada. Este enfoque ofrece una manera de incluir a los estudiantes con dificultades de aprendizaje y de atención en el salón de clases de educación general. Los alumnos al trabajar en parejas y tener la oportunidad de cambiar cada dos semanas, se les da la oportunidad para que aprendan unos de los otros.

En muchas ocasiones el alumno, asume el roll de maestro, explicando lo que aprendió y haciendo preguntas a sus compañeros, y se estimula el aprendizaje recíproco.

La experiencia es exitosa en la medida en que el docente supervise de manera constante (con regularidad) las fortalezas y deficiencias de los estudiantes (tanto de modo formal como informal) para asegurarse que están progresando en el conocimiento que adquieren y en el dominio con que hacen el trabajo. Al tomar en cuenta los intereses, inclinaciones, motivaciones, talentos, conocimientos y experiencias previas de los estudiantes se busca igualmente influir positivamente en su identidad y auto concepto.

El apoyo entre docentes es fundamental permite poner el énfasis en el trabajo profesional colaborativo y la formación continua, mejorando procesos y resultados. Es necesario implementar la observación mutua de clases entre colegas, el registro y análisis profundo de ellas (Araya, 2012), el trabajo conjunto para mejorarlas. Compartir experiencias y valorar procesos, anticiparse a necesidades potenciales.

Es necesario prever que los estudiantes tendrán demandas muy distintas dentro de 15 o 20 años, la velocidad de cambio de trabajos que emergerá y otros desaparecerán, plantea un desafío a la educación actual, donde estimular habilidades, trabajo cooperativo, correlación entre materias, temas como inteligencia, artificial, aprendizaje autónomo o por máquinas. Por lo que la innovación es fundamental en los salones de clase y en especial el de matemática.

5 Referencias bibliográficas

Araya, R. (2012). Introducing Mathematical Modeling skills in the curriculum. In *Mathemati- cal Modeling course in Mathematics curriculum: some best pra*

Bolaños, R. (2019). Las calificaciones en Costa Rica en pruebas PISA están por debajo del promedio de la OCDE. Universidad de Costa Rica. Recuperado de https://www.ucr.ac.cr/noticias/2019/07/22/las-calificaciones-en-costa-rica-en-pruebas-pisa-estan-por-debajo-del-promedio-de-la-ocde.html

CERI (2014). Innovation, governance and reform in education. CERI Conference Background Pa- per. http://www.oecd.org/edu/ceri/CERI %20Conference %20Background % 20Paper_formatted.pdf

Chacón, V. (2016). Costa Rica deficiente en pruebas PISA. Semanario Universidad. Recuperado de https://semanariouniversidad.com/pais/costa-rica-deficiente-pruebas-pisa/

Coleman, G. (s.f.). Instrucción diferenciada Instrucción diferenciada: Lo que necesita saber. Understood. Dificultades de aprendizaje y atención. Recuperado de https://www.understood.org/es-mx/learning-attention-issues/treatments-approaches/educational-strategies/differentiated-instruction-what-you-need-to-know

Coronado Hijón, Antonio. (2014) .LA RESPUESTA A LA INTERVENCIÓN (RTI) COMO METODOLOGÍA DE EVALUACIÓN Y ORIENTACIÓN EDUCATIVA EN EL ALUMNADO EN RIESGO DE DIFICULTADES DE APRENDIZAJE. Congreso Internacional Infancia en Contextos de Riesgo Huelva (España), 20-22 de noviembre de 2014. ISBN/ISSN 978-84-15385-40-0. Recuperado de https://idus.us.es/xmlui/handle/11441/25531

European Parliament. (2015). Encouraging STEM Studies for the Labour Market. Recuperado de: http://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/STUD/2015/542199/IPOL_STU (2015) 542199_EN.pdf

Klippert, Heinz. (2012). Heterogenität im Klassenzimmer: Wie Lehrkräfte effektiv und zeitsparend damit umgehen können. GERMANY, Munchen. Editorial: Beltz GmbH, Julius, 2012. ISBN: 9783407626837

Klippert, Heinz. (2018). Methoden-Training: Bausteine zur Förderung grundlegender Lernkompetenzen. Mit E-Book inside (Beltz Praxis) (German Edition). ISBN: 9783407630667 Print, ISBN: 9783407295712 E-book, PDF

Manzano, F., Gómez M. Mozo J. (2017). Mecanismos articulados Geometría Dinámica y Cinemática en un entorno educativo STEM. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6027714 Innoeduca: international journal of technology and educational innovation, ISSN-e 2444-2925, Vol. 3, Nº. 1, 2017, págs. 15-27

Tomlinson, Carol Ann. (2008). Educación Diversificada. Dar respuesta a las necesidades de todos los estudiantes. Ediciones OOTAEDRO.S. L, Barcelona, España. ISBN 978- 84-8063-964-4. Recuperado de https://drive.google.com/file/d/1QeYv11kcYOq-Tt3cRiVGTscDgRN0I4qL/view?fbclid=IwAR1A7BX1thxN3wwd4-aVcrK7v99Wagaf5xfdW8UqTwYUqmqbu4rAKWhORKs

World Economic Forum (2019). Annual Report 2018–2019. Recuperado de https://es.weforum.org/reports/annual-report-2018-2019

DESARROLLO DE DOCUMENTOS CON UN FORMATO COMPUTABLE

Mtr. Enrique Vílchez Quesada
Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica
evq1529@una.ac.cr

Dr. Juan Félix Ávila Herrera
Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica
javila@una.ac.cr

Resumen: los documentos con un formato computable (CDFs por sus siglas en inglés) constituyen un mecanismo de publicación de archivos personales interactivos. Los CDFs se construyen empleando el software comercial Wolfram Mathematica, con la ventaja de poder ser consultados para su lectura e interacción, al instalar un plug in gratuito denominado Wolfram CDF Player Free. Un CDF a diferencia de un PDF (documento con un formato portable) ofrece no solo la alternativa de lectura, sino también, la posibilidad de que el usuario interactúe de manera no pregenerada con objetos de manipulación dinámica. El presente trabajo explica los fundamentos básicos que deben ser considerados en el diseño de documentos con un formato computable, se presenta un recorrido robusto sobre su forma de elaboración, atributos, exportación y ejemplos de uso.
Palabras clave: software, *CDFs*, *Mathematica*, *Wolfram*, diseño.

Abstract: the computable document format (CDFs for its acronym in English) constitute a mechanism for publishing personal interactive files. CDFs are built using commercial software Wolfram Mathematica, with the advantage of being consulted for reading and interaction, by installing a free plug-in called Wolfram CDF Player Free. A CDF unlike a PDF (document with a portable format) offers not only the alternative of reading, but also the possibility of the user interacting in a non-pre-generated way with dynamic manipulation objects. The present work explains the basic fundamentals that should be considered in the design of documents with a computable format, it presents a robust path on its way of elaboration, attributes, exports and examples of use.
Keywords: software, CDFs, Mathematica, Wolfram, design.

1. Introducción

La elaboración de documentos con un formato computable o CDFs es una tarea que demanda una combinación de habilidades lógicas, de programación y de uso del software Wolfram Mathematica. Con frecuencia el abordaje individual de tales retos puede ocasionar confusión o desmotivación por la demanda cognitiva que implican las vertientes ya mencionadas.

El presente taller constituye un esfuerzo por introducir al participante hacia el diseño y desarrollo de aplicaciones CDFs mostrando sus posibilidades didácticas en la educación matemática. El recorrido propuesto realiza un abordaje básico sobre los distintos tipos de controladores disponibles, sus atributos y combinaciones permitidas.

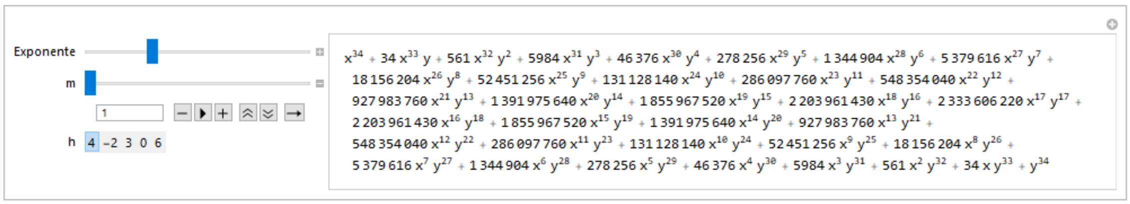
2. Comando Manipulate

Manipulate es la instrucción base a través de la cual se crean los documentos con un formato computable. Presenta distintas formas de uso:

- **Manipulate[Expresión , {{Parámetro , Valor inicial}, Valor mínimo, Valor máximo}]**: da un valor inicial al parámetro con el cual comenzará a mostrarse el objeto dinámico indicado por **Expresión**.

- **Manipulate[Expresión , {{Parámetro, Valor inicial, "Etiqueta"}, … }]**: añade una etiqueta.
- **Manipulate[Expresión , {Parámetro, {Valor 1, Valor 2, Valor 3, … }}]**: agrega valores discretos al parámetro, esta opción en *Wolfram Mathematica* se denomina *SetterBar*.
- **Manipulate[Expresión ,{Parámetro 1, … }, {Parámetro 2, … }, {Parámetro 3, … }, …]**: muestra varios manipuladores simultáneamente.

Por ejemplo:



[Descargue el *CDF*]

Como ejercicios se proponen al participante:

1. Realice una animación parametrizando los coeficientes numéricos de la expresión $ax^2 + bx + c$, donde se muestre **True** si el trinomio es un cuadrado perfecto, o bien, **False** en caso contrario. Sugerencia: recurra al uso del comando **Discriminant**.
2. El matemático *Leonard Euler* conjeturó en algún momento que el polinomio $x^2 + x + 41$ constituía un generador de números primos. Desarrolle un *CDF* que verifique la veracidad o falsedad de esta afirmación.

3. Controladores

En *Wolfram Mathematica* existen los siguientes controladores para la elaboración de un *CDF*:

- *Checkbox*: agrega un componente de verificación.
- *SetterBar*: crea una barra de selectores con valores discretos para el parámetro que controla el objeto dinámico. Dentro del **Manipulate** la instrucción **{n, {S1, S2}}**

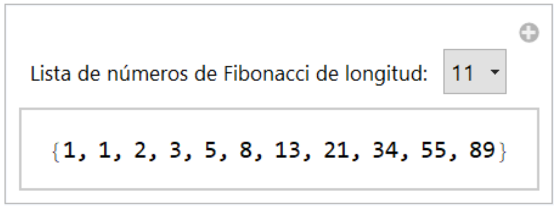
añade a la barra dos selectores con nombres **S1** y **S2** (pueden ser más), respectivamente.

- *Popupmenu*: la línea de comandos **{n, {P1, P2, …, Pm}}** dentro de un **Manipulate** crea un menú desplegable con "m" opciones. Esta clase de menú típicamente es conocida con el nombre de *popupmenu* y genera un combo de selección de valores para asignar a un parámetro.
- *Button*: este comando inserta un botón añadiendo el conjunto de instrucciones a ejecutar cuando el mando es activado. Se aclara que el uso de botones no es exclusivo del comando **Manipulate** y de hecho pueden ser utilizados de manera independiente.
- Campos de texto: otro tipo de controlador que es posible crear usando **Manipulate**, consiste en un campo de texto o *input field* empleado por el usuario para ingresar de manera más personalizada cambios dentro de un parámetro que caracteriza a un objeto dinámico.
- *Slider* 2D: en un **Manipulate** la línea de sentencias **{{n, {0, 0}, "Punto"}, {xmin, ymin}, {xmax, ymax}}** construye un *slider* 2D ubicando un par ordenado manipulable en la posición $(0,0)$. Un *slider* 2D es un controlador sobre un plano cartesiano con variación en el eje de las abscisas en el rango **xmin-xmax** y en el eje de las ordenadas en el rango **ymin-ymax**, donde al arrastrar el punto móvil, se obtiene un par ordenado como resultado de la navegación.
- Puntos de localización: un punto de localización consiste en un punto en el plano, manipulable por el usuario mediante el *mouse*. En un **Manipulate** la línea de código **{{Puntos, P1, P2, …, Pn}, Locator}** genera n puntos de localización donde **P1**, P2, …, Pn corresponden a las coordenadas de los pares ordenados que serán almacenados en la variable "**Puntos**". El controlador funciona siempre y cuando lo que se procese para efectos de visualización sea una instrucción que reciba como argumento una lista de pares ordenados.
- Deslizador de color: este tipo de controlador construye una barra de color. Al integrar en un **Manipulate** la línea **{Color, Nombre}** donde **Color** es la variable que almacena el color especificado en **Nombre** (el nombre debe corresponder al color en *inglés*) es posible cambiar dinámicamente de color a un objeto, al navegar sobre el deslizador.

ISBN 978-9930-541-76-0

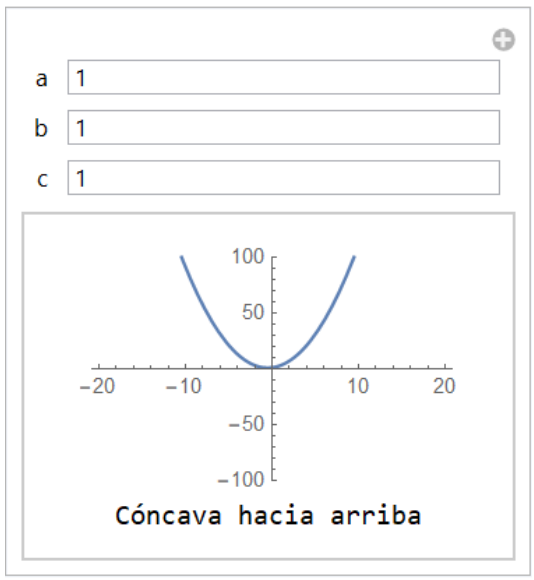
Algunos ejemplos se muestran a continuación.

- Generador de números de *Fibonacci*:



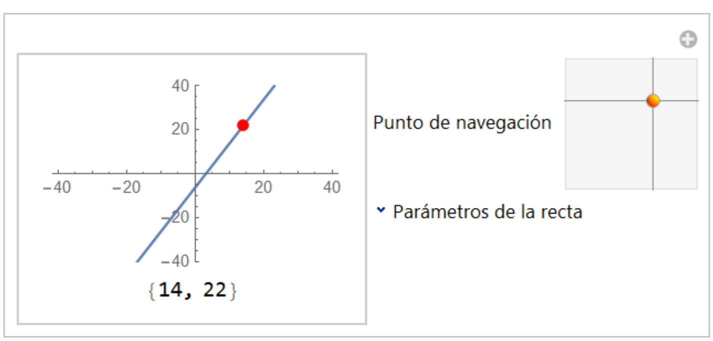
[**Descargue el *CDF***]

- Graficador de una función cuadrática:



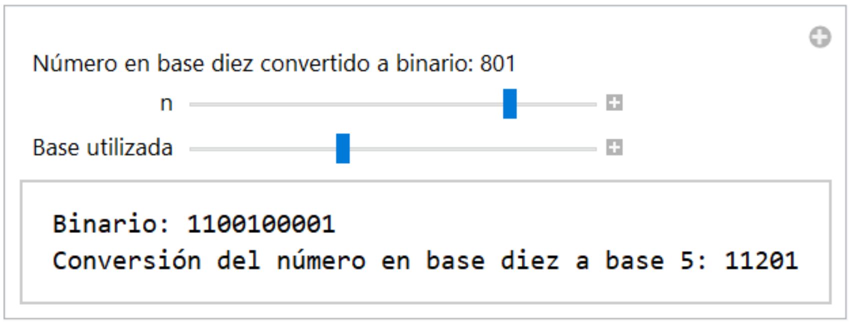
[**Descargue el *CDF***]

- Punto móvil:



[**Descargue el *CDF***]

En general, el comando **Manipulate** además de facilitar el uso de los controladores ya descritos, posee una serie de atributos que pueden ser empleados de manera optativa al crear un *CDF*. Los atributos se clasifican en varias categorías: apariencia, ordenamiento, estilo y control. El siguiente *CDF*, por ejemplo, permite visualizar el uso de ciertos atributos de control:



[**Descargue el *CDF***]

4. Antes de crear un *CDF*

Cuando el proceso de diseño y desarrollo de un *CDF* ha finalizado en un *notebook* del software *Wolfram Mathematica*, se debe preparar el archivo para su correspondiente exportación a un documento con un formato computable. El siguiente video explica los pasos a seguir:

***QR* del video**:

Consulte aquí una explicación en video: https://youtu.be/iRMxhoJCQJE

5. Ejemplos más elaborados

En esta sección se comparten una serie de *CDFs* con un diseño más minucioso. Se pretende con ello mostrar los alcances que pueden tener este tipo de aplicaciones.

- Graficador de la función $y = bf(x + a) + c$.

[Descargue el notebook de *Mathematica*]

- Gráfica con el crecimiento o decrecimiento poblacional de un país.

[Descargue el notebook de *Mathematica*]

- Ejercicios pseudoaleatorios para determinar el área entre dos curvas.

[Descargue el notebook de *Mathematica*]

- Construcción pseudoaleatoria de una proposición con su correspondiente tabla de verdad.

[Descargue el notebook de *Mathematica*]

- Árbol de orden personalizado para introducir la definición de raíz, hojas y altura.

[Descargue el notebook de *Mathematica*]

Durante el taller se explicará a fondo el código incorporado en cada uno de los archivos *.nb* anteriores.

6. Publicación de *CDFs*

Un *CDF* puede ser exportado a la nube empleando la sentencia:

CloudDeploy[Manipulate[…], "File", Permissions -> "Public"]

Desde allí, se cuenta con dos opciones de socialización:

- *URL*: para compartir directamente la dirección del documento con un formato computable.
- *Embed Code*: que sirve para embeber el objeto dinámico en una página *web* externa (por ejemplo, en un *aula virtual*).

7. Conclusiones

Se espera con el presente taller inspirar a otros colegas en el área de la educación matemática o afines, a innovar en el desarrollo e implementación de documentos con un formato computable. Las ideas aquí propuestas conforman piezas segregadas que, en manos de un buen artesano didáctico, conducirán en el mejor de los casos, a promover procesos de enseñanza y aprendizaje originales y disruptivos.

8. Referencias

Vílchez-Quesada, E. (2015a). Estructuras discretas con Mathematica. México: Editorial Alfaomega.

Vílchez-Quesada, E. (Setiembre, 2015b). Creación de CDF's para la enseñanza de funciones con *Wolfram Mathematica*. En J. Córica (Presidencia), *VI Congreso Virtual Iberoamericano de Calidad en Educación Virtual y a Distancia* (EduQ@2015, pp. 1-30). Congreso virtual organizado por la Fundación Latinoamericana para la Educación a Distancia. Mendoza, Argentina. Recuperado de http://www.eduqa.net/eduqa2015/images/ponencias/eje1/1_t_Vilchez_Quesada_Enrique_Creacion_de_CDF_s_para_la_ensenanza_del_tema_de_funciones_con_Wolfram_Mathematica_-_copia.pdf

Vílchez, E. y Ávila, A. (2019). Desarrollo de Documentos con un Formato Computable Utilizando el Software Wolfram Mathematica. *Revista Matemática, Educación e Internet*, *20*(2), 1-27.

Wolfram Research. (2019). *Wolfram Language & System* Documentation Center. USA: Wolfram. Recuperado de http://reference.wolfram.com/language/

UTILIZANDO PYTHON PARA MEJORAR LA VISUALIZACIÓN Y MODELIZACIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS

Carlos Monge Madriz
Instituto Tecnológico de Costa Rica
camonge@itcr.ac.cr

José Pablo Salazar Granados
Instituto Tecnológico de Costa Rica
jsalazarg48@gmail.com

Resumen: este es un taller dirigido a aquellas personas que tengan interés por aprender nociones básicas de un lenguaje de programación aunado con varios complementos del área de las matemáticas, como elaboración de gráficos en 2D, 3D, gráficos estadísticos, utilizar herramientas del cálculo simbólico y algebraico que le permitan simplificar, expandir expresiones algebraicas, resolver ecuaciones o realizar cálculos estadísticos. Lo anterior, con la finalidad de poder modelar distintas situaciones matemáticas y tener una visualización gráfica de los resultados, aprovechando el potencial de la programación. Se utilizará el lenguaje Python pues se caracteriza de poseer una sintaxis sencilla y fácil de aprender, es gratuito y con las librerías adecuadas, se pueden obtener resultados similares que al utilizar programas como *Mathematica*, *Maple* o *Matlab*. Al finalizar el taller, los participantes podrán: programar y diseñar pequeños programas, tener una noción de cómo las matemáticas y la programación se complementan, manejar herramientas que permiten la visualización gráfica de resultados, experimentar con nuevas estrategias que podrían ser de apoyo a la enseñanza de las matemáticas por medio de las TIC.
Palabras clave: programación matemática, modelación, graficación, resolución de problemas.

Abstract: This is a workshop intended for those who have an interest in learning basic notions of a programming language with the integration of various complements of mathematics, for example, the elaboration of 2D, 3D and statistical graphics, use symbolic and algebraic calculus tools, expand and simplify equations and perform statistical calculus. The above mentioned, with the purpose of modeling different mathematical situations and having a graphical visualization of the results, taking into advantage the potential of programming. The language used will be Python because it's known for having easy syntaxis and it's easy to learn, it's open-source (free) and with the adequate libraries you can obtain similar results to the ones done by programs like Mathematica, Maple o Matlab. At the end of the workshop, the participants will be able to: designing and creating small programs, have a notion of how programming and mathematics complement, manage tools that produce graphic results and experimenting new strategies that could be helpful in teaching mathematics through Information and Communications Technology (ICT).
Keywords: Python, Matplotlib, Numpy, Sympy, lists, graphs, visualization, programming, interpretation, data management

1. Introducción

Cuando se resuelven algunos problemas en matemáticas, pueden obtenerse una amplia gama de resultados cuya interpretación podría dificultarse dependiendo del contenido al que se está enfrentando. Es por ello, que la visualización gráfica de los resultados puede aumentar la facilidad de interpretación y comprensión de estos, así como tener un mejor entendimiento de los conceptos matemáticos a tratar (Gatica y Arias, 2012). En este taller, se utilizará el lenguaje de programación Python aunado a varios complementos del área de las matemáticas (graficación, cálculo simbólico y algebraico), con la finalidad de poder modelar distintas situaciones matemáticas y tener una visualización gráfica de los resultados.

Python se caracteriza por ser un lenguaje con una sintaxis sencilla y fácil de aprender, es gratuito, y con las librerías adecuadas, se pueden obtener resultados similares que al utilizar programas como *Mathematica*, *Maple* o *Matlab*. Además, las versiones 5 y 6 de *GeoGebra*, contienen una ventana Python, así que el aprendizaje de este lenguaje puede potenciar el desarrollo y manejo de este software.

Los asistentes al taller aprenderán las nociones básicas del lenguaje de programación, posteriormente resolverán ejercicios y problemas utilizando algunos complementos disponibles en el área de matemáticas. Al finalizar, se pretende que los participantes tengan una noción de cómo las matemáticas y la programación se complementan, además de brindarles herramientas que permitan la visualización gráfica de resultados y que pueden ser de apoyo en la enseñanza.

2. Aspectos teóricos

2.1. Tecnología en la educación

En un mundo cada vez más conectado por medios digitales en los distintos campos de la sociedad, el ámbito educativo no debe quedar excluido de esta nueva era digital. Este pensamiento también lo comparte Lizcano y Ayala (2013) al indicar que:

> Algo que ha llevado a la aparición de la globalización ha sido la utilización de tecnologías como una herramienta de comunicación y como medio de información. Por esto, para lograr que todas las personas puedan estar a la vanguardia en el uso de estas herramientas, se ha hecho necesario fomentar el uso productivo de dichas tecnologías, en este caso, en el ámbito educativo (p.68).

Aprovechar estas Tecnologías de Información y de la Comunicación (TIC) en la educación permite potenciar habilidades y destrezas de comunicación entre alumnos y profesores, a través de acciones de procesamiento, creación y desarrollo de los conocimientos (Rodríguez, Romero y Vergara, 2017).

2.1.1.TICS en la enseñanza de la matemática

El aprendizaje de las matemáticas, complementado con las TICs, puede generar espacios que favorezcan un mejor entendimiento de esta disciplina, así lo manifiesta Arrieta (2013) al argumentar que:

> … a través de distintos programas informáticos, los conceptos matemáticos se materializan mediante representaciones visuales que facilitan el aprendizaje. Gracias a las TIC se genera una rica interacción del estudiante con el conocimiento mediante escenas matemáticas interactivas y dinámicas que potencian su creatividad. En definitiva, las TIC en matemáticas pueden verse como un potente laboratorio en el que los abstractos conceptos matemáticos cobran vida. (p.5).

Por las características propias de las matemáticas como disciplina, el estudio de esta materia debe hacerse desde una perspectiva más activa que permita potenciar distintas habilidades, logrando que los contenidos se tornen más familiares, esta idea se puede conectar el párrafo citado anteriormente, las TIC son fuentes generadoras de interacción entre el estudiante y el conocimiento. El encargado de poder incorporar todas estas nuevas tecnologías es el docente, debe encargarse de ser guía del proceso educativo, es por ello, que su capacitación en el área debe de ser imprescindible.

2.1.2. Capacitación docente en el uso de herramientas tecnológica

Algunos autores indican, según Hernández (2002), que por los constantes y rápidos cambios que se producen en la sociedad en que vivimos, los periodos de renovación de conocimientos científicos y también de obsolescencia se sitúan en lapsos de 5 años. Trasladando la idea anterior al ámbito educativo y pensando específicamente en los docentes, se puede pensar que, por las características propias de su profesión, la capacitación y actualización debe ser uno de los pilares fundamentales en su quehacer laboral.

Según los resultados obtenidos por el Proyecto Perfiles (2013), mencionado por Cuevas y García (2014), muchos docentes se han encontrado en constante actualización mediante seminarios, cursos o de forma autodidacta, sin embargo, sienten que no se encuentran preparados para utilizar las TIC en sus lecciones. Cuevas y García (2014) continúan mencionando a la División de Educología del CIDE-UNA (Rojas, 2013), en donde sus estudios han arrojado que “son pocos los profesores que consideran tener conocimiento experto o ser innovador en esta materia y, el 50 % de sus estudiantes consideran que los profesores están en proceso de formación o son principiantes en esta materia. También señalan que solo uno de cada tres docentes hace uso de la computadora en esta gestión” (p.6).

Lo anterior da por manifiesto que es necesario que los docentes tengan un acompañamiento mayor en cuanto al uso de la tecnología en el aula, además de poder dotarlos de conocimientos más específicos y técnicos en cuanto al uso de estas herramientas. Se debe evaluar las debilidades de los docentes para enriquecer los procesos de capacitación en esos aspectos, Cuevas y García (2014) mencionan a Ríos (2013), quien realizó un estudio sobre las principales debilidades de los docentes hacia el manejo de las TIC, de donde se destaca:

- Uso moderado y básico de aplicaciones informáticas.
- Deficiencias en el uso de software especializado, uso mínimo de herramientas de creación.
- Falta de integración pedagógica.

Se hace énfasis en la falta de uso de software especializado y de herramientas que le permitan al docente confeccionar sus propios materiales didácticos. En el caso específico de las matemáticas, Riveros, Mendoza y Castro (2011) indican que una manera para agregar interactividad al aprendizaje por medio de las TIC puede ser mediante los lenguajes de programación. Con la finalidad de dotar al docente del manejo de herramientas más especializadas, que le permitan crear, diseñar y confeccionar sus propios materiales o aplicaciones tecnológicas, es que surge el presente taller. El objetivo se centra en que los docentes obtengan un conocimiento introductorio del lenguaje de programación Python y de sus bibliotecas orientadas a las matemáticas, que les sirvan de apoyo en procesos en los cuales se requiera de graficar, modelar situaciones problema, utilizar herramientas del cálculo simbólico y algebraico o poder manejar una gran cantidad de datos utilizando comandos estadísticos.

2.2. Programación en Python y matemáticas

Python es un lenguaje de programación que se caracteriza por ser muy eficiente, dinámico, con gran poder y fácil de comprender, permite el desarrollo rápido de aplicaciones (Van Rossum, 2009). Aguilera (2019) en su libro “Matemáticas y programación con Python” brinda una serie de ventajas sobre el uso de Python con respecto a otros lenguajes de programación, dentro de los que destaca el hecho de ser gratuito, tener similitudes con paquetes computacionales orientados a las matemáticas como *Mathematica*, *Matlab* o *Maple* y tener una variedad de módulos específicos de matemáticas. Sin embargo, presenta desventajas como poca cantidad de instrucciones, poder programar algoritmos de distintas maneras y presentar una sintaxis no consistente.

2.2.1.¿Qué se puede hacer con Python en matemáticas?

Python tiene bibliotecas que permiten el manejo de las matemáticas de manera simbólica, el trabajo con gráficas, datos o informaciones estadísticas. Se detallan algunas de las bibliotecas:

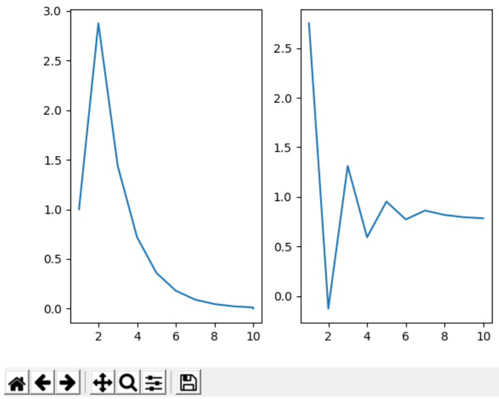
- Sympy: "es una biblioteca Python para matemática simbólica. Su propósito es convertirse en un completo sistema de álgebra computacional que pueda competir directamente con alternativas comerciales (*Mathematica*, *Maple*) manteniendo, a la vez, el código tan simple como sea posible para hacerlo extensible de manera fácil e integral." (Pedregosa, s.f).
  Con Sympy se pueden expandir o simplificar expresiones algebraicas, realizar el cálculo de límites, derivadas, integrales, expansión de series, trabajar con matrices o resolver ecuaciones diferenciales. Todos los resultados obtenidos pueden ser traducidos a código LaTeX con un comando especial.

- Matplotlib: "… es probablemente el paquete de Python más utilizado para gráficos 2D. Proporciona una manera muy rápida de visualizar datos y figuras con calidad de publicación en varios formatos." (Rougier, Muller & Varoquax, s.f). Con esta librería se pueden realizar gráficos de funciones, editar su entorno como los ejes, cuadrícula, cambiar colores, estilos, generar etiquetas y mostrar varias gráficas en una sola ventana. Además, se pueden confeccionar gráficos de dispersión, de barras, de contorno, histogramas, gráficos en 3D, gráficos de pastel o de bigotes.

- Numpy: es un paquete para el trabajo con vectores multidimensionales, transformadas, aspectos básicos del álgebra lineal, operaciones estadísticas, simulaciones, entre otros (Comunidad de Numpy, 2016).

Figura 1

Ejemplo de gráficas usando Matplotlib



Fuente: elaboración propia

2.2.2.Python y docentes de matemáticas

Cabero (2001), citado por Riveros, Mendoza y Castro (2011), manifiesta que las TIC "facilitan la creación de entornos para la simulación de fenómenos abstractos y complejos por su capacidad de almacenar e identificar variables intervinientes en una situación" (p. 118). También Arrieta (2013) indica que las TIC:

> …se pueden aplicar a la estadística mediante la visualización de distintas gráficas con el propósito de comprender cómo se resumen grandes cantidades de datos, para después extraer, mediante el análisis, conclusiones muy precisas que de otra forma sería mucho más laborioso y problemático conseguir (p. 18).

Este último autor, concluye que las TIC favorecen la visualización de los objetos, permiten que el estudiante pueda analizar de forma visual los conceptos matemáticos que se encuentran en estudio, "el tipo de gráfica, qué es lo que representa, cómo varía al cambiar algún dato, etc., es decir, posibilita también desarrollar el pensamiento crítico" (p. 18).

El que el docente pueda generar pequeñas aplicaciones utilizando Python, le da la posibilidad de manejar una gran cantidad de variables o funciones, puede lograr que la modelización de problemas y la visualización de sus resultados sea más dinámica que al realizarlo con los graficadores tradicionales. El profesor tiene en sus manos la posibilidad de cambiar ambientes, factores u objetos matemáticos y mostrarlos a sus estudiantes mediante la visualización gráfica, que como anteriormente se indicó, es de gran importancia en el aprendizaje de conceptos matemáticos.

Otra ventaja de aprender Python es que en la versión 5 de GeoGebra existe una ventana de Python (Rosa et al., s.f), el hecho de que un docente maneje este lenguaje le da la oportunidad de sacarle mucho más provecho a las funcionalidades de este software.

Un profesor de matemáticas que tenga conocimientos de programación, abre la posibilidad introducir distintas formas de razonar y resolver problemas, esta idea se apoya del estándar de la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003), citado por Rosa et al. (s.f), que indica: "... los estudiantes debieran ser estimulados a reflexionar sobre sus razonamientos durante el proceso de resolución de problemas, de manera tal que sean capaces de aplicar y adaptar las estrategias que han desarrollado en otros problemas y contextos." (p.5).

El utilizar la programación en la enseñanza de las matemáticas permite que el alumno se sienta más motivado y retado a resolver una situación problema, favorece la interdisciplinariedad trabajando aspectos de la lógica, de las matemáticas y del lenguaje, además de mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos, como por ejemplo el de funciones (Rosa et al, s.f).

3. Metodología de trabajo

El taller se desarrollará bajo una metodología enteramente práctica, los expositores brindarán los aspectos teóricos y los ejercicios a desarrollar se realizarán de manera guiada. Se propiciará que fomente la reflexión entre los participantes, acerca de los nuevos conocimientos que se estarán adquiriendo y las situaciones problema que deberán programar.

3.1 Público meta

El taller está dirigido a personas que tengan conocimientos matemáticos formales, que se dediquen a la enseñanza de las matemáticas a nivel de secundaria o universitario. No se requieren conocimientos previos en programación, solamente el uso elemental de las computadoras. El taller está diseñado para personas que nunca hayan tenido contacto con algún lenguaje de programación o que tengan conocimientos mínimos en esta área.

3.2 Requerimientos del taller

Se requiere un laboratorio con computadoras que tengan instalado Python 3.7, tener un shortcut del mismo en el escritorio y que tengan habilitado la herramienta PIP, además de proyector. Se solicita una duración mínima de 6 horas para el desarrollo del taller.

4. Actividades por desarrollar

El taller brinda aspectos introductorios al uso de las librerías Numpy, Sympy y Matplotlib, sin embargo, como el público meta son personas que puedan no tener conocimientos en programación, se iniciará con ejercicios introductorios al lenguaje de Python. Se seguirá el siguiente esquema de trabajo y actividades:

4.1 Introducción a Python

- Se realizará una introducción al taller en donde se expondrán los principales fundamentos al aprender un lenguaje de programación como Python, especialmente si se trabaja en un área relacionada con las matemáticas.
- Posteriormente se explicarán aspectos como indentación, entrada y salida de datos, ciclos y condicionales. Para llevar a cabo lo anterior, se propiciará que los participantes programen las siguientes situaciones:
    - Para la familiarización con Python y la entrada y salida de datos, se confeccionará un pequeño programa que reciba puntos y se obtenga por salida su simétrico, también digitar una fecha de nacimiento y obtener la cantidad de años que tiene la persona.
    - Para el manejo de condicionales se programará una aplicación que reciba un ángulo y lo clasifique en recto, agudo, obtuso, nulo o llano.
    - Para el aprendizaje de ciclos, los participantes aprenderán a programar una sumatoria y a trabajar con los términos de ciertas sucesiones.
- Para cerrar esta primera parte del taller, se abordarán el tema de listas y sus usos básicos (agregar, eliminar y modificar datos), para ello se realizarán las siguientes prácticas:
    - Se solicita el nombre de un polígono regular y mediante listas se muestra en pantalla datos como la cantidad de diagonales, la medida de los ángulos internos y externos, entre otra información.

    - Se propondrán actividades que involucren la eliminación y modificación de elementos de una lista.

4.2 Introducción a las bibliotecas de matemáticas en Python

Ya que los participantes han tenido un acercamiento a los fundamentos de la programación y aspectos generales del lenguaje de Python, se procederá a mostrar los principales comandos de las librerías, de la siguiente manera:

- Explicación general de las bibliotecas Sympy y Numpy: acá los participantes aprenderán a utilizar los principales comandos que les permitirán realizar funciones similares a las que cualquier programa orientado al Cálculo, Simbólico y Algebraico (CAS) está diseñado.
- Explicación general de Matplotlib: se enseñará a graficar funciones, cambiar aspectos visuales y dinámicos de esta librería. Tendrán conocimientos para poder generar distintas gráficas y agregar otras funcionalidades.

Figura 2

Ejemplo de código que involucra ciclos, listas y las librerías de matemáticas de Python

```
lista = []
archivo = open('funciones.csv','r')
linea = archivo.readline()

while linea!= '':
    linea = linea.replace("]","").replace("[","")
    linea = linea.split(",")
    i=1
    while i<len(linea):
        linea[i] = int(linea[i])
        i+=1
    lista.append(linea)
    linea = archivo.readline()
print(lista)

#Adicion de las funciones al plot por mostrarse
for i in range(len(lista)):
    plt.plot(lista[i],label=str(lista[i][0]))
plt.legend()
plt.show()
```

Fuente: elaboración propia

- Finalmente se modelarán algunas situaciones de modo que puedan representarse de manera gráfica, por ejemplo:
    - Confeccionar una aplicación que reciba una función, por medio del criterio de la segunda derivada determinar los puntos máximos o mínimos y generar la gráfica de la función señalado el punto buscado. Con este

ejercicio los participantes podrán en práctica ciclos, condicionales y librerías.

- Confeccionar una aplicación que reciba el criterio de una función y el usuario elija trasladar (horizontal o verticalmente), reflejar (con respecto al eje x o al eje y), dilatar o contraer la gráfica de la función. Con este ejercicio los participantes podrán en práctica ciclos, condicionales, listas y librerías.

5. Conclusiones

Es un gran complemento que, los docentes que deseen incorporar tecnología a sus lecciones, tengan conocimientos mínimos del funcionamiento de los computadores y el lenguaje que permite la interacción con las mismas. El que un profesor pueda escribir códigos en Python, le permite poder desarrollar programas adaptados a las necesidades de sus lecciones y a los temas que está enseñando, con bibliotecas como Matplotlib, Sympy o Numpy puede desarrollar un trabajar con gran cantidad de datos, variarlos y utilizar representaciones gráficas para fomentar el pensamiento visual en los estudiantes. Además, puede surgir la iniciativa de enseñar matemáticas mediante la programación, fomentando la interdisciplinariedad con otras áreas, e incluso desarrollar proyectos que se adapten a la metodología STEAM.

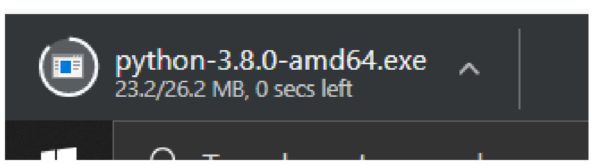
6. Guía utilizada en el taller

I. Instalación de Python

1. Abrir en algún navegador la página oficial de Python para descargar en Windows. https://www.python.org/downloads/windows/

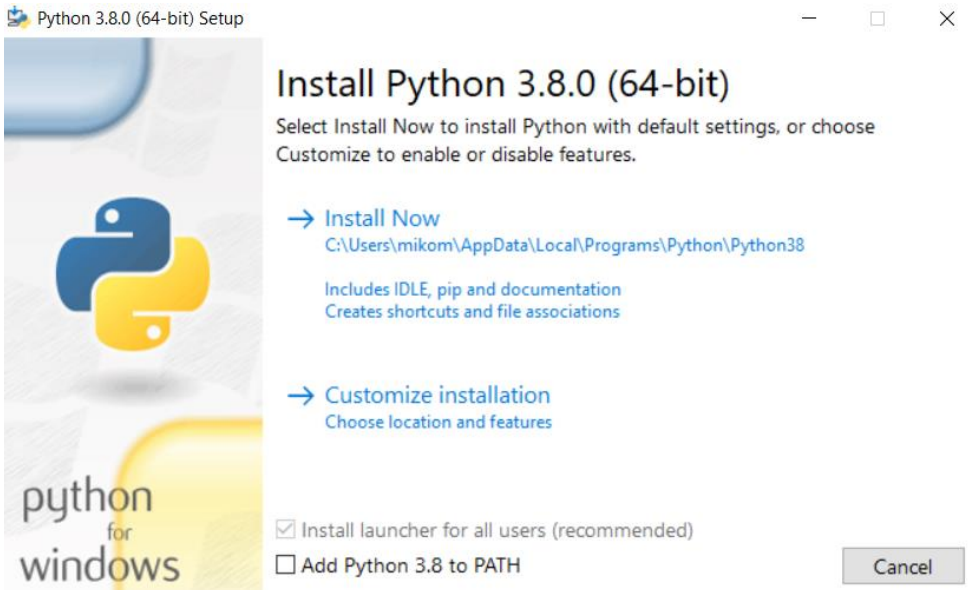
2. Seleccionamos la opción que dice "*Python 3.8.0*" y nos llevará a la siguiente página donde al final podemos encontrar las siguientes opciones:

Version	Operating System	Description	MD5 Sum	File Size	GPG
Gzipped source tarball	Source release		e18a9d1a0a6d858b9787e03fc6fdaa20	23949883	SIG
XZ compressed source tarball	Source release		dbac8df9d8b9edc678d0f4cacdb7dbb0	17829824	SIG
macOS 64-bit installer	Mac OS X	for OS X 10.9 and later	f5f9ae9f416170c6355cab7256bb75b5	29005746	SIG
Windows help file	Windows		1c33359821033ddb3353c8e5b6e7e003	8457529	SIG
Windows x86-64 embeddable zip file	Windows	for AMD64/EM64T/x64	99cca948512b53fb165084787143ef19	8084795	SIG
Windows x86-64 executable installer	Windows	for AMD64/EM64T/x64	29ea87f24c32f5e924b7d63f8a08ee8d	27505064	SIG
Windows x86-64 web-based installer	Windows	for AMD64/EM64T/x64	f93f7ba8cd48066c59827752e531924b	1363336	SIG
Windows x86 embeddable zip file	Windows		2ec3abf05f3f1046e0dbd1ca5c74ce88	7213298	SIG
Windows x86 executable installer	Windows		412a649d36626d33b8ca5593cf18318c	26406312	SIG
Windows x86 web-based installer	Windows		50d484ff0b08722b3cf51f9305f49fdc	1325368	SIG



Seleccionamos la opción que dice "Windows x86-64 executable installer", se mostrará la descarga en la parte inferior.

Luego, damos clic al cuadro que tiene el nombre de Python y se abre esta ventana:



Seleccionamos la primera opción y esperamos a que se instale. Luego de esto, Python quedará instalado y listo para usar.

II. Entrada y salida de datos

Lo primero que veremos es cómo introducir y devolver datos a la computadora. Python tiene herramientas muy sencillas para esto. Cuando queremos que un usuario ingrese datos, usamos el comando “input()” de la siguiente forma:

m = input(“Introduzca un texto: ”)

Ese comando mostrará en pantalla la frase “Introduzca un texto: ”, posteriormente el usuario digita lo requerido y al presionar la tecla “Enter” la variable “m” almacenará lo suministrado.

Para que la computadora muestre algo en la pantalla usamos “print()”. La forma de utilizar esta herramienta es similar a la anterior ya que dentro de los paréntesis colocamos el texto que deseamos mostrarle al usuario. Un ejemplo sería:

print(“Buenas tardes a todos”)

Primer ejercicio:

Introducir su nombre y apellidos y mostrarlo en pantalla.

Solución:

```
n=input('Digite su nombre ')
print(n)
```

Segundo ejercicio:

Solicitar el nombre y el año de nacimiento y mostrar su nombre y la edad.

```
a=int(input('Digite su año de nacimiento '))

print('Usted tiene '+str(2019-a)+' años')
```

III. Ciclos y condicionales

A. Condicionales

Una parte fundamental de la programación es poder preguntar por el estado de los elementos que conforman el código de un algoritmo. Por ejemplo, poder determinar si dos variables guardan el mismo valor y de ahí tomar decisiones.

Python, al igual que muchos otros lenguajes, utiliza como palabras clave “if”, “elif”, “else”, por ende, no podemos nombrar a una variable cualquiera con alguna de estas palabras, ya que el intérprete al leer esto creerá que vamos a tomar una decisión. Un ejemplo del uso de estos condicionales es el siguiente:

```
>>> if(4>2):
        print("Es mayor!")


Es mayor!
```

```
>>> if(4<2):
        print("Es mayor")
else:
        print("No es mayor")


No es mayor
```

Primero, usamos solo “if()” y dentro de este preguntamos si 4 es mayor que 2, lo cual es verdadero y por ende se procede a imprimir el texto “Es mayor”. Cuando no se cumple la condición dentro de un “if” se procede a utilizar “else” que ejecutará otra indicación.

Primer ejercicio (guiado):

Solicitar al usuario que escriba un ángulo y que muestre qué tipo de ángulo es: nulo, agudo, recto, obtuso o llano. *Recuerde colocar los dos puntos luego del paréntesis del if o del else.

```python
#Clasifiacion Angulos
angulo = int(input("Indique la medida del ángulo por clasificar: "))

#Preguntamos si el angulo cumple con estas condiciones
#Se pregunta de manera descendente pero puede ser ascendente
if(angulo == 0):
    print("El ángulo es nulo")

elif(angulo<90):
    print("El ángulo es agudo")

elif(angulo == 90):
    print("El ángulo es recto")

elif(angulo>90 and angulo<180):
    print("El ángulo es obtuso")

elif(angulo == 180):
    print("El ángulo es llano")
```

Segundo ejercicio:

I Parte: Confeccione un programa que reciba la medida de tres segmentos e imprima en pantalla si es posible formar o no un triángulo con esos segmentos.

```python
a=int(input('Digite la medida del primer lado '))
b=int(input('Digite la medida el segundo lado '))
c=int(input('Digite la medida el tercer lado '))


if a<c+b and b<a+c and c<a+b:

    print('Con sus lados si se puede formar un triangulo')

else:
    print('No es posible formar un triángulo con sus lados')
```

II Parte: utilizando el mismo programa que se construyó anteriormente, se debe imprimir si el triángulo que se puede construir es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

```
if a<c+b and b<a+c and c<a+b:

    print('Con sus lados si se puede formar un tríangulo')

    if c>a and c>b:
        if c*c==a*a+b*b:
            print('El triángulo es rectángulo')
        if c*c>a*a+b*b:
            print('El triángulo es obtusángulo')
        if c*c<a*a+b*b:
            print('El triángulo es acutángulo')
    if a>b and a>c:
        if a*a==c*c+b*b:
            print('El triángulo es rectángulo')
        if a*a>c*c+b*b:
            print('El triángulo es obtusángulo')
        if a*a<c*c+b*b:
            print('El triángulo es acutángulo')
    if b>a and b>c:
        if b*b==c*c+a*a:
            print('El triángulo es rectángulo')
        if b*b>c*c+a*a:
            print('El triángulo es obtusángulo')
        if b*b<c*c+a*a:
            print('El triángulo es acutángulo')

else:
    print('No es posible formar un triángulo con sus lados')
```

B. Ciclos

En ocasiones debemos preguntar por alguna variable para saber su valor y tomar decisiones, sin embargo, podría darse el caso que queremos repetir esa acción una cierta cantidad de veces. No es conveniente utilizar muchos condicionales, para esto utilizamos los ciclos.

Nos permiten dar instrucciones una cantidad "n" de veces o continuar ejecutando esas indicaciones hasta indicar que algo cambie. Las dos palabras utilizadas para esto son 'while' y 'for'.

"While" hace una pregunta y mientras que esta pregunta resulte verdadera este ejecutará las instrucciones debajo del mismo. Por otro lado, "for" es utilizado para hacer "n" cantidad de veces ciertas instrucciones. Acá hay dos ejemplos de su uso en sintaxis:

Primer ejercicio:

Solicitar al usuario un número, el programa generará un número aleatorio y el usuario deberá adivinarlo, hasta que acierte el programa termina. Utilice "while" y entrada de datos para solicitar el número y "print" para indicar si lo consiguió o si debe seguir intentando.

```
for i in range (5):
        print("Esta es la vuelta #"+str(i))
```

```
Esta es la vuelta #0
Esta es la vuelta #1
Esta es la vuelta #2
Esta es la vuelta #3
Esta es la vuelta #4
```

```
m = 0
while(m<5):
        print("Esta es la vuelta #"+str(m))
        m = m+1
```

```
Esta es la vuelta #0
Esta es la vuelta #1
Esta es la vuelta #2
Esta es la vuelta #3
Esta es la vuelta #4
```

Segundo ejercicio:

Construya un programa que reciba un valor "n" que permita calcular la siguiente suma:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i^3 - 5i + 1)$$

Por ejemplo, si n=3, entonces:

$$\sum_{i=1}^{3}(2i^3 - 5i + 1) = (2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3 + 1)$$

```
n=int(input('Digite el valor de tope de la suma '))

i=1
suma=0

while i<=n:
    suma=suma+(2*i**3-5*i+1)
    i=i+1

print('El resultado de la suma es '+str(suma))
```

IV. Listas

Una lista en Python es una estructura que permite el almacenamiento de datos, matemáticamente, podría pensarse como un vector en el cual podemos almacenar variables (numéricas o texto) en cada una de sus entradas. Para nombrar una lista, debe de hacerlo de la siguiente manera:

lista = [23, 5, 14, 1, 3, 30, 88]

Observe que los elementos de la lista se separan con "comas" y se encierran en paréntesis cuadrados. Es importante mencionar que las posiciones dentro de las listas comienzan en cero, por ejemplo, en la lista representada anteriormente, el elemento que se ubica en la posición cero es el 23 y el elemento que se ubica en la posición 1 es el entero 5.

Si, por ejemplo, desea extraer de la lista el elemento que se ubica en la posición 3, debe hacerlo escribiendo lista[3] que en este caso obtendremos al entero 1.

Si desea reemplazar el elemento 14 de la lista por 324, debería hacerlo anotando lista[2]=324, es decir, reemplace el elemento que se encuentra en la posición 2 por 324.

Si en su lista desea saber cuál es la posición del elemento 88, puede utilizar la instrucción lista.index(88) que le devolvería el número 6.

Para insertar elementos en una lista utilizamos el método "append()" y para eliminar usamos "remove()". Dentro de estos paréntesis debemos colocar el dato por agregar o eliminar de nuestra lista. Las listas pueden tener más de un tipo de dato almacenado sin embargo esto no es recomendado en la mayor parte de los casos. Acá vemos un ejemplo donde se utilizan los métodos anteriormente mencionados:

```
#Listas

lista = []

lista.append(2) #insertar
lista.append(12)
lista.append(68)
lista.append(112)
print(lista)

lista.remove(68) #eliminar
print(lista)

#Recorrer lista simple
for i in range(len(lista)):
    print(lista[i])
```

Primer ejercicio:

Utilizando for, rellene una lista de tamaño que el usuario pueda decidir y con palabras que el usuario escriba. *Recuerde que “input” solicita “strings” y deberá cambiar a “int” al solicitar la cantidad de palabras.

Segundo ejercicio:

Según una lista de números (creada por usted en código o solicitada al usuario) la recorra, guarde aquellos números que sean pares en una nueva lista y muéstrela.

V. Cómo instalar las bibliotecas Numpy, Matplotlib y Sympy

1. Primero, abren la línea de comandos. Esto se puede hacer al presionar la tecla de Windows y escribir *“cmd”* y darle Enter. O buscar la línea de comandos por otro medio y abrirla para que se despliegue esta ventana que se muestra a continuación:

```
Command Prompt
Microsoft Windows [Version 10.0.18362.476]
(c) 2019 Microsoft Corporation. All rights reserved.

C:\Users\mikom>
```

2. Luego, utilizamos la herramienta *“pip”,* la cual nos permite instalar de manera muy sencilla paquetes de nuestro interés. Escribimos “pip install” y seguidamente el paquete que deseamos descargar. En este caso iniciamos con Numpy y luego Matplotlib. Por lo cual el comando es:

```
C:\Users\mikom>pip install numpy
```

```
C:\Users\mikom>pip install matplotlib
```

Una vez instalados podemos proceder a utilizarlos en cualquier instante.

VI. Biblioteca Matplotlib

La biblioteca de Matplotlib ofrece métodos que nos permiten construir gráficas dados dos vectores, dada una función o una lista de datos.

El objetivo principal de la visualización con Matplotlib es que los datos, que tenemos en un problema o su solución, se puedan mostrar gráficamente y así tener una mejor representación de lo que está sucediendo.

Lo primero que se hará, es realizar una gráfica simple dada una serie de puntos.

```
import numpy
import matplotlib.pyplot as plt

#Ejemplo grafica plot simple

x = [1,4,6]
y = [3,35,9]

plt.plot(x,y)
plt.show()
```

En las listas colocamos los números que deseamos y luego en el método "plot()" le pasamos los valores que deseamos graficar. Luego, al invocar el método "show()" todos los "plots" creados se mostrarán.

Podemos encontrarnos con escenarios en los cuales necesitamos etiquetar alguna gráfica, modificar o agregar características como: colores, etiquetas, grosor y otros. Acá un ejemplo variado:

```
x = [1,4,6]
y = [3,35,9]

x2 = [2,6,12]
y2 = [4,33,18]

plt.plot(x,y, label = "Linea 1", color ="red")
plt.plot(x2,y2, label = "Linea 2")

plt.title("Demostración de matplot")
plt.legend()
plt.show()
```

Primero, para agregar etiquetas, colocamos dentro del paréntesis: "label = " y le concatenamos, entre comillas, el texto que deseamos sea mostrado en la leyenda. También podemos modificar el color de la misma manera, pero en vez de "label", ponemos color y colocamos el de nuestra preferencia. Además, podemos colocar un título a la ventana generada. Por último, invocamos el método "legend()" y este ordenará las etiquetas para que vayan acorde a las gráficas y luego muestra una leyenda en la ventana.

Si necesitáramos observar dos gráficas por separado, podemos utilizar los "subplots".

```
#Mulitples ventanas
figura = plt.figure()

x1 = [1,4,6]
y1 = [3,35,9]

x2 = [2,6,12]
y2 = [4,33,18]

x3 = [1,2,4]
y3 = [3,6,8]

axis1 = figura.add_subplot(221)
axis2 = figura.add_subplot(222)
axis3 = figura.add_subplot(212)

axis1.plot(x1,y1, color = "red")
axis2.plot(x2,y2)
axis3.plot(x3,y3)

plt.legend()
plt.show()
```

Debemos crear una figura con el comando mostrado en la primera línea. Creamos las listas con los puntos y luego creamos los “subplots”, que nos sirven para indicar que son “plots” pero separados. Llamamos el método “plot” para ubicarlos en la ventana y el resto ya lo vimos antes. En este caso “legend()” sobra, pero si agregamos etiquetas será necesario.

VII. Biblioteca Sympy

Esta biblioteca contiene métodos que le permiten trabajar a Python como un sistema algebraico computacional (CAS). Para poder utilizar variables como símbolos, se debe agregar la siguiente instrucción x=sp.Symbol(‘x’), acá ya no estamos viendo a la “x” como una variable que almacena información, sino que es un símbolo algebraico. Algunos métodos que le pueden servir para trabajar el álgebra son:

- **Desarrollar o expandir:** expand(expresión algebraica)

```
>>> y=sp.Symbol('y')
>>> sp.expand((3*x-y)**4)
81*x**4 - 108*x**3*y + 54*x**2*y**2 - 12*x*y**3 + y**4
>>>
```

- **Simplificar:** simplify(expresión algebraica)

```
>>> sp.simplify((2*x*x+x-3)/(2*x*x-5*x+3))
(2*x + 3)/(2*x - 3)
```

- **Factorizar:** factor(expresión algebraica)

```
>>> sp.factor(x**4-25*x**2+60*x-36,x)
(x - 3)*(x - 2)*(x - 1)*(x + 6)
```

- **Cálculo de límites:** limit(función, variable, tendencia)

```
>>> sp.limit((2*x*x-3*x)/(-x+2),x,3)
-9
```

- **Cálculo de derivadas:** diff(función, variable)

```
>>> sp.diff(sp.cos(x),x)
-sin(x)
```

- **Derivadas de orden superior**: diff(función, variable, orden)

```
>>> sp.diff(sp.tan(x),x,5)
8*(tan(x)**2 + 1)*(2*(tan(x)**2 + 1)**2 + 11*(tan(x)**2 + 1)*tan(x)**2 + 2*tan(x
)**4)
```

- **Integrales definidas:** integrate(función, (variable, límite inferior, límite superior))

```
>>> sp.integrate(sin(x), (x, 0, np.pi/2))
1.00000000000000
```

- **Resolución de ecuaciones:** solve(ecuación a resolver)

```
>>> sp.solve(x**4-25*x**2+60*x-36,x)
[-6, 1, 2, 3]
```

- **Resolución de sistema de ecuaciones:** solve([ecuación 1, ecuación 2], [variable1, variable2])

```
>>> sp.solve([x + 5*y - 2, -3*x + 6*y - 15], [x, y])
{x: -3, y: 1}
```

- **Convertir a LaTeX:** latex(expresión)

```
>>> sol=sp.expand((3*x-y)**4)
>>> sol
81*x**4 - 108*x**3*y + 54*x**2*y**2 - 12*x*y**3 + y**4
>>> sp.latex(sol)
'81 x^{4} - 108 x^{3} y + 54 x^{2} y^{2} - 12 x y^{3} + y^{4}'
```

- **Graficador:** plot(función)

```
>>> sp.plot(sp.sin(x)*sp.log(x))
```

Primer ejercicio:

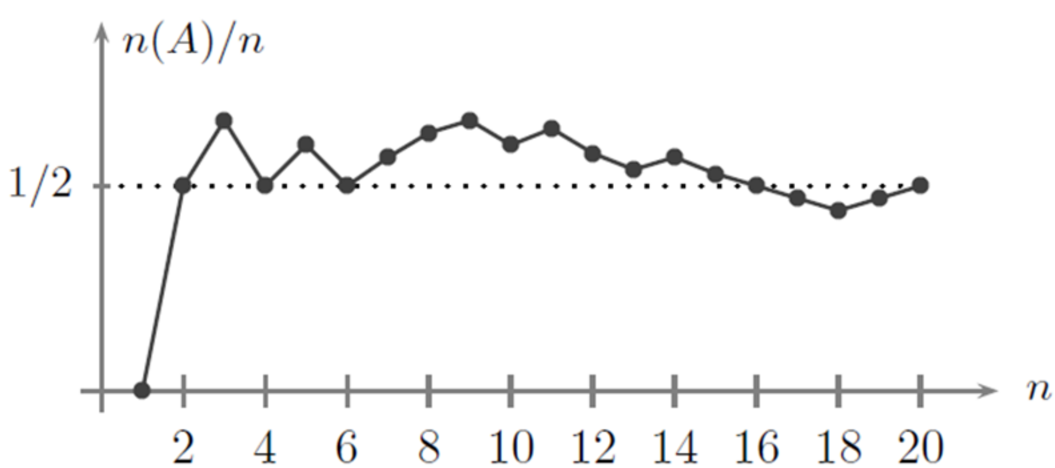
Confeccione un programa que reciba la cantidad de veces que se lance un dado y calcule la probabilidad frecuencial del evento "obtener un número par", también debe presentar la gráfica que muestre la probabilidad obtenida en cada lanzamiento.

Por ejemplo, a continuación, se muestra el resultado de calcular la probabilidad frecuencial de 20 lanzamientos:

No.	Resultado	$n(A)/n$
1	3	$0/1$
2	6	$1/2$
3	2	$2/3$
4	1	$2/4$
5	4	$3/5$
6	6	$4/6$
7	3	$4/7$
8	4	$5/8$
9	2	$6/9$
10	5	$6/10$

No.	Resultado	$n(A)/n$
11	2	$7/11$
12	5	$7/12$
13	1	$7/13$
14	6	$8/14$
15	3	$8/15$
16	1	$8/16$
17	5	$8/17$
18	5	$8/18$
19	2	$9/19$
20	6	$10/20$

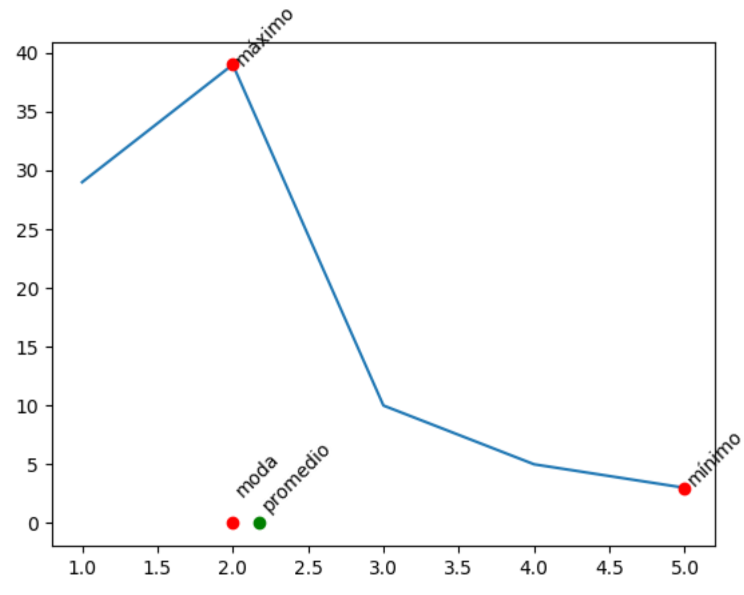
Y su respectiva gráfica:



```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import sympy as sp
import random

n=int(input('Indique la cantidad de veces que desea lanzar el dado '))

i=1
prob=[]
cf=0

x=np.arange(1,n+1,1)

while i<=n:
   lanz=random.randint(1, 6)

   if lanz%2==0:
       cf=cf+1


   prob.append(cf/i)
   i=i+1

plt.plot(x,prob)
plt.show()


print('La última probabilidad calculada es de '+str(prob[n-1]))
```

Segundo ejercicio:

Confeccione un programa que guarde en una lista la cantidad de animales, de una determinada especie, que se enfermaron 1, 2, 3, 4 o 5 veces en un zoológico en la última década. Deberá construir un polígono de frecuencias, en el cual se pueda observar el promedio y moda de los datos.



```
lis1=[1,2,3,4,5]

lis2=[29,39,10,5,3]

prom=(lis1[0]*lis2[0]+lis1[1]*lis2[1]+lis1[2]*lis2[2]+lis1[3]*lis2[3]+lis1[4]*lis2[4])/(lis2[0]+lis2[1]+lis2[3]+lis2[4]+lis2[4])

M=max(lis2)
m=min(lis2)

plt.plot(lis1,lis2)

plt.plot([prom],[0],'g--o',label='promedio')

plt.text(prom, 6, 'promedio', rotation=45)

plt.plot(lis2.index(M)+1,[M],'r--o')

plt.text(lis2.index(M)+1,M+4 , 'máximo', rotation=45)

plt.plot(lis2.index(m)+1,[m],'r--o')

plt.text(lis2.index(m)+1,m+4 , 'mínimo', rotation=45)


plt.plot(lis2.index(M)+1,[0],'r--o')

plt.text(lis2.index(M)+1,5 , 'moda', rotation=45)

print(lis2.index(M))


plt.show()
```

VIII. Algunas demostraciones extra

Gráfico de Barras simple

```
#Graficos dif tipos
def graficoBarras():
    labels = ['Ingeniero', 'Músico', 'Arquitecto', 'Chef', 'Economía']
    hombres = [20, 34, 30, 35, 27]
    mujeres = [25, 32, 34, 20, 25]

    ubicacion = np.arange(len(labels))  # the label locations
    width = 0.35  # the width of the bars

    fig, ax = plt.subplots()
    rects1 = ax.bar(ubicacion - width/2, hombres, width, label='Men')
    rects2 = ax.bar(ubicacion + width/2, mujeres, width, label='Women')

    #Texto y titulos
    ax.set_ylabel('Edades')
    ax.set_title('Edades hombres y mujeres\n en diferentes trabajos')
    ax.set_xticks(ubicacion)
    ax.set_xticklabels(labels)
    ax.legend()

    fig.tight_layout()

    plt.show()
```

Ejemplo de Superficies:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

X = np.arange(-5, 5, 3.5)
Y = np.arange(-5, 5, 0.5)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
R = np.sqrt(X**2 + Y**2)
Z = np.sin(R)

fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)

ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, cmap=cm.viridis)

plt.show()
```

Ejemplo de cómo utilizar Sympy con métodos en geometría

```
>>> from sympy import *
>>> from sympy.geometry import *
>>> x = Point(0, 0)
>>> y = Point(1, 1)
>>> z = Point(2, 2)
>>> zp = Point(1, 0)
>>> Point.is_collinear(x, y, z)
True
>>> Point.is_collinear(x, y, zp)
False
>>> t = Triangle(zp, y, x)
>>> t.area
1/2
>>> t.medians[x]
Segment2D(Point2D(0, 0), Point2D(1, 1/2))
>>> m = t.medians
>>> intersection(m[x], m[y], m[zp])
[Point2D(2/3, 1/3)]
>>> c = Circle(x, 5)
>>> l = Line(Point(5, -5), Point(5, 5))
>>> c.is_tangent(l)
True
>>> l = Line(x, y)
>>> c.is_tangent(l)
False
>>> intersection(c, l)
[Point2D(-5*sqrt(2)/2, -5*sqrt(2)/2), Point2D(5*sqrt(2)/2, 5*sqrt(2)/2)]
```

VII. Ejercicios extra

A. Según el calendario gregoriano que usamos, los años bisiestos son aquellos divisibles por 4 excepto si son divisibles por 100 pero no por 400. Así, el año 1900 no es bisiesto, pero sí lo son 2012 y 2000. Este criterio fue establecido por el Papa Gregorio XIII en 1582, pero no todos los países lo adoptaron inmediatamente. En el ejercicio adoptamos este criterio para cualquier año, anterior o posterior a 1582.

B. La versión original del algoritmo de Euclides para encontrar mcd(a,b) cuando a y b son enteros positivos podría ponerse como:

```
mientras a ≠ b:
    si a > b:
        a ← a − b
    en otro caso:    # acá es b > a
        b ← b − a
# acá es a = b
retornar a
```

Elabore un programa que reciba a dos números enteros positivos no nulos e imprima en pantalla el máximo común divisor de los dos.

C. Un programa que reciba 5 puntos (x,y) y determine cuál de los últimos 4 puntos es más cercano al primero. Nota: solicite ayuda para determinar la raíz.

D. El usuario comienza a ingresar números enteros, el programa se detiene cuando el número ingresado haya sido mayor que 1000 o múltiplo de 5. Muestra en una lista los números pares anteriores al último número ingresado.

E. Se desea elaborar un recipiente cilíndrico que contenga una cierta cantidad de líquido, pero que para elaborarlo el costo sea mínimo. El programa que se desea elaborar recibirá el costo en colones del material para la base y el costo en colones del material lateral y la cantidad de volumen que se desea almacenar. Se imprimirá en pantalla las dimensiones del cilindro de costo mínimo. Suponga que todas las medidas son dadas en centímetros y la fórmula que permite calcular el costo del cilindro en términos del radio, viene dada por:

$$C(r) = 2\pi \cdot r^2 \cdot cb + \frac{2 \cdot cl \cdot v}{r}$$

r: radio
cb: costo del material de la base
cl: costo del material lateral
v: volumen

7. Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2013). *Las TIC y las matemáticas, avanzando hacia el futuro*. (Trabajo de grado, Universidad de Cantabria). Recuperado de: https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/3012/EliasArrietaJose.pdf?sequence=1

Comunidad de Numpy. (2016). *Numpy user guide*. Consultado en: https://docs.scipy.org/doc/numpy-1.11.0/numpy-user-1.11.0.pdf

Cuevas, F. & García, J. (noviembre, 2014). *Las TIC en la formación docente*. Trabajo presentado en: Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación, Argentina. Recuperado de: https://www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/1159.pdf

Gatica, S. & Ares, O. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. *Revista Edmetic, 1*(2), 88-107. Recuperado de: https://www.uco.es/servicios/ucopress/ojs/index.php/edmetic/article/view/2853/2741

Henríquez, M. (2002). La incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la formación inicial docente. *Revista Acción Pedagógica*, *11*(1), 60-73. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2973107

Lizcano, A. & Ayala, L. (2013). Formación docente en el uso de tecnologías como herramienta en el mejoramiento educativo. *Revista Mundo Asia Pacífico, 2* (3), 67-73. Recuperado de: http://publicaciones.eafit.edu.co/index.php/map/article/download/2220/2134

Pedregosa, F. (s.f). *Sympy: Matemáticas simbólicas en Python*. Consultado en: https://www.pybonacci.org/scipy-lecture-notes-ES/advanced/sympy.html

Riveros, V., Mendóza, I. & Castro, R. (2011). Las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de instrucción de la matemática. *Revista Quórum Académico*, 8(15), 111-130.

Rodríguez, C., Romero, J. & Vergara, G. (2017). Importancia de las TIC en la enseñanza de las matemáticas. *Revista Mastua, 4*(2), 41-49. Recuperado de: http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA/article/download/1861/1904

Rosa, et al. (s.f). Matemática y programación. Recuperado de: https://www.fing.edu.uy/~darosa/matyprogversionfinal.pdf

Rougier, N., Muller, M. & Varoquaux, G. (s.f). *Matplotlib: Gráficas usando pylab*. Consultado en: https://claudiovz.github.io/scipy-lecture-notes-ES/intro/matplotlib/matplotlib.html

Van Rossum, G. (2009). *El tutorial de Python*. Consultado en: http://docs.python.org.ar/tutorial/pdfs/TutorialPython2.pdf

USO DEL HOLOGRAMA COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA APOYADA EN STEM PARA LA ENSEÑANZA DE SECCIONES CÓNICAS EN MATEMÁTICAS

Priscilla Angulo Chaves
Estudiante UCR, Costa Rica
pri597@hotmail.com

Adriana Jiménez Ruíz
Estudiante UCR, Costa Rica
adrivanej29@gmail.com

Javier Picado Bermúdez
Estudiante UCR, Costa Rica
javierapb99@gmail.com

Katherine Solórzano Jandres
Estudiante UCR, Costa Rica
kathisoja@gmail.com

Yanitza Varela López
Estudiante UCR, Costa Rica
yanitzavarela@gmail.com

Resumen: Este documente presenta un taller que aborda la holografía como estrategia didáctica apoyada en la metodología STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics), esto para la enseñanza de las secciones cónicas en la educación secunadaria matemática. El objetivo principal es motivar la posible incorporación y el uso, por parte de los docentes de Matemáticas, de esta estrategia en sus clases de Geometría de décimo año de la Educación Diversificada costarricense. La actividad consta de dos etapas; en la primera se explica la teoría, mientras que en la segunda fase se construye y elabora un vídeo para analizarlo holográficamente, esto mediante la confección de una pirámide holográfica. Los participantes podrán reflexionar sobre la estrategia presentada para estudiar otras habilidades matemáticas en clase, lo cual quedará a criterio de la iniciativa y creatividad de los partícipes.

Palabras clave: Educación Matemática, Holograma, Secciones cónicas, STEM, Tecnología.

Abstract: This paper presents a workshop that addresses holography as a didactic strategy supported by the STEM methodology (Science, Technology, Engineering and Mathematics), this for the teaching of conic sections in mathematical secondary education. The main objective is to motivate the possible incorporation and use, by the teachers of Mathematics, of this strategy in their tenth year Geometry classes of the Costa Rican Diversified Education. The activity consists of two stages; in the first one the theory is explained, while in the second phase a video is constructed and elaborated to analyze it holographically, this by means of the preparation of a holographic pyramid. The members participate may reflect on the strategy presented to study other mathematical skills in class, which will be at the discretion of the initiative and creativity of the participants.

Keywords: Mathematics Education, Hologram, Conic sections, STEM, Tecnology.

1. Introducción

La educación es un proceso que se va adaptando y evolucionando a través de la historia, es por esto que se busca incluir nuevas técnicas de estudio, como lo es la metodología STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics), la cual se caracteriza por ser activa, manipulativa, constructivista y por descubrimiento, además de integrar la Ciencia, la Tecnología, la Ingeniería y las Matemáticas.

De hecho, el uso de diferentes mecanismos tecnológicos permite a los docentes abordar de una forma más dinámica los diferentes temas educativos. Específicamente, en el área de las Matemáticas no es la excepción, ya que, según Arrieta (2013), en la enseñanza de esta ciencia cuando se incorporan diferentes y novedosas tecnologías, se logra un aumento y una mejor participación de los estudiantes en la clase, favoreciendo un aprendizaje metacognoscitivo.

Bajo estas premisas, la elaboración de hologramas en la enseñanza de temas matemáticos es una actividad que se adecúa a una metodología STEM. Es importante aclarar que Ochoa (2018) define la holografía como "una técnica de captura de la realidad que al proyectarse luminosamente sobre un objeto transparente permite generar un efecto tridimensional"(p.5). La construcción de un holograma, indudablemente, y como se justifica más adelante, contempla la Ciencia, la Tecnología,la Ingeniería y las Matemáticas, y más áun, su producto final funciona para abordar la enseñanza de temas matemáticos, que en este trabajo, se acota a las secciones cónicas.

Por tanto, se pretende desarrollar un trabajo que culminará con la aplicación de un taller donde se abarcará la construcción de un instrumento y la elaboración de vídeos que permitan observar holográficamente cónicas y sus cortes, esto para apoyar la enseñanza de estos temas, bajo una metodología STEM.

2. Antecedentes

Los programas de estudio de Matemáticas vigentes en el Ministerio de Educación Pública (MEP) establecen el uso de las tecnologías digitales como uno de sus cinco ejes disciplinares y transversales. Dentro de los recursos tecnológicos relevantes para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas mencionados en dicho documento se encuentran las calculadoras, las computadoras, el Internet y algunos programas y espacios virtuales, debido a que estos "no sólo favorecen la representación matemática múltiple, sino también recursos extraordinarios en la interacción estudiante-conocimiento, permitiendo un involucramiento activo del sujeto en su aprendizaje"(MEP, 2012, p.37).

De acuerdo con lo expuesto por el MEP (2012), es importante fomentar el uso adecuado de los diferentes recursos tecnológicos en el abordaje pedagógico de algunas habilidades específicas con el propósito de que poco a poco esto contribuya al desarrollo del pensamiento matemático, principalmente en situaciones y problemas de contextos reales, ya que las autoridades de dicha institución consideran que "el país no posee todas las condiciones formativas para una introducción más intensa"(p.60), situación que está estrechamente relacionada con lo que motiva y orienta al presente trabajo.

Dentro de los trabajos realizados alrededor de este tema, se puede mencionar a Primera (2005) quien realizó un proyecto llamado *Modelo Matemático para Transmisiones Holográficas Tridimensionales*, en este trabajo, se expone un modelo que viene a solucionar y potencializar dificultades en el manejo, creación y transmisión de diferentes tipos de hologramas, tanto llevadas a la realidad como a la ficción.

El modelo se creó desde una perspectiva física-práctica bien manejada, ya que se basaron en diferentes ondas que intervienen en aspectos como la perturbación y el desplazamiento de la proyección que se desea obtener. Fue así que partieron, junto con aspectos teóricos de codificación, hacia la metodología planteada; la metodología utilizada se dividió en tres fases: diseño del modelo matemático, verificación del modelo y por último, el algoritmo de compresión.

En relación con la investigación en curso, a pesar de que Primera (2005) proporciona una perspectiva clara del proceso de construcción y de lo que puede hacer un holograma en el entorno matemático, no brinda información acerca de la utilización en concreto de este, puesto que todo el trabajo se basa en los cálculos y procesos que se siguieron para la creación de su modelo matemático e inclusive, en sus conclusiones expone que no fue llevado a la práctica, es decir, todo su análisis se queda en teoría, aspecto contrario a lo que busca el presente trabajo.

Un estudio llamado *El holograma y su utilización como un medio de enseñanza de la física en ingeniería* realizado en el 2009, en el cual se analizaron los planes de estudio de varias universidades en América y Europa, determinó que en sus programas de estudio no se incluye la utilización de los hologramas como medio de enseñanza de la física e ingeniería, y en el caso de que se mencionen, no se realiza una fundamentación pedagógica del mismo. Los investigadores destacan que si se considera utilizar el holograma como un medio de educación, es necesario que previo se realice un análisis de las funciones didácticas que se podían desempeñar en los distintos procesos pedagógicos ya sea curriculares o sociales (Serra, Vega, Ferrat, Lunazzi y Magalhaes, 2009, p.2).

Además, los autores hacen hincapié en utilizar los medios correctos para generar aprendizajes significativos y comprender conceptos abstractos, para ello recomiendan el uso de este tipo de tecnologías. “El holograma por sus particularidades, constituye una de las reproducciones visuales más icónica de las existentes, lo que constituye su principal cualidad en su utilización como un medio de enseñanza”(Serra et al. 2009, p.3).

Igualmente, estos investigadores se basan en los fundamentos del pedagogo Vigotsky para analizar la motivación que se genera en los estudiantes cuando se utilizan tecnologías como los hologramas. Según ellos, “un holograma es altamente motivador por las características del mismo de brindar la imagen tridimensional de un objeto que produce en el espectador la sensación de que el objeto real está presente en ese momento en la escena”(Serra et al. 2009, p.4).

En el proyecto realizado por Serra et al. (2009, p.11), se elabora una exposición holográfica didáctica en el Departamento de Física del Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría en donde aplicaron encuestas aleatorias a los participantes y los resultados arrojaron que más del 90 % de los asistentes consideraron que se incrementó su motivación por la física, demostrando que efectivamente, el uso de tecnologías como los hologramas motivan a los estudiantes a aprender sobre nuevos temas.

Por otra parte, Bosch et al. (2011) realizaron, en Argentina, un trabajo de investigación titulado *Nuevo paradigma pedagógico para Enseñanza de Ciencias y Matemática* en el cual buscaban adoptar la educación STEM (Sciences, Technology, Engineering and Mathematics) como un nuevo enfoque pedagógico y además, establecer diversos criterios que permitirían su implementación.

Dentro de la problemática planteada en el trabajo mencionado se encuentran aspectos como la falta de interés hacia el estudio por parte de los jóvenes, principalmente en carreras relacionadas con las ciencias, la ingeniería y la matemática, también la deserción estudiantil en los diversos niveles académicos y finalmente, se expone la necesidad de preparar a las personas, de manera integral e interdisciplinaria, para entender y enfrentar exitosamente el importante avance tecnológico y científico, así como los diversos problemas con altos grados de complejidad que surgen en estas y otras áreas. Esto a su vez, según los autores, permite un aumento de la competitividad en las sociedades actuales, en las cuales precisamente se ha optado por la implementación del nuevo enfoque pedagógico STEM.

De acuerdo con Bosch et al. (2011), la educación STEM busca la integración de la Ciencia, la Tecnología, la Ingeniería y las Matemáticas como una forma de cambiar y mejorar la manera en que estas son enseñadas en las diversas instituciones y de lograr que los estudiantes desarrollen la capacidad de entender las ciencias. Además, estos autores mencionan que en países Europeos y también en Estados Unidos los gobiernos han creado políticas para la implementación de este paradigma pedagógico, e incluso "se enfatiza la importancia de STEM como factor clave del triángulo de conocimiento: educación, investigación, innovación"(p. 132).

Dentro de los criterios que Bosch et al. (2011) establecen para la implementación de la educación STEM, principalmente en los diversos laboratorios que buscan llevar a cabo este tipo de educación desde tempranas edades en los estudiantes y también en la formación de los docentes, se encuentran: la presencia de un enfoque transdisciplinario para entender y resolver los diversos problemas emergentes en la sociedad actual, también la constitución de redes donde interactúan diversas entidades tanto educativas como sociales; el apoyo, el acceso y la preparación que se le debe brindar mediante talleres a los docentes de ciencias y matemáticas en los distintos niveles académicos en cuanto al uso y producción de las tecnologías como recursos de experimentación e innovación que estén a disposición tanto del cuerpo docente como de la población estudiantil.

Además, en el trabajo de Bosch et al. (2011), se establecen como resultados el diseño y la elaboración de diversos recursos pedagógicos en áreas como Mecánica, Química, Biología y Matemática que facilitan su enseñanza de una forma más experimental y, mencionan dentro de sus conclusiones el logro de su objetivo primordial que, como se mencionó anteriormente, consistía en adoptar la educación STEM y establecer los principales criterios para la implementación de esta, además, recalcan la importancia de expandir la información respecto a este nuevo paradigma pedagógico y sus ventajas, también la importancia de poner a disposición de los docentes diferentes recursos existentes y brindarles la preparación adecuada para la creación y el uso de los propios.

Por otro lado, un trabajo más reciente fue elaborado en España por Orcos, Jordán y Magreñán (2018), el cual lleva por título *Uso del holograma como herramienta para trabajar contenidos de geometría en Educación Secundaria*, cuyo objetivo consistió precisamente en enseñar conceptos de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos mediante la utilización de un holograma.

En este estudio se menciona que parte de la problemática que se presenta en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en las instituciones de secundaria se debe a aspectos como la formación académica de los docentes de Matemática y sus concepciones respecto a esta área, también la distribución durante el ciclo lectivo de las diversas áreas de la Matemática y por consiguiente de sus contenidos, ya que generalmente se opta porque la Geometría sea estudiada en la etapa final del ciclo, lo cual provoca que esta sea abordada de forma menos detallada e innovadora principalmente por la falta de tiempo, situación que se ve reflejada en la forma tan tradicional con la que trabajan los docentes y que resulta poco atractiva para los estudiantes, pues se basa principalmente en el uso de una gran cantidad de fórmulas.

Además, Orcos et al. (2018) mencionan que otra de las dificultades en la enseñanza de la Geometría es lo complejo que les resulta a la mayoría de los estudiantes la extrapolación a espacios bidimensionales o tridimensionales de las figuras planas que estudian en libros de texto por ejemplo, y por ello consideran fundamental que se les brinde la oportunidad de manipular diversos materiales o herramientas, principalmente tecnológicas, que les permita comprender mejor estas distintas representaciones.

En relación con lo mencionado anteriormente es que Orcos et al. optan por el uso del holograma como herramienta tecnológica que contribuye a los procesos de extrapolación mencionados y además, consideran que es fuente de motivación para el aprendizaje en los estudiantes y que favorece las relaciones y el trabajo colectivo entre ellos.

En cuanto a la propuesta metodología del estudio realizado por Orcos et al. (2018) se puede mencionar que está dirigida al tercer nivel de secundaria en la asignatura de Matemáticas. La misma consta de cinco fases, las cuales consisten en: primeramente realizar un diagnóstico de conocimientos previos sobre los cuerpos geométricos y el cálculo de sus áreas, luego construir los vídeos para el holograma y, para ello, los autores recomendaron utilizar el programa GeoGebra para elaborar las figuras necesarias y el editor Camtasia para crear el vídeo a proyectar, la tercera fase consiste en la elaboración del holograma que en el caso de este trabajo tuvo forma de pirámide de base cuadrada, en la cuarta fase se visualizan con el holograma los vídeos que fueron creados y, en la última fase se comprueban los conocimientos adquiridos y la percepción en cuanto a la experiencia con la herramienta tecnológica como tal.

Finalmente, Orcos et al. (2018) establecen como parte de las conclusiones de su trabajo la importancia de fundamentar teóricamente el uso de herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos, y especialmente la relevancia que adquiere una herramienta innovadora y realmente asequible como lo es el holograma en cuanto a su función motivacional y pedagógica. Además, mencionan como trabajo futuro la implementación de su propuesta metodológica en un grupo de tercero de secundaria y su posterior comparación con otro grupo del mismo nivel pero que no haya trabajado con dicha propuesta, esto con el fin de valorar o verificar la viabilidad de esta herramienta tecnológica como recurso pedagógico en el tema de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos.

3. Aspectos teóricos

En el siguiente apartado se presentan algunos de los elementos asociados con la exposición del taller, estos se encuentran con su respectiva fundamentación teórica y serán divididos en secciones.

3.1. Holografía

El uso de la holografía en la educación representa una tendencia debido al impulso tecnológico contemporáneo por desarrollar simulaciones que conlleven a experimentar el aprendizaje cercano a la realidad. Naturalmente se debe definir el término holografía, para ello Ochoa (2018), la considera como una técnica que, haciendo uso de la iluminación y un objeto transparente, consigue proyectar imágenes coloridas en tres dimensiones, denominadas hologramas. Así mismo este autor agrega que la holografía brinda mayor detalles que la fotografía, debido que agrega una dimensión adicional, dando a lucir un objeto un poco más realista, pues el espectador puede percibir sus diferentes perspectivas, así como su profundidad.

Serra et al. (2009) especifica que un holograma es producto de una ilusión óptica entre luz y sombra donde un objeto real es proyectado a través de una o varias placas transparentes como el vidrio que genera la imagen tridimensional, es decir el objeto en realidad no existe en la placa, pues son un conjunto de imágenes reflejadas de la original que crea dicha ilusión.

3.2. STEM

La reciente propuesta educativa STEM, siglas provenientes de los términos en inglés Science, Technology, Engineering and Mathematics (Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas), tiene como objetivo incrementar el número y fortalecer las competencias y actitudes de los jóvenes interesados en una profesión en ingeniería y ciencias, así como de fomentar las habilidades y capacidades mediante el desarrollo de conocimientos teóricos para ser aplicados en la práctica, enfocados en la resolución de problemas tecnológicos a través de la productividad, innovación y competitividad de los países, para obtener una mejor de calidad de vida y una educación más eficiente (Duque y Celis, 2012).

La educación STEM se propone como un nuevo desafío para la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, pues la sociedad se encuentra en constante cambio debido a la demandas de nuevas habilidades, destrezas, competencias y conocimientos que deben presentar las personas al ingresar al mundo laboral, es decir, esta educación permite orientar a jóvenes que se encuentran recién comenzando a estudiar. Schulz (2016) menciona como “La inteligencia artificial, el aprendizaje por máquinas, la minería de textos e imágenes, el reconocimiento de voz, las redes sociales y las tecnologías genéticas están cambiando el mundo a uno más conectado, dinámico e instantáneo”(p.292).

Además, la experiencia STEM muestra que la integración a través de las representaciones y materiales, no es espontáneamente realizada por los estudiantes. Es también crítico que los estudiantes puedan transferir estrategias, conocimientos y habilidades a nuevas situaciones. Y también es muy importante desarrollar tanto las prácticas científicas como las ingenieriles. Es decir, además de las prácticas centrales en ciencia conducentes a conocer y entender la naturaleza, están las prácticas centrales de la ingeniería. El objetivo de éstas es diseñar y crear productos que solucionen problemas reales (Schulz, 2016, p.293).

Por otro lado, el desafío presentado en las aulas costarricenses se basa en la motivación de los estudiantes, debido a que se encuentran en un mundo digital altamente atractivo, el uso de la tecnología es mayor, ya que no sólo tienen acceso a juegos y aplicaciones muy adictivas, sino que también poseen permanente conexión a redes sociales. Sin embargo, la importancia de la tecnología se encuentra en las facilidades que aportan, pues es considerado un medio rápido y eficaz, incluso, es un instrumento utilizado por los docentes para lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes. Por lo tanto, es importante buscar medios, herramientas, técnicas para mejorar esa motivación en estudiantes, y la mejor manera es iniciar en las instituciones escolares, pues la motivación por las matemáticas va disminuyendo al pasar los años (Schulz, 2016).

Entonces, para lograr la integración STEM en las clases, se debe realizar un cambio educacional y establecer la innovación e implementación de ideas, conocimientos y prácticas mejoradas, puesto que la innovación es el motor principal de progreso que puede cambiar los aprendizajes de los estudiantes.

3.3. Uso del holograma por medio de la metología STEM

En el taller propuesto, el holograma brinda un medio de educación acertado para visualizar los contenidos geométricos, como lo recalca Orcos et al. (2018), la utilización de los hologramas representa una herramienta tecnológica de gran potencial en la enseñanza de conceptos geométricos tridimensionales. Además, representa un medio innovador y en un ambiente atractivo para el estudiante, pues según Orcos et al. (2018), “el holograma resulta ser un agente motivante que actúa como factor extrínseco que ayuda a potenciar la motivación intrínseca de los alumnos y, por lo tanto, a que estén más predispuestos hacia el aprendizaje, debido a que el alumno tiene la sensación de que el elemento que está estudiando se encuentra realmente presente, que no se trata de una representación”(p.95).

La construcción del holograma por parte de los estudiantes, combina todos los elementos de la educación STEM. La ciencia está presente en las propiedades ópticas que permiten la ilusión de la figura tridimensional, la tecnología se evidencia en cada una de las aplicaciones utilizadas para obtener el vídeo con la imagen que se espera proyectar, la ingeniería se representa mediante la construcción de la pirámide holográfica y por último, las Matemáticas se utilizan en todas las áreas anteriores, pero además, se pueden emplear proyecciones holográficas para estudiar contenidos de esta área, que en este caso, corresponde a secciones cónicas.

Asimismo, las herramientas tecnológicas como las TIC cada vez van tomando más importancia en la educación, donde van reemplazando los recursos físicos, y con ello van siendo más atractivos para los discentes, lo cual va de la mano a la educación STEM y al pensamiento científico que conlleva el uso de las mismas. Por tanto, el educador debe contemplar la creación de recursos con esta perspectiva, dicha idea es expuesta por Bosh et al. (2011), que promueve el cambio a pedagogías de enseñanza como la STEM, “Para alentar este cambio se requiere la producción de recursos educativos innovadores diferentes a los existentes, los cuales deben usarse en entornos de aprendizajes diferentes al aula con otras prácticas de enseñanza (experimental)”(p.135).

Además afirman que para lograr una educación STEM,

> La enseñanza de ciencias y matemática debe basarse sobre la experimentación tanto por parte de profesores como de alumnos (*hands-on*). Precisamente se deben utilizar las tecnologías electrónica e informática para producir nuevos artefactos de experimentación y nuevos sistemas de registro, procesamiento y representación de datos, así como utilizar apropiadamente programas de matemática para cálculo y graficación (Bosh et al., 2011, p.135).

Para finalizar esta sección, en síntesis se establece que el uso de la holografía como medio de enseñanza de la Geometría sigue la tendencia de la educación STEM, con ambientes motivadores, atractivos e innovadores para los alumnos que, hipotéticamente, mejoraría el aprendizaje de los contenidos tratados.

4. Metodología del trabajo

El presente taller está dirigido a estudiantes de undécimo y docentes de Matemática de secundaria. Esta actividad tiene como objetivo que los profesores implementen en sus clases de Geometría, específicamente en la visualización espacial de las secciones cónicas, proyecciones holográficas como estrategia didáctica con el fin de facilitar en los estudiantes la comprensión de dicho tema y de realizar una clase más creativa, dinámica, innovadora y participativa, fomentando así en los estudiantes mayor interés y un aprendizaje significativo.

El taller consta de tres fases, la primera corresponde a la parte teórica, en la cual se expondrá información breve, dividida en tres etapas: introducción, antecedentes y aspectos teóricos, sobre los Hologramas, la reciente propuesta educativa STEM y por último, se detalla el uso del holograma en la enseñanza. La segunda fase corresponde a la parte práctica, en la cual se realizará lo siguiente:

1. Construcción, en GeoGebra, de las figuras que se obtienen mediante secciones planas en conos circulares rectos, estas figuras representan la elipse, circunferencia, parábola e hipérbola.
2. Elaboración del vídeo para el holograma en el cual se aprecian las figuras elaboradas en el punto anterior.
3. Confección de la pirámide holográfica para proyectar el vídeo.

La tercera fase corresponde a una actividad grupal llevada a cabo por los participantes del taller, en donde elaborarán un vídeo sobre un tema de geometría y lo expondrán a los demás participantes del taller.

Por otra parte, los materiales requeridos para el desarrollo del taller son los siguientes: un Video Proyector con conexión de HDMI, un laboratorio con computadoras que cuenten con el software de GeoGebra (los participantes deberán poseer conocimientos básicos en el uso de GeoGebra), el software gratuito Icecream Screen Recorder, el cual se puede descargar en `https://icecreamapps.com/es/Download-Screen-Recorder/`, y Windows Movie Maker.

Además, cada participante utilizará una hoja de papel cuadriculado, una lámina transparente de termolaminar ya sellada, una regla, un lápiz, un marcador permanente de punta fina o media, tijeras, cinta adhesiva transparente, una memoria USB (en caso de que desee guardar el trabajo que realizará en GeoGebra) y también será necesario que disponga de un teléfono celular con acceso a App Store o Google Play, en el cual se requerirá instalar la aplicación gratuita Holapex Hologram Video Maker.

El cronograma de actividades se planea distribuir de la siguiente manera:

- 30 minutos: presentación de los autores del taller y exposición rápida de los antecedentes y aspectos teóricos
- 60 minutos: Elaboración de secciones cónicas en GeoGebra.
- 30 minutos: Receso.
- 30 minutos: Creación del vídeo.
- 30 minutos: Construcción de la pirámide holográfica y la respectiva proyección.
- 60 minutos: Actividad por parte de los partícipes.
- 30 minutos: Resultados, comentarios y preguntas.

5. Guías de trabajo

5.1. Presentación

La primera fase del taller consiste en la presentación por parte de los autores y en la exposición teórica de los aspectos que fundamentan el propósito del trabajo de investigación realizado, resaltando la importancia del enfoque pedagógico STEM y el uso de los hologramas en la enseñanza de la Matemática en secundaria como un recurso tecnológico atractivo y útil principalmente en el área de la Geometría.

5.2. Elaborar secciones cónicas en GeoGebra

La segunda etapa del desarrollo del taller remite a la construcción de las secciones cónicas para ser proyectadas como un holograma. Para la construcción de las secciones se usa el programa llamado GeoGebra el cual es de uso libre, y entre sus funciones permite la construcción de cuerpos geométricos y animarlos.

En la sección de gráficos 3D de GeoGebra se crea un cono de las dimensiones deseadas al cual, posteriormente, se le traza un plano de manera que la figura formada por la intersección de ambos corresponda ya sea a un círculo, una elipse, una parábola o bien, una hipérbola, según se aprecia en la figura 1. Cada imagen formada debe ser señalada con un color distinto al de las

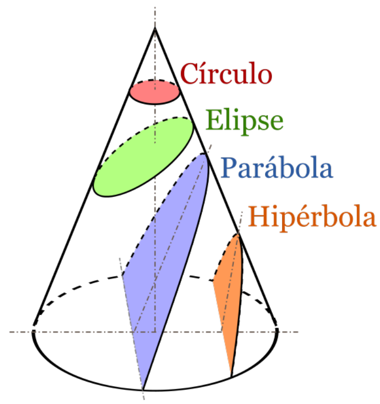


Figura 1: Secciones cónicas.

otras dos superficies, el cono y el plano, con el fin de facilitarle al estudiante la identificación y comprensión de la sección cónica en estudio.

Además, mediante la creación de un deslizador en GeoGebra se logra que el plano corte en distintos puntos al cono y al rotarlo permite una mejor interpretación de la sección cónica.

5.3. Elaboración del vídeo

Una vez lista la figura tridimensional en GeoGebra, se inicia su ciclo de movimiento y se graba la pantalla del computador con ayuda de la aplicación Icecream Screen Recorder. **Como paso opcional**, se puede utilizar Windows Movie Maker para unir los vídeos de varias secciones cónicas. El multimedio generado se transfiere al celular y para poder observar o proyectar la animación como un holograma es necesario generar un vídeo final que se compone de cuatro vídeos de la animación original, colocados estratégicamente para crear la ilusión del holograma. Para dicho efecto se utilizará una aplicación en el teléfono celular llamada Holapex Hologram Video Maker.

5.4. Construcción de la pirámide holográfica

Para la proyección del vídeo elaborado se emplea lo que se denomina una pirámide holográfica, en la cual se podrán observar las distintas secciones cónicas que contiene el vídeo como si estuviesen en tres dimensiones, sin embargo, como se ha mencionado anteriormente, esto no es más que una ilusión óptica, pues dicha imagen tridimensional es el reflejo de lo que se reproduce un vídeo en el celular en cada uno de los cuatro lados de la pirámide.

Para construirla se siguen los siguientes pasos:

1. Se traza sobre una hoja de papel un trapecio cuyas dimensiones son: base menor 1 cm, base mayor 6 cm y altura 3.5 cm, según se observa en la figura 2

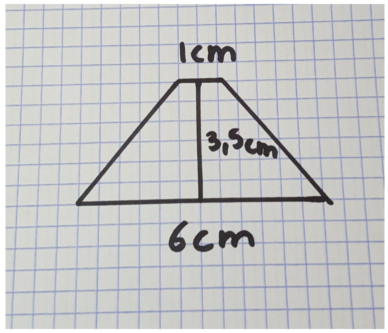


Figura 2: Trapecio inicial.

2. Se trazan los bordes de este molde sobre el material con el que se vaya a construir la pirámide, en este caso se utilizarán láminas para termolaminadora, pero se puede utilizar materiales alternativos, tales como filminas, plástico de CD, entre otros.

3. La figura se traza 4 veces, de forma que los trapecios compartan uno de sus lados laterales (ver figura 3). Luego se procede a recortar la figura.

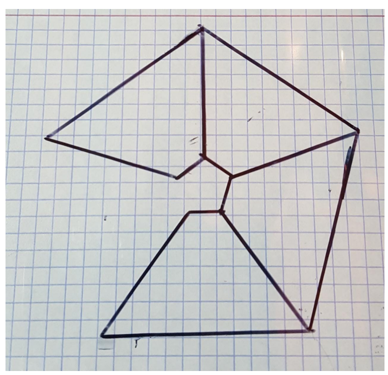


Figura 3: Plantilla para pirámide

4. Con ayuda de una regla se marcan los dobleces sobre las líneas. Opcionalmente, se pueden limpiar las líneas del marcador con alcohol. Luego se unen los dos extremos con un trozo de cinta adhesiva transparente, resultando la pirámide holográfica apreciada en la figura 4.

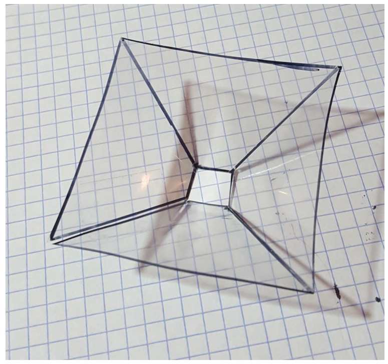


Figura 4: Pirámide holográfica.

5. Una vez lista la pirámide holográfica, se coloca sobre la pantalla del teléfono celular, la cual ya debe tener el vídeo hecho al inicio, el cual se reproduce y se obtienen imágenes similares a las mostradas en la figura 5. Es importante aclarar que entre más oscura se encuentre la habitación, mejor será la visualización holográfica.

Visualización holográfica 1

Visualización holográfica 2

Figura 5: Visualización holográfica

5.5. Actividad para los participantes

Con el fin de que los participantes del taller pongan en práctica los conocimientos adquiridos y brindarles un espacio para desarrollar su creatividad se plantea realizar la siguiente actividad: en grupos de aproximadamente de a lo sumo cinco personas, los asistentes deberán seleccionar un tema de Matemática, distinto al de secciones cónicas, y elaborar una proyección holográfica haciendo uso de los software vistos durante el taller, el cual deberán exponer a los demás participantes.

6. Conclusiones

1. El uso de la holografía como estrategia didáctica se puede analizar desde la perspectiva metodológica STEM, dado que dentro de la aplicación de este se incorporan las diferentes ramas científicas, por ejemplo, la Ciencia brinda el efecto óptico del holograma, la Tecnología se evidencia en el uso de los diferentes aparatos tecnológicos, como el celular y la computadora, por otro lado, la Ingeniería permite construir la pirámide holográfica y, por último, las Matemáticas brinda la teoría sobre la construcción en GeoGebra de las diferentes secciones cónicas.

2. La elaboración del vídeo holográfico es simple. Asimismo, se pueden reutilizar otros ya hechos de diferentes plataformas. En cuanto a los materiales para la construcción de la pirámide holográfica, estos son económicos y de sencillo acceso.

3. En el presente trabajo, el taller se dirigió a un tema de undécimo año de la Educación Diversificada costarricense, como lo es secciones cónicas. No obstante, se puede utilizar en otras habilidades que se consideren pertinentes, lo cual queda a criterio de la iniciativa y creatividad del docente.

4. El método de construcción y uso del holograma en las clases de Matemática, es una estrategia diferente a lo tradicional y fácil de usar, tanto por parte de los docentes, como por los estudiantes y que, además, responde al uso de diferentes tecnologías y programas, como lo es el uso de GeoGebra, que propone el MEP.

5. Se espera que, en la aplicación del taller, los integrantes participen de forma dinámica y activa, esto para alcanzar de manera satisfactoria los objetivos propuestos.

7. Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2013). Las TIC y las matemáticas, avanzando hacia el futuro. Recuperado de https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/3012/EliasArrietaJose.pdf?sequence=1

Bosch, H.; Di Blasi, M.; Pelem, M.; Bergero, M.; Carvajal, L. y Geromini, N. (2011). Nuevo paradigma pedagógico para enseñanza de Ciencias y Matemática. *Avances en Ciencias e Ingeniería, 2*(3), 131-140. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3752199

Duque, M. y Celis, J. (2012). Educación en Ingeniería para la ciudadanía, la innovación y la competitividad en Iberoamérica. *ASIBEI*, Bogotá, Colombia, 44-45.Recuperado de: http://www.universidad.edu.co/images/cmlopera/descargables/asibei.pdf

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programa de Estudio de Matemática.* San José, Costa Rica. Recuperado de: http://www.mep.go.cr/programa-estudio

Ochoa, V. (2018). *Técnicas Holográficas aplicadas a la Educación.* (Tesisi de Maestría). Universidad de Burgos, Burgos, España.

Orcos, L.; Jordán, C. y Magreñán, Á. (2018). Uso del holograma como herramienta para trabajar contenidos de geometría en Educación Secundaria. *Pensamiento Matemático*, 8(2), 91-100. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6636697

Primera, R. (2005). Modelo matemático para transmisiones holográficas tridimensionales. *Télématique, 4*(2), 1-26. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=784/78440201

Schulz, R. (2016). STEM y modelamiento matemático. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*(15), 291-317.

Serra, R.; Vega, G.; Ferrat, A.; Lunazzi, J. y Magalhaes, D. (2009). El holograma y su utilización como un medio de enseñanza de la física en ingeniería. *Revista Brasileira de Ensino de Física, 31*(1). 1-12. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/rbef/v31n1/v31n1a07.pdf

USO DEL SOFTWARE CODAP PARA EL ANÁLISIS DE DATOS

Greivin Ramírez Arce
Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica
gramirez@itcr.ac.cr

Resumen:
CODAP (Common Online Data Analysis Platform) es un paquete libre diseñado para la enseñanza del análisis exploratorio de datos. Tiene la característica de ser dinámico: permite visualizar los conceptos abstractos explorándolos a través de investigaciones con el manejo de datos reales, se pueden arrastrar y soltar objetos y la variación de un dato en algún elemento del paquete hace que varíe en cualquier otro donde éste intervenga. En el taller se desarrollan dos actividades relacionadas con el análisis de datos mediante el uso de bases que presenta el programa (relación entre variables: edad, peso y tamaño en niños de escuela; así como análisis de la distribución del día, mes y año de nacimiento de los estadounidenses desde el 2000 hasta el 2014). La otra actividad se relaciona con el análisis del índice de masa corporal de los miembros del taller y su representación gráfica por género y clasificación según categorías de peso que pueden llevar a problemas de salud. Se espera que los participantes puedan utilizar en sus análisis medidas de tendencia central y variabilidad, construir tablas y gráficos de distinto tipo, establezcan relaciones entre variables y puedan apreciar las virtudes del paquete para llevar a cabo su uso en la enseñanza primaria o secundaria.
Palabras clave: análisis de datos, CODAP, primaria, secundaria.

Abstract:
CODAP (Common online data analysis platform) is a free package designed for exploratory data analysis teaching. It has the characteristic of being dynamic: it allows visualizing the abstract concepts by exploring them through investigations with the handling of real data, it can drag and drop objects and the variation of a data in some element of the package makes it vary in any other where it is involved. Two activities related to data analysis are developed in the workshop through the use of bases presented by the program (relationship between variables: age, weight and size in school children; as well as analysis of the distribution of the day, month and year of birth of Americans from 2000 to 2014). The other activity is related to the analysis of the body mass index of the workshop members and their graphic representation by gender and classification according to the weight categories that can carry out health problems. It is expected that participants can use measures of central tendency and variability in their analyzes, build tables and graphs of different types, establish relationships between variables and may have the virtues of the package to carry out its use in elementary school and middle school.
Keywords: data analysis, CODAP, elementary school, middle school.

1. Introducción

La necesidad de contar con paquetes y materiales de libre acceso para la enseñanza de la probabilidad y la estadística a nivel de primaria y secundaria, lleva a plantear este taller cuyo objetivo es que los maestros y profesores; así como estudiantes en formación, profundicen en los conceptos que intervienen en la enseñanza del análisis de datos, a través de la herramienta CODAP con el uso de datos reales.

Los cambios curriculares a nivel mundial evidencian en sus propuestas la conveniencia de utilizar datos reales, adquiridos por cuenta propia o que están en la red, que permiten involucrar al estudiante en un contexto conocido y motivador para el desarrollo de situaciones problema que involucran distintas áreas de conocimiento. El Ministerio de Educación Pública de Costa Rica recomienda, a los maestros, como metodología de trabajo con sus niños “generar situaciones vinculadas con la cotidianidad, conviene plantear situaciones que incorporen datos relacionados con la información que aparece en periódicos, revistas o Internet” (MEP, 2012, pág. 151) y para los docentes de secundaria “generar problemas que impliquen el uso de información, utilizando internet como recurso tecnológico, centrándose siempre en el análisis y la interpretación proporcionada por los datos” (MEP, 2012, pág. 369).

Para satisfacer estas recomendaciones, los maestros y profesores pueden apoyarse en recursos que generan instituciones a nivel mundial con mucha experiencia y que han incorporado el tema de probabilidad y estadística en sus programas de estudio desde hace ya más de 20 años, superando dificultades que hoy permanecen en las aulas costarricenses según las exponen en su investigación Meza, Agüero y Suárez (2019), como lo son: la imposibilidad de generar problemas siempre contextualizados, pasividad de los estudiante en el aula y falta o carencia de recursos apropiados para los nuevos desafíos.

Un ejemplo de ello es el consorcio Concord, que es una agrupación interdisciplinaria con más de 25 años de existencia. Se encarga de diseñar recursos de aprendizaje STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) innovadores y gratuitos.

Con esta idea, desarrollan el paquete CODAP presentando actividades, bases de datos, simulaciones y otros recursos para la educación del análisis de datos en conexión con las ingenierías y las ciencias. Según los diseñadores de CODAP, los estudiantes pueden “explorar, visualizar y aprender de los datos en cualquier área. Nuestra misión es hacer que la alfabetización de datos sea accesible para todos los estudiantes”.

2. Aspectos teóricos

2.1. Uso de la tecnología para la enseñanza didáctica del análisis de datos

El uso de paquetes para realizar simulaciones, hojas de cálculo que permitan cómputos estadísticos y graficadores que muestren resumen de datos mediante distintas representaciones harán que el análisis de datos se vuelva accesible para el estudiante en la toma de decisiones. Así lo proponen el MEP en Costa Rica, como el National

Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en Estados Unidos, la Secretaría de Educación Pública (SEP) en México y muchos otros currículos a nivel mundial.

A partir del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) propuesto por Shulman (1986, 1987) se pretende mostrar cómo la buena formulación del manejo del análisis de datos, que haga el docente, es fundamental para la comprensión de sus estudiantes.

Como parte del Conocimiento del Contenido (CK) y el Conocimiento Pedagógico (CP), este tópico se abarca muchas veces siguiendo un modelo calculista, en el que se utiliza gran cantidad de fórmulas matemáticas, haciendo tortuoso el cálculo, sin que el estudiante tenga idea de dónde surgen y quede sin energía para la conjetura de resultados y mucho menos se regrese al contexto del problema.

Surge así, la necesidad de incorporar la tecnología como un reto para los educadores de manera que se optimice la calidad de su uso en la enseñanza del análisis de datos.

Por esto, se toma como marco de referencia el Conocimiento Tecnológico y Pedagógico del Contenido (TPACK) propuesto por Mishra, Koehler y Cain (2013):

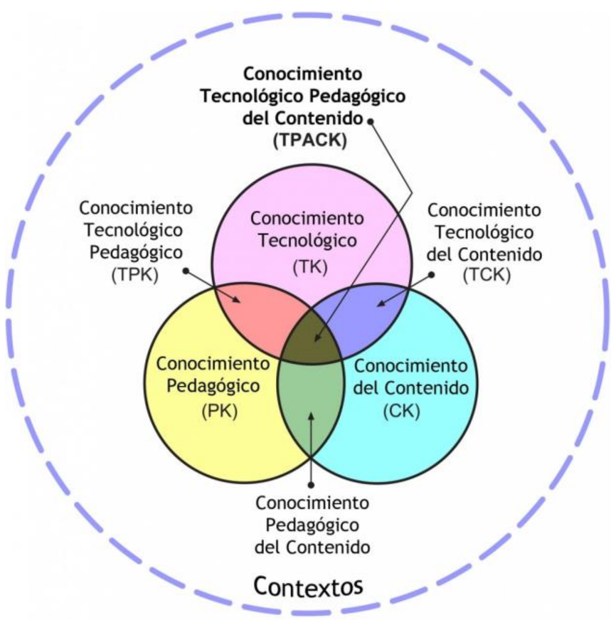


Diagrama 1. Modelo TPACK

Fuente. *Mishra, Koehler y Cain (2013)*

Según los autores, este modelo requiere la comprensión que surge de la interacción entre los tres saberes (contenido, pedagogía, y tecnología):

- La representación de conceptos usando habilidades tecnológicas y pedagógicas de manera constructiva para enseñar contenidos.
- La construcción de diagramas de muestras (gráficos de varias muestras y población en una misma representación), el cálculo de medidas de tendencia central y variabilidad, la generación de sub-tablas por cada caso, el dinamismo del paquete CODAP (variación de un dato modifica todas las tablas y gráficos que involucren al dato) contribuye a que el estudiante comprenda el proceso estadístico involucrado en el análisis de datos.
- Conocimiento sobre qué hace que un concepto sea difícil o fácil para aprender y sobre cómo la tecnología puede ayudar a abordar algunos de los problemas que atraviesan los estudiantes.
- Se reduce el cálculo tedioso de fórmulas. El formalismo matemático se transforma paso a paso, al variar deslizadores, hacia un conocimiento intuitivo.
- Conocimiento de las ideas e hipótesis previas de los alumnos y cómo la tecnología puede ser utilizada para construir la disciplina o fortalecer un conocimiento existente.
- El uso de datos reales recolectados por el mismo estudiante o de internet, con contextos motivadores para los estudiantes (algún deporte o actividad cultural, problemática de la comunidad, comparación de su país, datos que surgen de alguna ciencia, entre otros), permitirá que las inferencias obtenidas lo involucren.

2.2. Sobre CODAP

CODAP aventaja a Excel, SPSS, ESTADISTICA, entre otros, en que además de ser libre, su objetivo de diseño fue para la enseñanza de las diversas ciencias a partir del análisis de datos. Para The Concord Consortium (2019) "CODAP se asocia con investigadores universitarios, educadores y desarrolladores de planes de estudio para estudiar y diseñar características efectivas, actividades ricas en datos y materiales de aprendizaje".

El nivel de programación que requiere CODAP es básico, en contraste con otros paquetes de análisis estadístico como R o SAS, que puede requerir alguna madurez en programación y su curva de aprendizaje suele ser alta. Además, está en constante actualización pues la plataforma es financiada por la National Science Foundation (NSF), de código abierto y basada en la web. Según The Concord Consortium (2019) "hemos diseñado y probado nuestro software en colaboración con siete proyectos financiados por NSF, lo que nos ayuda a crear materiales curriculares para las aulas de secundaria y preparatoria en una variedad de materias".

3. Metodología de trabajo

3.1. Procedimiento y actividades

El taller inicia con una actividad llamada "Aprendiendo CODAP". Su objetivo es el conocimiento inicial del manejo del paquete a través de una base de datos reales sobre información de edad, peso y estatura de niños de una escuela. Se utiliza las herramientas de construcción de tablas y gráficos. Así como el uso de la calculadora para el cálculo de algunas medidas. Se espera que los participantes hagan algunas inferencias con las variables involucradas.

Con la segunda actividad se pretende que los participantes analicen la variabilidad de los datos presentes en los días de nacimiento de todos los habitantes de Estados Unidos del 2000 al 2014. Además, calcular probabilidades de algunos eventos utilizando frecuencias relativas.

Por último, se desea que recolecten datos del peso y estatura de cada uno de los participantes para determinar el índice de masa corporal (IMC). Luego se clasifica, según el IMC, el nivel de gravedad de obesidad, con el fin de advertir de posibles problemas de salud que pueden acarrear. Por último, se construyen distintos tipos de gráficos que permitan conjeturar, por género, el nivel de intensidad del IMC y sus peligros a futuro.

3.2. Requerimientos del taller

Laboratorio de computadoras con internet, video beam y copia de las actividades a cada uno de los participantes.

3.3. Público meta

Profesores de primaria y secundaria.

4. Guías de trabajo y/o actividades

4.1. Aprendiendo CODAP

En la dirección https://concord-consortium.github.io/codap-data/ acceda al ejemplo:

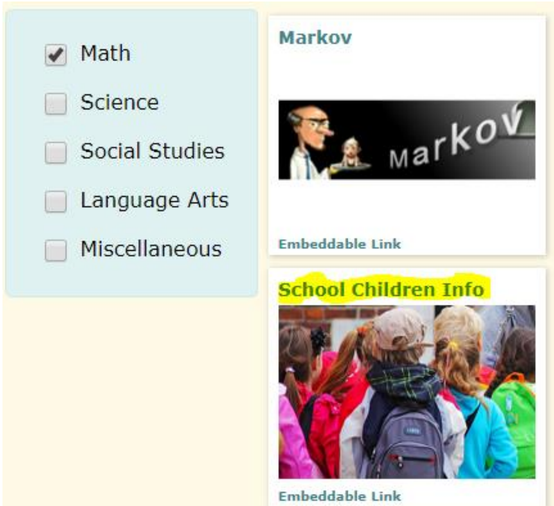


Figura 1. Información de niños de la escuela

Fuente. *Concord consortium*

Estos son datos de 236 escolares. Cada niño está representado por un punto en los gráficos.

Y trabaje en lo siguiente:

- Intenta colorear los puntos por "edad". Arrastre el atributo "age" al centro del gráfico para crear una leyenda. Verás que cuanto mayor sea el niño, más oscuro será el punto. Haga clic en uno de los íconos más oscuros para ver información sobre ese niño en la tabla.
- Para ver qué tan alto es cada niño, seleccione el atributo Altura. Arrástrelo al eje horizontal (x). Esta distribución es interesante. Los datos se agrupan en dos lugares, alrededor de 61. Haga clic en el atributo "sexo" y colóquelo en el centro del gráfico.
- Podemos separar los niños de las niñas trazando "sexo" en el eje vertical de la gráfica.
- Haga clic en el icono de la regla y seleccione "media" para ver la ubicación de la media. Un "valor móvil" es útil para leer valores precisos.
- Puede ajustar el tamaño de los puntos para que sean muy grandes o muy pequeños.

4.2. ¿Qué día de la semana nació? ¿Es igualmente probable nacer cualquier día de la semana? e ¿igualmente probable nacer cualquier mes?

La siguiente fórmula permite hallar el día del año en el que usted nació:

(Día + Mes + Año + (Año/4) + Siglo) Mod 7

Dónde el Mes se toma el valor de la siguiente tabla:

Enero	0	Julio	6
Febrero	3	Agosto	2
Marzo	3	Setiembre	5
Abril	6	Octubre	0
Mayo	1	Noviembre	3
Junio	4	Diciembre	5

Y del Año se toman los dos últimos dígitos.

Por ejemplo, para una persona que nació el 5 de diciembre de 2019

(Día=5 + Mes=5 + Año=19 + (Año/4) = 4 + Siglo (0 si ≤1999 o 6 si ≥2000)) Mod 7

= 39 mod 7

= 4

Por lo que nació jueves (tomando lunes = 1, martes =2, …, sábado =6 y domingo = 0).

¿Qué día nació usted?

En la dirección https://concord-consortium.github.io/codap-data/ acceda al ejemplo:

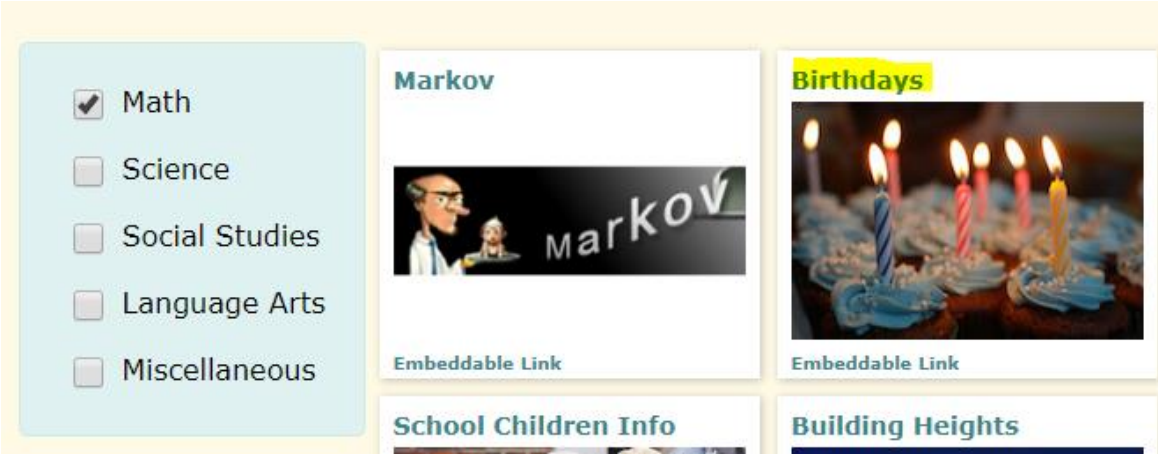


Figura 2. Cumpleaños

Fuente. *Concord consortium*

Y responda las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son algunas de las fechas de nacimiento más populares en Estados Unidos?

- ¿Algunos días de la semana son fechas de nacimiento más populares que otros días? ¿Por qué?

- Construya un diagrama del número de nacimientos según el día de la semana, ¿cuál es la distribución del número de nacimientos según el día de la semana?

4.3. El índice de masa corporal (IMC) en CODAP

El IMC es un número que se calcula del peso y la estatura. El IMC es un método económico y fácil de realizar para detectar categorías de peso que pueden llevar a problemas de salud. En la siguiente dirección puedes calcular el índice de masa muscular para las distintos pesos y estaturas de sus compañeros:

https://www.nhlbi.nih.gov/health/educational/lose_wt/BMI/bmi-m_sp.htm

Según los siguientes parámetros:

ÍNDICE MASA CORPORAL	CLASIFICACIÓN
<16.00	Infrapeso: Delgadez Severa
16.00 - 16.99	Infrapeso: Delgadez moderada
17.00 - 18.49	Infrapeso: Delgadez aceptable
18.50 - 24.99	Peso Normal
25.00 - 29.99	Sobrepeso
30.00 - 34.99	Obeso: Tipo I
35.00 - 40.00	Obeso: Tipo II
>40.00	Obeso: Tipo III

Manualmente sería:

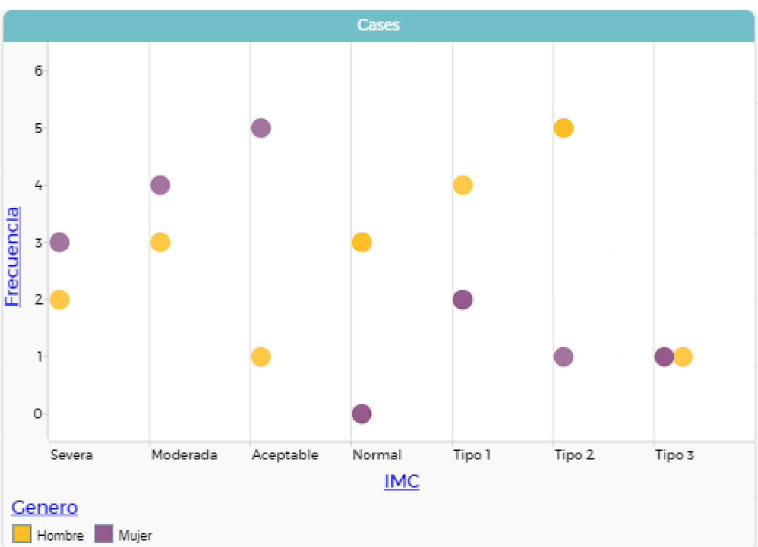
$$\text{IMC}=\frac{\text{Peso (kg)}}{\text{Estatura}^2\text{(Mts.)}}$$

Construya un gráfico con los porcentajes según las categorías de clasificación del IMC para todos los miembros del grupo. Analice los resultados.

Separe ahora estos datos por género y construya una gráfica de comparación de los porcentajes de IMC por género.

Por ejemplo, debería verse como:

Gráfico 1. Clasificación según IMC por género



Fuente: elaboración propia

5. Referencias bibliográficas

Koehler, M. J., Mishra, P., & Cain, W. (2013). What is technological pedagogical content knowledge (TPACK)? *Journal of Education*, 193 (3), 29-37

Meza, G.; Agüero, E. y Suárez, Z. (2019). Reforma de la educación matemática en Costa Rica: evaluación de avance de la implementación en la educación secundaria. *Revista Digital: Matemática, Educación E Internet*, *19*(2). https://doi.org/10.18845/rdmei.v19i2.4218

Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de estudio en matemáticas. I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada. San José, Costa Rica. Recuperado de http://www.mep.go.cr/programa-estudio/matematicas%20

National Council of Teachers of Mathematics. (2015). *De los principios a la acción para garantizar el éxito matemático para todos*. México: Editorial 3D.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

The Concord Consortium. (2019). CODAP [Software]. Recuperado de https://codap.concord.org/