Memorias

10 Festival Internacional de Matemática

Editor: Manuel Murillo Tsijli

ISBN 978-9968-641-45-6

Contenido

Presentación

Cada dos años, la comunidad se reúne para celebrar la matemática. Este congreso internacional para educadores, iniciado en 1998, llegó en el 2016 a su décima edición en Limón, Costa Rica.

El ***10 Festival Internacional de Matemática*** es un congreso de enseñanza de la matemática, dirigido a educadores, formadores de educadores e investigadores en enseñanza de la matemática. Se realizó del 9 al 11 de junio, 2016, en el Centro Educativo María Inmaculada, en Limón, con actividades de extensión previas en Heredia, San José y Limón del 6 al 8 de junio.

Los Festivales anteriores se realizaron en: Quepos (2014), Liberia (2012), San Carlos (2010), Palmares (2008), Puntarenas (2006), San José (2004 y 2002), Heredia (2000), I Festival -Zapote, San José (1998).

ORGANIZADORES DEL 10 FESTIVAL INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA 2016

1. **Comité Nacional:**

- Fundación CIENTEC.
- Ministerio de Educación Pública, MEP.
- Escuela de Matemática, UNA.
- Escuela de Ciencias Naturales y Exactas (San Carlos) y la Escuela de Matemática del Tecnológico de Costa Rica, TEC.
- Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, UNED.
- Escuela de Formación Docente, UCR.
- Ministerio de Ciencia, Tecnología y Telecomunicaciones, MICITT.
- Dirección Regional de Educación, Limón.
- Centro Educativo María Inmaculada, Sede Limón.
- Colegio de Licenciados y Profesores, COLYPRO.
- Asociación Nacional de Educadores, ANDE.
- ASOMED y un comité internacional.

2. **Comité organizador local:**

   Estuvo conformado por representantes de la Dirección Regional de Educación de Limón y profesores de matemática líderes, de diferentes instituciones de la provincia.

   - Colegio Nocturno de Limón.
   - Colegio Científico del Atlántico.
   - Universidad de Costa Rica.
   - Colegio Diurno de Limón.
   - CINDEA Herediana.
   - Liceo Rodrigo Solano Quirós.
   - Colegio Técnico Profesional Valle de la Estrella.
   - Centro Educativo María Inmaculada.
   - CINDEA Veintiocho Millas.
   - Liceo Innovación Educativa Matina.
   - Colegio Académico Siquirres.
   - Liceo de Venecia.
   - UP Limón 2000.
   - Colegio Técnico Profesional Liverpool.
   - Colegio Nocturno de Siquirres.
   - Colegio Pacuare.
   - Liceo de Sixaola.
   - Liceo Rural de Gandoca.
   - Colegio Rural de Cahuita.
   - Colegio Técnico Profesional Bataan.
   - Colegio Nocturno de Bataan.
   - Dirección Regional Educación Limón.

3. **Comité científico:**

   - M.Sc. Manuel Murillo Tsijli (TEC- UNED)
   - M.Sc. Margot Martínez Rodríguez (UNA)
   - M.Sc. Anabelle Castro Castro (TEC San Carlos)

OBJETIVOS

1. Incentivar la investigación y la experimentación científica, como medios para lograr el mejoramiento en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en todos los niveles del sistema educativo costarricense.
2. Fomentar estrategias de mediación que favorezcan contextualizar la matemática.
3. Potenciar los procesos de creación y uso de modelos.
4. Brindar un espacio donde los docentes socialicen y enriquezcan sus experiencias de aula.
5. Propiciar el intercambio de ideas sobre para qué y cómo enseñar matemática frente a los nuevos retos del entorno.
6. Fortalecer la conexión entre las matemáticas, las ciencias y las artes.
7. Acercar a los educadores al uso de enfoques metodológicos alternativos que puedan llevar a las aulas, así como fuera de ellas.
8. Propiciar un espacio de innovación para el uso de las tecnologías como recurso en los procesos de aprendizaje de la matemática.
9. Fomentar la divulgación de la matemática ante el público general.

ÁREAS TEMÁTICAS

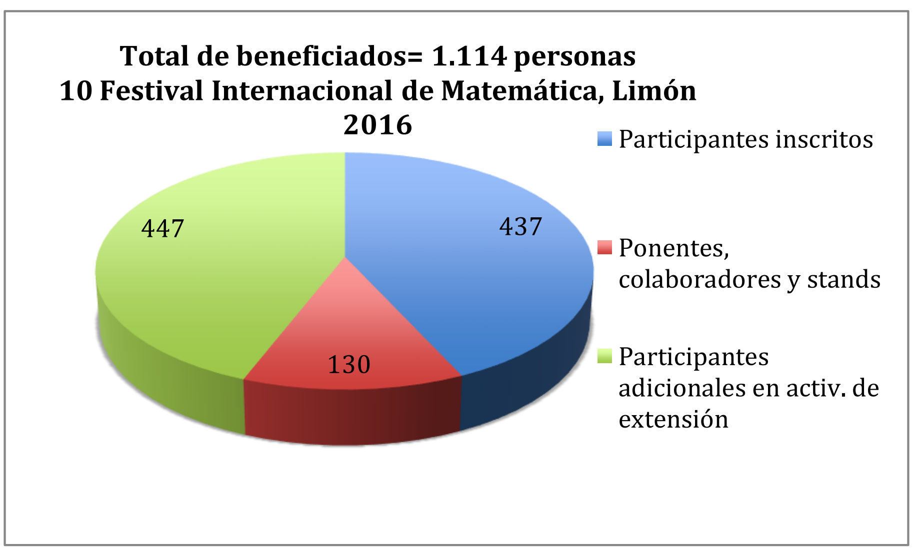
- Retos y estrategias en la educación matemática.
- Enseñanza por habilidades matemáticas.
- Oportunidades y desafíos de las TIC's en matemática educativa.
- Resolución de problemas como una herramienta de mediación docente.
- Temas transversales (derechos humanos, sexualidad, ambiente, diversidad…)
- Modelación matemática.
- Evaluación de los aprendizajes.
- Socialización de la matemática.
- Enfoque didáctico de la historia de la matemática.
- La potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a la matemática.

DIVULGACIÓN

La divulgación del Festival se realizó a través de la Fundación CIENTEC, del Ministerio de Educación Pública y de los otros miembros de los comités organizadores, en comunicados a educadores, a través de Asesores Regionales de Matemática (MEP), por medios digitales, grupos y medios sociales, con la publicación y distribución de volantes, comunicados de prensa, artículos sobre invitados especiales publicados en medios de comunicación escrita y televisión, y entrevistas en la televisión nacional.

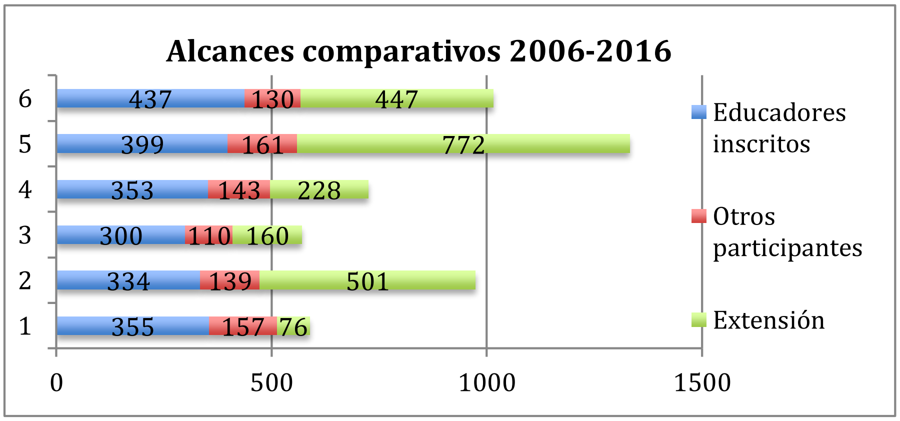
ALCANCES DEL 10 FESTIVAL INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA, LIMÓN 2016

Gracias al trabajo en red entre el Comité Organizador Nacional y el Comité Local en Limón, el X Festival benefició directamente a 1 114 personas, entre participantes inscritos, ponentes, colaboradores y stands, así como participantes en las actividades de extensión en Heredia, San José y Limón.



Este es un gran logro, no solo para esta edición, sino comparable con las últimas, en Quepos 2014 que con sus programas de extensión llegó a 1331personas, y en Liberia 2012 con sus actividades de extensión alcanzó a 724 personas.

En el siguiente gráfico de **Alcances comparativos 2006-2016**, se muestra una década con los últimos cinco Festivales Internacionales de Matemática distribuidos en diferentes regiones del país. Los datos corresponden a: (1) 2006- Puntarenas. (2) 2008- Palmares, (3) 2010- San Carlos, (4) 2012- Liberia, (5) 2014-Quepos y (6) 2016- Limón.

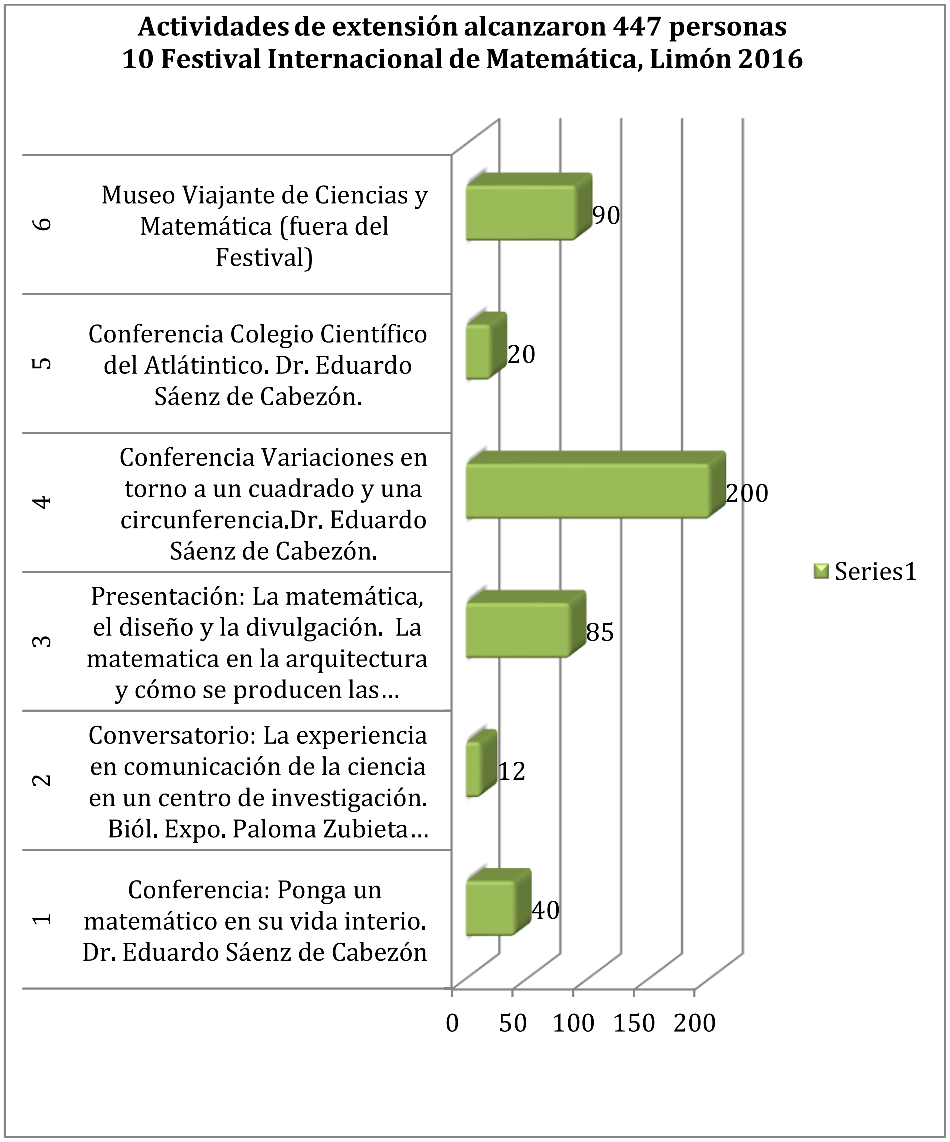


La participación de educadores inscritos a través de esta década muestra una participación constante y un leve crecimiento a través del tiempo. La rotación de sedes también ha facilitado la participación de diferentes regiones.

En cuanto a los programas de extensión, éstos se programan de acuerdo a los expositores internacionales y sus fortalezas. Se combinan conferencias para auditorios grandes, talleres para grupos menores durante más horas y sesiones de trabajo con aliados estratégicos.

PROGRAMA PRELIMINAR

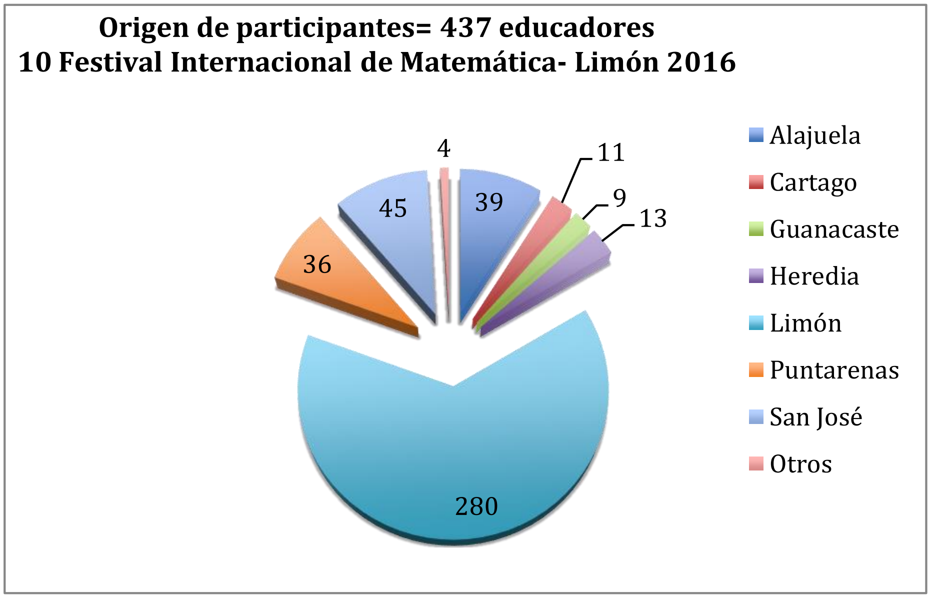
Las actividades de extensión se desarrollaron en Heredia, San José y Limón del 6 al 10 de junio, 2016 y alcanzaron a 447 personas, presencialmente.



	Extensión- participantes	**No. Personas**
1	Conferencia: Ponga un matemático en su vida interior. Dr. Eduardo Sáenz de Cabezón, UNA	40
2	Conversatorio: La experiencia en comunicación de la ciencia en un centro de investigación. Bióloga Expositora Paloma Zubieta López, UNAM	12
3	Presentación: La matemática, el diseño y la divulgación. La matemática en la arquitectura y cómo se producen las cápsulas del canal en YouTube “Derivando”. Dr. Eduardo Sáenz de Cabezón	85
4	Conferencia Variaciones en torno a un cuadrado y una circunferencia. Dr. Eduardo Sáenz de Cabezón.	200
5	Conferencia Colegio Científico del Atlántico. Dr. Eduardo Sáenz de Cabezón.	20
6	Museo Viajante de Ciencias y Matemática (fuera del Festival)	90
	Subtotal 6	**447**

PARTICIPANTES

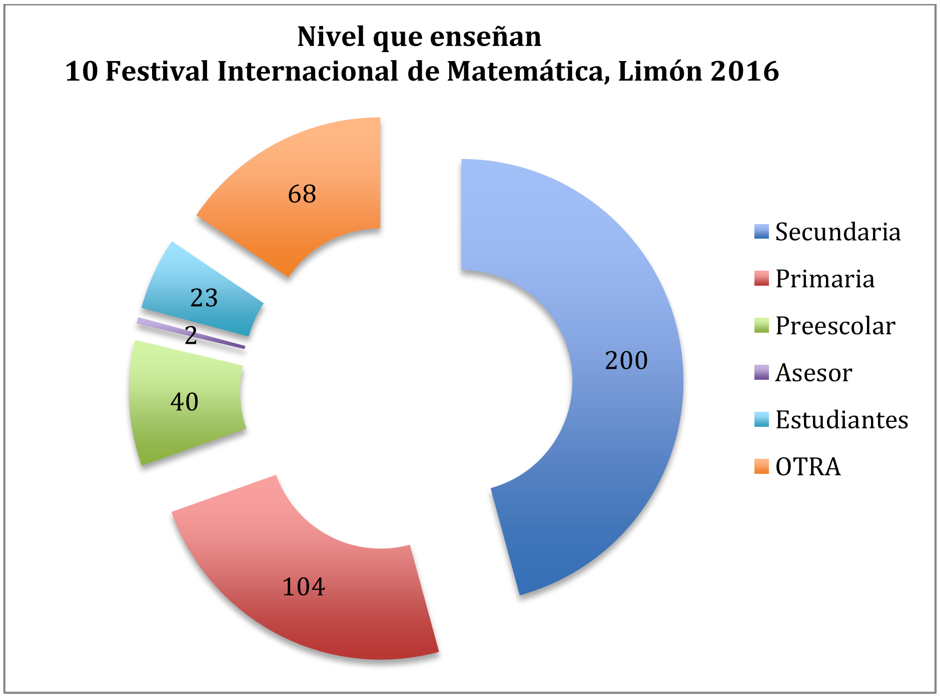
En la categoría de "Participantes inscritos" en el X Festival participaron 437 educadores distribuidos por provincia como lo muestra el siguiente gráfico.



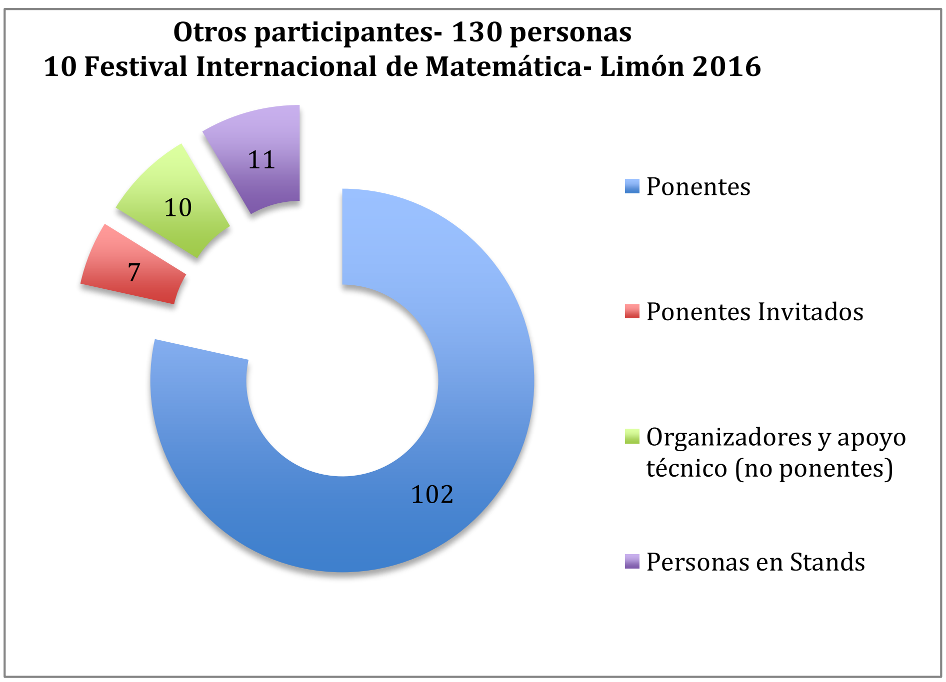
ORIGEN DE PARTICIPANTES	NO.
Alajuela	39
Cartago	11
Guanacaste	9
Heredia	13
Limón	280
Puntarenas	36
San José	45
Otros	4
Total:	437

El 10 Festival en Limón, con el impulso de líderes de la región educativa, logró obtener un 64% de participantes de su misma región, una confirmación del propósito principal de llevarlo a esta provincia, ya que en Festivales anteriores, la participación de educadores de Limón había sido mínima.

Sigue ahora la clasificación de los *participantes inscritos* por nivel que enseña: 200 profesores de secundaria, 104 educadores de primaria, 40 de preescolar, 2 asesores, 23 estudiantes y 68 otros.

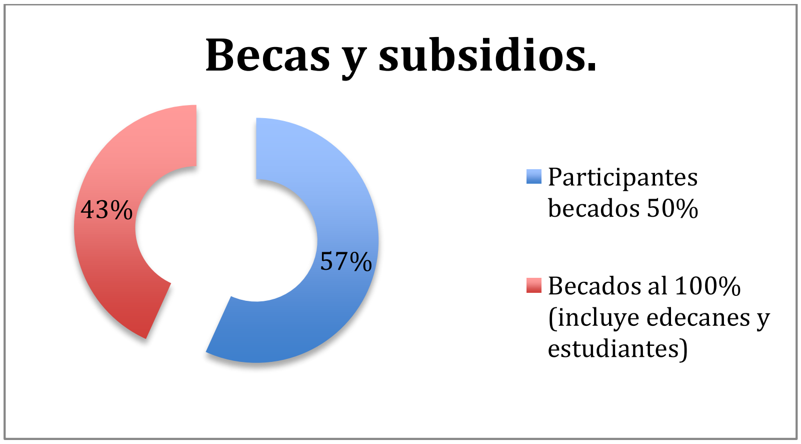


En la categoría de *Otros participantes* en el X Festival, se incluyen los ponentes, ponentes invitados, organizadores y apoyo técnico, así como las personas en Stands.

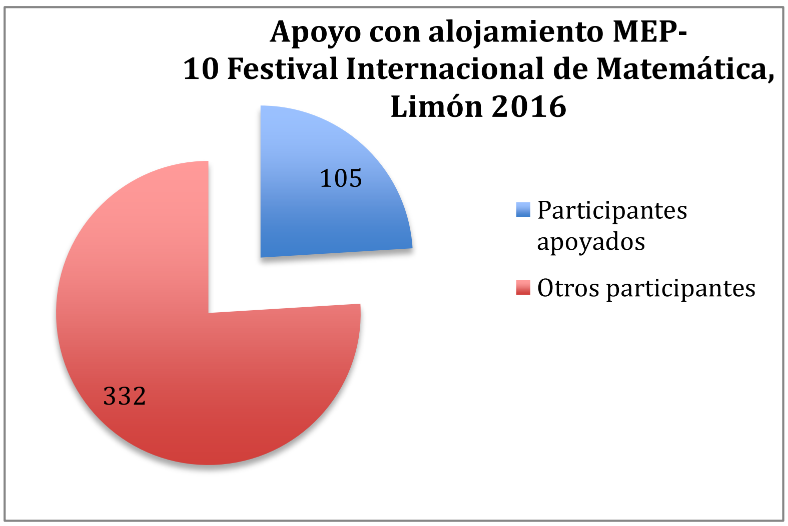


APOYO CON BECAS Y ALOJAMIENTO

La inscripción de educadores fue apoyada con becas y subsidios durante este Festival, de manera extensa. Un 43% de los participantes obtuvo una beca completa y un 57% una beca del 50% de la inscripción.

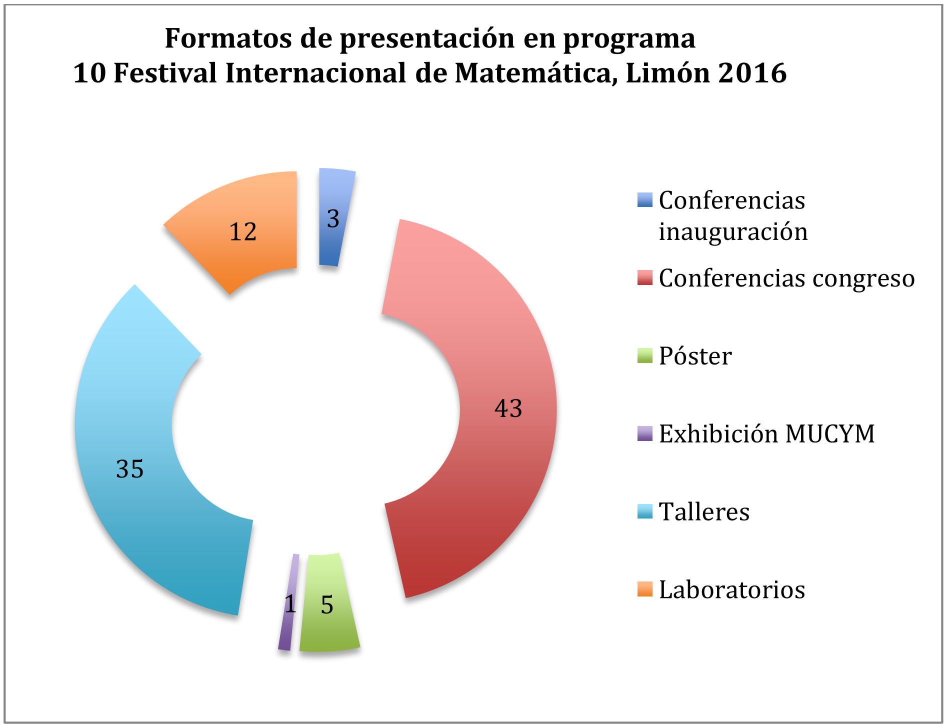


Adicionalmente, el Ministerio de Educación Pública apoyó a 105 participantes, otorgándoles alojamiento durante dos noches y alimentación. De esta manera también se apoyó la participación de educadores que viajaron de otras regiones del país.



PROGRAMA

El programa del Festival inició el jueves 9 de junio por la noche con la inauguración y las conferencias magistrales, para luego seguir el viernes 10 y sábado 11 con las actividades paralelas. Entre ellas, se llevaron a cabo talleres, conferencias y laboratorios, sesiones de póster, la presentación del Museo Viajante de Ciencias y Matemática (MUCYM), y exhibiciones de materiales, software y equipo. En total se realizaron noventa y nueve presentaciones diferentes.



EXPOSITORES

El Festival contó con más de cien expositores nacionales e internacionales, aprobados previamente por el Comité Científico del evento.

Ponentes Internacionales

- **Daniel Clark Orey**, Professor Emeritus, California State University, Sacramento, Coordenador Adjunto de Assuntos Internacionais, Professor, Centro de Educação Aberta e a Distância, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil
- **Eduardo Sáenz de Cabezón**, Profesor y divulgador de la matemática, Departamento de matemáticas y computación, Universidad de La Rioja, España
- **Luis Roberto Moreno Chandler**, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Universidad de Panamá.
- **María de la Paz Álvarez Scherer**, Ph. D., profesora jubilada, Universidad Autónoma de México, México.
- **Milton Rosa**, Professor e Coordenador Pedagogica, Centro de Educação Aberta e a Distância, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil.
- **Paloma Zubieta López**, Comunicadora Científica del Instituto de Matemáticas de la UNAM, coordinadora del Festival Matemático, UNAM, México
- **Hilbert Blanco Álvarez**, Coordinador del Seminario Internacional Permanente de Investigación Educativa. Colombia
- **Tim Erickson**, Consultor en enseñanza de la estadística, Epistemological Engineering. EE.UU.
- **Veronica Albanese**, es formadora de profesores e investigadora de la Universidad de Granada, España. Promotora la interculturalidad desde la Educación Matemática.

ALIMENTACIÓN

La alimentación durante las actividades del pre congreso y durante el congreso fue aportada por el Ministerio de Educación Pública y la Fundación CIENTEC.

MATERIALES

El MEP respaldó el Festival con una declaratoria de *interés educativo* y una invitación a los educadores.

CIENTEC produjo unos banners, certificados, camisetas, el programa, el resumen de ponencias, las evaluaciones.

El TEC aportó los certificados y las carpetas para los participantes.

EVALUACIÓN

La organización considera que el 10 Festival Internacional de Matemática fue una versión muy exitosa, que además logró integrar los líderes en la educación matemática de la provincia, para establecer una red de colaboración, impulsar su desempeño y generar la presentación de sus buenas prácticas ante otros.

El impacto del Festival genera un antes y un después…

"Después del Festival, Limón no va a ser igual en matemática…" (Eduardo Arce B., Jefe de Asesorías Pedagógicas, Dirección Regional de Educación de Limón)

El 10 Festival logró sus objetivos y reunió el mayor número de limonenses de la historia de este congreso. La oferta general del programa presentó una diversidad de formatos que fueron muy apreciados por los participantes.

Los programas de extensión llegaron estudiantes universitarios, otros educadores, divulgadores de la ciencia y público general, con impacto también a través de los medios de comunicación.

En general, los educadores valoraron el congreso y lo manifiestan a través de las siguientes citas tomadas de las evaluaciones escritas finales.

ÁLBUM DE FOTOS

Álbum de fotos de CIENTEC: www.flickr.com/photos/cientec/albums/72157667235391514

Álbum de fotos de actividades pre-Festival.
www.flickr.com/photos/cientec/albums/72157670193166955

Colección de los últimos congresos: www.flickr.com/photos/cientec/collections/72157623024545482/

MEMORIAS DE FESTIVALES ANTERIORES

- http://www.cientec.or.cr/matematica/memoriaV.html
- http://www.cientec.or.cr/matematica/memoriaVI-VII.html
- http://www.cientec.or.cr/matematica/memoriaVIII.html
- http://www.cientec.or.cr/articulos/memorias-ix-festival-internacional-de-matematica-2014

PATROCINADORES: MICITT, CONICIT, MEP, Apartotel La Sabana, Alimentos Jack's, COOPEMEP y Museo Viajante de Ciencias y Matemática, MUCYM.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a todos lo coorganizadores, voluntarios, ponentes, expositores, colaboradores y patrocinadores que apoyaron el X Festival en Limón y, en especial a los miembros y colaboradores del comité local.

Alejandra León Castellá

Copresidenta X Festival Internacional de Matemática

Directora Ejecutiva, Fundación CIENTEC

An Ethnomathematical Perspective of Symmetrical Freedom Quilts as Cultural Artifacts

Milton Rosa
Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
milton@cead.ufop.br

Abstract: Quilts often have a visual balance as well as produce pleasing effects. Since quilts may be considered as cultural artifacts as well as artistic and mathematical manifestations and expressions of the daily life of slaves, who were part of a particular cultural group. The purpose of this article is to explore the symmetrical patterns found in a specific kind of quilts, symmetrical freedom quilts, and to explore the connections between mathematics, ethnomathematics, and the tactile craft and art of quilting of this resilient group of people.

Key words: Symmetrical Freedom Quilts, Ethnomathematics, Cultural Artifacts.

Introduction

Culture and society considerably affect the way in which individuals understand mathematical ideas and concepts. Ethnomathematics has demonstrated how mathematics is made of many diverse and distinct cultural traditions. In this regard, each cultural group has developed unique ways of incorporating mathematical knowledge and has often come to represent given cultural systems, especially in ways that members of cultural groups quantify and use numbers, incorporate geometric forms and relationships, and measure and classify objects (D'Ambrosio, 1990).

Each cultural group has developed unique and distinct ways to *mathematize* their own realities. Mathematization is a process in which individuals from different cultural groups come up with different mathematical tools that help them to organize, análise, comprehend, understand, model, and solve problems located in the context of real-life situations (Rosa & Orey, 2006). These tools allow them to identify and describe specific mathematical ideas, concepts, procedures, and practices by schematizing, formulating, and visualizing a problem in different ways, discovering relations, patterns, and regularities, and transferring a real world problem to a mathematical idea through mathematization.

Inclusion of a diversity of ideas brought by students from other cultural groups can give confidence and dignity to these students, while allowing them to see a variety of perspectives and provide them a base in which they are able to learn academic-Western mathematics (Bassanezi, 2002). Equally important is the search for alternative methodological approaches. As Western mathematical practices are accepted worldwide, it is vital to record historical, diverse and alternate forms of mathematical ideas that occur in different cultural contexts before many of these ancient or local practices are lost to time. One alternative methodological approach is *ethnomodeling* (Rosa & Orey, 2010), which may be considered as the practical application of ethnomathematics, which adds the cultural perspective to academic modeling concepts, which satisfy the necessities and the life history of the participants of this specific cultural group

When justifying the need for a culturally bound view on mathematical modeling, our sources are rooted on the theory of ethnomathematics (D'Ambrosio, 1990; Bassanezi, 2002; Rosa & Orey, 2003). Research of culturally bound modeling ideas addresses the problem of mathematics education in non-Western cultures by bringing the cultural background of students into the mathematics curriculum in order to connect the local and cultural aspects of the school community into the teaching and learning of mathematics (Rosa & Orey, 2010).

Ethnomathematics

Ethnomathematics as a research paradigm is much larger than traditional concepts of mathematics, ethnicity, and any current sense of multiculturalism. D'Ambrosio (1990) affirmed that *ethno* is related to distinct groups identified by cultural traditions, codes, symbols, myths, and specific ways of reasoning, inferring, and modeling. Ethnomathematics is the way that various cultural groups mathematize their own reality because it examines how both mathematical ideas and mathematical practices are processed and used in daily activities. Ethnomathematics is described as the arts and techniques developed by students from diverse cultural and linguistic backgrounds to explain, to understand, and to cope with their own social, cultural, environmental, political, and economic environments (D'Ambrosio, 1993).

Ethnomathematics seeks to study how people (students) understand, comprehend, articulate, process, and ultimately use mathematical ideas, concepts, procedures, and practices that are able to solve problems related to their daily activities. This holistic context helps students reflect, understand, and comprehend extant relations among all components of the system. Rosa (2000) defined ethnomathematics as the intersection of cultural anthropology, academic mathematics, and mathematical modeling, which is used to help students to translate diverse mathematical ideas and practices found in their communities.

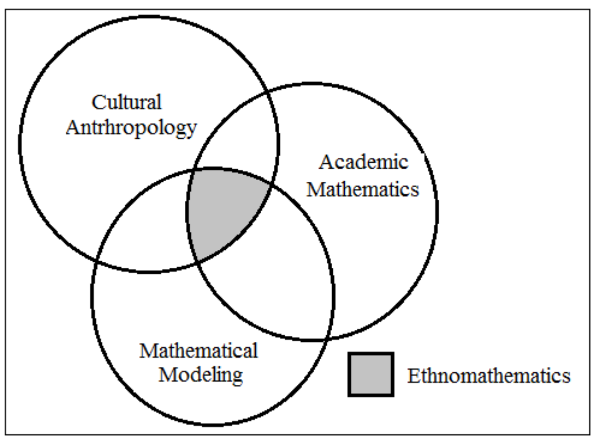


Figure 1: Ethnomathematics as an intersection of three disciplines

Detailed studies of mathematical ideas and practices of distinct cultural groups most certainly allow us to further our understanding of the internal logic and mathematical ideas of diverse group of students.

Ethnomodeling

Ethnomodeling is a process of the elaboration of problems and questions that grow from real situations that form an image or sense of an idealized version of the *mathema*. Rosa and Orey (2006) stated that the focus of this perspective essentially forms a critical analysis of the generation and production of knowledge (creativity), and forms an intellectual process for its production, the social mechanisms of institutionalization of knowledge (academics), and its transmission (education).

D'Ambrosio (2000) affirmed that "this process is modeling" (p. 142). In this perspective, by analyzing reality as a whole, this holistic context allows those engaged in the modeling process to study systems of reality in which there is an equal effort to create an understanding of all components of the system as well as the interrelationships among them (D'Ambrosio, 1993; Bassanezi, 2002).

Rosa and Orey (2007) affirmed that the use of modeling as pedagogical action for an ethnomathematics program respects and values previous knowledge and traditions by developing student capacity to assess and translate the process by elaborating a mathematical model in its different applications. In this regard, it is necessary to start with the social context, reality, and interests of the students and not by enforcing a set of external values and decontextualized curricular activities without meaning for the students. Bassanezi (2002) characterized this process as "ethno-modeling" (p. 208) and defined ethnomathematics as "the mathematics practiced and elaborated by different cultural groups, and involves the mathematical practices that are present in diverse situations in the daily lives of members of these diverse groups" (p. 208).

In considering ethnomodeling as tool to study ethnomathematics, teaching is much more than the transference of knowledge because teaching becomes an activity that introduces the creation of knowledge. According to Freire (1970), this approach in Mathematics Education is the antithesis of turning students into containers to be filled with information. In our opinion, it is necessary for mathematics curriculum to translate the interpretations and contributions of ethnomathematical knowledge into systemized mathematics because students need to be able to analyze the connection between both traditional and non-traditional learning settings. According to Bassanezzi (2002), ethnomodeling uses mathematics as a language for understanding, simplification and resolution of real world problems and activities.

On the other hand, many Western mathematical activities are regarded as modeling by this definition and due to its cultural roots in non-Western society it can be defined as ethnomodeling of the mathematical practices found in non-Western settings. A characteristic of these new problems is that they cannot be solved using syllogistic, that is, classical Aristotelian logic, but need multivalued logic, often called *fuzzy logic*, which is the logic that underlies inexact or approximate reasoning (Zadef, 1984). In this context, Ascher and Ascher (1986) argued that multivalued logic is used in attempts to formalize human-like processes that are culturally bound.

Ethnomodels

In general, a model is a representation of an idea, a concept, an object, or a phenomenon (Gilbert, Boulter & Elmer, 2000). We define ethnomodels as cultural artifacts, which can be considered the pedagogical tools used to facilitate the understanding and comprehension of systems that are taken from reality of cultural groups (Rosa & Orey, 2009).

In this regard, ethnomodels are external representations that are precise and consistent with the scientific and mathematical knowledge, which is socially constructed and shared by members of specific cultural groups. The primary objective for the elaboration of ethnomodels is to *translate* the mathematical ideas, concepts, and practices developed by the members of distinct cultural groups.

Applying Ethnomodeling

An example of the ethnomodeling process is the practice of *quilting* as a pedagogical proposal to elaborate activities for the teaching and learning of mathematics. This process shows the importance of the contextualization of problems in the learning environment of ethnomodeling through the elaboration of ethnomodels. According to our studies in the area of ethnomathematics and modeling, this ethnomathematical example naturally comes across as having a mathematical modeling methodology (D'Ambrosio, 2002) through ethnomodeling.

The Symmetrical Freedom Quilt

Rosa and Orey (2009) affirmed that a quilt theme is a way to introduce work in ethnomodeling by integrating mathematics, art, history, and reading in an interdisciplinary approach. In so doing, it is necessary to propose lesson plans, which combine an ethnomathematical-historical perspective that elaborates a history project related to the *Underground Railroad*. This project allows teachers to develop classroom activities that help students to better understand history and geometry, especially concepts of symmetry and transformations through ethnomodeling.

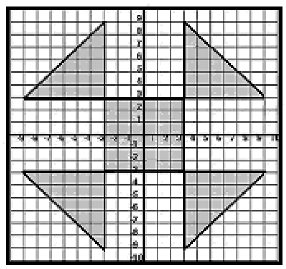


Figure 2: The Freedom Shoo Fly quilt block

Making quilt blocks are an excellent way to explore concepts of symmetry. As quilts are made from square blocks, usually 9, 16, or 25 pieces to a block, with each smaller piece consisting of fabric triangles, the craft lends itself readily to the application of concepts of symmetry.

Cultural Background of Freedom Quilts

Today's patterned African quilts would be all but unrecognizable to the people of African descent brought to the Americas as slaves (Rosa & Orey, 2009). Currently, African-American quilters continue the use of patterns as well as African textiles and beadwork to establish a cultural link back to African roots.

One fascinating reality is concerned with African quilts designs and the belief that evil travels in straight lines. Thompson (1983) stated that quilt patterns may be used in several ways to stop the flow of evil such as by breaking patterns within the block unit; staggering designs, using a strip-piecing technique, and by placing different patterns next to one another in a samplerlike fashion.

The first cultural group of African quilt-makers would not apply symmetrical patterns because they believed that evil spirits would travel in a straight line (Dobard & Tobin, 1999). In this regard, in order to throw off the demon spirits they could not apply a perfectly aligned pattern and they should mix-up the design.

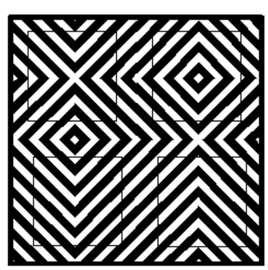


Figure 3: A visual illusion of an interrupted quilt block

This is similar to the concept of *interrupted systems* used in op-art (Barrett, 1970) in which the pattern is broken or interrupted. The pattern in this system is composed of straight, corresponding, and parallel lines in which all angles are right angles. This design is used in some patterns of the Freedom Quilts.

In much of the North American quilting tradition, strip construction, large-scale designs, strong contrasting colors and variations from symmetrical patterns all appear to reflect symmetrical textile patterns found in parts of Africa.

A specific tradition brought over from Africa is the strip quilt. Many times, strips of cloth called *kente* were woven together in order to make one big blanket. Scholars consider this strip quilting technique to be the ancestor of modern African quilts.

By using the strip quilting technique, patterns were often broken up and uneven, which was said to break up the line of evil (Dobard & Tobin, 1999). The strips are assembled along their selvages in order to form an overall lengthwise stripe pattern, which indicates that may be arranged symmetrically within a grid or on a central axis.

Figure 4: Adire oniko in the African sahada pattern

Repetition of symbols and patterns indicate a symmetrical mathematical structure, a spiritual synthesis embracing a celestial world and protection because patterns were sometimes used as protection to ward off evil spirits. In this context, different quilt designs may be based on the principle of modularity, which is based on the use of a small set of basic elements called *prototiles* and their recombination in order to create a large or even infinite series of modular designs (Jablan, 1992).

In the same way as in Africa and Freedom Quilts, some basic pieced blocks, which are squares with a set of diagonal fields, are used as modules. The *Flying Geese Freedom Quilt* design is a basic pieced block formed by a square with a set of diagonal fields, which are used as modules.

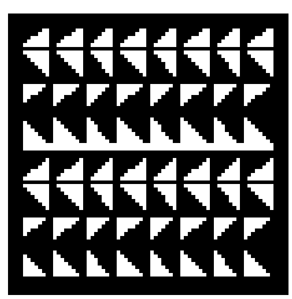


Figure 5: The flying geese freedom quilt pattern

The concept of modularity may be also used by the African quilt-makers and by the runway slaves in the United States in the 19th century as a tool for the elaboration of some symmetrical patterns used in their quilt designs.

The quilt-makers from both African descent and runaway slaves believed that changing the pattern would protect them from others copying their exact creation as well as breaks in the pattern were essential as they both confused evil spirits thought to travel in linear directions (Dobard & Tobin, 1999) and disorient slave hunters by walking in an unusual manner. Runaway slaves should follow a zigzag trail in order to make their tracks difficult for slave hunters to follow**.**

Figure 6: The drunard's path quilt pattern

Throughout time, quilts have been created as a vehicle for sharing family history, a moral message, or as a reflection of historical and cultural events (Rosa & Orey, 2009). In other words, quilts may be considered as cultural artifacts.

Freedom Quilts as Cultural Artifacts

Cultural artifacts are objects created by the members of cultural groups, which give cultural clues and information about the culture of its creators and users (D'Ambrosio, 1993). In this regard, Torsney and Elsley (1994) stated that quilts are considered as cultural artifacts that have been recognized as one of the most compelling symbols of cultural diversity since they are part of the story, fact, and work of art from the past of any cultural group.

Cultural artifacts have some significance in the daily life of distinct cultural groups because "the language of the shapes, the designs, the myths, and the colors, confirm the community's sense of reality and give it control over its own time and its own space" (Voltz, 1982, p. 45). These artifacts are not made only to "adorn walls, ceilings, baskets, utensils, clothes, jewelry, and even the human body itself (…) but (...) may serve religious purposes as well" (Onstad, Kasanda & Kapenda, p. 40).

In this context, quilts are considered as cultural artifacts because contain both qualitative and quantitative cultural messages that are of high importance to the members of cultural groups (Rosa & Orey, 2009).

Modelling the Shoo Fly Symmetrical Quilt Block

Shoo Fly is one the simplest traditional Symmetrical Freedom Quilts. Although *Shoo Fly* is a basic pattern, its versatility provides quilters with some wonderful opportunities for creative use of colors, fabrics and stitching. *Shoo Fly* may be adapted to a variety of sizes. Blocks often measure 9 x 9, but variations such as 10 x 10 and 12 x 12 may also be used.

An Ethnomodel about Rotation

A rotation turns the figure through an angle about a fixed point called the center. The center of rotation is assumed to be the origin of the x-y coordinate system. A positive angle of rotation turns the figure counterclockwise, and a negative angle of rotation turns the figure in a clockwise direction. A rotation creates a figure that is congruent to the original figure and preserves distance (isometry) and orientation (direct isometry).

Rotation is a transformation that is present in the *Shoo Fly* quilt block because it moves every point 90° counterclockwise around the origin of the x-y coordinate system. The mapping of this rotation is $R_{90^\circ}(x,y)=(-y,x)$. In so doing, the coordinates of point A in its rotation around the x-y coordinate system are:

$$R_{90^\circ}A(9,3)=A'(-3,9)$$
$$R_{90^\circ}A'(-3,9)=A''(-9,-3)$$
$$R_{90^\circ}A''(-9,-3)=A'''(3,-9)$$
$$R_{90^\circ}A'''(3,-9)=(9,3)$$

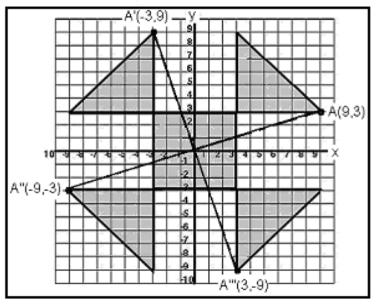


Figure 7: Rotation of point A around the x-y coordinate system

The other mappings for rotation are rotation of 180°, that is, $R_{180^\circ}(x,y)=(-x,-y)$. This is the same as the reflection in the origin of the x-y coordinate system and rotation of 270°, that is, $R_{270^\circ}(x,y)=(y,-x)$.

Some Considerations Regarding the Freedom Quilt Ethnomodel

An ethnomathematical observation sought to understand this mathematical practice for the freedom quilt from the perspective of internal dynamics and relationships within the slave culture. The modeling perspective uses aspects of academic mathematics to translate this phenomenon for understanding by those from different cultural backgrounds to comprehend and explain this mathematical practice as a whole from the point of view of researchers.

Ethnomathematics helps to clarify intrinsic cultural distinctions while modeling seeks objectivity as an outside observer across cultures. Both ethnomathematics and modeling are essential to help us to understand this mathematical practice through ethnomodeling.

Final Considerations

A study of ethnomathematics using modelling represents a powerful means for validating the real life experiences of students and allows them to become familiar with tools that may enable them to become critical participants in society. In this process, the discussion between teachers and students about the efficiency and relevance of mathematics in different contexts should permeate instructional activities. In this context, the role of teachers is to help students to develop a critical view of the world by using mathematics.

Researchers should be encouraged to give the ethnomodeling of non-Western cultures increased opportunities to introduce new views into old themes. In this regard, we would like to broaden the discussion of possibilities and potentialities for the inclusion of ethnomathematics and mathematical modeling perspectives through ethnomodeling that respect the social and cultural diversity of all students with guarantees for the understanding of our differences through dialogue and respect.

References Bibliographics

Ascher, M. & Ascher, R. (1986). Ethnomathematics. *History of Science*, *24*, 125-144.

Barret, C. (1970). *Op-art*. London, England: Studio Vista.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática* [Teaching and learning with mathematical modelling]. São Paulo, SP: Editora Contexto.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática* [Ethnomathematics]. São Paulo, Brazil: Editora Ática.

D'Ambrosio, U (1993). Etnomatemática: Um Programa [Ethnomathematics: A program]. *A Educação Matemática em Revista, 1*(1), 5-11

D'Ambrosio, U. (2000). Etnomatemática e modelagem [Ethnomathematics and modelling]. In. Domite, M. C. (Ed.). *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm-1*. São Paulo: FE-USP, 142.

D'Ambrosio, U. (2002). Prefácio [Preface]. In Bassanezi, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática* [Teaching and learning with mathematical modelling] (pp. 11-12). São Paulo, SP: Editora Contexto.

Dobard, R. G., & Tobin, J. L. (1999). *Hidden in plain view: A secret story of quilts and the underground railroad*. New York, NY and Toronto, Canada: Anchor Books and Random House of Canada Limited.

Freire, Paulo. (1970). *Pedagogy of the oppressed*. New York, NY: Continuum Publishing Company.

Gilbert, J. K., Boulter, C. J., & Elmer, R. (2000). Positioning models in science education and in design and technology education. In J. K. Gilbert & C. J. Boulter (Eds.), *Developing Models in Science Education* (pp. 3-18). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Jablan S. V. (1992). Periodic Antisymmetry Tilings. *Symmetry*: *Culture and Science, 3*(3), 281-291.

Onstad, T. Kasanda, C. D.; & Kapenda, H. M. (2003). Ethnomathematics: a link between an abstract school subject, local culture & everyday experience. In P. Chilisa, L. Mafele & J. Preece (Eds.), *Educational research for sustainable development (*pp. 36-56). Gaborone, Botswana: Lentswe la Lesedi.

Rosa, M.; Orey, D.C. (2003). Vinho e queijo: Etnomatemática e modelagem! [Wine and cheese: Ethnomathematics and modelling!] *BOLEMA*, *16*(20), 1-16.

Rosa, M. (2000). From reality to mathematical modelling: A Proposal for using ethnomathematical knowledge. Unpublished master thesis. California State University, Sacramento.

Rosa, M. & Orey, D. C. (2003). Vinho e queijo: Etnomatemática e modelagem! [Wine and cheese: Ethnomathematics and modelling!] *BOLEMA*, *16*(20), 1-16.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2006). Abordagens atuais do programa etnomatemática: delinenando-se um caminho para a ação pedagógica [Current approaches in ethnomathematics as a program: Delineating a path toward pedagogical action]. *Bolema*, *19*(26), 19-48.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2007). Cultural assertions and challenges towards pedagogical action of an ethnomathematics program. *For the Learning of Mathematics, 27*(1), 10-16.

Rosa, M.; Orey, D. C. (2009). Symmetrical freedom quilts: the ethnomathematics of ways of communication, liberation, and arts. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *2*(2), 52-75.

Rosa, M.; & Orey, D. C. (2010). Ethnomodeling: A pedagogical action for uncovering ethnomathematical practices. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(3), 58-67.

Thompson, R. F. (1983). Flash of the spirit: African and African-American art and philosophy. New York, NY: Random House.

Torsney, C. B.; Elsley, J. (1994). Quilt culture: tracing the pattern. Columbia, MO: University of Missouri Press.

Voltz, M. (1982). The voltaic masks. The Drama Review, *26*(4), 38-45.

Zadef, L. A. (1984). An interview: coping with the imprecision of the real world. *Communications of the ACM*, *27*(4), 203-311.

Discussing Mathematical Modeling Course in a Long Distance Course

Daniel Clark Orey
Universidade Federal de Ouro Preto, Brazil
oreydcead@gmail.com

Abstract: The research related to critical and reflective dimensions of mathematical modeling is seeking identity, definition, and objectives. As well, it is developing a sense of its own nature and potential for research methods used in order to legitimize pedagogical action. It is necessary to discuss the importance of philosophical and theoretical perspectives found in critically reflective dimensions of mathematical modeling. As well, the importance of a virtual learning environment that helps students to develop critical-reflective efficiencies has become increasingly important to enable the exploration of theories related to critical mathematical modeling, distance interactions, and transactional distance by using long-distance technologies. These interactions are triggered by lessons placed on platforms, which are virtual learning environments (VLE) and that enable the use a combination of technology, teaching and the learning of specific content. By developing discussion forums and videoconferences, professors and tutors are able to analyze interactions enabled by these tools, which contributed to the reflective development of the elaboration of mathematical models in the VLE.

Key words: Critical and Reflective Dimensions, Mathematical Modeling, Long Distance Education

Introduction

In recent years, Brazil has experienced an accelerated social and economic growth with many accompanying social changes. The country is the 8th largest economy in the world, sponsored the 2014 World Cup and it is sponsoring the Olympics in Rio de Janeiro in 2016. Brazil has undergone a process of modernization in relation to infrastructure, including that of health and education.

Nationally, a process of developing teacher competencies and the training of new teachers is making a difference in school and community quality. The most expedient, economical, indeed reasonable method to do this is by integrating the long distance education and accompanying multimedia technologies (Alves, 2011). To increase access to a wider audience, the use of Moodle as the platform and freeware is used; which has enabled the *Universidade Aberta do Brasil* (UAB) system to the democratize and increase access to higher education.

Because of the social changes resulting from contemporary scientific and technological development in Brazil, the study of diverse curricular and methodological proposals has become vital. The need to update and upgrade professional development for all teachers has raised discussions in relation to new institutional methods and resources in order to meet the demand for specialized teacher education programs; this is even more relevant in the context of mathematics education. Long distance learning in Brazil offers teacher education programs to prospective teachers in places and in diverse contexts that have historically suffered limited access to higher education.

In a long distance modality, instruction is performed by using a variety of technologies as well as special organizational and administrative arrangements (Moore & Kearsley, 2007). Several actions conducted by the Brazilian Federal Government were developed for teaching and learning in long distance modalities. The Ministry of Education's plan has been to invest in distance learning and create a new digital era for informational and communicational technologies in order to support teaching practices, initial and continued education, and professional development (Brasil, 2005).

According to Brazilian law, *Long Distance Education* is characterized as “an educational modality in which didactical and pedagogical mediation is facilitated by the teaching and learning processes that occur with the use of a variety of informational and communicational technologies”. In this process, students and teachers develop educational activities in diverse and distinct localities and periods (Brasil, 2005). It is necessary to work beyond the concepts of this law in order to understand the curricular, didactical, and pedagogical action plan for this educational modality, which has direct influence on the quality of education offered to diverse students and communities throughout Brazil. In 2003, there were 50,000 Brazilian students enrolled in 52 long distance courses and, one decade later, in 2013, there were 1.2 million students enrolled in 1.258 courses in Brazil.

It is important to emphasize the relevance in the preparation of long distance courses where it is necessary to know the learning needs of a very large number of diverse groups of students and their unique conditions in which they live. However, it is not enough to merely enhance access to this kind of education without changing and adapting processes and methods of teaching and learning regarding available technological resources. Therefore, in order to establish processes and methods for developing long distance learning mathematics courses, it is more than necessary to implement courses such as modeling in this educational modality.

It has become necessary to establish a system of long distance learning processes and methods based on existing theories regarding these research fields. In so doing the authors have explored and applied this in a *Seminar in Mathematical Modeling* in a long distance mathematics undergraduate course in Brazil.

This course is offered entirely in a distance environment, and is mediated through technological tools on the internet. The *Centro de Educação Aberta e a Distância* (CEAD) at the *Universidade Federal de Ouro Preto* (UFOP) has come to integrate instruction, technology, content and pedagogical methods in order to reach a diversity of students. Long distance students represent approximately, 21,4% of the 14,000 UFOP students in three states: Bahia, Minas Gerais, and São Paulo.

Figure 1: States of São Paulo, Minas Gerais, and Bahia in Brazil

At the time of this writing, in just this university alone, there are approximately 3000 students enrolled in 4 (four) undergraduate majors such as *Mathematics*, *Geography*, *Pedagogy*, and *Public Administration*. These students are enrolled in 5 (five) Graduate Courses such as *Sustainable Schools*, *Pedagogical Coordination*, *School Management*, *Media & Education*, and *Pedagogical Practices*.

Long distance students access courseware and instruction through 35 *polos*, which are long distance learning centers equipped with computer labs, internet, libraries, and tutorial assistance. In many localities the UAB educational centers (polos) has become the lone access to the Internet and library resources. UFOP is one of the oldest public institutions of higher education in Brazil and provides one of the largest distance education programs in the country.

Long Distance Learning

Worldwide, distance education has grown quickly. Beginning initially with the use of mail-order courses, it transitioned quickly to include radio and television. Once associated with mailed printed materials, it has now facilitated the dissemination and democratization of access and has now moved to incorporate the internet and *MOOCS*. It has become a key element in the democratization for many, many countries and now allows access to education and professional development opportunities once only given to elite members of society.

In Brazil, as mentioned earlier, it has allowed a portion of the population that traditionally has had difficulty in accessing public education, due to a variety of geographical or economic reasons, to advance. The basic idea of distance education is very simple: students and teachers are in different locations during all or most of the time in which they either learn or teach (Moore & Kearsley, 2007).

Although this type of education might, in some ways, hinder traditional teacher-student relationships, it also allows students who had never had access to professors or teachers to gain contact. Distance education technologies answer a critical need for those who deserve initial and/or continuing education opportunities. Distance education allows for educators and learners to break barriers related to time and space, and allows for interactivity and information dissemination. Distance education environments are open systems that are composed of "flexible mechanisms for participation and decentralization, with control rules discussed by the community and decisions taken by interdisciplinary groups" (Moraes, 1997, p. 68).

This approach also allows interactions between teachers who prepare instructional materials and strategies, with tutors, who, in the case of Brazil, provide hands-on face-to-face assistance at the polos. In Brazil, tutors are tasked give encouragement, to assist students in their activities and tasks, guide them in organization, helping them learn to use search tools, libraries, and offer help in basic skills (most notably in writing and mathematics).

These interactions are triggered by lessons in *Virtual Learning Environments* (VLE) and enables the teaching and learning of specific content to a wider audience. These features have enabled the development of a large variety of educational methodologies that utilize web interaction channels and aim to provide needed support in the achievement of VLE curricular activities.

The Process of Critical and Reflective Dimensions of Mathematical Modeling

According to the Brazilian National Curriculum for Mathematics (Brasil, 1998), students need to develop their ability to solve problems, make decisions, work collaboratively, and to communicate effectively using mathematics. This approach helps our students to face challenges posed by society by turning them into flexible, adaptive, reflective, critical, and creative citizens.

This perspective is related to the sociocultural dimensions of mathematics, which are closely associated with ethnomathematics (D'Ambrosio, 1990). This aspect emphasizes the role of mathematics in society by highlighting the importance of analyzing the critical and reflective dimensions of mathematical models in order to help individuals to solve everyday challenges present in the contemporary society (Rosa & Orey, 2013).

This context allows mathematical modeling to provide both real and concrete opportunities for students to discuss the role of mathematics as well as the nature of mathematical models (Shiraman & Kaiser, 2006). It also could be understood as a language to study, understand, and comprehend problems faced by a specific community (Bassanezzi, 2002). In this process, the purpose of mathematical modeling is to develop students' critical and reflective skills that enable them to analyze and interpret data, to formulate and test hypotheses, and to develop and verify the effectiveness of the mathematical models. In so doing, the reflection on reality becomes a transformative action, which seeks to reduce the degree of complexity of reality through the choice of systems that it represents. This approach originates the critical and reflective mathematical modeling cycle, which allow students to act in order to transform society (Rosa & Orey, 2015).

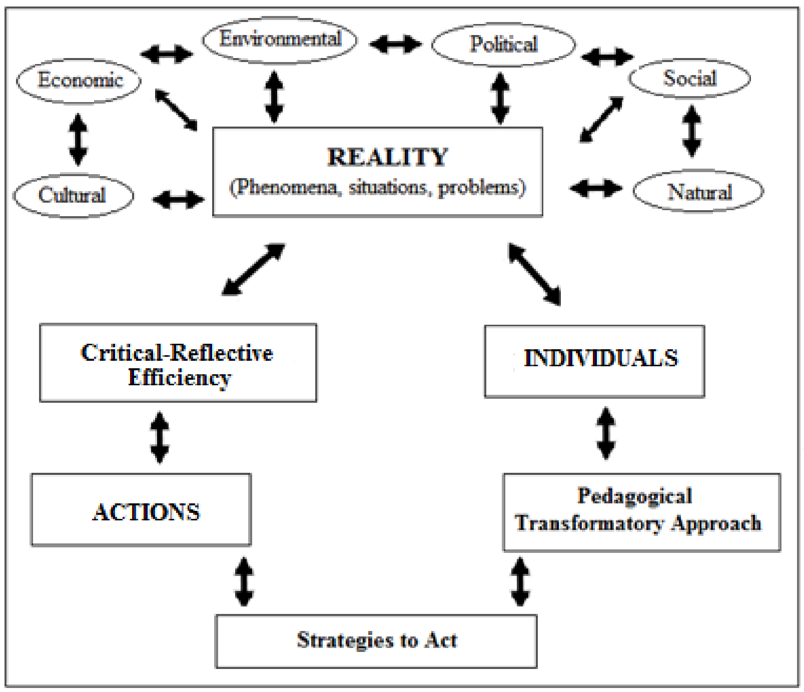


Figure 2: Critical and Reflective mathematical modeling cycle

Systems taken from a students' reality allow them to learn to make representations of this reality by developing strategies that enable them to explain, understand, manage, analyze, and reflect on all parts of this system. This process aims to optimize pedagogical conditions for teaching so that students are better able to understand a particular phenomenon in order to act effectively transform it according to the needs the community. The application of critically and reflective dimensions of mathematical modeling makes mathematics a dynamic and humanized subject. This process fosters abstraction, the creation of new mathematical tools, and the formulation of new concepts and theories.

Thus, an effective way to introduce students to mathematical modeling in order to lead them towards the understanding of its critical and reflective dimensions is to expose them to a wide variety of questions, problems and themes. As part of this process, questionings about the themes used to explain or make predictions about phenomena under study through the elaboration of mathematical models that represent these situations (Rosa & Orey, 2013).

Because models are understood as approximations of reality, the elaboration of models does not mean that it develops a set of variables that offer qualitative representations or quantitative analysis of the system. In this direction, to model is a process that checks whether the parameters are critically selected for the solution of models in accordance to the interrelationship of selected variables from holistic contexts of reality. It is not possible to explain, know, understand, manage, and cope with reality outside the holistic contexts (D'Ambrosio, 1990).

This aspect of traditional learning prevents students' access to creativity, conceptual elaboration, and the development logical, reflective, and critical thinking. According to this perspective, any dimension of mathematical modeling facilitates the development of competencies, skills, and abilities that are necessary, indeed vital for students to play a transformative role in society (Rosa & Orey, 2007).

Therefore, critical and reflective mathematical modeling may be considered a learning environment in which students inquire and investigate problems that come from reality. In this environment, students work with real problems and use mathematics as a language for understanding, simplifying, exploring, and solving situations in an interdisciplinary fashion (Bassanezi, 2002). In other words, critical mathematical modeling is a method using applied mathematics that was transposed to the field of teaching and learning as one of the ways to use and connect reality in the mathematics curriculum (Barbosa, 2006).

In the context of critical and reflective mathematical modeling processes, students communicate by using hermeneutics (written, verbal, and non-verbal communication) to verify if social actions and norms are modified by communication, which can be developed through the virtual learning environments. It is in this kind of knowledge that meaning and interpretation of communicative patterns interact to construct and elaborate the community understanding that serves to outline the legal agreement for the social performance. In this learning environment, students control and manipulate technological tool, which is gained through empirical investigations and governed by technical rules in the VLE.

In this mathematical modeling process, students apply this instrumental action when they observe the attributes of specific phenomena, verify if a specific outcome can be produced and reproduced, and know how to use rules to select different and efficient variables to manipulate and elaborate mathematical models.

Critical Mathematical Modeling Process in the Virtual Learning Environments

In literacy and language learning environments, learners very quickly learn to communicate through oral and or written forms of language. Early on, learners see the importance of written narratives, prose, and poetry that allow them to quickly see the beauty and power of language, and to incorporate that beauty into their lives. Contrast this to the learning of mathematics, where in mathematics classes, learners are often subjected to endless rote memorization of algorithms and grammar and pages of exercises, often without context to the learners' lives, experiences, values or communities. Because of the race to cover material for testing, learners are rarely given the opportunity to see direct connections to what they are learning and practice how they actually use mathematics in their own contexts and reality.

Mathematics is often referred to as a language. However, mathematics has become a language that is taught without giving leaners the opportunity to really communicate its use! That is, learners spend years learning the grammar, but do not write even rudimentary forms of mathematical prose or poetry (models). To this author it is truly a sad state of affairs. It is not until learners reach advanced mathematics that the few that survive this cruel process, are afforded bot the luxury and opportunity to engage in communicating and creating new ideas using the beauty and power found in the language of mathematics.

For this writer, most people come to detest mathematics because to them it is stuck in endless disconnected and truly boring rules and drills in the use of mechanical mathematical grammar without them ever being able to write or communicate in this beautiful, elegant, synthetic but powerful language (Rosa, 2010).

To those of us who have been privileged to understand the beauty and elegance of mathematics, this is deeply sad. In many places in Brazil, a strong culture of inquiry has developed in the mathematics education community by using critical mathematical modeling, and is influenced by the philosophies and work of both Paulo Freire (2005) and Ubiratan D'Ambrosio (1986). In preparation for rigorous university entry exams, Brazilian students are encouraged to reflect upon, engage in, debate, and dialogue mathematically to resolve problems they find in their own contexts, neighborhoods and environments. These opportunities often use modeling and ethnomathematics and become the first opportunity that mathematics learners have to write a mathematical poem (Rosa & Orey, 2011).

For example, data gleaned from a study about transportation conducted by Orey and Rosa (2014) in 2013 in a course offered to mathematics majors in mathematical modeling showed that students acquired information through interviews with citizens and public transport users in their respective towns. In this regard, questions related to the situations presented in the interviews served as starting point to the elaboration of mathematical models.

In June 2013, early in a Seminar on Mathematical Modeling, the country erupted in mass demonstrations against the growing problem of corruption and over spending in relation to preparation for the 2014 World Cup tournament. Just in our small college town of Ouro Preto, 10,000 people marched from the university campus to the main square of the city. What sparked this national mass movement was a sudden spike in transportation fares in urban transportation systems. For those who do not use mass transit something as minor (20-cent rise) created a very difficult problem for who live in the large metropolis of São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte, Salvador, Fortaleza, and Brasília.

Some long daily commutes became R$50 (about U$14) roundtrips five or six times a week and for many finally became untenable. Normally a week or so is devoted to bringing consensus with students and generating a number of themes, and to make use of this particular historic circumstance the instructor consulted with the tutors and students and together we agreed that transportation would be the theme. Eight polos were participating in the seminar. The instructor asked the tutors at each polo to organize the students into smaller working groups of 4 or 5 students. Over a period of 5 weeks, students were led through the steps, and groups were required to post evidence of their work on line.

Synchronous virtual classes were held. Critical and reflective mathematical modeling lessons were transmitted through video conference sessions. Lessons were organized and activities and projects were posted on the Moodle Platform. Discussion forums were also developed in order to prepare students for the modeling process. By the end of a 16-week course, there were 4 synchronous/virtual meetings in which the development of the mathematical models of each group of students was discussed. The course calendar that contained the description of the course, the terms of the proposed activities, and the dates and times of synchronous was published in the VLE. Approximately, every two weeks there were activities and questions to be worked on by the students and sent to the tutors and the professor through specific links in the Moodle Platform.

Pedagogical and didactic strategies were used to promote the interactions with the students and professors and tutors in order to contribute to the process of teaching and learning critical and reflective mathematical modeling. The process becomes more like coaching, than traditional teaching. The resources used for this purpose were the discussion forums and videoconference. Through these tools, it was possible to promote dialogues between all participants in our VLE. In addition to promoting interactions, the professor took care in the preparation of teaching materials, such as the structure and policies of the activities available on the VLE. Due to the many perceived needs of the students during this course, the professor created supplemental materials and short video-lessons in order to lead students gradually into the modeling process, so they were able to improve their performance in carrying out the modeling proposed activities.

It is important to highlight here the design that was applied in the use of digital communication technologies in the development of this course. These technologies included:

a) Videoconferences that enabled the integration of students, tutors and the professor for socialization and clarification of questionings; which allowed for a collaborative environment for sharing experiences on the proposed themes and promoted students attendance in the polos to develop their modeling projects. The use of videoconferences proved to be effective because it has sufficient teaching resources for conducting synchronous classes. In this perspective, knowledge is translated in a dialogical way so these technological tools can be used as instruments to help students to critically think about problems they face daily.

b) The VLE allowed for continuous updates and needed alterations in the course content; the development of discussion forums concerning teaching practices in the critical mathematical modeling process and the elaboration of questions about the pedagogical and technical aspects of this process. VLE also allowed the integration of students, tutors, and the professor to deliver comments, messages and encouragement; the conduction of pedagogical monitoring such as sending messages to all participants and participation in the discussion forums; and technical support such students and tutors access reports in the VLE. In this virtual environment, the learning occurred through socialization because knowledge was better constructed when the students worked in groups and act cooperatively in order to support and encourage each other.

Accessing Virtual Learning Environments

In the modeling process, the social environment also comes to influence learning and cognition in ways that are related to cultural context. Collaborative work via the Moodle Platform between groups of teachers, tutors, and students makes learning more effective as it generates levels of mathematical thinking by using socially and culturally relevant activities. Thus, cognition is the result of cultural artifacts in these interactions and allows for the use of *dialogical constructivism* because the knowledge source is based on the social interactions between students and teachers (Rosa & Orey, 2007).

A critical and reflective mathematical modeling environment provides concrete opportunities for students to discuss the role of mathematics as well as the nature of their models as they study systems taken from reality by using technological tools in the VLE. In accordance to this point of view, critical mathematical modeling may be understood as a language to study, understand, and comprehend problems faced community (Bassanezi, 2002). Once again, to repeat, mathematical modeling is used to analyze, simplify, and solve daily phenomena in order to predict results or modify the characteristics of these phenomena.

In this process, the purpose of critical mathematical modeling becomes the ability to develop critical skills that enable teachers and students to analyze and interpret data, to formulate and test hypotheses, and to develop and verify the effectiveness of mathematical models. In so doing, the reflections become transforming actions, seeking to reduce the degree of complexity through the choice of a system that can represent it (Rosa & Orey, 2013).

By developing strategies through a variety of technological tools, students both practice and learn to explain, understand, manage, analyze, and reflect on all parts of this system based on data. The process optimizes pedagogical conditions for teaching and learning so that students more clearly understand events around them in order to act effectively and transform phenomenon according to the needs the community.

In order to lead students towards the understanding of critical and reflective dimensions, it is necessary to expose them to a wide variety of problems or themes. As part of this process, questionings are used to explain or make predictions about the phenomena under study through the elaboration of models that represent these situations.

Final Considerations

Fundamental characteristics of teaching towards critical and reflective dimensions of mathematical modeling is the emphasis on the critical analysis of students in problems faced by a member of contemporary society. Thus, the critical perspective of students in relation to an ongoing social conditions that affect their own experiences can help them to identify common problems and collectively develop strategies to solve them (D'Ambrosio, 1990).

This paradigm incorporates a type of transformatory learning that creates conditions that help learners to challenge their worldviews and values. They are then better able to reflect critically on these experiences in order to develop data-based rational discourse by creating meanings necessary for structural transformation of society (Freire, 2000). This presents a rational transformation because it involves critical analysis of sociocultural phenomena through the elaboration of mathematical models. Mathematical modeling is therefore a teaching methodology that focuses on the development of critical-reflective efficiencies and engages students in contextualized teaching-learning processes that allowing them to get deeply and actively involved in the constructions of social significance of the world (Rosa & Orey, 2015). In short, they learn to move away from high emotional arguments, and focus on the data.

The act of creating a mathematical poem, allows for critical and reflective dimensions of mathematical modeling that are based on the comprehension and understanding of reality. When we borrow systems from reality, students begin to study them symbolically, systematically, analytically and critically. In this regard, starting from problem situations, modelers learn to make hypotheses, test them, correct them, make transfers, generalize, analyze, complete and make decisions about the object under study based less on emotion and more on data. Thus, critically reflecting about reality using mathematics becomes a transformational action that seeks to reduce complexity by allowing students to explain it, understand it, manage it and find solutions to problems that arise therein.

The study of new educational methodological proposals becomes relevant because it originates with ideas regarding social changes resulting from ongoing continuous contemporary scientific and technological developments. In order to enable teaching methods using structured learning materials and existing technological resources, it was developed the long distance learning, which refers to planned learning that normally occurs outside of school (Moore & Kearsley, 2007). On the other hand, in the last three decades, critical mathematical modeling as a teaching and learning methodology has been one of the central themes in mathematics education in Brazil and has come to offer a way to rebuild or restore what has become for many, a fragmented and meaningless mathematical knowledge. This approach appears to encourage them to develop more informed and research-based opinions in their real life.

And so it is, that we have come to consider mathematical modeling as a teaching methodology that focuses on the development of a critical and reflective efficacy that engages diverse groups of students in a contextualized teaching-learning process and that allows them to become involved in the construction of solutions of social significance (Rosa & Orey, 2007). This critical dimension of mathematical modeling is based on the comprehension and understanding of reality, in which students learn to reflect, analyze and take action on their own reality.

When we explore examples and problems from their reality, students begin to study the symbolic, systematic, analytical, and critically contexts to their work by using technological tools provided in a virtual learning environment. Because technological tools offered via the platforms are simple and functional, long distance learning modalities contribute to and greatly assist students to overcome difficulties regarding the adoption of critical mathematical modeling strategies. With discussion forums and videoconferences, professors and tutors are able to and can better analyze interactions enabled by these tools, which contributed to development of the elaboration of mathematical models in the virtual learning environment.

References Bibliographics

Alves, L. (2011). Educação a distância: conceitos e história no Brasil e no mundo. *Revista Brasileira de Aprendizagem Aberta e a Distância - RBAAD*, 10, 84-92.

Barbosa, J. (2006) Mathematical modeling in classroom: a sociocritical and discursive perspective. *ZDM, 38*(3), 293-301.

Bassanezi, R. (2002). Ensino-aprendizagem com modelagem matemática [Teaching and learning with mathematical modeling]. São Paulo, SP: Editora Contexto.

Brasil. (1998). Parâmetros curriculares nacionais (PCN): matemática [National curricular parameters: mathematics]. Brasília, DF: MEC/SEF.

Brasil. (2005). Sistema universidade aberta do Brasil – UAB [Brazilian Open University System]. Decreto nº 5.800/2006. Brasília, DF: Casa Civil.

D'Ambrosio, U. (1986). Da realidade a ação: reflexões sobre educação e matemática [From reality to action: reflections on education and mathematics]. Campinas, SP: Unicamp; São Paulo: SUMMUS.

D'Ambrosio, U. (1990). Etnomatemática [Ethnomathematics]. São Paulo, SP: Editora Ática.

Freire, P. (2000). Pedagogy of the oppressed. New York, NY: Continuum.

Freire, P. (2005). Pedagogia da autonomia: saberes necessários à pratica educativa [Pedagogy of autonomy: necessary knowledge to educational practice]. São Paulo: Paz e Terra.

Moore, M.; Kearsley, G. (2007). Handbook of distance education. Mahwah, NJ: Lawrence Erbaun Associates.

Moraes, M. (1997). *O* paradigma educacional emergente [The emergent educational paradigm]. Campinas, SP: Papirus.

Rosa, M.; Orey, D. (2007). A dimensão crítica da modelagem matemática: ensinando para a eficiência sociocrítica [The critical dimension of mathematical modeling: teaching to sociocritical efficiency]. *Horizontes*, *25*(2), 197-206.

Rosa, M.; Orey, D. (2011). Ethnomathematics: the cultural aspects of mathematics. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *4*(2), 32-54.

Rosa, M.; Orey, D. (2013). The mathematics of the curves on the wall of the colegio Arquidiocesano and its mathematical models: a case for ethnomodeling. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, *1*(8), 42-62.

Rosa, M; Orey, D. (2015). Social-critical dimension of mathematical modelling. In Gloria Ann Stillman, Werner Blum, Maria Salett Biembengut (Orgs.). *Mathematical modelling in education research and practice*: cultural, social, and cognitive influences. New York, NY: Springer, 85-395.

El *Scrapbook* como herramienta didáctica en la enseñanza de la Matemática en niveles de Secundaria

M.Sc. María Fernanda Víquez Ortiz
Ministerio de Educación Pública
mfdaviquez@gmail.com

M.Sc. Jorge Arroyo Hernández
Universidad Nacional
jorge.arroyo.hernández@una.cr

M.Sc. Evelyn Delgado Carvajal
Universidad Técnica Nacional
evelyndelgado27@gmail.com

Resumen: Los nuevos Programas de Estudio exigen el empleo de técnicas, estrategias y métodos diversos que despierten el interés y la creatividad del estudiante así como, facilitarle el logro de las habilidades propuestas y con ello la interiorización de conceptos para la aplicación inmediata. Por ello, surge la opción de implementar el Scrapbook como herramienta didáctica para el desarrollo de habilidades y la interiorización de conocimientos. En este documento, se presentan actividades para ser puestas en práctica en el aula, con su respectiva guía didáctica, para el estudio de contenidos, alcance de habilidades y competencias que favorezcan el proceso de enseñanza y por tanto, el aprendizaje del estudiante.

Palabras claves: Scrapbook, enseñanza de la matemática, técnicas de enseñanza

El Scrapbook

El Scrapbook es una técnica manual que nació para preservar recuerdos mediante la creación de álbumes. Según Palacios (2015) es el arte de armar álbumes de fotos decorados, empleando diversas técnicas, como costura, decoupage, pintura, origami, embozados y troquelados. Sin embargo, su gran auge comercial y su apreciación entre las personas por constituirse un trabajo artesanal, la ha vinculado con tarjetas de felicitación, invitaciones, colillas, cajas y bolsas de regalo, decoración de libretas, cuadernos, entre otros. Para Alonso (2013), el Scrapbook es una técnica que consiste en personalizar fotografías, narrar una historia empleando accesorios tales como cartulinas, papales decorados, recortes, cintas, remaches y botones.

El Scrapbook también conocido como Scrapbooking o scrap emplea diversos materiales, algunos muy particulares y otros que van desde el reuso o reciclaje, ello según la imaginación de la persona que crea. Para Palacios (2015), existen materiales básicos como papeles, cartulinas decoradas, adhesivos (gomas líquidas, de barra, cintas), tijeras, guillotinas y huesos. Sin embargo, existen infinidad de materiales y herramientas que se han ido lanzando al mercado para facilitar el trabajo, como perforadores, máquinas de corte y embozado, secadoras, polvos embosadores, tintas, washi tape, encuadernadoras, sellos, lapiceros de gel, tablas de corte y muchas otras.

La matemática en el Scrapbook

El Scrapbook requiere de conversiones de medidas (pulgadas a centímetros), uso de fracciones, creación de figuras semejantes, entre muchos otros. De esta manera, se puede afirmar que el Scrapbook puede ser empleado como técnica para la enseñanza de la Matemática, ya que promueve que el estudiante sea generador de su propio conocimiento y se constituya como promotor y agente activo en todo momento. Asimismo, se puede afirmar que esta técnica le proporciona al estudiante condiciones oportunas para que desarrolle capacidades y alcance con éxito, el logro de los objetivos.
Por otra parte, esta técnica didáctica permite implementar actividades que enlazan lo concreto con lo abstracto y de esta manera la construcción del conocimiento, uno de los fines de los Programas de Estudio actuales, donde además se menciona que se deben adoptar diferentes ejes disciplinares, entre ellos: la contextualización activa como componente pedagógico especial y la potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas (MEP, 2012). En esta línea, Muñoz (2013) asegura que el docente debe estar en la capacidad de facilitar la comprensión de los contenidos, esto requiere partir de lo concreto hacia lo abstracto, proporcionando situaciones reales, materiales manipulativos para que experimenten, indaguen, conjeturen y argumenten, lo que se puede alcanzar a través del Scrapbook.

El Scrapbook requiere la aplicación en todo momento de la Matemática, por ejemplo:

- De *Números* para crear una tarjeta, para cortar sus piezas de manera que éstas se ajusten a los tamaños, realizar conversiones de centímetros a pulgadas, de decímetros a centímetros o según las medidas proporcionadas en los tutoriales.
- De la *Geometría*, al crear piezas semejantes se requiere dicha noción, se aborda el concepto de homotecias con razones de uno o distintas. Se contemplan otros conceptos geométricos al doblar un papel, especificar su largo y ancho, diagonal, relaciones entre radio y lado o lado y apotema, entre otros. Al estudiar la geometría del espacio, permite identificar diferentes sólidos y sus elementos: caras laterales y basales, aristas, apotemas, alturas, vértices y otros, además de estudiar sus áreas.
- De *Relaciones y Álgebra*, al constituir modelos matemáticos para calcular áreas, para establecer relaciones entre altura, ancho y largo.
- De *Estadística y Probabilidad*, al proporcionar la posibilidad de definir el concepto de frecuencia, moda, espacio muestral, cálculo de probabilidad simple, eventos mutuamente excluyentes, no excluyentes, eventos probables, seguros e imposibles.

Conclusiones

El Scrapbook es una técnica útil en el proceso de enseñanza de la Matemática, puesto que le permite al estudiante vincular los conceptos abstractos con material concreto o recursos tangibles: al manipular cartulina, medir, relacionar medidas y llegar a abstracciones, desarrollar habilidades cognitivas de forma dinámica, trabajar y mejorar la motora fina, desarrollar la percepción espacial así como la precisión manual y el trabajo colaborativo, desarrollar la visualización, la manipulación y la descripción de figuras geométricas, asimilar de diferentes conceptos estadísticos, la noción de probabilidad y relacionar las figuras concretas con el álgebra.

Para el docente, el Scrapbook resulta una herramienta valiosa al proporcionarle una manera de hacer de sus clases espacios más dinámicos y no rutinarios y motivar al estudiante a ser creativo, desarrollar sus propios modelos de manera que vincule la Matemática con expresiones artísticas.

En síntesis, las actividades empleando el Scrapbook despiertan la criticidad del estudiante, de forma creativa, para posteriormente representar los conceptos hasta alcanzar un razonamiento lógico matemático que sirva de argumento y sustento en la toma de decisiones.

Por tanto, la finalidad de este trabajo es invitar a los docentes a aplicar y plantear actividades apoyadas en el Scrapbook en concordancia con los Programas de Estudio actuales para que favorezcan el aprendizaje de los jóvenes y adultos en sus aulas.

Referencias bibliográficas

Alonso, J. (2013). Misión: Scrapbooking (libro de recortes). Aguilar, España. Recuperado de http://www.librosaguilar.com/uploads/ficheros/libro/primeras-paginas/201304/primeras-paginas-mision-scrapbooking-libro-recortes.pdf

Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de Estudio: Educación General Básica y Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica.

Muñoz, C. (2013). Los materiales en el aprendizaje de las matemáticas. Universidad de la Rioja. Recuperado de http://biblioteca.unirioja.es/tfe_e/TFE000754.pdf

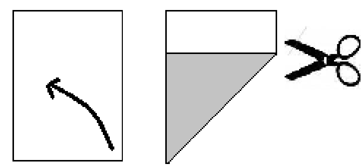
Palacios, C. (2015). ¿Qué es el Scrapbooking? *Revista Ohlalá*. Recuperado de http://www.revistaohlala.com/1621070-que-es-el-scrapbooking

ACTIVIDAD #1. Del corazón a la flecha

Polígonos	**1. Calcular perímetros y áreas de polígonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares** **2. Resolver problemas que involucren polígonos y sus diversos elementos**

GUIA PARA EL ESTUDIANTE

1. Tome la lámina rectangular, dóblela llevando la punta derecha inferior al borde contrario de la hoja, tal y como muestra la figura. Corte el sobrante



2. Al abrirlo, ¿Qué figura geométrica obtiene?______________

3. ¿Cómo son sus lados? _________________

4. ¿Cómo son sus ángulos?_________________

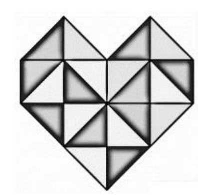
5. El doblez que tiene su figura recibe el nombre de DIAGONAL. Córtelo sobre esta diagonal. ¿Qué figuras obtuvo?__________________

6. ¿Cómo se clasifica según sus ángulos?________________

7. Mida sus catetos y anote sus medidas: ________________

8. Determine la medida de su hipotenusa y anótela:________________

9. Formaremos un corazón como el adjunto, en el piso. Espere su turno, para ir a colocarlo.

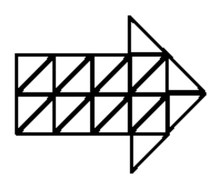


10. Sabiendo cuanto miden sus catetos, ¿Cuál es el área de cada triangulo?_______________

11. ¿Cuál es el área de todo el corazón?__________________________

12. ¿Cuál es el perímetro del corazón?__________________________

13. Usando la misma cantidad de piezas, construya la siguiente flecha



14. ¿Cuál es el área de toda la flecha?__________________________

15. ¿Cuál es el perímetro de la flecha?__________________________

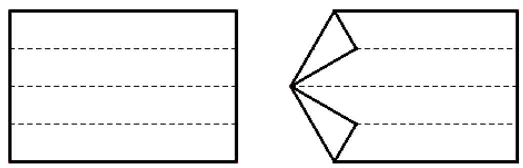
16. ¿Cuál varió, el perímetro o el área? ¿por qué?____

ACTIVIDAD #2. La tarjeta hexagonal

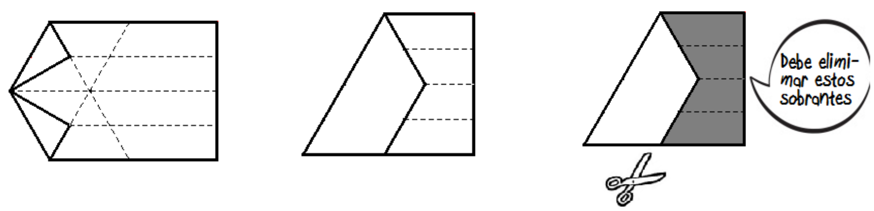
Polígonos	1. **Determinar las medidas de los ángulos internos y externos de polígonos en diferentes contextos** 2. **Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos**

Siga las siguientes instrucciones, guíese con las ilustraciones:

1. Tome el rectángulo de papel, dóblelo (a lo largo) a la mitad y nuevamente a la mitad (es decir, en 4 secciones congruente), posteriormente realice dos pestañas tal y como se observa en la figura



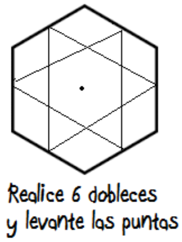
2. Luego doble nuevamente, suponiendo la prolongación de una de la pestañas, como se observa a continuación.



3. Corte el excedente.

- ¿Qué figura obtuvo?_____________________
- ¿Cómo son sus lados entre sí?_________________________
- ¿Cuánto medirá su ángulo central? __________________ ¿Cómo lo puede justificar?________________
- ¿Cómo son sus ángulos internos entre sí?____________________ Realice los dobleces necesarios para determinar la medida de su ángulo interno. ¿Cuál es la medida de este?_________________
- Doble ese polígono formando 6 triángulos. ¿Cómo se clasifican esos triángulos?_____________
- Sabiendo que el hexágono regular está conformado por 6 triángulos equiláteros ¿Cómo determina usted el área de cada uno de esos triángulos?_____________________
- ¿Cuál es el área de TODO el hexágono? ¿Cuál es su fórmula?______________________________
- Observe el radio, el lado y la apotema. ¿Qué relación existe entre ellos?_______________

4. Construyamos la tarjeta



Luego, empuje las puntas formando 6 “picos”.

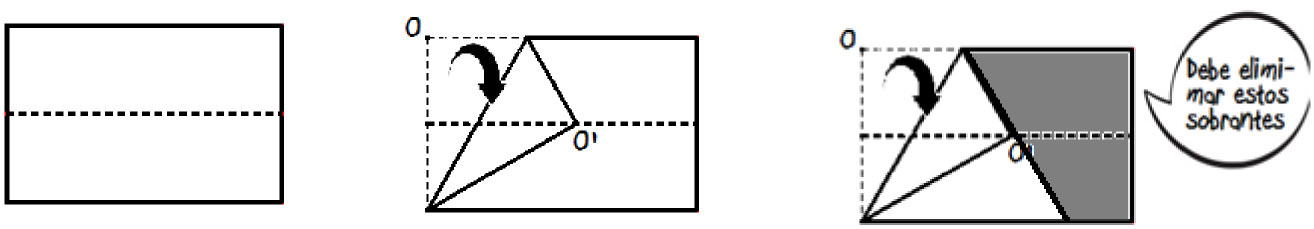
Compare el área del primer hexágono construido con la parte de atrás de su tarjeta

ACTIVIDAD #3. La cajita de regalo: de un triángulo a una pirámide

Visualización espacial	**1. Identificar la base, las caras laterales, la altura, las apotemas y el ápice o cúspide de una pirámide.** **2. Identificar las caras laterales, las bases y la altura de un prisma recto**

Siga las siguientes instrucciones, guíese con las ilustraciones**:**

1. Doble a la mitad (a lo largo del rectángulo), luego ubique el O sobre la paralela media (O´)



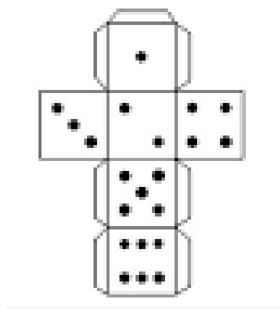
2. ¿Qué nombre recibe la figura resultante? ___________________________________
3. ¿Cómo son sus lados?____
4. ¿Cómo son sus ángulos?__________________________ ¿Qué medida tendrán?______
5. Formemos 4 triángulos congruentes y a partir de ellos, construyamos una cajita de regalo.
6. ¿Qué cuerpo geométrico se formó?________________________
7. Se llama APOTEMA DE LA PIRAMIDE a la altura de cada uno de esos triángulos, coloque Washi tape a uno de ellos
8. Mantenga la cajita cerrada. Cada “filito de la cajita” recibe el nombre de ARISTA. ¿Cuántas aristas tiene?_____________
9. Cada triángulo pequeño resultante se llama CARA. ¿Cuántas caras tiene?________________
10. Decore cada cara LATERAL. ¿Cuántas caras laterales tiene?________
11. Deje sin decorar las caras basales. ¿Cuántas caras basales tiene?________
12. ¿Qué cree usted que es la Cúspide o ápice de la pirámide?______________________________
13. ¿Es la apotema de la pirámide lo mismo que la altura de ella?___________________________

14. Defina apotema de la pirámide:____
15. Defina altura de la pirámide:____

ACTIVIDAD #4. Un dado

Visualización espacial	**1. Reconocer en figuras tridimensionales diversos elementos como caras, aristas y vértices** **2. Establecer relaciones entre los elementos de figuras tridimensionales: vértices, caras y aristas, rectas y segmentos paralelos, perpendiculares, planos paralelos y perpendiculares**

El siguiente dibujo corresponde a un cubo sin armar



Conteste lo que se le solicita

1. ¿Cuántos vértices tiene el dado?_____________
2. ¿Cuántas aristas tiene el dado?______________
3. ¿Cuántas caras tiene el dado?_______________
4. ¿Cuántas arista coinciden en un mismo vértice?________________
5. ¿Comparten la cara 1 y 6 una arista?___________
6. ¿Comparten la cara 3 y 4 una arista?___________
7. ¿El plano del 1 y del 5 son paralelos?__________
8. ¿El plano del 3 y del 5 son perpendiculares?_________________
9. ¿El plano del 1 y del 6 son perpendiculares?_________________

- Recorte el cubo que se le proporciona en la cartulina
- Numérelo tal y como se observa en la imagen.
- Ármelo y péguelo
- Corrobore sus respuestas

ACTIVIDAD #5. Vistiendo personajes

Espacio Muestral **Probabilidad**	**1. Identificar el espacio muestral y sus puntos muestrales como resultados simples en una situación o experimento aleatorio de representarlo por medio de numeración de elementos o de diagramas.** **2. Determinar la probabilidad de un evento como la razón entre el número de resultados favorables entre el número total de resultados.**

1. Vista la muñeca que usted tiene en su separador de libros, empleando la ropa que se le proporciona.
2. No mire lo que hizo su compañero de al lado, anote las posibles opciones de vestir la muñeca
   ____
   ____
   ____
3. ¿Cuántos pantalones y enaguas hay?______
4. ¿Cuántas blusas hay?_________
5. ¿Cuántas posibilidades hay de vestir a la muñeca?___________
6. ¿Existe una manera o fórmula de saber cuántas veces se pueden combinar las prendas?_______

¿Cuál?____

Las combinaciones posibles se llaman ESPACIO MUESTRAL.

La <u>probabilidad simple</u> es la razón entre el número de resultados favorables por el número total de resultados.

7. ¿Qué probabilidad hay de elegir un pantalón café, de entre las prendas, al azar?_____
8. ¿Qué probabilidad hay de elegir una blusa beige, de entre todas las prendas, al azar?_____
9. Suponga que su blusa fucsia se rompió. ¿Cuál es la probabilidad de elegir, al azar, una blusa de entre todas las prendas?_________
10. ¿Existe la posibilidad de que algunos de sus demás compañeros tenga la muñeca mudada igual que usted?___________ ¿Por qué?____

En matemática es importante tanto la teoría como la práctica: el papel de las definiciones

Lic. Wendy Zamora Monge
Facultad de Educación
Universidad de Costa Rica
wendy.zamoracr@gmail.com

Resumen: En el presente ensayo, se hace una breve exposición teórica en torno al papel y valor de las definiciones en la Educación Matemática. Para ello, se establece qué se podría considerar un mito matemático, así como sus posibles implicaciones en la enseñanza de esta disciplina, también se asume que se podría considerar como una definición matemática, se comenta sobre el valor de las mismas dentro de la Educación Matemática, finalmente, se presenta un ejemplo que sirve de referencia para evidenciar lo expuesto.

Palabras clave: definiciones, mitos, Educación Matemática, proceso educativo.

Mitos matemáticos

Durante el proceso de aprendizaje en la Matemática es posible encontrarse de frente con diferentes representaciones sociales, estereotipos, construcciones ideológicas y varios mitos matemáticos que, en lugar de favorecer la Educación Matemática, más bien se convierten en serios obstáculos que propician visiones distorsionadas de lo que es la disciplina y de lo que podría ser el educarse matemáticamente, debido a que las ideas y creencias que podamos tener en relación a cualquier situación, objeto o persona, definitivamente nos llevan a comportarnos de una determinada manera hacia esa situación, ese objeto o esa persona, como se dice por ahí, las ideas tienen consecuencias.

Para ser un tanto específico, al respecto, se tiene que una de las acepciones de la palabra mito dada en el Diccionario de la Real Academia, dice que, mito es la "Persona o cosa a las que se atribuyen cualidades o excelencias que no tienen, o bien una realidad de la que carecen". De ahí que, podríamos establecer que, un mito matemático, se refiere a un conjunto de ideas a las que se atribuyen cualidades o excelencias [a la Matemática] donde ésta no la tiene, o bien, atribuirle a esta disciplina, una realidad de la que carece.

Por ejemplo, comúnmente se escucha decir en las clases de Matemática, tanto por parte de estudiantes como de docentes, que la Matemática es de una determinada manera y por ello se debe aprender de acuerdo a cómo dicha creencia lo dicte. Por lo general, persisten las ideas que sostienen que la Matemática es una ciencia ya acabada, ya dada, estática, que simplemente debe enseñarse bajo el modelo de explicaciones magistrales del docente, proseguidas por bastantes ejercicios a resolver por los discentes, esta idea acerca de la Matemática y su aprendizaje, puede considerarse un mito matemático. A dicho mito Alcalá (2002) le denominaría estilo de enseñanza "De la mente del maestro a la del aprendiz mediante la explicación verbal y el ejercicio repetido".

Cualquier profesor de Matemática podría atestiguar que frases como las siguientes han sido comunes entre los y las estudiantes: "muchas cosas de Mate las puedo hacer con la calculadora, por eso hay que hacer más práctica que cualquier otra cosa", o "profe, no gastemos tanto tiempo en la teoría, más bien hagamos más prácticas", "profe, mi hermano estudia ingeniería y me dice que la mate se aprende practicando mucho", entre otras.

Asimismo, cualquier estudiante de secundaria (e incluso de universidad) podría afirmar que ha escuchado frases como: "vean, de nada les sirve venir a clases si ustedes no practican lo visto", "pongan atención, porque ejercicios como éstos vienen en el examen, así que deben ver cómo se resuelven", por dar algunos ejemplos.

Dichas frases, como se ha dicho, dan a entender que la disciplina matemática no es más que un conjunto de algoritmos y procedimientos que deben ser entendidos para luego poder repetirlos. De manera resumida, parece ser una idea muy generalizada y culturalmente aceptada aquella que reza que *la Matemática es pura práctica*, con lo que se quiere decir, casi al mismo tiempo, que no existen otros tipos de aprendizajes, más que el operatorio.

Esta idea entonces puede denominarse un mito matemático. Ya que atribuye a la práctica de ejercicios matemáticos una omnipotencia epistemológica que no termina de tener.

Quizá sea cierto que cuando las personas piensan en Matemática, usualmente piensen en números, cálculos, resultados de ejemplos y ejercicios determinados a partir de ejecutar ciertas operaciones matemáticas y aplicar propiedades de esta materia (tales como las propiedades de las operaciones básicas), entre otras cuestiones; en fin, piensan en lo que podría denominarse una Matemática algorítmica, cuyos contenidos ya están dados y por lo tanto, sólo deben enseñarse y aprenderse como una mera transmisión y repetición mecánica de algoritmos.

Sin embargo, desde la Didáctica de la Matemática se establece que esta disciplina está lejos de ser simplemente algorítmica; se establece también que su enseñanza va más allá de la reproducción de cálculos y reglas mecánicamente aprendidas. Pues existe todo un cuerpo teórico de conocimiento matemático que no puede ser subestimado ni omitido (Pimm, 1990; Alcalá, 2002; Lee, 2006, Fandiño, 2011). Por ejemplo, Alcalá (2002) caracteriza el aprendizaje matemático a partir de tres rasgos sobresalientes: conceptual, operatorio y simbólico.

Por lo tanto, en Matemática los contenidos declarativos y conceptuales no deben omitirse. Más aún, cuando lo que se persigue es el aprendizaje significativo de esta disciplina e incluso ir más allá, cuando lo que se persigue es la educación matemática de las personas, no basta pensar en que educar matemáticamente consiste sólo en enseñar algoritmos. Tal y como señala Bishop (1999, en Alcalá, 2002)

> Educar matemáticamente a las personas es mucho más que enseñarles simplemente algo de matemáticas. Es mucho más difícil de hacer y los problemas y las cuestiones pertinentes constituye un reto mucho mayor. Requiere una consciencia fundamental de los valores subyacentes en las matemáticas y un reconocimiento de la complejidad de enseñar estos valores a los niños. No basta simplemente con enseñarles matemáticas: también debemos educarles acerca de las matemáticas, mediante las matemáticas y con las matemáticas (p.14).

De igual modo, Fandiño (2010) señala que,

> […] salta a la vista de todos los docentes el hecho que un aprendizaje concluso con éxito en matemática es de considerarse una óptima combinación de aprendizajes específicos y diferentes. En matemática, de hecho, no basta haber construido un concepto, sino que es necesario saberlo usar para efectuar cálculos o dar respuestas a ejercicios; combinarlo con otros o con estrategias oportunas para resolver problemas; es necesario saber explicar a sí mismo y a los otros el concepto construido o la estrategia seguida; se requiere un uso sapiente de las transformaciones semióticas que permiten pasar de una representación a otra. (p.15)

Pues para esta autora en particular,

> El aprendizaje de la matemática comprende como mínimo 5 tipologías de aprendizajes diferentes, aunque no libre de superposiciones: aprendizaje conceptual (noética); aprendizaje algorítmico (calcular, operar, efectuar, solucionar, …); aprendizaje de estrategias (resolver, conjeturar, deducir, inducir, …); aprendizaje comunicativo (definir, argumentar, demostrar, validar, enunciar, …); aprendizaje y gestión de las representaciones semióticas (tratar, convertir, traducir, representar, interpretar, …). (Fandiño, 2010, p.17)

Los anteriores planteamientos permiten una mayor comprensión de lo que implica el educarse matemáticamente, ir más allá de aprendizajes algorítmicos, y favorecer desde un inicio el aprendizaje conceptual (noética). También, es oportuno acotar en relación a esta tipología que, según esta autora, el aprendizaje comunicativo ha sido el más olvidado y omitido de todos los tipos de aprendizaje, pese a que desde hace quince años ha habido una mayor sensibilización en torno a él, en la literatura científica de Educación Matemática, debido precisamente a su importancia.

Al articular los anteriores señalamientos podemos decir que, es necesario que haya aprendizajes conceptual, comunicativo y de gestión de las representaciones semióticas de la Matemática, es decir, que haya un aprendizaje más allá de lo algorítmico.

De ahí que, deba considerarse que para aprender Matemática, es necesario aprender el lenguaje matemático específico propio de la disciplina, es decir, se requiere aprender a operar y trabajar con los símbolos, signos y palabras necesarias y de la forma adecuada a cada situación y contexto, tal y como lo plantean Pimm (1990), Alcalá (2002) y Lee (2010).

Dicho esto, en un primer momento, es necesario que se aprendan términos y conceptos matemáticos. Por ello se hace necesario que, cuando se eduque matemáticamente a las personas se dé lugar a la valorización de este cuerpo teórico. No con el fin de formar especialistas en Matemática pura, ni con el de reproducir estereotipos de aprendizajes mecánicos de fórmulas y propiedades, o estigmas o modelos o patrones que sobrevaloren una Matemática estática y acabada, tampoco se trata de volver el aprendizaje de la Matemática como algo lleno de formalismos, sino más bien con el de presentar al estudiantado un rostro y naturaleza de esta ciencia más integrales.

Con el fin de transformar las aulas de Matemática en comunidades de aprendices de esta disciplina, donde la idea principal, según Clare Lee (2006) será que, los estudiantes aprendan a hablar el discurso matemático, apropiándose al mismo tiempo de la forma en que se hace y se piensa Matemática.

La idea central en este punto, es que, al educar matemáticamente a las personas, también, se les inculque la idea de que, la teoría matemática es hermosamente útil como herramienta para la resolución de problemas y más aún, a la hora de modelar y describir situaciones innumerables de la realidad.

Pues según Mercer (1997), es necesario conocer los distintos lenguajes presentes tanto en las disciplinas científicas como en la vida cotidiana, para poder acceder a las distintas informaciones y conocimientos presentes en estos ámbitos.

Asimismo, como se ha dicho, Lee (2010) señala que una parte importante del aprendizaje de la disciplina matemática tiene que ver con que los y las estudiantes puedan verse a sí mismos como aprendices del lenguaje matemático, pues sólo así se puede conformar o llegar a ser parte de comunidades de discurso matemático, comunidades en las que las personas se educan matemáticamente.

De igual modo, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) de los Estados Unidos, señala que la comprensión de conceptos matemáticos es requerida para que se gestione la *elaboración de la fluidez procedimental a partir de la comprensión*, una de las ocho características de una enseñanza eficaz de las Matemáticas –características según las cuales, también, se pueden orientar la labor docente de planificación, preparación e implementación de estrategias didácticas. Al respecto se plantea

"Una enseñanza de las matemáticas efectiva logra la fluidez en los procedimientos basados en la comprensión conceptual, de manera que los estudiantes, con el tiempo, se vuelvan hábiles en el empleo flexible de procedimientos, a medida que resuelven problemas contextuales y matemáticos." (NCTM, 2015, p.43).

Demás está señalar que para que se dé dicha comprensión conceptual se deben gestionar dichos conceptos a partir de definiciones propiamente matemáticas.

Por tanto, se debe fomentar una cultura más amplia alrededor de la educación en esta disciplina, una cultura donde se piense que:

"*En Matemática es importante, tanto la teoría como la práctica*"

Al final de este acápite, debe decirse que, en cuanto a la enseñanza del cuerpo teórico de la disciplina hay mucho por detallar, para efectos de este escueto ensayo, nos detendremos apenas y de forma breve en reflexionar acerca del papel de las definiciones matemáticas.

¿Qué es una definición? y ¿Cuál es su valor en la Matemática?

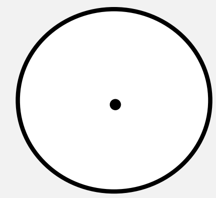
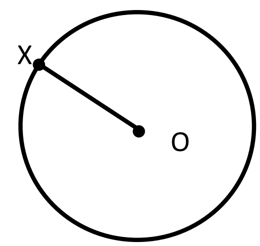
Según el Diccionario de la Real Academia Española, una de las acepciones de la palabra *definición* es "Proposición que expone con claridad y exactitud los caracteres genéricos y diferenciales de algo material o inmaterial."

Para el caso de la Matemática, tendremos entonces que, una *definición matemática* será aquella "proposición que expone con claridad y exactitud los caracteres genéricos y diferenciales de los objetos matemáticos".

Por ejemplo, si quisiéramos resolver problemas y ejercicios que involucren el uso de circunferencias, se hace obligatorio establecer, sea cual sea el nivel en el que se trabaje, qué se entenderá por circunferencia, esto tiene como propósito trabajar con la idea de lo que ésta significa y con las implicaciones de ese significado, por ello es necesario hacer referencia a sus partes y correspondientes propiedades derivadas de las características que de dicha definición se desprenden.

Además, tal ejercicio nos evitará cuestiones confusas, pero propensas a suceder, como la de pensar o hablar acerca de la circunferencia de manera limitada, por no conocer la "naturaleza" de este concepto en toda su amplitud, con todas las características y propiedades que pueda tener.

Por ejemplo, en la tabla que a continuación se presenta, se incluyen tres definiciones del término *circunferencia*, usadas en diferentes niveles de escolarización. Al parecer, las definiciones son distintas, por la forma y las palabras utilizadas, pero en esencia determinan un mismo concepto, pues en las tres se expone con claridad y exactitud los caracteres genéricos y diferenciales de lo que es una circunferencia: conjunto de puntos en un plano, equidistantes de un punto llamado centro.

NIVEL	DEFINICIÓN	REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA QUE ACOMPAÑA LA DEFINICIÓN
SEXTO AÑO (PRIMARIA)	La **circunferencia** es una línea curva, cerrada y contenida en un plano, en la que todos sus puntos están a igual distancia de un punto llamado centro. (Tomada de Santilla, 2008, p. 6).	
QUINTO AÑO (SECUNDARIA)	Una **circunferencia** es el conjunto de puntos del plano que están a una misma distancia ***r*** de un punto *O*. El punto *O* se llama **centro** de la circunferencia. El segmento que une a *O* con cualquier punto de la circunferencia se llama **radio**. Además, al valor ***r*** también se le llama radio. En la figura, $\overline{OX}$ es un radio, y $OX = r$ (Gómez, 2006, p. 168).	
CURSO UNIVERSITARIO	**Circunferencia** es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano. El punto fijo se llama *centro* de la circunferencia, y la distancia constante se llama *radio*. (Lehmann, 1968, p. 103).	No hay.

El hecho de tener claridad conceptual, en torno a lo que es una circunferencia y en torno a cualquier término, brindará a los y las estudiantes mayores oportunidades para apropiarse de los objetos matemáticos. Pues si las personas involucradas en un mismo intercambio comunicativo, comparten las mismas significaciones de los conceptos empleados en tales intercambios, es mayor la posibilidad de que, puedan llegar a entender el mensaje enviado en éstos (Lee, 2006; Edwards y Mercer, 1998; Mercer, 1997).

Al respecto Hernández (2009) señala que las definiciones sirven para enseñar a los y a las estudiantes a encontrar precisión y claridad al aprender términos y que el uso de ellas se convierte en una estrategia didáctica básica para enseñar a escribir, autocorregirse y tomar apuntes en el aula, las cuales a su vez, se sabe son destrezas muy importantes para lograr dominio de lo que diferentes autores denominan *registro matemático* (Pimm, 1990; Alcalá, 2002; Lee, 2006).

Hernández (2009) al igual que Lee (2006) concuerdan en que, en el aula estos espacios deben corresponderse con momentos de producción intelectual y creativa por parte de todas las personas involucradas en el proceso educativo, lo cual implica que deben abrirse espacios para tener diálogos y conversaciones matemáticas entre todos los participantes. Ya que, según Hernández (2009) "Las definiciones no surgen de la memoria mecánica o de la repetición de las palabras dichas por la maestra o el maestro, sino constituyen [re]construcciones significativas de aprendizaje de los estudiantes." (p.71)

Además, en nuestro contexto educativo el nuevo Programa de Estudio de Matemática del Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012), busca propiciar el desarrollo de competencias matemáticas, por medio de una serie de *procesos matemáticos*. En los cuales se hará necesario que todos los involucrados estén, por decirlo de algún modo "en la misma frecuencia, hablando el mismo idioma".

En cuanto a los *procesos matemáticos*, el MEP (2012) señala que:

> Los *procesos matemáticos* se entienden aquí como actividades cognitivas (o tipos de actividades) que realizan las personas en las distintas áreas matemáticas y que se asocian a capacidades para la comprensión y uso de los conocimientos. [Donde] La realización sistemática de estos procesos transversales en la acción de aula apoya el progreso de diversas dimensiones de la competencia matemática. (p. 24)

Asimismo, destaca como procesos centrales, los siguientes: Razonar y argumentar, Plantear y resolver problemas, Comunicar, Conectar y Representar.

Sobre el proceso de *Razonar y argumentar* el MEP (2012) señala que, éste

> Trata de actividades mentales que aparecen transversalmente en todas las áreas del plan de estudios y que desencadenan formas típicas del pensamiento matemático: deducción, inducción, comparación analítica, generalización, justificaciones, pruebas, uso de ejemplos y contraejemplos. Busca desarrollar capacidades para permitir la comprensión de lo que es una justificación o prueba en matemática, para desarrollar y discutir argumentaciones matemáticas, para formular y analizar conjeturas matemáticas, para usar fórmulas o métodos matemáticos que permitan la comprensión o desarrollo de informaciones presentes. (p.24)

En tanto que, del proceso *Comunicar* dice

> Es la expresión y comunicación oral, visual o escrita de ideas, resultados y argumentos matemáticos al docente o a los otros estudiantes.
>
> Este proceso busca potenciar la capacidad para expresar ideas matemáticas y sus aplicaciones usando el lenguaje matemático (reglas de sintaxis y semántica) de manera escrita y oral a otros estudiantes, docentes y a la comunidad educativa. Pretende que se desarrollen capacidades para consignar y expresar con precisión matemática las ideas, los argumentos y procedimientos utilizados así como las conclusiones a las que se hayan arribado, así como para identificar, interpretar y analizar las expresiones matemáticas escritas o verbales realizadas por otras personas. (MEP, 2012, p.25)

De ahí la importancia de que, los y las docentes no subestimen el papel del contenido teórico para el aprendizaje de la disciplina y aún más, la importancia de que puedan abrir espacios durante las clases, para hacer lo más explícito posible el sentido y razón de ser de cada una de las definiciones de los objetos matemáticos, pese a todas las comunes limitaciones de tiempo y recursos con las que suelen encontrarse como docentes.

Sobre todo, si se piensa en favorecer los procesos de Razonar y Argumentar y el de Comunicar. Pues en ambos, se hace transcendental, el hecho de conocer, comprender y dominar las definiciones propias de cada uno de los objetos matemáticos. Ya que, en Matemática puede decirse que:

"*Como definimos… así actuamos…*"

Referencias Bibliográficas

Alcalá, M. (2002). La construcción del lenguaje matemático. Barcelona: Editorial Graó.

Fandiño, M. (2011). Múltiples aspectos del aprendizaje de la Matemática: Evaluar e intervenir en forma mirada y específica [2ª ed.]. Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Gómez, L. (2006). Matemática para bachillerato: teoría, ejemplos y ejercicios. San José, Costa Rica: Autor.

Hernández, R. (2009). Mediación en el aula. Recursos, estrategias y técnicas didácticas. San José, Costa Rica: EUNED.

Lee, C. (2010). El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas. La evaluación formativa en la práctica. Madrid: Morata.

Lehmann, C. (trad. 1968). Geometría Analítica. México: Editorial Hispanoamérica.

Mercer, N. & Edwards, D. (1988). El conocimiento compartido. España: Editorial Paidós Ibérica.

Mercer, N. (1997). La construcción guiada del conocimiento. España: Editorial Paidós Ibérica.

Mercer, N. (2001). Palabras y mentes: Cómo usamos el lenguaje para pensar juntos. España: Ediciones Paidós Ibérica.

Ministerio de Educación Pública (2012). Programas de Estudio de Matemáticas, Educación General Básica y Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica.

National Council of Teachers of Mathematics (2015). De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos. Estados Unidos: NCTM.

Pimm, D. (1990). El lenguaje matemático en el aula. Madrid: Morata.

Real Academia de la Lengua Española (2012). Diccionario de la Lengua Española. Vigésimo Segunda Edición. Recuperado de www.rae.es

Santillana (2008). ¡A los números! 6 Santillana. San José, Costa Rica.

Estrategias didácticas y estilos docentes

Dra. Annia Espeleta
Facultad de Educación
Universidad de Costa Rica
annia.espeleta@gmail.com

Licda. Wendy Zamora Monge
Facultad de Educación
Universidad de Costa Rica
wendy.zamoracr@gmail.com

Resumen: Este escrito da cuenta de resultados de una investigación acerca de Estrategias Didácticas, en particular se reporta el conocimiento de las estrategias didácticas utilizadas en las clases y su caracterización con los estilos de enseñanza del docente de Matemática. Investigación descriptiva, dentro del paradigma cualitativo, con la aplicación de técnicas como entrevistas, grupos focales, observaciones no participantes y análisis de documentos. Se contó con la participación de estudiantes de cursos de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica y docentes en servicio en el nivel de secundaria. Entre los resultados se destaca que la aplicación de determinadas estrategias en la clase de matemática está relacionadas con la dimensión afectiva y la motivación según el estilo de enseñanza.

Palabras clave: estrategias didácticas, Educación Matemática, estilos de enseñanza, procesos de enseñanza y aprendizaje, didáctica de la Matemática.

Introducción

En el contexto educativo costarricense, se desarrollan lecciones de Matemática, donde predominan los enfoques mecanicistas y tecnicistas. En estos enfoques denominados tradicionales, se evidencia la importancia que se le asigna al aprendizaje de conceptos y algoritmos, donde el interés del docente se centra en enseñar con un ejemplo y repetir procedimientos.

Esta forma de enseñanza tradicional confronta estrategias con la metodología con la resolución de problemas y permite reflexionar los resultados de Pruebas como la de PISA, donde los logros académicos del estudiantado costarricense en Matemática fueron deficientes.

Por lo que resulta oportuno, reflexionar en comunidades de docentes de Matemática sobre las prácticas, la influencia que puedan tener y los estilos docentes, con el fin de modificar las estrategias didácticas utilizadas en la clase de Matemática en beneficio de favorecer logros con los estudiantes. Los resultados evidencian el estrecho vínculo existente entre los estilos docentes y las prácticas de aula.

Lo anterior es imperativo, debido a que, de acuerdo con la evidencia empírica, los docentes son los que cuentan con mayor posibilidad de gestar cambios en la propia práctica, con la idea de dar seguimiento a la relación teórica y práctica del currículo de Matemática.

Los Programas de Estudio de Matemática, implementados en el 2012, tanto para primaria como para secundaria, proponen un cambio en la metodología de trabajo en la clase, desde una tendencia hacia el desarrollo de las competencias matemáticas. Un enfoque curricular que enfatiza el devenir de la clase por medio de la resolución de problemas y estrategias didácticas que, permitan al estudiante construir el conocimiento y que, al mismo tiempo, se desarrollen habilidades y competencias que, le acerquen a la solución de problemas y situaciones relacionadas con su cotidianidad y contexto. Todo lo anterior, con el fin de hacer más significativo y atractivo el aprendizaje de esta disciplina.

En relación a esta propuesta programática el MEP señala que,

> Este currículo asume como su objetivo principal la búsqueda del fortalecimiento de mayores capacidades cognoscitivas para abordar los retos de una sociedad moderna, donde la información, el conocimiento y la demanda de mayores habilidades y capacidades mentales son invocadas con fuerza… Aprender a plantear y resolver problemas y especialmente usarlos en la organización de las lecciones se adopta como la estrategia central para generar esas capacidades… En este currículo se enfatizará el trabajo con problemas asociados a los entornos reales, físicos, sociales y culturales, o que puedan ser imaginados de esa manera. Se asume que usar este tipo de problemas es una poderosa fuente para la construcción de aprendizajes en las Matemáticas. (MEP, 2012, p.13)

Lo anterior obliga al y a la docente, repensar y reformular el planeamiento de sus lecciones de una manera muy distinta a la sugerida por el Programa de Estudios anterior, que partía de contenidos, ejemplos y ejercicios.

Estrategias didácticas

Para el caso de la presente investigación se concibe la Matemática como un saber que se re-construye, el cual pone atención a las complejas relaciones existentes entre el docente, los contenidos matemáticos, el estudiantado, los recursos, estrategias y técnicas didácticas, así como al contexto donde se den los procesos educativos relacionados con esta materia.

Lo que en consecuencia genera que se conciba la mediación pedagógica como aquella mediación capaz de promover y acompañar el aprendizaje de nuestros interlocutores, es decir, de promover en los educandos la tarea de construirse y de apropiarse del mundo y de sí mismos.

Situación que demanda según Martínez (1988, en Ferreiro, 2007, p.6) que el docente al mediar cumpla entre otros requisitos con los siguientes:

La reciprocidad, es decir, una relación actividad-comunicación mutua, en la que ambos, mediador y alumno, participen activamente.

La intencionalidad, o sea, tener muy claro qué quieren lograr y cómo ha de lograrse; tanto el docente mediador como el estudiante que hace suya esa intención, dada la reciprocidad que se alcanza.

El significado, es decir, que el estudiante le encuentre sentido a la tarea.

La trascendencia, que equivale a ir más allá del aquí y el ahora, y crear un nuevo sistema de necesidades que muevan a acciones posteriores.

El sentimiento de capacidad o autoestima, o lo que es lo mismo, despertar en los alumnos el sentimiento de que son capaces.

Donde tales requisitos propician una acción docente acorde con los planteamientos de Salazar (2012a), quien señala que la acción docente es una tarea de promover logros, de generar rutas para que otros puedan aprender y ascender; donde se hace explícito que la complejidad del contexto y las diversidades del estudiantado, se ven entrelazadas de maneras distintas, en combinación con las capacidades en el personal docente, y que en consecuencia sugiere que en esta tarea los elementos personales, el dominio del contenido y la competencia pedagógica se integren.

Pues, entre otras cosas, que el docente sea mediador demanda la transformación de los contenidos al considerar la comunicación, la capacidad de representar conocimientos y de organizar didácticamente éstos (Salazar, 2012a). Lo cual conlleva a planear y desarrollar acciones de aula, de manera consciente y reflexiva para el logro de los objetivos esperados.

En cuanto a metodología, ésta se define como el conjunto de estrategias aplicadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Se resalta que las estrategias contribuyen en la mediación pedagógica y se concretan con diversas actividades. Donde la estrategia didáctica según Salazar (2012a) se concibe "como un proceso integral que organiza y desarrolla un conjunto de acciones que se proyectan y se ponen en marcha de forma ordenada para alcanzar un determinado propósito pedagógico" (p.76). Mientras que para Hernández (2009) es un plan general formulado para hacer frente a una tarea específica.

Lo que en síntesis equivale a decir que la estrategia didáctica se entiende como el conjunto de técnicas que pretenden el logro de aprendizajes de contenidos, procedimientos y actitudes; sin dejar de lado que la selección, planificación y aplicación de estrategias permean o promueven entre otras cosas un determinado clima de aula, el tipo de relaciones interpersonales que se establezcan (interacción docente-estudiante, estudiante-estudiante), la forma en que se manifiesten las actitudes (y las actitudes mismas manifestadas), así como la construcción de determinadas creencias, y el desarrollo que se dé del proceso de comunicación en el aula, entre otros elementos.

En relación con el hecho de que la estrategia didáctica permite y modela la interacción del estudiante con el objeto de estudio, Salazar (2012a) señala que

> […] los componentes de la estrategia van más allá de las técnicas o métodos, puesto que requieren poner atención a los objetivos de aprendizajes esperados, las acciones que desarrolla tanto el docente como el estudiante, la naturaleza y dificultad del contenido y los métodos para la enseñanza y para su evaluación (p.76)

Lo que permite concluir que las estrategias y técnicas didácticas a desarrollar en el aula de Matemática deben ser consideradas de manera atenta por las implicaciones de su ejecución y también, porque están en estrecha relación con el contenido curricular y las habilidades que se pretenden desarrollar, con las características del grupo con el que se trabaja, y muy importante, del docente, con las condiciones y recursos del aula, de la institución y del contexto educativo en general.

Una aclaración necesaria por hacer es que existen autores que utilizan el término de estrategia didáctica de forma sinónima a técnica didáctica. Para el caso de la presente investigación no se establecen diferencias entre lo que es una técnica didáctica y una estrategia didáctica. La técnica o estrategia será definida como las acciones y actividades concretas que se llevan a cabo para implementar, en su totalidad, un determinado enfoque de enseñanza.

Calderón (2003) afirma que las técnicas didácticas son instrumentos que se pueden tomar en consideración para hacer más eficiente la labor educativa; y entre sus características señala que son imparciales, en el sentido de que, se trata meramente de instrumentos que pueden utilizarse, adaptarse o mejorarse de acuerdo con las condiciones y situaciones educativas existentes. Es decir, las técnicas pueden servir a estrategias y métodos de enseñanza distintos.

En relación a los recursos didácticos, éstos se entenderán como los "materiales y dinámicas [tipos de intercambios] que junto a estrategias y técnicas didácticas, promueven la participación en el aula, facilitan construir el conocimiento y generar aprendizaje significativo" (p.36), tal y como lo plantea Hernández (2009).

Clasificación de estrategias y técnicas

A continuación se establece una clasificación de estrategias didácticas, con el fin de identificar cuáles podrían ser sus propósitos, alcances y aportes, dicha clasificación (propia de las autoras) se rige por las habilidades cognitivas, afectivas y de interacción social que se promuevan con la aplicación y desarrollo de las mismas:

- Estrategias didácticas según componente cognitivo
- Estrategias didácticas según componente afectivo y de interacción social

Esta clasificación permite identificar cuáles estrategias o técnicas resultan útiles para el desarrollo de un determinado contenido matemático o de algún tipo de habilidades en específico.

Sin embargo, debe aclararse que la clasificación no implica que sean categorías excluyentes, por el contrario hay una yuxtaposición de los componentes cognitivo, afectivo y de interacción social, que dependerá en mucho de la forma en que es aplicada la estrategia, de la personalidad, la composición del grupo y los contenidos tratados, entre otras variables.

Estrategias y técnicas didácticas según componente cognitivo

Las estrategias didácticas según componente cognitivo involucran situaciones y actividades que propicien el desarrollo de habilidades cognitivas y la construcción del conocimiento matemático. Entre ellas se destacan: la resolución de problemas y el cálculo mental.

Estrategias y técnicas didácticas según componente afectivo y de interacción social

Las estrategias didácticas según componente afectivo promueven el desarrollo afectivo de los estudiantes en relación con sus creencias, actitudes y emociones, las cuales, a su vez, están vinculadas con el aprendizaje de la Matemática. Su fin principal es propiciar un acercamiento sin temor hacia la materia, y el fortalecimiento de la autoconfianza y auto concepto.

También buscan el desarrollo a nivel individual de habilidades sociales de los participantes, entre ellas, las relacionadas con la comunicación, las relaciones interpersonales, el trato con pares, las emociones, el afecto, el liderazgo, la solidaridad, la tolerancia, el respeto, entre otras; un ejemplo de ellas, serían las estrategias que promuevan una sana competitividad para el crecimiento personal y no tanto para subestimar a los otros. Entre ellas están algunas técnicas y estrategias comunicativas, el trabajo en grupos, el uso de historias, anécdotas, chistes y curiosidades matemáticas.

Estilos de enseñanza

En un estudio llevado a cabo por la UNESCO, Román (2007) menciona que se han encontrado tres factores relacionados con el aula, los cuales tienen una incidencia directa tanto en la manera como en la calidad de lo que el alumnado aprende a lo largo de un período escolar. Estos son: el clima de aula, la metodología didáctica y el manejo del tiempo en las aulas. Estos factores tienen relación indirecta e inciden en el logro obtenido por los estudiantes, tales como: la planificación de la enseñanza, la disponibilidad y la adecuación de los recursos y la infraestructura, la participación de las familias y características de los docentes.

En cuanto a las características de los docentes, favorecedoras del desarrollo de una enseñanza eficaz, se mencionan las expectativas, las actitudes y creencias. Román (2007) cita:

> [...] una enseñanza eficaz está conducida por un docente con altas expectativas respecto de lo que sus estudiantes son capaces de aprender, así como que ellos van a alcanzar altos niveles educativos en el futuro… La violencia física o verbal no forma parte de las interacciones de aulas, cuyos estudiantes obtienen buenos resultados (p. 220).

Los estilos de Enseñanza permiten caracterizar los comportamientos del docente en el aula y diferenciar la forma en que atienden los procesos de enseñanza (Grasha, 2002, Evans, 2004, Gargallo, 2008).

Se distinguen dos tendencias en Estilos de Enseñanza, una de tradición psicológica, centrada principalmente en la correspondencia entre estilos cognitivos y de aprendizaje de los estudiantes y la otra tradición pedagógica, que define estilos de enseñanza a partir de la cualificación docente, identificando concepciones y creencias frente a la labor educativa (Camargo y Hederich, 2007 citados en Abello y Hernández, 2010).

En cuanto a la forma de trabajo del docente, se fundamentan las metodologías con una sólida base epistemológica, un ejemplo lo presenta Vázquez y Ángulo (2010), quienes se refieren a la enseñanza para la comprensión (orientada también a la enseñanza de las matemáticas), el método de casos y la narración, mediante la fundamentación en teorías psicológicas, neurológicas, literarias y sociales. Entre ellas pueden mencionarse ciertas técnicas y estrategias comunicativas, el trabajo en grupos, anécdotas, curiosidades, historietas y humor.

Procedimiento metodológico

La presente investigación se define descriptiva dentro del paradigma cualitativo. Además de hacer sondeos exploratorios sobre el conocimiento que tienen acerca de las estrategias didácticas algunos docentes de Matemática en ejercicio y algunos estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica, mediante la aplicación de cuestionarios y la realización de observaciones no participantes en aulas de secundaria (se utilizan códigos, por ejemplo O1DMEP, será la observación uno de un docente del MEP, DE+10ASU corresponde a docentes de secundaria y universitarios más de 10 años de experiencia, O1DS, sería la observación uno a un docente de secundaria). Docentes noveles y estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática UCR (16), docentes con experiencia (10).

Es importante señalar que debido al diseño y naturaleza de esta investigación, se han organizado etapas que no se han desarrollado de forma lineal, sino que se ha avanzado en cada una de ellas en forma simultánea o yuxtapuesta, para clasificar las estrategias didácticas, el grado de conocimiento y las implementadas en la clase.

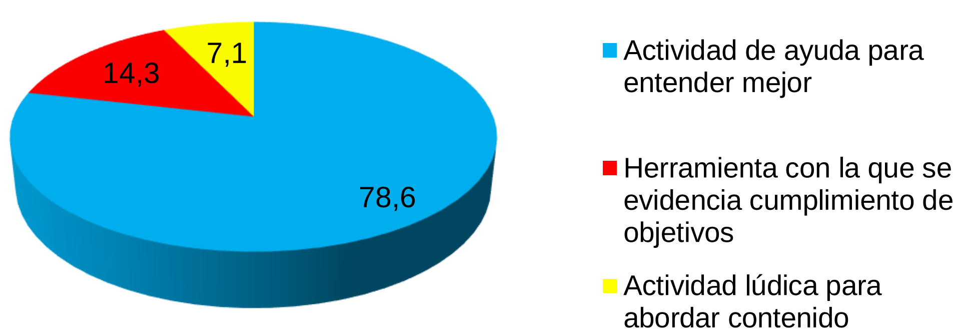
Análisis de la experiencia y resultados

- **Conocimiento de técnicas y estrategias didácticas**

Los resultados que comparan las opiniones de docentes acerca del conocimiento de Estrategias Didácticas, confrontan dificultades en el seguimiento práctico, pues los docentes de Matemática, parece no cuentan con las herramientas o habilidades para desarrollar estrategias didácticas acordes con los programas de estudio.

Ante la pregunta "En sus propias palabras responda: ¿qué es una estrategia didáctica? se observa que su concepción de lo que es una estrategia didáctica se reduce a los siguientes tres resultados: una actividad de ayuda para entender mejor, una herramienta con la que se evidencia cumplimiento de objetivos o una actividad lúdica para abordar contenido (DM).

GRÁFICO 1
DISTRIBUCIÓN DE OPINION DE DOCENTES NOVELES SEGÚN CONCEPCIONES ACERCA DE LAS ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS
(Cifras relativas)



En los datos recolectados, también se evidencia que los docentes noveles aplican técnicas propuestas por ellos mismos, sin relacionar el contenido matemático con la funcionalidad de la estrategia (en muchos casos quedan en el nivel de actividad). Las actividades aplicadas quedan en el activismo, sin que el estudiante tenga la posibilidad de razonar acerca de los contenidos o su profundidad, quedan ideas inconclusas y posiblemente con errores no evacuados por el docente (EEM).

La situación anterior también se manifiesta entre los docentes en servicio (DEMEP), quienes en muchas ocasiones también utilizan actividades que no se relacionan con los contenidos matemáticos, muchas totalmente ajenas al conocimiento matemático, por ejemplo, realizar prolongadas motivaciones espirituales para iniciar las clases (en menoscabo del desarrollo de contenidos por no estar directamente relacionadas éstas con los mismos). Esto se evidencia en las actividades propuestas por docentes de Matemática (O1DMEP, O2DMEP).

Además de ejemplos de prolongadas motivaciones, también ocurre que los mismos docentes en ejercicio dedican bastante tiempo de la clase al trabajo en grupo entre los docentes, independientemente de los contenidos que se vayan a desarrollar en la clase. Esta situación se debe a que los nuevos Programas de Estudio de Matemática así lo proponen, sin embargo, en la práctica se evidencia que muchas ideas quedan inconclusas, que muchas dudas se aclaran a algunos miembros de los grupos y no a la totalidad de toda una sección, cuando podría tratarse de dudas que valdría la pena aclarar en espacios donde todos los estudiantes de la clase presten atención (O1DMEP, O2DMEP).

Los mismos docentes expresan confusión en la utilización del trabajo en grupo, sobre todo aquellos que tienen experiencia con Programas de Estudio de Matemática anteriores, pues de las clases magistrales pasan al otro extremo donde desaparece esta estrategia. No se ponen límites de tiempo para realizar determinadas tareas, para la distribución del trabajo y para la forma en que se organizan los grupos (O1DMEP, O2DMEP).

Predominan grupos de cinco a siete estudiantes agrupados pero que no trabajan en equipo, en su mayoría no hay discusión, intercambio de ideas, el trabajo recae en algunos miembros del grupo y en ocasiones el profesor atiende individualmente dudas de algunos miembros del grupo y no de todos (O1DS, O2DS, O3DS, 04DS).

Bajo esta técnica se evidencia que las clases suelen ser muy ruidosas y que se prestan para que los estudiantes conversen de otros asuntos no matemáticos, se distraigan e incluso jueguen en la clase. La recurrencia de esta situación con el trabajo en grupo deja en desventaja a todos los estudiantes que requieren de ambientes de mayor concentración para aprender, por ejemplo, estudiantes con déficit atencional (O1DS, O2DS, O3DS, 04DS).

Además, debe considerarse que en el caso de los contenidos matemáticos, debido a la naturaleza y formalidad de la disciplina, el papel del docente como guía y mediador podría resultar más protagónico que el de docentes de otras disciplinas. Ya que el docente debe propiciar la conexión de conocimientos previos con los nuevos conocimientos, que no siempre los estudiantes podrán construir por su propia cuenta, por ser de naturaleza declarativa.

El proponer estrategias sugiere el conocimiento de las mismas en su potencialidad, lo cual redunda en una planificación más pertinente de las estrategias con los contenidos matemáticos.

Al analizar el trabajo en grupos resulta oportuno que los docentes tengan claridad de las ventajas y limitaciones de esta técnica, de las preguntas que es válido plantear a los estudiantes, de las asignaciones de tareas individuales dentro de los mismos grupos y de las reglas o condiciones que deben darse para que las interacciones a lo interno del grupo permitan el logro de resultados.

- **Estilos o modelos docentes de acuerdo con las estrategias utilizadas y la formación docente**

En esta categoría se visualizan afinidades que podrían caracterizar estilos o modelos del docente de Matemática con respecto a las estrategias didácticas. Así como se cita en Espeleta (2014), las creencias acerca de la naturaleza de la Matemática podrían describir las acciones en la enseñanza desarrolladas por un docente. Ciertos rasgos de los docentes evidencian una tendencia a darle énfasis a las distintas formas de resolver problemas, mostrar problemas variados y aplicados a distintas áreas disciplinarias, sin embargo, lejos de utilizar la resolución de problemas para enseñar contenidos, queda en utilizar procedimientos y recetas prácticas.

Los docentes manifestaron aplicar técnicas como si se tratase de un requisito con el que se debe cumplir y no como una herramienta con la cual se facilitan los aprendizajes, pues la atención se enfoca en el contenido matemático, más que en la forma en que se enseña. No cuentan con variedad de actividades y estrategias para incorporar en las clases (EP). Por otro lado, los docentes con más experiencia muestran creencias más cercanas a valorar la naturaleza de la Matemática como ciencia y lenguaje, creen también que la Matemática es para unos cuantos y posiblemente se discrimine al estudiante que no cuente con habilidades o intereses matemáticos (DE+10ASU), este tipo de docente, será un docente riguroso en la escritura matemática y los conceptos.

En el grupo focal de docentes con más de 10 años de experiencia se dan dos tendencias en cuanto cómo debe enseñarse la Matemática, en una de ellas lo importante es la creencia de que se debe enseñar la disciplina a partir de lo que está en el contenido y formalidad de ésta y que no es necesario usar material concreto, por ejemplo, y en la otra tendencia sí se valoran las actividades didácticas con las cuales mediar los contenidos, como el uso de material concreto en clases que lo permitan (DE+10ASU).

Un segundo tipo de docente analizado tiene un acercamiento a los estudiantes con motivaciones muchas veces ajenas a la Matemática y manejan los tiempos y el control de la disciplina de modos menos tradicionales (O1DMEP, O2DMEP).

En todos los grupos estudiados se evidencia que el docente de Matemática no formula preguntas adecuadas que guíen al estudiante en la resolución de problemas o bien para que el error sea utilizado en su aprendizaje, este último elemento no se sabe utilizar o aprovechar para la enseñanza.

Por otro lado, durante las lecciones los docentes ponen atención en la aclaración de dudas sobre contenidos matemáticos de manera individual en algunos grupos de trabajo y descuidan el funcionamiento apropiado de todos los grupos (O1DS, O2DS, O3DS y O4DS).

A pesar de que el trabajo en grupos ha venido a sustituir las clases magistrales y la participación de “los más listos en Matemática”, se percibe que su utilización sólo en parte se da para innovar, propiciar mayor inclusividad entre pares y apoyo para la realización de tareas, pues en el nivel micro, en los grupos de trabajo en las aulas, se presta atención sólo algunos estudiantes, por el hecho de que sólo algunos miembros del grupo encuentren soluciones a problemas y ejercicios y los demás siguen con su rol pasivo, de observadores (O1DS, O2DS, O3DS, 04DS).

Los mismos problemas de las clases tradicionales, se trasladan a los grupos de trabajo, privilegiando la solución correcta a los ejercicios y problemas, en lugar de prestar mayor atención a la forma en que se llegan a esas soluciones y a los errores que puedan tener los estudiantes. Por ejemplo, se escuchan comparaciones entre las respuestas dadas por distintos grupos sin evacuar dudas o prestar atención a las diferencias de procedimientos o resultados (O1DS, O2DS, O3DS, 04DS).

La Tabla 1 muestra la necesidad de trabajar en la formación docente y prestar mayor énfasis a las prácticas de aula, que las decisiones estén fundamentadas y que el docente pueda manejar distintas estrategias. Estos resultados permiten analizar la formación de docentes, pues durante la investigación, los docentes consultados manifiestan la necesidad de mayor preparación en estrategias didácticas.

Tabla 1 Síntesis que caracteriza estilos de enseñanza según rasgos encontrados en grupos de docentes

RASGOS ENCONTRADOS	DOCENTES NOVELES	DOCENTES CON EXPERIENCIA
CONSTRUCCIÓN DE SU ESTILO	Predomina la repetición, el trabajo en grupo.	Adoptan componentes ajenos a la Matemática para su acercamiento con los estudiantes, esto ha dado resultados para motivarlos.
ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS	Predomina trabajo en grupo, repetición de actividades como juegos, dan énfasis a los estudiantes que tienen mayores habilidades.	Control de clase, planteamiento de un problema o utilización de materiales (papeles, juegos, recortes, dibujos,…) para hacer distinta la clase de Matemática. Trabajan en grupo para incorporar el nuevo programa, pero dan énfasis a los estudiantes que tienen mayores habilidades.
FORMACIÓN	Es necesaria mayor formación en utilización de estrategias.	Es necesaria mayor formación en utilización de estrategias.

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos recolectados.

Entre los resultados que se obtienen de los docentes noveles es que han aprendido las estrategias didácticas principalmente de los docentes formadores (9/16 o sea el 56%), al mismo tiempo han obtenido ideas de internet y medios de comunicación. Dichos resultados se presentan en el siguiente cuadro.

Cuadro 1 Distribución de docentes según fuente donde han aprendido estrategias didácticas (Cifras absolutas y relativas)

FUENTES	FRECUENCIA SIMPLE	FRECUENCIA RELATIVA PORCENTUAL
DE LOS DOCENTES FORMADORES DE LA UNIVERSIDAD.	9	56.3
DE LIBROS DE TEXTO.	1	6.3
DE INTERNET Y MEDIOS DE COMUNICACIÓN.	3	18.8
DE LAS CONVERSACIONES CON COLEGAS.	1	6.3
DE LAS PROPIAS EXPERIENCIAS VIVIDAS EN LA UNIVERSIDAD.	2	12.5
TOTAL	**16**	**100.0**

Dicho resultado permite reflexionar acerca del hecho de que los modelos docentes impactan a los futuros docentes en cuanto a la reproducción de los mismos. Lo cual habla de la importancia de que no sólo se hable teóricamente de estrategias didácticas, sino que también sean implementadas por los formadores de formadores.

Logros de los estudiantes en la clase de Matemática

La enseñanza de la Matemática pretende lograr aprendizajes matemáticos, mediante las estrategias didácticas.

Desarrollar el gusto o motivación por el aprendizaje de la Matemática es tarea de muchos docentes, pero no se logra dar seguimiento a las capacidades y diferencias individuales de los estudiantes. Los grupos numerosos, las distracciones y problemas de la educación secundaria en el sistema educativo costarricense, son algunas de las dificultades para una enseñanza de la Matemática adecuada (DE+10ASU).

El enfoque curricular constructivista ha calado en la formación de los docentes de Matemática, pero no así en el trabajo práctico del aula, el docente no utiliza esta filosofía en las clases para lograr que estudiante construya su propio conocimiento, desconociendo también la naturaleza declarativa de muchos contenidos matemáticos.

La utilización de estrategias didácticas en forma general se planean para motivar y hacer más atractiva la clase de Matemáticas, no con el fin principal de lograr aprendizajes en los estudiantes (DE+10ASU, O1DMEP, O2DMEP).

Las estrategias didácticas en la planificación de la clase de Matemática como el medio que permite lograr aprendizajes en los estudiantes. Las estrategias didácticas más allá de ser solamente un elemento lúdico o de mero activismo en la clase, deben de orientarse al aprendizaje, tal como lo manifiesta una participante de uno de los grupos focales (DE+10ASU): “Una cosa es planear una clase para enseñar y otra cosa es planear una clase para aprender”.

Conclusiones

No existe claridad conceptual entre los términos estrategias, técnicas y actividades didácticas. Lo que podría influir en las decisiones de planificación y diseño de las lecciones de Matemática.

Las estrategias o técnicas didácticas que conocen y aplican los docentes de Matemática permiten conocer el estilo docente.

De esta experiencia en particular, también resulta oportuno señalar que la estrategia de resolución de problemas es de interés para los estudiantes de secundaria, pues le permite “pensar más”, comunicarse con los compañeros y verse obligados a “hacer cosas”, siempre en el marco de verse asistidos por la docente como mediadora y guía pedagógica.

Finalmente, y aunque no es foco central de esta investigación, es oportuno que los y las docentes, valoren el papel que desempeñan los aspectos afectivos y emocionales, así como madurativos y socializantes experimentados por los y las estudiantes durante el aprendizaje de la Matemática, pues los mismos no dejan de tener injerencia en la forma en que los y las adolescentes asumen sus procesos educativos, en ocasiones estos aspectos tienen mayor trascendencia de la que se espera, por ejemplo, el miedo a participar en la clase por no parecer fuera de lugar cohíbe a algunos estudiantes de manifestar sus ideas.

Puede especularse que el enfoque curricular constructivista ha calado en los docentes costarricenses como el enfoque alternativo al tradicional. Sin embargo, no existe evidencia de utilizarse mediante las mejores estrategias de enseñanza y evaluación.

Por otro lado, el nuevo Programa de Matemática sugiere una serie de componentes curriculares que no se saben implementar, como lo son las habilidades matemáticas y que están relacionadas con las estrategias para implementar en las clases de Matemática. El trabajo en grupo que se sugiere en el Programa como momento de la clase, es utilizado sin mayor cambio al de una clase tradicional, resultados obtenidos en todos los grupos estudiados.

Los docentes de Matemática sienten que han innovado o son muy creativos al planear actividades como juegos, trabajo en grupo o resolver un problema. Sin embargo, al analizar la experiencia, se encuentra que no se planea ni se vincula la actividad con el contenido matemático que se enseña ni tampoco se utilizan para explotar el potencial que podrían tener los estudiantes.

Se percibe que los docentes de las nuevas generaciones dan más importancia al trabajo en grupo que a las clases magistrales. Asimismo, se descuidan los cierres de clases y se deja de llamar la atención de todos los estudiantes cuando es necesario.

Lo anterior hace necesario que se presente atención a la formación de docentes en cuanto a las estrategias didácticas, ya que el docente de Matemática no cuenta con un repertorio que puede ajustar o adaptar para distintos contenidos, poblaciones o situaciones de clase.

Referencias Bibliográficas

Abello, D. y Hernández, C. (2010). Diseño y validación de un modelo teórico e instrumental para la identificación de estilos de enseñanza en docentes universitarios (Tesis para optar por el grado de Magister en Educación). Bogotá, Colombia.

Calderón, K. (2003). La didáctica hoy. Concepciones y aplicaciones. San José, C. R.: EUNED.

Espeleta, A. (2014). Estilos de Enseñanza del Docente de Matemática de la Carrera de Enseñanza de la Matemática en la Universidad de Costa Rica. (Tesis Doctoral sin publicar). Universidad de Costa Rica: San José, Costa Rica.

Evans, C. (2004). Exploring the relationship between cognitive style and teaching style. *Educational Psychology*, 24(4), pp. 509-530.

Ferreiro, R. (2007). Aprendizaje cooperativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* 9(2), 1-10. Recuperado de http://eds.b.ebscohost.com.ezproxy.sibdi.ucr.ac.cr:2048/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=3&sid=89a28d13-5827-4b69-9e6b-28b060f68a08%40sessionmgr114&hid=109

Gargallo, B. (2008). Estilos de docencia y evaluación de los profesores universitarios y su influencia sobre los modos de aprender de sus estudiantes. *Revista española de pedagogía*, Año LXVI, 241, 4, 5-446.

Grasha, A. (2002). The dynamics of One-on One Teaching. College Teaching, *50*(4), 139-146.

Hernández, R. (2001). Mediación en el aula. Recursos, estrategias y técnicas didácticos. San José, Costa Rica: EUNED.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación [5ª Ed.]. México: McGraw Hill.

Martínez, O. (Junio, 2007). Semblanzas de la línea de investigación: Dominio Afectivo en Educación Matemática. *Paradigma*, *28(*1), 237-252. Recuperado de http://www.scielo.org.ve/pdf/pdg/v28n1/art12.pdf

Ministerio de Educación Pública (2012). Programas de Estudio de Matemática. San José, Costa Rica.

Real Academia Española (2014). Diccionario de la Lengua Española. Consultado en línea en www.rae.es

Román, M. (2007). Investigación Latinoamericana sobre enseñanza eficaz. En H. Valdés (Coord.), *Primer Congreso de Eficacia Escolar y factores asociados de América Latina y El Caribe* (209-225). Santiago, Chile: Oficina Regional de Educación de la UNESCO para América Latina y el Caribe (OREALC/UNESCO Santiago) y el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE).

Salazar, S. (2012a). El conocimiento pedagógico del contenido como modelo de mediación docente. San José, Costa Rica: Coordinación Educativa y Cultural (CECC/SICA).

Salazar, S. (2012b). El conocimiento pedagógico del contenido como modelo de mediación docente *[multimedio]*. San José. C.R.: Coordinación Educativa y Cultural.

Vázquez, P. (2000). Los paradigmas en la psicología de la educación: una mirada introductoria. México: Instituto de Ciencias Sociales y Administración, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

Ethnomathematics + Modeling: An Ethnomathematical Approach

Milton Rosa
Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
milton@cead.ufop.br

Abstract: The application of ethnomathematical techniques and tools of modeling allow us to examine systems taken from reality and give us insight into forms of mathematics done in a holistic way. The pedagogical approach that connects a diversity of cultural forms of mathematics is best represented through ethnomodeling, which is a process of translation and elaboration of problems and the questions taken from academic systems. Seen in this context, we would like to broaden the discussion of possibilities for the inclusion of ethnomathematics and associated ethnomodeling perspectives that respect the social diversity of distinct cultural groups with guarantees for the development of understanding different ways of doing mathematics through dialogue and respect.

Key words: Ethnomathematics, Ethnomodeling, Mathematical Modeling.

Introduction

Culture and society considerably affect the way individuals understand mathematical concepts. Thus, it is possible to use and apply significant amounts of knowledge in diverse cultural forms in order to enable the expansion of and familiarity with the diversity of the scientific and mathematical knowledge developed and acquired by members of distinct cultural groups. Ethnomathematics has demonstrated how mathematics is made of many diverse and distinct cultural traditions, not just those emerging from the Mediterranean.

In this regard, each cultural group has developed unique ways of incorporating mathematical knowledge and has often come to represent given cultural systems, especially in ways that members of cultural groups quantify and use numbers, incorporate geometric forms and relationships, and measure and classify objects. This means that the process of teaching and learning mathematics should include and place equal importance upon the knowledge originating from indigenous and non-Western contexts.

For all these reasons, each cultural group has developed unique and distinct ways to *mathematize* their own realities. In this context, mathematization is a process in which individuals from different cultural groups come up with different mathematical tools that can help them to organize, analyze, comprehend, understand, model, and solve problems located in the context of real-life situations. These tools allow them to identify and describe specific mathematical ideas, concepts, procedures, and practices in a general context by schematizing, formulating, and visualizing a problem in different ways, discovering relations and regularities, and transferring a real world problem to a mathematical idea through mathematization.

Inclusion of a diversity of ideas brought by students from other cultural groups can give confidence and dignity to these students, while allowing them to see a variety of perspectives and provide them a base in which they are able to learn academic-Western mathematics (Bassanezi, 2002). Equally important is the search for alternative methodological approaches.

As Western mathematical practices are accepted worldwide, it is paramount to record historical forms of mathematical ideas that occur in different cultural contexts before many of these ancient or local practices are lost to time. One alternative methodological approach is *ethnomodeling*, which may be considered the practical application of ethnomathematics, which adds the cultural perspective to modeling concepts.

When justifying the need for a culturally bound view on mathematical modeling, our sources are rooted on the theory of ethnomathematics and modeling (D'Ambrosio, 1990; Rosa & Orey, 2003). We also argue that recognizing cultural differences in mathematics would reveal new perspectives on the scientific questioning methods. Research of culturally bound modeling ideas addresses the problem of mathematics education in non-Western cultures by bringing the cultural background of students into the mathematics curriculum in order to connect the local-cultural aspects of the school community into the teaching and learning of mathematics (Rosa & Orey, 2010a). On the other hand, the same local views may be used also in global collaborations, possibly widening other views of mathematics.

Ethnomathematics

Ethnomathematics as a research paradigm is much wider than traditional concepts of mathematics and ethnicity and any current sense of multiculturalism. D'Ambrosio (1990) affirmed that *ethno* is related to distinct groups identified by cultural traditions, codes, symbols, myths, and specific ways of reasoning and inferring. In so doing, ethnomathematics may be considered as the way that various cultural groups mathematize their own reality because it examines how both mathematical ideas and mathematical practices are processed and used in daily activities. It can be also described as the arts and techniques developed by students from diverse cultural and linguistic backgrounds to explain, to understand, and to cope with their own social, cultural, environmental, political, an economic environments (D'Ambrosio, 1992).

In accordance to Barton (1996), ethnomathematics embraces the mathematical ideas, thoughts and practices as developed by all cultures. From his perspective, a body of anthropological research has come to focus on both the intuitive mathematical thinking and the cognitive process that are largely developed in locals and minority cultural groups. Ethnomathematics may also be considered as a program that seeks to study how students have come to understand, comprehend, articulate, process, and ultimately use mathematical ideas, concepts, and practices that may solve problems related to their daily activities.

Seen in this context, the focus of ethnomathematics consists essentially of a critical analysis of the generation and production of the mathematical knowledge and intellectual processes, the social mechanisms in the institutionalization of knowledge; and the diffusion of this knowledge (Rosa & Orey, 2006). In this much more holistic context of mathematics that uses an anthropological perspective to include diverse perspectives, patterns of thought, and histories, the study of the systems taken from reality help students to come to reflect, understand, and comprehend extant relations among all of the components of the system. Rosa (2000) defined ethnomathematics as the intersection of cultural anthropology, mathematics, and mathematical modeling, which is used to help students to translate diverse mathematical ideas and practices found in their communities.

The unique cultural background of each student represents a set of values and the unique way of seeing the world as it is transmitted from one generation to another. Detailed studies of mathematical ideas and practices of distinct cultural groups most certainly allow us to further our understanding of the internal logic and beliefs of diverse group of students.

Ethnomathematics and Ethnomodeling

Ethnomodeling is a process of elaboration of the problems and questions that grow from real situations that form an image or sense of an idealized version of the *mathema*. The focus of this perspective essentially forms a critical analysis of the generation and production of knowledge (creativity), and forms an intellectual process for its production, the social mechanisms of institutionalization of knowledge (academics), and its transmission (education).

According to D'Ambrosio (2000), "this process is modeling" (p. 142). In this perspective, by analyzing reality as a whole, this holistic context allows those engaged in the modeling process to study systems of reality in which there is an equal effort made by them to create an understanding of all components of the system as well as the interrelationships among them (D'Ambrosio, 1993; Bassanezi, 2002).

The use of modeling as pedagogical action for an ethnomathematics program values previous knowledge and traditions by developing student capacity to assess and translate the process by elaborating a mathematical model in its different applications and contexts. By having started with the social context, reality and interests of the students and not by enforcing a set of external values and curriculum without context or meaning for the learners.

Bassanezi (2002) characterizes this process as "ethno-modeling" (p. 208), and defines ethnomathematics as "the mathematics practiced and elaborated by different cultural groups, and involves the mathematical practices that are present in diverse situations in the daily lives of members of these diverse groups" (p. 208).

In considering ethnomodeling as tool to uncover and study ethnomathematics, teaching is much more than the transference of knowledge because teaching becomes an activity that introduces the creation of knowledge (Freire, 1998). This approach in mathematics education is the antithesis of turning students into containers to be filled with information (Freire, 1970).

In our opinion, it is necessary for school curriculum, to translate the interpretations and contributions of ethnomathematical knowledge into systemized mathematics because students will be able to analyze the connection between both traditional and non-traditional learning settings.

Examples of Ethnomodeling

According to Bassanezzi (2002), mathematical modeling uses mathematics as a language for understanding, simplification and resolution of real world problems and activities. Data gleaned from these studies are used to make forecasts and modifications pertaining to the objects initially studied. In this regard, one of the traditional definitions of a mathematical model is a body of symbols and mathematical relationships that represent the studied object, which is composed by a system of equations or inequalities, algebraic expressions, differentials, and integrals that are obtained through the establishment of a relationship between considered essential variables of analyzed phenomena (Bassanezzi, 2002).

It is the systematic study of algorithmic processes, theory, analysis, design, efficiency, implementation, and application, which describes and transforms information. This definition of the Western mathematical modeling includes all data structures, which is a part of both *theory* and *design*; algorithms that deals with analysis and efficiency; mechanical and linguistic realizations, which deals with implementation; and applications that naturally applies the mathematical ideas and concepts to solve problems.

Thus, Western mathematical activities can be regarded as modeling by this definition and due to its cultural roots in the non-Western society it can be defined as ethnomodeling in the non-Western settings. For example, the importance of a non-traditional view on mathematics is emphasized with the emergence of the new types of problems related to artificial intelligence.

A characteristic of these new problems is that they cannot be solved using syllogistic, that is, classical Aristotelian logic, but need multivalued logic, often called *fuzzy logic*, which is the logic that underlies inexact or approximate reasoning (Zadef, 1984). According to Ascher and Ascher (1986), multivalued logic is used in attempts to formalize human-like processes that are culturally bound.

In this perspective, Zadef (1984) affirmed that the Hindu, Chinese and Japanese cultures have contributed to the development of fuzzy logic more than Western science because, in these cultures, there is a greater acceptance of a truth-value that is neither perfect truth nor perfect falsehood.

D'Ambrosio (2002) commented about an ethnomathematical example that naturally comes across as having a mathematical modeling methodology. In the 1989-1990 school year, a group of Brazilian teachers studied the cultivation of vines that were brought to Southern Brazil by Italian immigrants in the early twentieth century. This was investigated because the cultivation of wines is linked with the culture of the members of the cultural group in that region in Brazil. Both Bassanezi (2002) and D'Ambrosio (2002) believed that this wine case study is an excellent example of the connection between ethnomathematics and mathematical modeling through ethnomodeling (Rosa & Orey, 2007a).

Ethnomodels

In general, a model is a representation of an idea, a concept, an object, or a phenomenon (Gilbert, Boulter & Elmer, 2000). We define ethnomodels as cultural models that are pedagogical tools used to facilitate the understanding and comprehension of systems that are taken from reality of cultural groups. In this regard, ethnomodels can be considered as external representations that are precise and consistent with the scientific and mathematical knowledge that is socially constructed and shared by members of specific cultural groups.

From this perspective, the primary objective for the elaboration of ethnomodels is to *translate* the mathematical ideas, concepts, and practices developed by the members of distinct and diverse cultural groups.

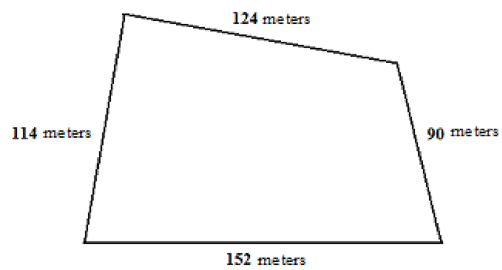
Measuring Land

Knijnik (1996) proposed activities about the demarcation of land from research work with the participants of the Landless Peoples' Movement (Movimento dos Sem Terra - MST) in Southern Brazil. The demarcation of land activity was about the method of *cubação* of the land, which is a traditional mathematical practice applied by the participants of this movement. Flemming, Flemming Luz and Collaço de Mello (2005) defined the term *cubação* of the land as the solution of "problems of the measurement of land using diverse shapes" (p. 41).

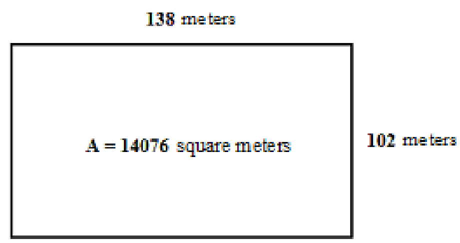
Thus, the use of the practice of *cubação* of the land as a pedagogical proposal to elaborate activities for the teaching and learning of mathematics shows the importance of the contextualization of problems in the learning environment of ethnomodeling through the elaboration of ethnomodels.

An Ethnomodel to Calculate the Area of the Land

Flemming, Flemming Luz e Collaço de Mello (2005) presented the following problem to calculate the area of figures with quadrilateral shapes: *Calculate the a area de land with a quadrilateral shape that measures 114 meters x 152 meters x 90 meters x 124 meters" (p. 42).*



Thus, the mathematical knowledge of the Landless People can be represented by a model that transforms "the shape of the given land in a [rectangle] of 138 meters x 102 meter with an area of 14076 square meters.



The model of this mathematical practice can be explained by the following ethnomodel:

Transform the shape of the irregular quadrilateral in a rectangle whose area can be easily determined through the application of the formula $A = b \bullet h$.

Determine the dimensions of the rectangle by calculating the mean of the two opposite sides of the irregular quadrilateral.

$$Base = \frac{152 + 124}{2} = 138 meters$$

$$Height = \frac{114 + 90}{2} = 102 meters$$

In order to determine the area of this irregular quadrilateral, it is necessary to determine the area of the rectangle.

$$A = b \bullet h$$
$$A = 138 \bullet 102$$
$$A = 14076 m^2$$

Regarding to this problem, there is another ethnomodel proceeding from the mathematical knowledge of the Landless People that can be explained through another ethnomodel. According to Flemming, Flemming Luz and Collaço de Mello (2005), the irregular shaped quadrilateral parcel presented in this example can also be transformed in to "a square with sides of 120 meters, therefore with an area of 14400 square meters (p. 42). It is possible to observe that the value of 120 was calculated by adding the dimensions of the quadrilateral and then dividing it by four, which is the number of sides of the irregular quadrilateral.

In this context, Bassanezi (2002) stated that a model is efficient when we realize that we are only working with approximations of reality. Thus, Flemming, Flemming Luz and Collaço de Mello (2005) affirmed that from the view point of mathematics, both methods present an approximated calculation of the area the irregular quadrilateral that fully satisfy the necessities and the life history of the participants of this specific cultural group.

Modeling the Tipi

Spatial geometry is inherent by the shape of the tipi and it was used to remind, indeed symbolize the universe in which the Plains Peoples lived. The word tipi from the Sioux language refers to a conical skin tent or dwelling common among the prairie peoples.

According to Orey (2000), the majority of Sioux tribes use the tripod foundation or three-pole foundation because it is stronger and offers a more firm foundation than a quadripodal or four-pole tip foundation.

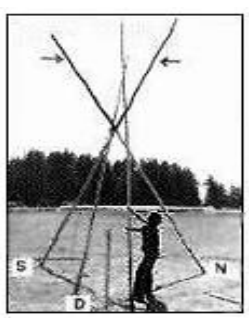
Tripodal versus Quadripodal Foundations of the Tipi

An ethnomodel explains why a tripod is more flexible than a quadripodal or four-legged structure. In this regard, imagine three points, A, B, and C that are not collinear. There are an infinite number of planes that pass through points A & B that contain the straight line AB. Only one of these planes also passes through point C therefore we can say that three points are not collinear if they determine one plane.

This means that these non-collinear points exist on one plane and that three collinear points do not determine the only plane. Hence, given any three non-collinear points, there is only one plane to which exist these same three points. This can be explained using the postulate for the determination of a plane. In other words, given any three non collinear points, there is only one plane to which exists these same three points.

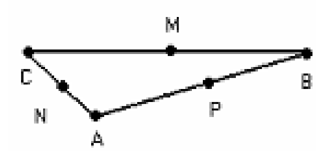
For example, in the 4-legged table, it has the possibility of the extremity of one of the legs that do not belong to the same plane. A table that has 3 legs, therefore, is always balanced. Similar to a three-legged table, the structure of the tipi appears to be perfectly adapted for the harsh environment in which it was used. It had the advantage of providing a stabile structure, was lightweight and portable.

At the same time it withstood the prevailing winds and extremely variable weather of this region. Let us look at this information mathematically.

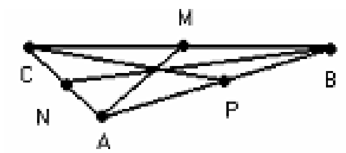


The base formed by the tripod is ΔABC.

The midpoints of each of the sides of ΔABC are points M, N, and P.



It is possible to match each vertex of ΔABC to the midpoint of each opposite sides that gives us the straight lines AM, BN, and CP.



These straight lines form three medians, which are the straight lines connecting the midpoint of each opposite side of the triangle and its vertex. The medians intersect at only one point called centroid. Archimedes demonstrated that medians of a triangle meet at its balance point or center of gravity, which is the centroid of the triangle. Native Americans place their fire and altar at this point in the tipi. Cartographers call this point the geographic center (Orey, 2000). The tipi cover is folded in half and the poles are laid together before tying them to form the tri or quadripodal frame, which forms the foundational base for the structure.

Final Considerations

Any study of ethnomathematics and mathematical modeling represents a powerful means for validating a student's real life experience, and gives them the tools to become critical participants in society. Educators should be empowered to analyze the role of what Borba (1990) refers to as a student's ethnoknowledge in the mathematics classroom.

In this regard, ethnoknowledge is acquired by students in the pedagogical action process of learning mathematics in a culturally relevant educational system. In this process, the discussion between teachers and students about the efficiency and relevance of mathematics in different contexts should permeate instructional activities. The ethnoknowledge that students develop must be compared to their academic mathematical knowledge. In this process, the role of teachers is to help students to develop a critical view of the world by using mathematics.

There exists a need to create a new role to mathematics instruction that empowers students to understand power and oppression more critically by considering the effect of culture on mathematical knowledge by working with their students to uncover the distorted and hidden history of mathematical knowledge. This perspective forms the basis for significant contributions of a Freirean-based ethnomathematical perspective in re-conceiving the discipline of mathematics and in a pedagogical practice.

The use of Freire's (1970) dialogical methodology is seen as essential in developing the curricular praxis of ethnomodeling by investigating the ethnomathematics of a culture in constructing a curriculum with people from other cultures to create curricula that enable the enrichment for all people's knowledge of mathematics.

Ethnomodeling seems to be important especially in new fields of research such as artificial intelligence and fuzzy logic. Current research does not give ethnomodeling of non-Western cultures much chance to introduce new views into old themes. Our opinion is that different cultures can contribute to the development of mathematical concepts and ideas and enrich them in the field of Mathematics Education.

In addition to the development of mathematical modeling and education, ethnomodeling holds another equally important objective. As D'Ambrosio (1997) recognizes that ethnomathematics has the common goal of equity and dignity. In this regard, the study of ethnomodeling may encourage the ethics of respect, solidarity, and co-operation across cultures.

Seen in this context, we would like to broaden the discussion of possibilities for the inclusion of ethnomathematics and mathematical modeling perspectives that respect the social and cultural diversity of all people with guarantees for the development of understanding our differences through dialogue and respect. This is how ethnomodeling can empower students against all kinds of domination and oppression.

References Bibliographic

Barbosa, J. (1997). O que pensam os professores sobre a modelagem matemática? [What do teachers think on mathematical modeling?]. *Zetetiké, 7*(11), 67-85.

Barton, B. (1996). Making Sense of Ethnomathematics: Ethnomathematics is Making Sense. *Educational Studies in Mathematics 31*(1-2), 201-33.

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática* [Teaching and learning with mathematical modeling]. São Paulo, SP: Editora Contexto.

Biembengut, M. (1999). *Modelagem matemática e implicações no Ensino-aprendizagem de matemática* [Mathematical modeling and its implications in teaching and learning mathematics]. Blumenau, SC: Editora da FURB.

Biembengut, M. (2000). *Modelagem & etnomatemática: Pontos (in)comuns* [Modeling & ethnomathematics: (Un)common points]. In. Domite, M. C. (Ed.). Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm-1. São Paulo, SP: FE-USP, 132 -141.

Borba, M. (1990). Ethnomathematics and education. *For the Learning of Mathematics, 10*(1), 39-43.

Cross, M., & Moscardini, A. (1985). *Learning the art of mathematical modeling*. West Sussex, England: Ellis Horwood Limited.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. For the *Learning of Mathematics, 5*(1), 44-48.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática* [Ethnomathematics]. São Paulo, Brazil: Editora Ática.

D'Ambrosio, U. (1992). Ethnomathematics: A research Programme on the History and Philosophy of Mathematics with Pedagogical implications. *Notices of the American Mathematics Society, 39*. 1183-85.

D'Ambrosio, U (1993). Etnomatemática: Um Programa [Ethomathematics: A program]. *A Educação Matemática em Revista, 1*(1), 5-11

D'Ambrosio, U. (2000). Etnomatemática e modelagem [Ethnomathematics and modeling]. In. Domite, M. C. (Ed.). *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm-1*. São Paulo: FE-USP, 142.

Ferreira, E. (2004). Os índios Waimiri-Atroari e a etnomatemática [The indigenous people Waimiri-Atroari and ethnomathematics]. In Knijnik, G.; Wanderer, F., Oliveira. C. J. (Eds.). *Etnomatemática: Currículo e Formação de Professores* [Ethnomathematics: Curriculum and Teacher's Education]. Santa Cruz do Sul, RS: EDUNISC.

Freire, P. (1970). Pedagogia do Oprimido [Pedagogy of the Oppressed]. Rio de Janeiro, Brasil: Paz e Terra.

Freire, P. (1998). Pedagogy of freedom: Ethics, democracy, and civic courage. New York: Rowman and Litttlefield.

Hodgson, T., & Harpster, D. (1997). Looking back in mathematical modeling: Classroom observations and instructional strategies. *School Science & Mathematics, 97*(5), 260-267.

Monteiro, A. (2004). Etnomatemática: papel, valor e significado [Ethnomathematics: role, value, and meaning]. In Ribeiro, J. P., Domite, M. C. S., & Ferreira, R. (Eds.). *Etnomatemática: papel, valor e significado*. São Paulo: Zouk.

Orey, D. C. (2000). The ethnomathematics of the Sioux tipi and cone. In Selin, H. (Ed.). *Mathematics Across Culture: the History of Non-Western Mathematics*. Dordrecht, Netherlands: Kulwer Academic Publishers, 239–252.

Orey, D. & Rosa, M. (2003). Vinho e queijo: Etnomatemática e modelagem! [Wine and cheese: Ethnomathematics and modeling!] *BOLEMA, 16*(20), 1-16.

Rios, D. (2000). Primero etnogeometría para seguir con etnomatemática. In. Domite, M. C. (Ed.). *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm-1*. São Paulo, SP: FE-USP, 367 - 375.

Rosa, M. (2000). From reality to mathematical modeling: A Proposal for using ethnomathematical knowledge. Unpublished master thesis. California State University, Sacramento.

Rosa, M., & Orey, D. (2006). Abordagens atuais do programa etnomatemática: delinenando-se um caminho para a ação pedagógica [Current approaches in ethnomathematics as a program: Delineating a path toward pedagogical action]. *Bolema*, *19*(26), 19-48.

Rosa, M., & Orey, D. (2007a). Cultural assertions and challenges towards pedagogical action of an ethnomathematics program. *For the Learning of Mathematics, 27*(1), 10-16.

Rosa, M., & Orey D. (2007b). Etnomatemática: um enfoque histórico-antropológico [Ethnomathematics: A historical-anthropological approach]. *Revista de Educação Matemática*, *10*(11, 12), 29-34.

Zaslavsky, C. (1996). The multicultural math classroom: Bringing in the world. Portsmouth, ME: Heinemann.

Experiencia docente en la Enseñanza de la Probabilidad por habilidades matemáticas en décimo año

M.Sc. Federico Mora Mora
Universidad Nacional de Costa Rica
federico.mora.mora@una.cr

Lic. Erick Pizarro Carrillo
Universidad Nacional de Costa Rica
erick.pizarro.carrillo@una.cr

Lic. Danny Ramírez Lobo
Universidad Nacional de Costa Rica
danny.ramirez.lobo@una.cr

Resumen: El cambio en los programas de estudio de Matemática motiva la necesidad de la elaboración de nuevas estrategias didácticas para la enseñanza de la Probabilidad. Mediante esta experiencia se pretende brindar a los docentes de secundaria una propuesta para el abordaje de la Probabilidad durante el desarrollo de sus clases.
Se expone la contextualización del cambio en los programas, tomando en cuenta entrevistas a los autores de la Reforma Matemática, asesores de Matemática y docentes que han sido capacitados y se mencionan los materiales didácticos disponibles tanto físicos como digitales más recientes.
Concluida esta etapa se presenta la unidad didáctica propuesta en la cual mediante situaciones de aprendizaje lúdicas se construyen los conceptos y habilidades matemáticas del tema.
Finalmente se diserta la puesta en práctica de la unidad didáctica con estudiantes de secundaria de décimo año, se enuncian recomendaciones y sugerencias para el trabajo de aula.

Palabras Clave: Probabilidad, Matemática, unidad didáctica, reforma matemática.

Introducción

Desde mayo del año 2012, el Ministerio de Educación Pública (MEP) aprobó nuevos programas en Matemática, donde se propone un cambio de visión para romper con el mito de que las matemáticas son difíciles y lograr superar los prejuicios que se tienen en la sociedad. La estrategia consiste en la participación activa de los estudiantes en la resolución de problemas asociados a su entorno físico, social o cultural, para la manipulación de objetos matemáticos y lograr la construcción de aprendizajes al pasar desde lo concreto hacia lo abstracto. Esto permitirá a los estudiantes realizar procesos matemáticos de una mayor complejidad en lugar de realizar operaciones mecánicas.

Se seleccionaron cinco áreas matemáticas donde se organizan los programas de estudio: números, medidas, geometría, relaciones y álgebra, y estadística y probabilidad. Muchas de los temas de estas áreas se están implementando como respuesta a las sugerencias y recomendaciones de expertos y según las nuevas tendencias educativas internacionales.

En particular, la Probabilidad adquiere mayor importancia en los nuevos programas. A partir de los años noventa se ha generalizado y potenciado su uso por su notable presencia en la vida, debido a que alimenta el sentido de la competencia matemática alrededor de la descripción de la realidad y el cultivo de la resolución de problemas en contextos diversos.

El reciente cambio en los programas de estudio de Matemática conlleva una serie de procesos que van desde capacitaciones a docentes, creación de materiales didácticos y la elaboración de estrategias didácticas para la enseñanza de los temas nuevos de las áreas.

Esta ponencia pretende brindar a los docentes de secundaria una propuesta para el abordaje de la Probabilidad durante el desarrollo de sus clases. Para ello se expone la contextualización del cambio en los programas tomando en cuenta entrevistas a especialistas en la materia, se mencionan los materiales didácticos disponibles tanto físicos como digitales, se presenta una unidad didáctica realizada con estudiantes de décimo año de secundaria y se enuncian recomendaciones para el trabajo de aula con la unidad didáctica propuesta.

Contextualización de la Probabilidad en los nuevos programas

La estadística y probabilidad adquieren mucha más importancia en este plan de estudio que en los anteriores, puesto que en ellos se menciona que es un área que permite visualizar mejor el papel de las matemáticas, contribuye con actitudes positivas en torno a esta disciplina y es un poderoso medio para la comprensión y organización de la información.

Para conocer con más detalle las razones por las cuales se pretende desarrollar y poner en la práctica la Probabilidad en nuestras aulas, se realizaron una serie de entrevistas a personas involucradas en los procesos: Edwin Chaves Esquivel, miembro del Comité de la Reforma de la Educación Matemática, Carlos Salazar Padilla, Asesor Nacional de Matemática y dos docentes de secundaria capacitados.

Se les consultó a los expertos la importancia de introducir la probabilidad en secundaria y comentaron que es una temática ausente del currículo nacional, que permite al estudiante una cultura en cuanto al manejo de situaciones aleatorias y está presente en los sistemas educativos a nivel internacional. Con respecto a los temas que se pretende desarrollar, están el concepto de situaciones aleatorias deterministas, eventos aleatorios, espacio muestral, ley de los grandes números y axiomas y propiedades básicas de Probabilidad.

Para lograr la adecuada inserción de estos temas en secundaria, se organizaron procesos de formación continua preparados por los miembros de la comisión de la Reforma, en donde el MEP contrató especialistas para impartir las capacitaciones a un grupo formado por los asesores de matemática y ochenta profesores en servicio escogidos, los cuales se encargaron posteriormente de facilitar los cursos a otros docentes en diferentes regiones.

Otra de las consultas realizadas fue si se consideró el perfil del docente en las capacitaciones y todos coincidieron en que ellos deben tener la formación para dar los nuevos contenidos y que una vez instaurados los programas, los profesores lo van a ir implementando en el proceso educativo.

Por último, se preguntó por los materiales didácticos que hay disponibles y según los encuestados no hay un libro oficial y solo existe un folleto elaborado por miembros del comité de los nuevos programas, que se utilizó en las capacitaciones y está en formato digital en el sitio web de la Reforma de la Matemática. Sin embargo, a pesar de que los programas son recientes y existe poca bibliografía oficial disponible distinta a la realizada por el MEP, existen varios libros de texto nuevos elaborados por editoriales y sitios web de consulta.

Unidad Didáctica

PROBABILIDAD

Habilidades Específicas

1. Deducir mediante situaciones concretas las reglas básicas (axiomas) de las probabilidades.
2. Deducir las propiedades relacionadas con la probabilidad de la unión y del complemento.
3. Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución de problemas e interpretar los resultados generados.
4. Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.

Contenidos

Reglas básicas de las probabilidades:

- $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento A.
- Probabilidad del evento seguro es 1 y del evento imposible es 0.
- $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$, para eventos A y B mutuamente excluyentes.
- Probabilidad de la unión: $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B) - P(A \cap B)$.
- Probabilidad del complemento: $P(A^C) = 1 - P(A)$.

Situaciones de aprendizaje

◊ Se implementará el aprendizaje lúdico mediante el juego ruleta de casino.
◊ Los estudiantes jugarán de forma libre bajo la supervisión del docente.
◊ El docente hace preguntas sobre formas de ganar y posibles combinaciones de resultados.
◊ Se introduce el concepto de Probabilidad y se institucionalizan los resultados obtenidos durante el juego.

Juego “Ruleta”

Es un juego de azar donde los participantes juegan contra el casino.

La ruleta europea consta de 37 números, los naturales del 1 al 36, junto con una casilla 0. Se alternan los colores rojo y negro para los distintos números, excepto para el cero, que es de color verde.

Con esta actividad los estudiantes pueden aprender a manejar el cálculo de probabilidades y de las reglas de probabilidad de eventos.

Materiales

Se tiene un tapete, donde se realizan las apuestas. En dicho tapete, se presentan de forma ordenada, los 36 números en tres columnas de doce números cada una, también el cero, y otras casillas que ofrecen la posibilidad de apostar a los números pares e impares, rojos y negros, o bien, a los números del 1 al 18 o del 19 al 36. Se necesitan las fichas para marcar las apuestas.

Se necesita una tómbola o ruleta para lanzar el número ganador. Pero queda a disposición del docente elaborar la forma de elegir el número ganador.

Fuente: Creación propia

Experiencia docente

La puesta en práctica de esta unidad se llevó a cabo en dos escenarios.

Escenario 1: Colegio Público diurno

Se trabaja con estudiantes de un Colegio Público diurno de Heredia, primeramente se inicia con la explicación breve del juego, luego se procede a realizar grupos de seis personas y estos proceden a jugar durante unos 15 minutos para que se familiaricen con el juego. Una vez concluida esta primera etapa interviene el docente y procede a interactuar con los estudiantes acerca del juego.

Fuente: Colegio Público Diurno

Escenario 2: Estudiantes de Proyecto de Educación Abierta

La población meta en este caso fueron los estudiantes de la modalidad de educación abierta que deben conocer el concepto de probabilidad desde octavo año pero que por los recientes cambios en los programas no han trabajo con estos conceptos. Ante la necesidad de llevarles los contenidos de una forma más amena para ellos se llevó la ruleta. Algunos ya conocen el juego y hasta las reglas lo que hace que el desarrollo de la lección sea más dirigido hacia la Probabilidad.

Fuente: Proyecto Educación Abierta

Descritos ambos escenarios se explican las actividades.

Se inicia con un lanzamiento de prueba y los estudiantes apuestan a su decisión sin hablar de probabilidades.

Inicia la participación del docente con preguntas como:

- ¿Cuántas posibilidades tiene de ganar una persona que apostó a un solo número?
- ¿Cuántas posibilidades tiene de ganar alguien que apostó a los pares?

Y se analiza de los estudiantes jugadores, cual tiene las posibilidades más altas de ganar.

Con estas preguntas se evidencia que las posibilidades no son iguales para todos los participantes del juego y entre ellos se dan ideas para poder ganar o poder hacer apuestas más probables.

Se define en este momento el concepto de Probabilidad Laplaciana o Ley de Laplace al ser todos eventos equiprobables en la ruleta, como:

$$P(A) = \frac{cantidad\ de\ eventos\ favorables}{total\ de\ eventos\ posibles}$$

En este momento se hablará de probabilidades para cada una de las apuestas.

Se sigue el juego con preguntas como:

- ¿Cuál es la probabilidad de ganar si se le apuesta al 0?
- ¿Cuál es la probabilidad de ganar si se apuesta a dos números independientes?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un mismo número gane dos veces consecutivas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un número no sea menor que 24?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número rojo o negro?

Se introduce el concepto de unión de eventos y de las probabilidades al ser eventos mutuamente excluyentes y se introduce el concepto de complemento de un evento, estos conceptos se introducen y se calculan sus probabilidades enunciándose más tarde como las reglas básicas.

Evaluación

Dado que se busca que el estudiante deduzca y aplique las propiedades de las probabilidades se puede proponer la siguiente evaluación para el trabajo de aula:

a. ¿Cuál es la probabilidad de ganar si se le apuesta a 8 números?
b. Si le apostara tanto al color negro como el rojo ¿sería un evento determinista?
c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el cero o un número rojo?
d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor a 18 y que este sea negro?

Con este tipo de preguntas se pretende que el estudiante logre madurar las habilidades alcanzadas en el juego de la ruleta y a la vez permita corregir errores que se presenten, con la finalidad de interpretar situaciones y argumentar conclusiones que favorezcan la toma decisiones.

En lo que concierne a las pruebas escritas se debe seguir la misma línea trabajada en clase, no se puede salir de lo planteado en las habilidades. Si se desea lograr un peldaño más en cuanto análisis de problemas estos deben ser propuestos como extra clase porque le permite al estudiante analizar con tiempo el problema y realizar consultas al docente.

Para finalizar la actividad se brinda una capsula histórica acerca del juego.

"En 1913, específicamente un 18 de agosto, sucedió un hecho poco común en una de las ruletas del casino de Montecarlo, cayó 26 veces consecutivas el color negro, lo cual es conocida como la falacia de Montecarlo o falacia del jugador. Los jugadores presentes esa noche dejaron de jugar en las otras mesas para observar un hecho histórico, pues nunca habían observado una serie repetitiva tan larga. Los jugadores de esa mesa perdieron mucho dinero esa noche del 18 de agosto, por una percepción errónea de las probabilidades, pues consideraban que al caer el negro varias veces consecutivas estaría próximo a caer el color rojo por lo tanto realizaban grandes apuestas al color rojo, precisamente esta es la falacia ya que un evento es independiente del otro por lo tanto la probabilidad de obtener rojo o negro para cada jugada sigue siendo la misma".

El objetivo de la lectura final de la actividad es hacer uso de la historia de la matemática para motivar al estudiante en el estudio del tema y mostrar la importancia que ha tenido en el pasado. Se recomienda discutir con los estudiantes los aspectos que les llame la atención y al docente hacer un cierre de manera que se reflejen los resultados logrados.

Conclusiones

El objetivo principal del trabajo realizado fue presentar a los docentes de secundaria una propuesta para introducir el tema de probabilidad a estudiantes de décimo año, por medio de actividades lúdicas donde el estudiante mediante el juego con situaciones cotidianas manipulara los conceptos en forma intuitiva y los aprendiera con la orientación del profesor.

Se pudo observar que la mayoría de los estudiantes disfrutó la actividad pues el hecho de tener que pensar y hacer pruebas se les hizo muy ameno y lograron aprender los conceptos de manera sencilla tal y como se propone en los nuevos programas educativos del MEP. Se observó a los discentes más preocupados por la generación de conocimiento que por otras actividades; es decir, ningún estudiante estuvo distraído con aparatos electrónicos ni se encontraron hablando de otros temas que no estuvieran relacionados. Además, con la lectura en el cierre de la actividad se presentó la importancia del tema a través de la historia y se creó un ambiente de discusión donde se logra una retroalimentación para el educador.

Los estudiantes aprendieron que con el juego de la ruleta se puede encontrar utilidad al tema estudiado y es muy común en la vida cotidiana para la toma de decisiones, también se comprobó que disfrutaron jugando y comentaron que este tipo de aprendizaje es muy enriquecedor, pues ellos fueron capaces de descubrir los conocimientos por sí mismos de manera autodidacta y utilizarlos de manera práctica.

Aunque se trabajó con dos escenarios distintos, en ambos se lograron las habilidades propuestas, por lo cual es una situación de aprendizaje que se puede adecuar a la población que se desee. Por ejemplo, el docente puede adaptar la actividad mediante una trasposición didáctica similar a la presentada para introducir el concepto de probabilidad laplaciana en otros niveles como en octavo año.

Una vez finalizada la actividad se pueden proponer problemas donde apliquen las propiedades de las probabilidades y asociarlos con las operaciones de conjuntos, para lograr las habilidades generales del área de Probabilidad.

En conclusión, la actividad cumplió con los objetivos propuestos. De parte del docente se lograron abarcar los contenidos en la unidad didáctica en un tiempo prudencial y se pudo confirmar que los estudiantes aprendieran las reglas básicas de probabilidad. Y por parte de los estudiantes, se lograron los objetivos didácticos y se disfrutaron las situaciones de aprendizaje.

Referencias Bibliográficas

Barboainu C, Guerreo R (2008). *Probabilidades y utilidades en la ruleta.* Editorial INFAROM.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). Programas de estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado. Costa Rica: autor.

Paenza, A. (2012). Matemática para todos. Primera edición, Argentina. Buenos aires: sudamericana.

Formación de maestros: "conocimiento matemático para la enseñanza"

José Wilde Cisneros
Universidad de Antioquia
jose.cisneros@udea.edu.co

Resumen: En este taller se discute sobre el conocimiento matemático para la enseñanza, que pone en juego el profesor durante el proceso educativo; se plantean algunas tareas matemáticas en diferentes contextos. Se presenta la fundamentación teórica de tareas vinculadas con el modelo del "conocimiento matemático para la enseñanza" (MKT) propuesto por Ball (2005) y colaboradores. Se aplica el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), en las categorías del Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) y el Conocimiento Especializado (CSK). Se propone una herramienta de análisis epistémico para identificar conocimientos presentes en las tareas asociadas a diferentes contextos.

Palabras clave: Conocimiento matemático para la enseñanza, formación de maestros, análisis epistémico, instrumentos (artefactos).

Contextualización

Las tareas que promuevan un aprendizaje significativo en los estudiantes desde el punto de vista matemático, constituye uno de los propósitos a los que se enfrenta el maestro desde su formación inicial y durante su práctica profesional. A partir de determinada tarea, siempre pueden formular otras diferentes y contextualizadas que, generalmente el maestro diseña o escoge (de libros de texto) y actúa en función del desarrollo de la clase y la respuesta de los estudiantes.

El foco de interés en este taller se ubica en el "conocimiento matemático para la enseñanza" que debe tener un maestro, el conocimiento que dispone para la enseñanza de las matemáticas. Se pretende determinar atributos que manifiestan los maestros a partir de las tareas en el aula, con la intención de profundizar sobre el conocimiento para la enseñanza que es específico del profesor de matemáticas.

Durante el taller se pretende argumentar y debatir los conocimientos que debe tener un maestro para la enseñanza de temas relacionados con diferentes contextos matemáticos y a la vez, poner en juego el tipo de conocimiento del maestro para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. De igual forma, emplear una herramienta para el análisis didáctico - matemático (Godino, Rivas, Castro & Konic, 2008; Castro, Godino & Rivas, 2011) que contribuye al cuestionamiento de los conocimientos del maestro durante la enseñanza de temas específicos.

Marco teórico

Conocimiento matemático para la enseñanza

El concepto de conocimiento matemático para la enseñanza emerge de los sistemas de práctica docente, en el ámbito matemático, y en la caracterización de las tareas que realizan los profesores. Tareas que implican el conocimiento de ideas matemáticas, habilidades del razonamiento y reflexiones sobre la naturaleza de la competencia matemática (Ball, Hill & Bass 2005).

El estudio del conocimiento que deben tener los maestros que enseñan matemáticas ha sido un asunto de reflexión, dirigido a la forma de qué debe ser aprendido y cómo será aprendido por los estudiantes. Durante estos procesos reflexivos intervienen las creencias de los docentes, algunas fundamentaciones teóricas y otras formas de pensamiento que, interactúan con las condiciones socioculturales para llevar a cabo acciones que se formalizan finalmente en el aula (Salazar, 2005). Investigadores como (Shulman,1986-1987; Ball y colaboradores,2001-2004-2008; Godino y colaboradores, 2007-2009-2011) han propuesto, desde diversas perspectivas epistemológicas del conocimiento matemático y de la educación matemática, diferentes modelos que han permitido describir, explicar, valorar y guiar el avance de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Shulman (1986–1987) considera que debe existir un conocimiento base para la enseñanza, conocimiento que debe orientar el quehacer del docente en el aula: conocimiento del contenido, conocimiento didáctico general, conocimiento del currículo, conocimiento de los alumnos, conocimiento de los aspectos teleológicos y el conocimiento pedagógico del contenido (PCK).

A partir de estas categorías, investigadores como Ball (2000); Ball, Lubienski y Mewborn (2001) introdujeron la noción de "conocimiento matemático para la enseñanza" (MKT). Hill, Ball, y Schilling (2008) definen este conocimiento como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y desarrollo en el alumno" (p.374). Es un conjunto de conocimientos del contenido, del currículo y la pedagogía necesarios para llevar a cabo el proceso de enseñanza de las matemáticas. Es aquel conocimiento que caracteriza al maestro que enseña matemáticas "Tal conocimiento no es algo que tendría un matemático como virtud por haber estudiado matemáticas avanzadas…más bien es un conocimiento especial para la enseñanza de las matemáticas". (Ball et al., 2001, p. 448)

En la investigación (Hill et al., 2005) sobre la influencia del conocimiento matemático la enseñanza, en el desempeño de los estudiantes, se afirma que "el conocimiento del contenido juega un papel fundamental incluso en la enseñanza de contenidos matemáticas" (p. 399). La manifestación de éstos conocimientos, pueden evidenciarse en la manera como los estudiantes abordan tareas en diferentes contextos matemáticos, así como en los conocimientos requeridos por el maestro en los diferentes procesos de enseñanza.

Durante el desarrollo de este taller el foco de atención se ubica en la naturaleza del conocimiento matemático necesario para enseñar y cómo éste ayuda en el proceso enseñanza, estableciendo una base práctica en el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), que se define como "una clase de conocimiento profesional de las matemáticas diferente del exigido en otras ocupaciones matemáticas (por ejemplo, física, contabilidad)" (Ball et al., 2005, p. 17)

Ball et al., (2005) establecen dos categorías del Conocimiento Matemático para la Enseñanza: el Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK); en la primera categoría se ubican, Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), y Conocimiento en el Horizonte Matemático. En la segunda categoría se ubican tres tipos de conocimiento: el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT), y el Conocimiento del Currículo; en la Figura 1 se aprecia estas categorías de conocimiento.

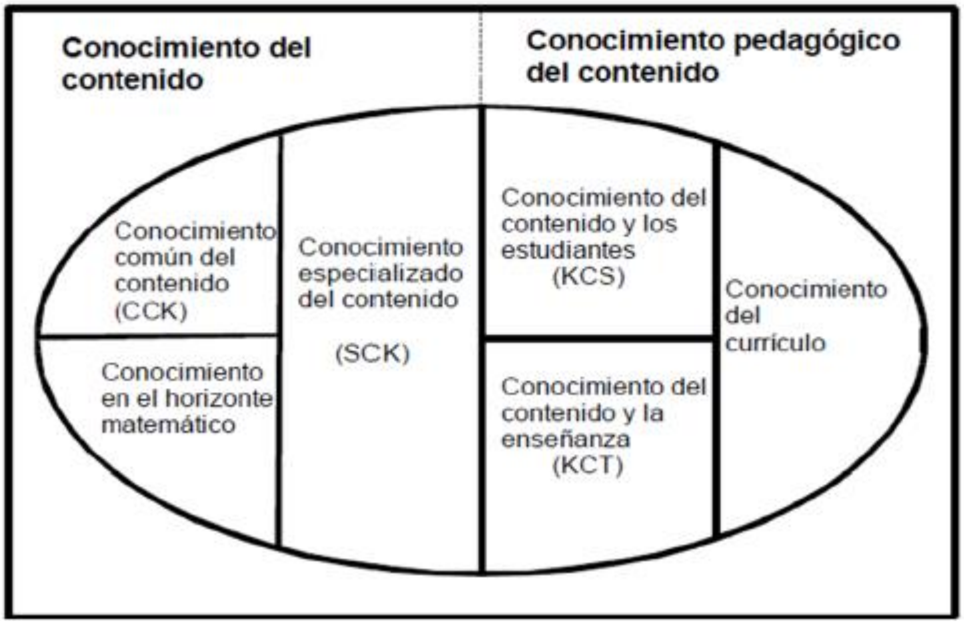


Figura 1. Conocimiento matemático para la enseñanza MKT (Hill et al.,2008, p. 377).

Sobre las competencias

Las tareas buscan articular el conocimiento matemático para enseñar a saber: (1) conocimiento común del contenido, el cual involucra el conocimiento matemático del currículo escolar; (2) conocimiento especializado del contenido utilizado por el profesor en la enseñanza; (3) conocimiento del contenido y de los estudiantes en su interacción del conocimiento matemático y el conocimiento acerca de los alumnos. (Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008).

Las revelaciones de estas formas de conocimiento se verán reflejadas al indagar sobre las competencias exhibidas por el grupo de maestros que participan en el taller, donde se propone articular las categorías del conocimiento matemático para la enseñanza y conectarlas con la propuesta de Godino et al., (2008) y Castro et al., (2011), los cuales proponen una herramienta de análisis epistémico de las tareas, basada en el modelo "enfoque ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), conocida como Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS) y a partir de su uso, se focalizan tres objetivos: El primero, referente al conocimiento didáctico específico, por cuanto permite explorar objetos y significados puestos en escena en la solución de una tarea; el segundo, identificar posibles conflictos de significado y predecir dificultades y errores que podrían surgir en las soluciones que los estudiantes brindarían a la tarea, y el tercero, explorar cómo el uso de las entidades primarias permite predecir e identificar conflictos potenciales.

Sobre la actividad

Desde la perspectiva del desarrollo del conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009; Hill, Ball y Schilling, 2008) se considera que la preparación de una actividad matemática con fines instruccionales no solamente debe considerar la 'solución matemática' sino un conjunto de posibles conflictos y modos de abordarlos.

Se referencia la actividad como un proceso social, realizado por un sujeto, que de manera sistemática conduce a la transformación activa de la realidad. Es decir, la actividad está en relación al conjunto de acciones organizadas, estructuradas, orientadas y dirigidas socialmente con el objetivo de alcanzar un fin (Leontiev,1978).

Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, los estudiantes y los docentes utilizan signos y artefactos (símbolos matemáticos, gráficos, palabras, gestos, calculadoras, etc.) para llevar a cabo la actividad escolar. Tales signos y artefactos se denominan medios semióticos de objetivación, éstos son entendidos como los objetos, instrumentos, artefactos, recursos lingüísticos y signos que las personas intencionalmente usan en la construcción social de significados con el fin de lograr una forma estable de conciencia, hacer evidentes sus intenciones y desplegar acciones para alcanzar el objetivo de sus actividades (Radford, 2006).

El uso de los artefactos escogidos por el profesor propicia el desarrollo del conocimiento en contextos socioculturales en tanto que "...en las prácticas socioculturales debe buscarse las condiciones de posibilidades de saber" (Radford 2013, p.5).

Metodología

Con la finalidad de explorar las competencias que exhiben los maestros para identificar y analizar tareas asociadas, el taller se realizará en dos momentos. El primer momento se propone analizar y resolver tres problemas que involucran diferentes contextos matemáticos, se incluye una posible solución comentada del problema. Se formulan cuestionamientos sobre los conocimientos requeridos por el maestro para su enseñanza. El segundo momento, se ponen en cuestión las categorías del conocimiento del maestro, en torno a las soluciones dadas por los participantes, además, se propone el análisis de Castro et al., (2011), el cual incluye:

> […] la identificación de objetos matemáticos o entidades primarias referidas, puestas en juego en la solución del problema, agrupadas en los siguientes tipos: elementos lingüísticos (términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas), conceptos (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición), procedimientos (técnicas, operaciones, algoritmos), propiedades (enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba) y argumentos (justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas). Así mismo, para cada una de estas entidades se identifican posibles conflictos de significado que podrían surgir durante la actividad de resolución del problema. p. 77

Taller

El taller consta de los siguientes problemas o tareas:

Problema 1

> Una caja de detergente tiene una capacidad de 60 copas y recomienda para las máquinas lavadoras utilizar $1\frac{1}{5}$ de taza por lavada. ¿Cuántas lavadas pueden realizarse con una caja de ese detergente?

Problema 2

Observa la siguiente secuencia

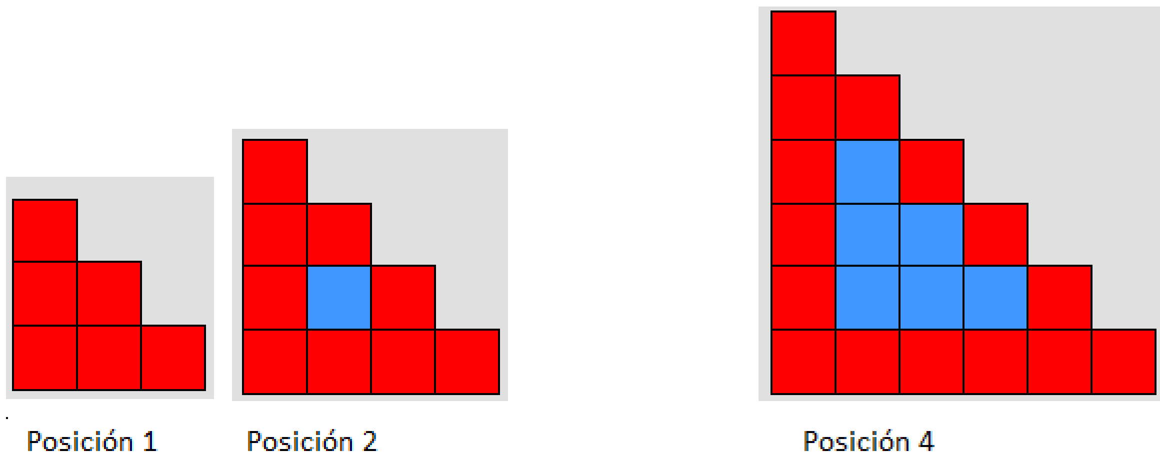


Figura 2. Secuencia de cuadrados.

a. Determine la cantidad de cuadrados azules y rojos que hay en las posiciones 3 y 7. ¿Cómo encontrar el número de cuadrados azules y rojos en cada posición?
b. ¿Existe alguna relación entre la posición y la cantidad de cuadrados rojos? Explique su respuesta.
c. ¿Existe alguna relación entre la posición de la figura y la cantidad de cuadrados azules? Explique su respuesta.
d. Si en la figura de la posición 6 hay 15 cuadrados blancos ¿Cuántos cuadrados azules habrá?
e. ¿Cuál posición tendrá 20 cuadrados azules? Explique su razonamiento.
f. ¿Cómo determinar la cantidad de cuadrados azules y blancos en cualquier posición?

***Tabla.* Número de cuadrados según posición.**

	Posi. 1	Posi. 2	Posi. 3	Posi. 4	Posi. 8	Posi. 20	...	Posi. n
N° Cuadrados azules			12					
N° Cuadrados rojos		1		6				
Total de cuadrados		10	15					

g. En la posición 2, el número de cuadrados se puede expresar como 1+2+3 = 6 cuadrados, ¿cómo se puede expresar el número de cuadrados de la posición 1, de la posición 3, de la posición 5, y de posiciones posteriores?
h. ¿Cuántos cuadrados tiene la posición 16? ¿Cómo encontró la cantidad de cuadrados?
i. ¿Qué estrategia se puede utilizar para expresar el número de cuadrados conociendo la posición? Justifique su respuesta.

Problema 3

El siguiente problema se soluciona con los siguientes materiales, los cuales tienen las siguientes áreas:

- Cuadrado amarillo: 1 cm^2 cada uno (unidad).
- Rectángulo verde: b cm^2 cada uno.
- Cuadrado azul: b^2 $cm^{2.}$
- Rectángulo rojo: a cm^2 cada uno.
- Cuadrado de color naranja: a^2 cm^2.

Problema 3.1

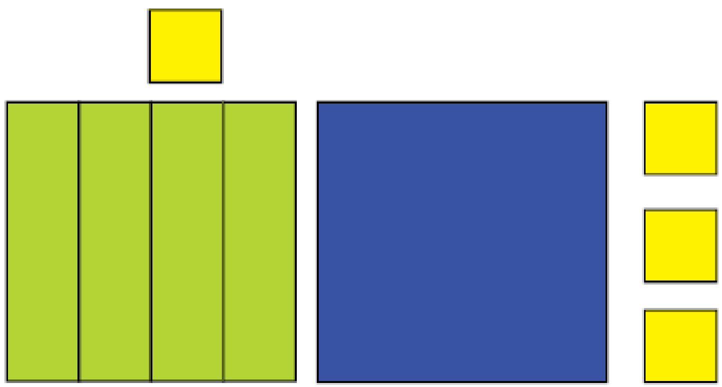


Figura 3. Propiedad distributiva: $(a+b)^2$

Con los materiales anteriores se puede "representar" una expresión algebraica como $b^2 + 4b + 4$

Construye un rectángulo o un cuadrado con todos los artefactos anteriores y calcula su área.

Problema 3.2.

Con los siguientes artefactos, construye una expresión algebraica

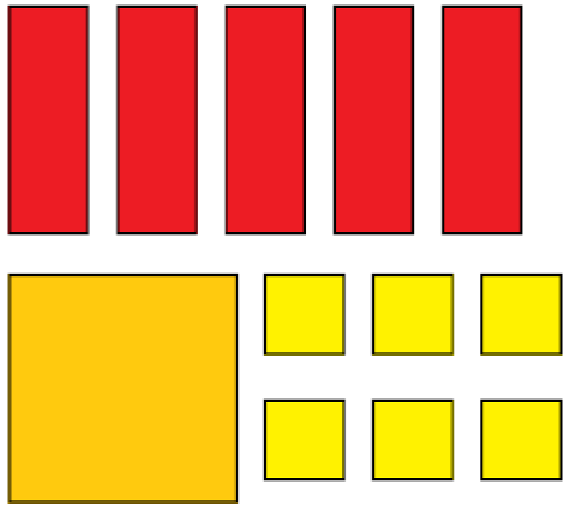


Figura 4. Propiedad distributiva: $x^2 + b\,x + c$

Construye un rectángulo o un cuadrado con los materiales anteriores y calcule su área.

Conclusiones

Durante las discusiones y análisis que se proponen en el taller, se espera que el maestro reflexione no solo sobre el conocimiento del contenido, sino sobre los conocimientos que se requieren para la enseñanza. Se espera que los maestros, logren reconocer la complejidad del entramado de conocimientos que se requieren para la planeación y desarrollo de las tareas matemáticas para la enseñanza de temas específicos.

En las situaciones en las que el profesor de matemáticas lleva a cabo su tarea al aula con situaciones contextualizadas, la integración entre conocimiento matemático y conocimiento pedagógico del contenido debe ser cada vez más evidente. Así, el maestro de matemáticas debería considerar la "forma" en que la matemática es comunicada a los alumnos a través de las tareas que elige.

Los estudiantes pueden presentar dificultades en el aprendizaje, debido a la complejidad del conocimiento matemático, y a la instrucción que presentan las actividades de aprendizaje que se les proponen, para evitar tales dificultades, se le sugiere al maestro efectuar un análisis epistémico y de reconocimiento de conflictos, empleando la fundamentación propuesta en el EOS (Godino et al., 2002, 2009) y la herramienta GROS (castro et al., 2011). Los conflictos de significado pueden relacionar las tres categorías de conocimiento matemático para la enseñanza: Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) y el Conocimiento Especializado (CSK).

Referencias Bibliográfícas

Ball, D., Hill, H. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: ¿Who know mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, *29*(1), 14-46.

Ball D., Thames M. & Phelps G. (2008): *Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?*. Journal of Teacher Education, *59*(5), 389-407.

Castro, F., Godino, J. & Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *Revista Unión*, *3*,73-88.

Godino, J., Rivas, M., Castro, W. & Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. In *ICME 11*. Morelia: ICME.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los Conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática (Unión 20*), 13-31.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches. En Didactiques des Mathematiques, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education**,** *39*(1-2), 127-135. (Versión ampliada en español disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino)

Hill, H., Ball, D. & Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: conceptualizing and Measuring Teachers´ Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Leontiev, A. (1978). Actividad, conciencia, personalidad. Ediciones Ciencias del Hombre.

Radford, L (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, 7-21, 103-129.

Radford, L (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. Journal of Research in Mathematics Education, *2*(1), 7-44.

Salazar, S. (2005). El conocimiento pedagógico del contenido como categoría de estudio en la formación docente. Revista Actualidades investigativas en educación *5*(2).

Fractales en el aula

Luis Fernando Ramírez Oviedo
Universidad Estatal a Distancia UNED
lramirez@uned.ac.cr
luis.ramirezoviedo@ucr.ac.cr

Resumen: El presente taller, forma parte de la evaluación del curso Introducción a los Fractales de la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica. El mismo pretende introducir conceptos propios de la geometría fractal al currículum escolar. Por medio del azar y la geometría se estudia la convergencia de una serie de puntos al triángulo de Sierpinski. Se estudian algunas características del triángulo de Sierpinski para introducir el concepto de fractal. Mediante una serie de preguntas generadoras y los resultados obtenidos por los estudiantes se establecen conclusiones sobre geometría, probabilidad y álgebra. El taller no pretende recargar el currículum escolar con nuevos conceptos, por el contrario pretende conectar y fortalecer conceptos ya estudiados, o en su defecto introducir algún nuevo concepto propio del currículum.

Palabras clave: Fractales, Enseñanza de la Matemática, Triángulo de Sierpinski.

Introducción

En la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica (UNED), se cuenta con un curso de la licenciatura en la Enseñanza de la Matemática llamado Introducción a los Fractales, en el cual, los estudiantes deben desarrollar un taller con veinticinco estudiantes de secundaria, registrar los resultados y compartir conclusiones con los demás compañeros de curso.

La finalidad del taller es incorporar elementos propios de la geometría fractal para introducir nuevas temáticas del currículum escolar o realizar conexiones entre conceptos existentes y en cualquiera de los dos casos, fortalecer la resolución de problemas como técnica para desarrollar habilidades en el contexto escolar.

El taller pretende vincular los fractales con estadística, probabilidad, geometría y álgebra. Se espera que cada docente durante la implementación del taller en el curso, obtenga una retroalimentación de cómo mejorarlo para volverlo aplicar y determinar que conceptos del currículum escolar puntualmente podría introducir o reforzar mediante la geometría fractal a lo largo de su carrera profesional.

El uso de la tecnología es de suma importancia, trabajar con los estudiantes mediante una hoja de cálculo electrónica que les permita emular el dado y obtener cientos o miles de iteraciones puede ayudar a interpretar mejor los resultados y de una forma más precisa.

El triángulo de Sierpinski

Waclaw Franciszek Sierpenkins (Varsovia, 1882 - República Popular de Polonia, 1969), fue un matemático polaco. Son notables sus aportaciones a la teoría de conjuntos, la teoría de números, la topología y la teoría de funciones. Tres conocidos fractales llevan su nombre: Triángulo de Sierpinski, Alfombra de Sierpinski y Curva de Sierpinski.

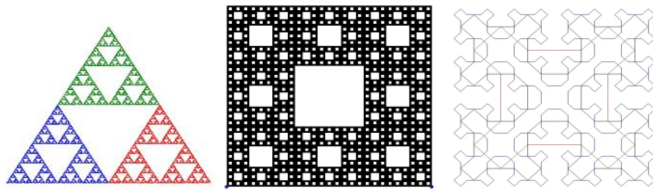


Figura 1. Triángulo, alfombra y curva de Sierpinski

Descripción del Taller

Este taller consta de tres actividades que deben ser desarrolladas con un grupo de 25 estudiantes de secundaria.

Materiales:

- 15 filminas o transparencias.
- 5 Marcadores de punta fina.
- 5 Cartones.
- 5 dados.
- 5 reglas.

Actividad 1

Divida al grupo de estudiantes seleccionado en cinco grupos de cinco estudiantes cada uno.

Entregue a cada grupo de estudiantes una filmina con un triángulo equilátero ΔABC dibujado (este triángulo debe ser del mayor tamaño que permita la filmina), un dado, una regla y un marcador.

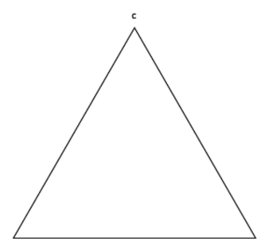


Figura 2. Triángulo equilátero- filmina 1

- Los estudiantes dibujaran un punto cualquiera fuera del triángulo al que llamarán punto inicial Q_0.
- Cada estudiante lanzará el dado una vez, si obtiene un 1 o 2 debe dibujar el punto medio entre el punto inicial Q_0 y el vértice A, si obtiene un 3 o 4 debe dibujar el punto medio entre el punto inicial Q_0 y el vértice B y si obtiene un 5 o 6 debe dibujar el punto medio entre el punto inicial Q_0 y el vértice C. Sin importar el número que haya salido, al punto medio dibujado se le llamará Q_1.
- Una vez obtenido el punto Q_1 se lanza de nuevo el dado y se repite la instrucción anterior, pero ahora dibujando el punto Q_2 que será el punto medio entre A y Q_1 o entre B y Q_1 o entre C y Q_1.
- Debe lanzarse el dado al menos 200 veces hasta obtener 200 puntos, los cuales deben ser dibujados por cada grupo en su respectiva filmina 1.
- El docente debe indicar al inicio dos preguntas importantes a responder cada grupo durante la actividad. (Entregue una hoja por grupo con las preguntas y el suficiente espacio para responderlas).

Preguntas:

- Si el punto inicial Q_0 se colocó fuera del triángulo, ¿Cuántos lanzamientos del dado debieron pasar para que el punto cayera dentro del triángulo?
- Una vez que un punto cayó dentro del triángulo, ¿cuántos puntos posteriores a ese cayeron fuera?

Actividad 2

Entregue una filmina (filmina 2) a cada grupo con el dibujo de la primera iteración del triángulo de Sierpinski. (Esta filmina debe contener un triángulo del mismo tamaño que los demás, pues deben calzar ambos triángulos, No pinte ninguna de las regiones del triángulo de Sierpinski, solo son necesarias las líneas que dividen los triángulos). Indique que deben cuidar y no rayar la filmina 2 pues se utilizará de nuevo en la actividad 3.

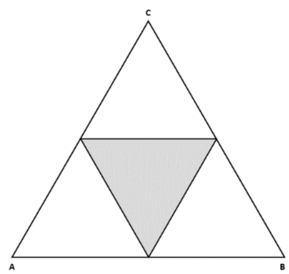


Figura 3. Primera Iteración del triángulo de Sierpinski – filmina 2

Cada grupo debe superponer la filmina 2 entregada con la primera iteración del triángulo sobre la filmina 1 que contiene los 200 puntos. Luego debe responder a las siguientes preguntas

- ¿En cuántos triángulos se particionó el triángulo inicial?
- ¿Se podría asegurar que dichos triángulos son congruentes entre sí?
- ¿Qué porción del área del triángulo inicial representa cada triángulo obtenido de la partición?
- ¿Cuántos puntos cayeron en el triángulo del centro?

Entregue una filmina (filmina 3) a cada grupo con el dibujo de la segunda iteración del triángulo de Sierpinski. (Esta filmina debe contener un triángulo del mismo tamaño que los demás, pues deben calzar ambos triángulos. No pinte ninguna de las regiones del triángulo de Sierpinski, solo son necesarias las líneas que dividen los triángulos). Indique que deben cuidar y no rayar dicha filmina pues se utilizará de nuevo en la actividad 3.

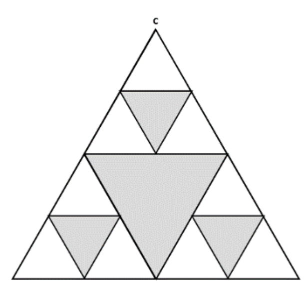


Figura 4. Segunda Iteración del triángulo de Sierpinski – filmina 3

Cada grupo debe superponer la filmina 3 entregada con la segunda iteración del triángulo sobre la filmina 1 que contiene los 200 puntos. Luego debe responder a las siguientes preguntas

- ¿En cuántos triángulos se particionó el triángulo inicial?
- ¿Se podría asegurar que dichos triángulos son congruentes entre sí?
- ¿Qué porción del área del triángulo inicial representa cada triángulo obtenido de la nueva partición?
- ¿Cuántos puntos cayeron en el triángulo del centro del triángulo en la región inferior derecha?

Todos los grupos superpondrán sus filminas con los 200 puntos al mismo tiempo. (Es decir se deben superponer todas las filminas en las que se dibujaron los 200 puntos)

- Se deben comparar los resultados de cada grupo y responder a algunas preguntas:
- Tras comparar los resultados de la pregunta ¿Cuántas iteraciones debieron transcurrir para que un punto cayera dentro del triángulo? intente responder a la siguiente
- ¿Existe alguna forma de estimar en cuál iteración caerá el primer punto adentro del triángulo? Si la respuesta es afirmativa ¿Cómo podría determinar esa forma para estimar?
- Tras la pregunta ¿cuántos puntos cayeron fuera del triángulo después de que el primer punto cayó dentro del triángulo? responda ¿Se puede asegurar que una vez que un punto cae dentro del triángulo sin importar cuántas iteraciones hayan pasado ya no volverá a caer un punto afuera del triángulo?
- Después de realizar la primera partición del triángulo ¿Cuántos triángulos congruentes obtuvo?
- ¿Cuál es el área de cada triángulo si el triángulo inicial tiene área $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ donde l representa la medida de los lados del triángulo?
- ¿Cuántos puntos cayeron en el triángulo del centro?
- Si tomamos el promedio de los puntos que cayeron en el triángulo del centro en cada grupo ¿Qué porcentaje del total de los 200 puntos cayó en el triángulo del centro?
- Después de realizar la segunda partición del triángulo ¿Cuántos triángulos congruentes obtuvo?
- Cuál es el área de cada triángulo (excepto el triángulo del centro de la primer partición) si el triángulo inicial tiene área $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ donde l representa la medida de los lados del triángulo inicial.
- ¿Cuántos puntos cayeron en el triángulo del centro del triángulo de la esquina inferior derecha?
- Si tomamos el promedio de los puntos que cayeron en el triángulo del centro de la esquina inferior derecha en grupo ¿Qué porcentaje del total de los 200 puntos cayó en dicho triángulo?

Las actividades realizadas hasta el momento, le permiten al docente y a los estudiantes realizar algunas conjeturas. Acerca del comportamiento de los puntos.

Es importante formalizar algunos conceptos, para ello el docente de utilizar un video proyector para mostrar a los estudiantes una presentación de Power Point con la construcción del triángulo de Sierpinski (disponible en http://fermathcr.blogspot.com/) y que se elaboró como tarea en el curso de introducción a los fractales). Con el fin de conectar el trabajo realizado en las filminas con el triángulo de Sierpinski, esta le permitirá definir mediante un ejemplo qué es un fractal y al mismo tiempo mostrar que mediante el juego del caos y a pesar de las condiciones diferentes que se den en cada equipo (pues la aleatoriedad de los dados constituye un orden diferente de puntos) existe convergencia de los conjuntos de puntos al triángulo de Sierpinski. Además puede indicar que la cantidad de puntos que caen en los triángulos centrales en cada región de la partición (los cuales son los que se eliminan durante la construcción de Sierpinski) es muy pequeña, lo cual confirma que la mayoría de los puntos que se dibujen se encuentran dentro del triángulo de Sierpinski.

Actividad 3. El juego del triángulo Caliente

Realice el siguiente juego con los cinco grupos de estudiantes

Etapa 1.

- Entregue a cada grupo de estudiantes un cartón (cuadrado) con el dibujo del triángulo de Sierpinski de las dimensiones usadas al inicio en las actividades 1 y 2.
- Entregue la filmina 2 usada en la actividad dos con la primer iteración del triángulo de Sierpinski, esta debe superponerse sobre el cartón.
- En este caso la única región del interior del triángulo que **no** pertenece al triángulo de Sierpinski es el triángulo del centro.
- El profesor pondrá el punto inicial fuera del triángulo de Sierpinski y cada grupo iniciará a jugar lanzando el dado estudiante por estudiante y dibujado el punto correspondiente según las instrucciones de la actividad 1.
- Si un estudiante al lanzar el dado y dibujar su respectivo punto cayó dentro del triángulo de Sierpinski saldrá del juego. Los demás compañeros del grupo siguen jugando hasta que solamente sobreviva un jugador, el cual será el ganador del juego.

Etapa 2.

- Repita el juego pero ahora utilizando la filmina con la segunda iteración del triángulo de Sierpinski.
- Recuerde a los estudiantes que los triángulos centrales de cada región del interior del triángulo **no** forman parte del triángulo de Sierpinski, de tal modo que la única forma de que un estudiante continúe jugando es cayendo fuera del triángulo o en uno de dichos triángulos centrales.

Nota: Si un estudiante (punto) cae sobre una línea (límite entre dos regiones o triángulos) podrá seguir jugando.

Al final se deben plantear las siguientes preguntas:

- Qué relación puede encontrar entre este juego *El triángulo Caliente* y el conocido juego *La Papa Caliente*
- ¿Es posible que al jugar, ningún jugador caiga dentro del triángulo de Sierpinski haciendo este juego interminable?
- ¿Cómo varía el juego al tomar particiones con cada vez más y más triángulos? es decir ¿En qué afecta que existan más o menos triángulos?

Importante: El docente debe registrar todas las etapas de cada una de las actividades, se recomienda tomar fotografías, grabar videos y escanear las respuestas que escriben los estudiantes y registrar las conjeturas que realicen los estudiantes. Todos los registros deben organizarse, y se debe establecer conclusiones acerca del taller implementado por cada docente. Con la finalidad de realizar un análisis posterior en conjunto con todos los demás compañeros del curso.

Conclusiones

Las tres actividades mencionadas anteriormente, buscan establecer vínculos entre diferentes conceptos del currículum escolar, ya que algunas veces el estudiante no logra realizar conexiones entre conceptos de diferentes áreas, por ejemplo geometría y probabilidad.

La participación en equipo enfrentándose a las actividades mencionadas, pretenden fomentar las estrategias de resolución de problemas para estudiar elementos del currículum escolar.

El uso de los fractales en el aula pretende estudiar conceptos propios del currículum escolar a partir de conceptos externos como el triángulo de Sierpinski que no es vinculante con la evaluación, eliminando esto la presión que siente un estudiante al enfrentarse a un concepto nuevo.

Las diferentes aplicaciones (disponibles en http://fermathcr.blogspot.com) sobre fractales que se pueden ilustrar, buscan que el estudiante comprenda la importancia de la matemática en la sociedad, ayudando a motivar el estudio de los conceptos propios del currículum escolar a partir de su conexión con objetos externos que requieren de los mismos para su análisis.

En general, el taller pretende convertirse en una pequeña herramienta para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en las diferentes instituciones educativas costarricenses. El mismo puede ser modificado partiendo de la experiencia y el profesionalismo de los docentes en su labor diaria.

Referencias Bibliográficas

Alfaro A., Murillo, M. y Soto, A. Fractales. (2010). *Revista digital, Matemática, Educación e Internet.* Disponible en www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/Libros/index.htm

Atencia, V. Fractales Matemáticos. (2014). Trabajo Final de Grado en Matemática. Universidad de Barcelona España.

Implementación de una unidad didáctica para la enseñanza de razones trigonométricas, apoyada en el software GeoGebra y el modelo de Van Hiele

Mauricio Rodríguez Sánchez
Ministerio de Educación Pública
mauriciorods@gmail.com

Eithel Trigueros Rodríguez
Universidad Nacional de Costa Rica
eitheltr@gmail.com

Resumen: Se presentan los avances de una propuesta de trabajo final de graduación, cuyo objetivo principal es desarrollar habilidades para el aprendizaje de razones trigonométricas en noveno año, por medio de una unidad didáctica apoyada en el software Geogebra y el modelo de Van Hiele, en el Liceo Rural Gavilán, Valle la Estrella, Limón, durante el segundo trimestre del 2016.

Palabras clave: Etnomatemática, material didáctico, educación intercultural.

Introducción

El Liceo Rural Gavilán pertenece al circuito 06 de la Regional Educativa de Sulà del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP). El Liceo Rural Gavilán junto con el Colegio Técnico Profesional de Talamanca son las únicas instituciones de la Regional Sulà que se encuentran fuera de reservas indígenas. Es decir, reciben un importante número de estudiantes indígenas, pero no están ubicados dentro del territorio indígena. Sin embargo, el colegio es de difícil acceso, pues no existe transporte público para la comunidad de Vesta (lugar donde se encuentra el colegio), lo que obliga a las personas a utilizar el transporte privado o bien una ruta de bus a una comunidad cercana. Además, la zona tiene la afluencia de gran cantidad de riachuelos que en temporada de lluvia imposibilitan el paso a los habitantes y por tanto a los estudiantes.

Esto provoca un problema del ausentismo en la población estudiantil. En términos generales los estudiantes pueden caminar entre un rango de una hora a hora y media para llegar a la institución tanto los provenientes de las comunidades Progreso, Llano Grande, como los provenientes de la reserva Cábecar Tjai. Como medida de solución a dicho problema la Dirección de la institución, encargados/as del estudiantado y la Junta Administrativa lograron un subsidio para transporte de estudiantes, el cual empezó a dar servicio a finales de agosto del 2015.

Este es, a grandes rasgos, el contexto en el que se encuentra la institución en donde se lleva a cabo la propuesta que se presenta, que si bien, el problema que se ataca no es de tipo administrativo, se debe considerar esta realidad para implementar un proyecto educativo que sea viable.

Por otra parte, analizando los contenidos y los lineamientos de los programas de Ministerio de Educación Pública (MEP), que fueron modificados a partir del 2012, se encuentra que se pretende dar énfasis a la geometría dinámica (MEP, 2012, p. 61) apoyándose en el uso de la tecnología. Claro que no se plantea la tecnología como un fin en sí misma sino con un fin pedagógico. Además, el Programa de Estudio sugiere utilizar el software libre Geogebra el cual será manipulado en esta investigación.

Debido a las condiciones geográficas en que se encuentra la institución surge una clara interrogante en cuanto a cómo implementar la tecnología en una zona con desventaja para este tipo de herramientas. Esto se soluciona con el apoyo de la fundación Omar Dengo, pues el Liceo Rural Gavilán forma parte del programa Redes Móviles para el Aprendizaje (REMA) desde el 2014. Dicho programa proporciona a cada estudiante una computadora portátil, para uso dentro y fuera de la institución. El objetivo general del Proyecto REMA es "favorecer el desarrollo integral de los estudiantes y de los liceos rurales para funcionar como impulsores del mejoramiento de la calidad de vida de sus comunidades" (Fundación Omar Dengo, 2013, p. 1).

Por otra parte, uno de los objetivos específicos del proyecto REMA es "favorecer en los jóvenes el desarrollo de sus capacidades intelectuales (resolución de problemas e investigación), personales (ciudadanía y comunicación), socioproductivas (productividad), a través de la apropiación de las tecnologías digitales móviles" (Fundación Omar Dengo, 2013, p. 1). Enlazando este objetivo con la propuesta del MEP, resulta importante guiar a los estudiantes en el uso de la tecnología buscando su fin pedagógico, como se mencionó anteriormente.

Esta descripción permite el planteamiento de una propuesta didáctica, que integra las herramientas tecnológicas que hay en la institución con los programas de estudio del MEP, con lo que se adaptó el siguiente problema ¿De qué manera impacta una unidad didáctica apoyada en Geogebra y el modelo de Van Hiele el desarrollo de las habilidades específicas de las razones trigonométricas, de los estudiantes de noveno año del Liceo Rural Gavilán, Valle la Estrella, Limón, Limón durante el segundo trimestre del 2016?

Objetivos de la investigación

Los objetivos específicos de la investigación que se deriva del problema anterior son:

1. Diagnosticar el nivel de razonamiento de los estudiantes de noveno año, según el modelo de Van Hiele.
2. Elaborar una unidad didáctica apoyada en el software Geogebra para el desarrollo de las habilidades específicas de las razones trigonométricas del programa de estudio del MEP, según el modelo de Van Hiele.
3. Validar la unidad didáctica apoyada en el software Geogebra y el modelo de Van Hiele para el desarrollo de las habilidades específicas de las razones trigonométricas del programa de estudio del MEP.
4. Implementar la unidad didáctica apoyada en el software Geogebra y el modelo de Van Hile.
5. Describir los niveles de razonamiento que muestran los cuatro estudiantes con la unidad didáctica apoyada en Geogebra según el modelo de Van Hiele.
6. Mejorar la unidad didáctica apoyada en software Geogebra y el modelo de Van Hile para el desarrollo de las habilidades específicas de las de las razones trigonométricas del programa de estudio del MEP.

Sustento teórico. (Modelo Van Hieli)

El uso del modelo de Van Hiele (Fouz y De Donosti, 2005), se fundamenta en las principales características que presenta:

1. Presenta 5 niveles de razonamiento (1. Razonamiento, 2. Análisis, 3. Deducción informal, 4. Deducción formal, 5. Rigor) y 5 fases de aprendizaje asociadas a los niveles: (1. Información, 2. Orientación dirigida, 3. Explicitación, 4. Orientación libre, 5. integración).

2. Un estudiante solo puede comprender aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
3. No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada manera. Pero sí se le puede ayudar mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.
4. Respecto a los niveles se tiene que no se puede alcanzar un nivel superior sin superar el nivel inferior.
5. Dos personas que estén en diferentes niveles no podrán comprenderse, es decir, hay una estrecha relación entre el lenguaje o los niveles.
6. El paso de un nivel a otro, ocurre de manera gradual.

Por otra parte, considerando los alcances de la investigación, según Algarín y Fiallo (2014) los niveles presentan las siguientes descripciones:

Reconocimiento:

- Proceso de descripción: Razonan sobre Conceptos básicos. Consideraciones visuales.
- Proceso de Definición: Descripción de propiedades y elementos físicos de los objetos matemáticos
- Proceso de demostración: No hay.

Análisis

- Proceso de descripción: Razonamiento de conceptos por medio de un análisis informal de las relaciones y propiedades, se establecen propiedades necesarias del concepto.
- Proceso de definición: Descripción de las propiedades y elementos matemáticos de los conceptos, usan definiciones de estructura lógica simple, construyen definiciones a partir de un listado de las propiedades conocidas.
- Proceso de demostración: tipo empírico ingenuo, experimento crucial basado en ejemplo, experimento crucial constructivo y ejemplo genérico analítico.

Deducción informal

- Proceso de descripción: No se da el proceso de descripción. Existe capacidad de comprender, usar y construir sus propias definiciones.
- Proceso de definición: Ordenan lógicamente las propiedades de los conceptos. Construyen definiciones abstractas. Distinguen entre la necesidad y suficiencia de un conjunto de propiedades al determinar un concepto.
- Proceso de demostración: Tipo ejemplo genérico intelectual y experimento mental transformativo.

El otro aspecto fundamental del modelo del Van Hiele son las fases de aprendizaje, y según Jaime y Gutiérrrez (1990) se pueden resumir de la siguiente forma:

Información: Dirigir la atención de los estudiantes. Saber los conocimientos previos de los estudiantes respecto al tema a tratar.

Orientación dirigida: Conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos propiedades, etc. principales del área que se está estudiando. Construcción de elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel.

Explicación: Intercambio de ideas, experiencias, justificaciones, regularidades observadas, explicación de la resolución de las actividades. Busca el aprendizaje del nuevo vocabulario. Es una fase de revisión del trabajo realizado, no de aprendizaje de cosas nuevas.

Orientación libre: Problemas que puedan desarrollarse de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones. Actividades de utilización y combinación de los nuevos conceptos, propiedades y forma de razonamiento. Los problemas deben ser abiertos.

Integración: Formalización del conocimiento aprendido en las fases anteriores. No se debe aportar ningún concepto o propiedad nieva al estudiante.

Breve descripción de los contenidos y uso de la tecnología

En relación con trigonometría los programas de estudio vigentes introducen la trigonometría en noveno año para favorecer la conexión con la geometría y el estudio con problemas reales. Los conocimientos expuestos son radianes, seno, coseno, tangente, razones trigonométricas de ángulos complementarios, ángulos de elevación y depresión y ley de senos, además en las indicaciones puntuales se sugiere introducir el uso del círculo trigonométrico para la conexión con la geometría analítica y el uso de radianes para la conexión con el área de medidas.

Acerca del uso de la tecnología en los procesos educativos, el MEP con los Programas de Estudio vigentes busca introducir las tecnologías de forma inteligente y oportuna, y además propone intensificar el uso de TIC en la educación matemática en el transcurso del tiempo, teniendo en cuenta el contexto institucional donde se desea implementar (MEP, 2012, p.60).

En cuanto a las tendencias generales de investigación en el uso de la tecnología para el aprendizaje y enseñanza de geometría, Lagrage, Arigue, Laborde y Troude (2003, citado por Laborde, et al, 2006, p. 291) sugieren cuatro dimensiones: la naturaleza de la geometría mediada por las computadoras, el diseño de tareas, el rol del feedback y el uso de las tecnologías en geometría por el profesorado.

Sobre el diseño de las tareas, algunas de las tareas elaboradas por los profesores utilizando software de geometría dinámica son: tareas en las cuales el ambiente facilita las acciones materiales pero no cambia la tarea para el estudiante (construir y medir); tareas que facilitan al estudiante la exploración y el análisis, las cuales permiten conocer las ideas de los educandos; tareas que tiene su contraparte en lápiz y papel pero pueden solucionarse de diferentes maneras en software de geometría dinámica; tareas que no pueden ser planteadas sin la mediación de software de geometría dinámica. (Laborde, 2001, citado por Laborde et al 2006, p. 293).

Investigaciones relacionadas

La elaboración de la unidad didáctica demanda realizar un análisis de los antecedentes en cuanto a relaciones trigonométricas y la aplicación del modelo de Van Hieli. En términos generales a nivel internacional se dio énfasis a los estudios relacionados con los autores Gutiérrez y Fiallo, quienes han trabajado temas relacionados con el modelo de Van Hiele, geometría dinámica, geometría y trigonometría. Mientras que a nivel nacional se encuentran aportes relacionados con el modelo de Van Hiele y geómetra aplicados a geometría, en relación con las razones trigonométricas solamente se halló el estudio de Chacón, Sánchez y Quirós (2007), al momento de realizar la revisión de la literatura de esta investigación.

Por otra parte, Gutiérrez (2005) hace una síntesis de los métodos para la recogida y análisis de datos en investigaciones basadas en el estudio de la demostración y el uso de software de geometría dinámica, para la recogida de datos menciona los archivos, auto-protocolo, registro de sesión, revisar la construcción, para el análisis de los datos señala tipos de arrastre, faces de resolución de problemas de demostración, tipos de demostraciones y unidad cognitiva de un teorema (Gutiérrez, 2005, p. 43).

Gutiérrez (2009) menciona que para enseñar los conocimientos relacionados con trigonometría se deben elaborar entornos motivadores, agradables e interesantes para los estudiantes, y que dichos entornos pueden elaborarse con software de geometría dinámica.

Fiallo y Gutiérrez (2012) en una investigación sobre trigonometría y el desarrollo de las habilidades de la demostración en un ambiente diseñado en Cabri, concluyen que las actividades diseñadas contribuyeron a mejorar el nivel de los estudiantes, y que "los ambientes de geometría dinámica favorecen la interacción entre construir y demostrar, entre actuar con el ordenador y justificar por medio de argumentos teóricos" (Laborde, 2000, citado por Fiallo y Gutiérrez, 2012, p. 190)

Fiallo (2010), tenía como objetivo "aportar información para la mejor comprensión del proceso de aprendizaje de la demostración en el contexto de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica" (p. 6), entre las conclusiones, menciona que algunos estudiantes no aprovechan al maximo el diagrama dinámico, se enfocan solamente en el primer cuadrante del plano cartesiano o hacen una análisis estático del diagrama dinámico. Además en cuanto a la propuesta pedagógica empleada en Fiallo se concluye que el papel del profesor es fundamental para el alcance de los objetivos de aprendizaje y debe conocer la metodología empleada y el modelo de Van Hiele, en especial las faces de aprendizaje (Fiallo, 2010, p. 264).

En la investigación llevada a cabo en Algarín Torres y Fiallo Leal (2014), sobre los procesos de descripción, definición y demostración de los niveles de razonamiento según el modelo de Van Hiele cuando se estudiante las razones trigonométricas, concluyeron que el uso de la tecnología facilita la reflexión y comunicación entre los estudiantes y profesor, favoreciendo la generalización, la deducición; también concluyen que las debilidades de los estudiantes en los conocimientos básicos de semejanza y congruencia de triángulos influyeron en el desarrollo de las actividades, lo que impidio cumplir con todas las actividades planteadas.

Acerca de las investigaciones desarrolladas en Costa Rica, sobre trigonometría destaca la investigación de Chacón, Sánchez y Quirós (2007) la cual fue un estudio exploratorio de enfoque cualitativo para investigar los niveles de comprensión de tres estudiantes de la carrera de enseñanza de la matemática de la Universidad de Costa Rica (UCR), el cual sugirió que la formación docente en el área de la trigonometría podría no satisfacer las necesidades mínimas para abordar ciertos temas de forma no mecánica.

Vargas y Gamboa (2013) investigaron sobre la enseñanza del teorema de Pitágoras apoyada en el software Geogebra y el modelo de Van Hiele con un enfoque cualitativo. En esta investigación se comparó dos grupos, uno donde las actividades se apoyaban con Geogebra y otro donde las actividades se apoyaban con papel y lápiz. Entre las conclusiones se menciona que

- las actividades apoyadas en Geogebra mejoran la motivación de los estudiantes, respecto a las actividades de enfoque tradicional,
- los estudiantes que realizaron las actividades apoyadas por Geogebra emitieron juicios más acertados sobre aquellos que usaron papel y lápiz,
- que los estudiantes no pudieron comunicarse de una forma matemática correcta, debido probablemente a la poca o nula importancia que se le da al lenguaje matemático en los diferentes niveles escolares.

Algunas situaciones propuestas.

A partir de este escenario, se inicia con el desarrollo de las situaciones que darán lugar a la unidad didáctica que se pretende realizar en esta investigación. Es importante recalcar que las situaciones estarán en función de alguna de las fases de aprendizaje que establece en modelo Van Hieli. Así por ejemplo la siguiente situación, se relaciona con la fase de información:

Considere el triángulo escaleno ΔABC, cuya base mide 10 cm y dos de sus ángulos miden 40° y 30° (figura 1). Calcule el área de este triángulo. Justifique su respuesta.

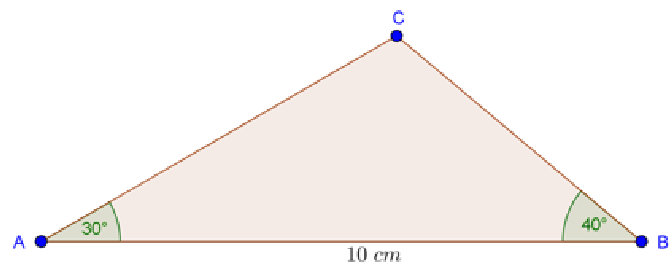


FIGURA 1: TRIÁNGULO ESCALENO ΔABC

Figura 1.

Este problema, con los conocimientos previos que tienen los estudiantes, puede ser resuelto por aproximación. Ya sea construyendo la figura, buscar cómo aproximar el valor de la altura, entre otros. Sin embargo, es evidente que muestra la necesidad de que hace faltan herramientas o contenidos para calcular de forma exacta el área. Además, esta situación se puede contextualizar de manera sencilla llevando a los estudiantes a considerar la importancia de los contenidos que se evalúan, permitiendo que se despierte el interés por los próximos temas que se verán.

Considerando una situación que esté más ligada a la fase de orientación dirigida, y donde se vincule el uso del Software Geogebra se puede plantear el siguiente problema:

Actividad 2. Razones entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

Razón Matemática: es una comparación entre dos magnitudes. Se obtiene al dividir una de las magnitudes o cantidades por otra. Estas pueden expresarse en fracciones o en decimales.

1. Abre el archivo *TriánguloRectángulo.ggb*. Escriba en el folleto de trabajo todo lo que pensó e hizo para encontrar su respuesta y justificarla.

   a) Calcula las razones entre los lados del triángulo ΔABC dadas en la siguiente tabla.

Razón
$\frac{AC}{AB} =$
$\frac{BC}{AB} =$
$\frac{BC}{AC} =$

Figura 2.

La apariencia del archivo *TriánguloRectángulo.ggb* se presenta en la figura 3.

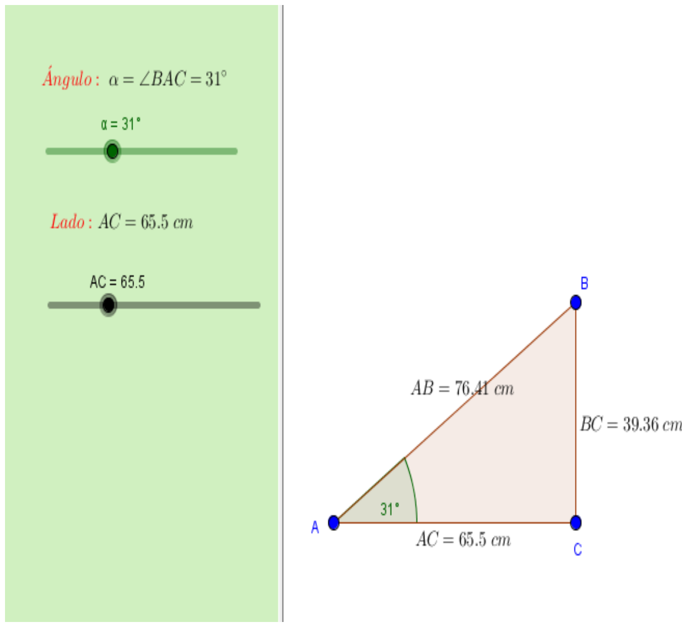


Figura 3.

Esta actividad le permite al estudiante limitar los principales elementos que se pretende estudiar mientras que es claro cómo se produce la vinculación del uso del software, los contenidos y las habilidades que desarrolla el estudiante.

El producto final, que involucre todas las situaciones desarrolladas (abarcando todo el tema de relaciones trigonométricas) y validadas se encuentra en desarrollo para la fecha. Sin embargo, se cuenta con el aval de la institución para ponerlo en práctica con un grupo real de estudiantes.

Referencias Bibliográficas

Algarín, D. y Fiallo, J. (2014). Descriptores de los procesos de descripción, definición y demostración para los niveles de Van Hiele cuando se estudian las razones trigonométricas. Uni-Pluri/Versidad, *14*(1), 42-52.

Chacón, A., Sánchez, A., y Quirós, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación, 7*(2), 1-31.

Fiallo, J. (2010). Estudio del proceso de Desmostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica. (Tesis Doctoral). Universitat de València: Valencia.

Fiallo, J., y Gutiérrez, A. (2012). Unidad de enseñanza para las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración. *Investigaciones en educación geométrica*, 173-192.

Fundación Omar Dengo. (2013). Acerca de REMA (Redes Móviles para el Aprendizaje). Recuperado de www.fod.ac.cr: http://www.fod.ac.cr/rema/index.php?option=com_content&view=article&id=10&Itemid=106

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM, 26-44.

Gutiérrez, A., y Fiallo, J. (2009). Enseñanza de la trigonometría con ayuda de SGD. Geometría dinámica, 147-171.

Laborde, C., Kynigos, C., Holebrands, K., y Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future, 275-304.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). Programas de Estudio en Matemáticas. San José, Costa Rica.

Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). La enseñanza del teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del Geogebra, según el modelo de Van Hiele. UNICIENCIA, *27*(1), 95-118.

La caja de numeración para el desarrollo del sentido numérico

Veronica Albanese
Universidad de Granada
vealbanese@ugr.es

Natividad Adamuz-Povedano
Universidad de Córdoba
nadamuz@uco.es

Rafael Bracho-López
Universidad de Córdoba
rbracho@uco.es

Resumen: Proponemos un taller para el desarrollo del sentido numérico basado en el uso de materiales manipulativos. Estos facilitan la construcción del concepto de número desde edades tempranas (preescolar y primeros cursos de primaria). Con los maestros trabajaremos la caja de numeración, profundizando en la noción cardinal del número y abordando algunas estrategias de cálculo, proponiendo tareas en bases diversas del 10 para familiarizarse con el recurso.

Palabras clave: Sentido numérico, materiales manipulativos, base del sistema numérico

Introducción

En este trabajo presentamos el taller que llevaremos a cabo en el 10 Festival Internacional de Matemática para la formación de maestros de preescolar y educación primaria.

El propósito del taller es presentar un material manipulativo que facilite la construcción del concepto de números y del sistema de numeración decimal en niños de edades tempranas.

La caja de numeración

La caja de numeración, tal y como la presentamos en la Figura 5, fue diseñada por la maestra de Educación Primaria María Teresa García (2012), aunque es totalmente reproducible y se puede construir artesanalmente con materiales reciclados y de bajo costo.

Describimos aquí este material mientras proporcionamos indicaciones para una posible forma de fabricación del mismo.

Se necesita una caja de zapatos con dos tapas, y se pintan o recubren de papel de colores los fondos de ambas tapas, de manera tal que, una tapa quede dividida en dos partes, una de azul, para las unidades, y una de rojo, para las decenas o agrupamiento de primer orden si la base en distinta del 10. En la otra tapa el fondo debe ser verde para las centenas o agrupamiento de segundo orden si la base es distinta a 10. La creadora de la caja eligió estos colores por seguir el mismo código de colores de los ábacos más comunes, pero no es algo fundamental para el pleno desarrollo del potencial del recurso.

También necesitaremos palillos de dientes, bastoncillos para manualidades o pajitas de refresco y gomitas elásticas de colores, que pueden ser rojas y verdes, para seguir el mismo código de colores, con las que haremos los agrupamientos de palillos o atillos (Figura 5).

Figura 5. Palillos y gomas para usar con la caja de numeración.

La utilización de la caja tiene que seguir ciertas reglas. Empezamos a poner palillos en ella por el primer orden de magnitud, o unidades si estamos en base 10. Podemos ir poniendo palillos hasta que lleguemos a alcanzar un número de palillos igual a $n-1$, siendo n el número de la base en la que estemos trabajando. Cuando llega el palillo número n, ya no caben en ese sitio, por tanto, tendrán que agruparse con una goma roja y pasar, como una unidad compuesta, al siguiente orden de magnitud, (las decenas si estamos en base 10). En este lugar, las reglas de la caja son las mismas, podremos tener hasta $n-1$ unidades compuestas o atillos, cuando llega el que hace el número n, ya no caben en ese lugar, por tanto, se agrupan nuevamente con la goma verde y pasan como una unidad compuesta al siguiente orden de magnitud (las centenas si estamos en base 10).

En la siguiente Figura 6, se muestra como ejemplo la representación en la caja de numeración del número 132. En la caja, se observa el valor posicional de las cifras que componen el número 132, es decir, hay 1 unidad compuesta en el lugar de las centenas, que podemos comprobar que tiene 100 palillos, tenemos 3 unidades compuestas en el lugar de la decenas, cada una de ellas compuesta por 10 palillos y tenemos dos unidades simples en el lugar de las unidades.

De modo que podríamos expresar nuestro número como:

$$132=100+3\cdot 10+2$$

O bien, si queremos poner de manifiesto el principio de agrupamiento de nuestro sistema de numeración decimal, podemos expresarlo de la siguiente forma:

$$132=1\cdot 10^2+3\cdot 10^1+2\cdot 10^0$$

En esa expresión las diferentes potencias de diez, nos indica el número de agrupamientos que hemos hecho, así en el lugar de las unidades no hemos hecho ningún agrupamiento, por eso el exponente es cero, en el lugar de las decenas tenemos paquetes con un agrupamiento y en el lugar de las centenas tenemos paquetes en los que hemos hecho dos agrupamientos, de ahí el 2 en el exponente.

Figura 6. Imagen de la caja de numeración con el número 132 formado

Este recurso forma parte de una propuesta metodológica más amplia que se basa en el uso de materiales manipulativos para fomentar el desarrollo del sentido numérico del alumnado. Entendido este último como una comprensión que tiene la persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión de forma flexible para establecer conjeturas y desarrollar estrategias útiles al trabajar con los números y las operaciones (McIntosh, Reys, y Reys, 1992). Otros autores, como Sowder (1992) afirman que se puede considerar que una persona tiene desarrollado su sentido numérico cuando puede comprender el tamaño de los números, pensar sobre ellos y manejarlos de formas diferentes, son capaces de utilizarlos como referentes y pueden desarrollar percepciones acertadas sobre los efectos de las operaciones.

Por tanto, el uso sistemático de la caja de numeración en los primeros años de aprendizaje va a favorecer el desarrollo del sentido numérico por parte del alumnado, ya que nos va a permitir manipular los números, ver su tamaño o trabajar la descomposición y composición de los mismos, entre otras cuestiones.

Relevancia

Una de la principales ventajas que presenta este material con respecto a otros materiales didácticos como el ábaco, es que es concreto y reversible, en el sentido de que, si tenemos formada una decena, por ejemplo, los niños y niñas pueden seguir viendo dentro de esa decena los diez palillos y si quitan la goma vuelven a tener las diez unidades sueltas, por tanto, facilita la interiorización de principios tan importantes para la comprensión del concepto de número, como el de conservación y reversibilidad en los niños y niñas.

Asimismo proporciona un modelo concreto y fiable a la realidad visible por parte de los niños y niñas, dando sentido al uso de símbolos escritos y a los conceptos relativos al valor posicional. De modo que va a facilitar una comprensión sólida del sistema de numeración decimal.

También ayuda a evitar errores frecuentes en el aprendizaje de los números, como es el caso de los ceros intermedios, o la alineación de los números al hacer cálculos con algoritmos tradicionales.

Con respecto al cálculo, la caja de numeración facilita la comprensión de los algoritmos, sobre todo en las sumas y restas con llevadas. Asimismo, facilita la adquisición de estrategias de cálculo mental.

Hay que decir que estas ventajas mostradas en los párrafos anteriores, no vienen "innatas" al material, sino que se consiguen a través del uso sistemático y programado del material, por tanto, el docente tendrá que ir dirigiendo un uso intencionado del mismo, de forma que los niños y niñas adquieran o desarrollen las habilidades mencionadas.

Cabe mencionar además la importancia de trabajar la formalización de manera conjunta a la actividad manipulativa, La representación de los números en la caja proporciona a los niños y niñas una forma de visualizar la cantidad que tiene que sea paulatinamente substituida por una imagen mental. La manipulación del material se tiene que trabajar como un paso previo de preparación para los procesos de abstracción.

Con esto queremos decir que hay que acostumbrar a los niños y niñas a desligarse poco a poco de la manipulación, a pensar con la formalización simbólica de los números recurriendo eventualmente a representaciones mentales de los cálculos con la caja.

Un ejemplo de ello es la composición y descomposición de los números con los palillos por ejemplo en la suma y resta que se corresponde a la propiedad asociativa y distributiva de las operaciones de la estructura aditiva.

El desarrollo de estas estrategias es imprescindible para la adquisición de las destrezas en el cálculo mental.

Tareas con la caja de numeración

- Desarrollaremos tareas que nos permitan comprender los conceptos de unidad, decena y centena, así como el valor posicional.
- Construiremos progresivamente los números que integran cada tramo.
- Componer y descomponer cantidades
- Sumas y restas de forma manipulativa para acompañar al cálculo escrito

Objetivo del taller

El objetivo que nos proponemos para el taller es iniciar a los maestros en la utilización de la caja de numeración como material de apoyo para la construcción del concepto de número y del sistema posicional de numeración.

Los objetivos específicos serán:

- Realizar composiciones y descomposiciones fuera de la caja
- Realizar composiciones y descomposiciones dentro de la caja
- Formar números en la caja de numeración en bases distintas a 10.
- Realizar operaciones de suma y resta –sin llevadas y con llevadas- con la caja de numeración en bases distintas a 10.

Cabe aclarar que en las aulas de preescolar y primeros cursos de primaria donde el material favorece la introducción del concepto de número, solo se trabaja en base 10.

En el taller con los maestros decidimos proponer también tareas con bases diversas del 10 para que la costumbre de los mismos en el manejo del sistema decimal no provocara que los ejercicios resultaran banales.

Nuestra experiencia en la formación inicial de maestros de educación primaria, ha puesto en evidencia que utilizar bases diversas del 10 hace que el proceso de agrupamiento y el valor posicional no sea tan familiar tampoco para el adulto y facilite entonces enfocar el atención en la construcción y representación del número basado en el contar y agrupar palillos. Además, el trabajo con otras bases les sirve para ponerse en la situación del alumnado que con seis o siete años empieza a aprender nuestro sistema de numeración, lo complicado que puede llegar a ser si no le damos ningún soporte material.

El taller

El taller se compone de dos partes. En una primera parte se realiza una presentación, acompañada por diapositivas, del material con algunos ejemplos de tareas para proponer a los niños cuando se introduce en las aulas la caja de numeración. Aquí se muestra el material original y se explica la adaptación que se realiza para trabajar durante el taller del festival.

En la segunda parte se organizar los participantes en pequeños grupos, se reparte el material y se propone que realicen la representación de diversos números en la caja de numeración utilizando los palillos. Proponemos desde el principio el trabajo en bases distintas a 10 (como 3, 4 y 5) para que los participantes puedan desligarse de los conocimientos “automáticos” que tenemos incorporados por la base 10 y vivan la experiencia y la conveniencia de organizar y agrupar palillos.

En cuanto este proceso se haya incorporado podremos pasar a la realización de operaciones de suma y resta en bases distintas a 10 con la caja de numeración.

Todas las actividades propuestas serán guiadas por unas fichas que se distribuirán a los participantes y donde estos tendrán que registrar, o mejor dicho dibujar, los resultados (Figura 3).

Verde	Rojo	Azul

Formalización:

Figura 7. Tabla que representa la caja de numeración, que se presentará en las fichas para dibujar los resultados

Conclusiones

Creemos que con el taller se pondrá de manifiesto la importancia del uso de materiales manipulativos para el aprendizaje de conceptos tan abstractos como el de número.

Asimismo, pretendemos poner de manifiesto la importancia del aprendizaje matemático en edades tempranas. Aprendizajes tan importantes como el del sistema de numeración decimal constituyen la base de aprendizajes posteriores, por tanto, debemos usar metodologías y recursos que permitan un aprendizaje sólido y eficaz.

Referencias Bibliográficas

Garcia-Pérez, T. (2012). Recursos para desarrollar el sentido numérico en el primer ciclo de educación primaria. *Guía didáctica*.

McIntosh, A., Reys, B. J., y Reys, R. E. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the learning of Mathematics*, *12*(13), 8.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, 371-389. New York: McMillan.

La cultura del café, una actividad de contextualización en las clases de matemáticas

Evelyn Agüero Castro
Universidad Nacional
evelynac22@gmail.com

Steven Quesada Segura
Universidad Nacional
steven_09_11@hotmail.com

Resumen: El café ha sido una de las principales actividades agropecuarias y económicas en nuestro país, dicha actividad se realiza aún en varios sectores de la región costarricense, es por esto que rescataremos los aportes de dicha actividad y su relación con la matemática. Se propone una actividad de contextualización con el fin de brindarles a los docentes una herramienta para el desarrollo de habilidades matemáticas, en busca de fortalecer el papel de estudiantes más comprometidos con su proceso de aprendizaje

Palabras claves: café, contextualización, modelización, resolución de problemas, relación matemática.

Introducción

El café llegó a Costa Rica a finales del siglo XVIII, el cual se expande en tierras altas y en el Valle Central; desde ese momento se ha caracterizado por tener una larga trayectoria cafetalera, junto con Brasil, Colombia, Guatemala y El Salvador. El cultivo del café ha sido una fuente de empleo y comercio exterior, como lo afirma Granados (1994), "a diferencia de otros países donde el grano se ha cultivado, en Costa Rica el café ha constituido la columna vertebral de la historia económica nacional" (p. 3).

El desarrollo del café se convirtió en una fuente de crecimiento, de divisas, empleo e ingresos; pero por otro lado dirigió al país a una situación de dependencia y vulnerabilidad. Como lo menciona Rodríguez (2014), "mediante la consolidación del monocultivo cafetalero Costa Rica se ató y condicionó a la situación internacional" (p. 7).

La actividad cafetalera le permitió a Costa Rica ser percibido como el país más rico de Centroamérica para esa época. Lo cual vino a favorecer en la distribución de los ingresos y acceso a la tierra a miles de pequeños productores, situación que ayudó a reforzar el régimen democrático y a mejorar el nivel de vida de muchas familias campesinas del Valle Central y lugares aledaños.

Como se sabe el conocimiento local de estas familias fue utilizado en muchas ocasiones para tomar decisiones importantes respecto al manejo agrícola de los cafetales, este tipo de saberes es uno de los que más influyeron en dichos procesos.

Para los cafetaleros la influencia de la luna en el cultivo, ha sido de mucha importancia, se sabe que sabe que la luz lunar ejerce una influencia sobre la germinación de las semillas y frutos. De luna nueva a cuarto creciente, la luna influye en el desarrollo vegetativo de árboles y frutos retardando su fructificación, se logra su mayor producción en luna llena, tres días después de la luna llena hacia el cuarto menguante se estimula y favorece la producción de frutos, en cuanto a la poda, se cree que es conveniente realizarlo en luna menguante para evitar al máximo la pérdida de savia, evita la pudrición y mejora la cicatrización.

El canasto es uno de los elementos más importantes, estos se medían en cajuela y cuartillos. La cajuela se refiere a la cantidad de café que el recipiente cuando está lleno "al ras". Además, este tiene un valor que era pagado con boleto y en la actualidad con dinero.

Relaciones de la actividad cafetalera con el contexto matemático

Para poder comprender la relación matemática con los elementos que se involucran dentro de la actividad cafetalera, se debe tener claro dichos conceptos que se presentan en dicha labor:

- **Broca:** es un insecto, del tamaño de la cabeza de un alfiler, que perfora el fruto maduro para poner sus huevos en el interior, causando daños en la caficultura mundial.
- **Canasto:** canasta o lata que servía para la recolección, almacenaje o medición de granos.
- **Cajuela:** unidad de capacidad para granos, la cantidad que podía contener el instrumento.
- **Floración del café:** es una respuesta entre los factores climáticos que inciden en la producción del cultivo del café.
- **Unidad de pago:** valor monetario de la jornada laboral. Se les otorgaba una cantidad de boletos o tiquetes que representaban una cantidad determinada de cajuelas.
- **Unidad de superficie:** la cantidad de terreno necesaria para sembrar.

A continuación, se presenta una recopilación de información en la cual se muestra la relación matemática con el conocimiento propio del lugar.

SITUACIÓN-PROBLEMA	CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	CONOCIMIENTO DEL LUGAR
ATAQUE DE LA BROCA EN CAFETALES	Función exponencial, modela el crecimiento de la población	Causa pérdidas en la producción y los rendimientos
COMPORTAMIENTO DE LA FLORACIÓN EN RESPUESTA A LAS VARIABLES CLIMÁTICAS	La teoría de funciones de Transferencia Simple para relacionar series cronológicas	Entre más floración se produzca, más será la cosecha para la presente temporada
VARIEDAD DE TAMAÑO DEL INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN (CANASTO)	Unidades de capacidad y números racionales	Canasta o lata que servía para la recolección, almacenaje o medición de granos
INSTRUMENTO PARA MEDIR EL CAFÉ RECOLECTADO (CAJUELA)	Unidades de capacidad	Unidad de capacidad para granos, la cantidad que podía contener el instrumento
VALOR MONETARIO DE LA JORNADA LABORAL (MONEDA)	Operaciones fundamentales con números naturales	Valor monetario de la jornada laboral. Se les otorgaba una cantidad de boletos o tiquetes que representaban una cantidad determinada de cajuelas
LA CANTIDAD DE TERRENO NECESARIA PARA SEMBRAR	Unidad de superficie	Cantidad de terreno para sembrar el café

Se considera la gran necesidad de sensibilizar a los nuevos profesionales en Matemáticas para que desarrollen una contextualización activa, con miras a favorecer al docente y promover en los estudiantes un aprendizaje significativo. Como lo menciona Gavarrete (2013) "desarrollar en los programas de formación de profesores las ideas matemáticas de diversas culturas, a nivel regional, local o global, puesto que se hace necesaria la comprensión y el fortalecimiento de los valores de las matemáticas como fenómeno cultural" (p. 143).

Es necesario recalcar que se requiere que los docentes sean capaces de ayudar a los estudiantes a relacionar diferentes resultados en un contexto particular. Según, Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio, Osorio y Ocampo (2009) "la modelización tiene fuertes vínculos con el estudio de situaciones y solución de los problemas del mundo real" (p. 1).

Lo que se busca es que los estudiantes hallen estrategias para plantear y construir modelos por sí mismos, y a la vez lo utilicen para reforzar aprendizajes. Como lo afirma el Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012) "la modelización reside en la identificación, manipulación, diseño y construcción de modelos matemáticos sobre situaciones auténticas del entorno, este sentido de realidad es esencial para los aprendizajes" (p. 31).

Es importante mencionar que la contextualización activa nos con lleva a la modelización, aunque no todas las contextualizaciones son útiles en circunstancias educativas, pues no generan un rol activo en los estudiantes. Es por eso que se deben proponer problemas en contextos reales que provoquen la construcción o el uso de modelos.

Desde el 2012, el sistema educativo costarricense se ha enfrentado a una serie de cambios en cuanto a su currículo, en particular, en Matemáticas. Esto se debe a tendencias internacionales respecto a la educación matemática, desde sus ejes temáticos hasta los métodos de enseñanza y aprendizaje, así como también la evaluación. Al respecto, el MEP (2012) indica que

> […] el enfoque principal de este currículo es la resolución de problemas en contextos reales, la manera más conveniente de promover la implementación del mismo es colocar en el currículo como ejes disciplinares el resolver problemas, hacerlo en contextos reales y además darles a estas acciones el mayor relieve (p. 36).

Es importante tomar en cuenta la contextualización activa en nuestras aulas, ya que con ello logramos un mejor entendimiento de dicha materia, junto con ello la aplicación de las matemáticas en su vida cotidiana, debemos fomentar un cambio en la metodología de enseñar dicha área. Según el MEP (2012), "se plantea una contextualización activa que estimule la acción estudiantil, lo que requiere el uso importante de modelos sobre la realidad cercana" (p. 36).

Problema contextualizado

Colombia se ha caracterizado por ser una potencia cafetalera a nivel mundial, de ahí que aborden investigaciones relacionadas con la construcción de modelos matemáticos en la caficultura, por lo tanto, será el principal referente de este trabajo.

Al existir desvinculación entre la matemática que se enseña en clase y los contextos extracurriculares en los que se desenvuelve cada estudiante, esta línea de investigación se centra en los contextos más cercano a los jóvenes. La cercanía de los estudiantes con los cafetales, los conduce a analizar fenómenos que se presentan allí, donde se hace presente la modelización que conlleva a comprender e interpretar situaciones en diferentes contextos.

Los estudiantes han obtenido experiencias dentro de las prácticas realizadas en los cultivos de café, además que estos conocimientos han sido transmitidos por sus familiares.

La reproducción de la broca ha sido uno de los problemas que enfrentan los cafetaleros, lo cual afecta directamente en la producción de café, esta plaga se propaga en el cultivo provocando que este pierda la calidad y su costo económico.

Según los primeros análisis realizados por los estudiantes cada broca hembra pone aproximadamente unas cuarenta y tres larvas, de acuerdo con esto se puede realizar ciertas operaciones para calcular la cantidad de brocas. Sin embargo, este conocimiento no es lo más preciso como para generar acciones o tomar decisiones frente a aspectos que intervienen en el contexto. De modo que, se procede a reflexionar y a discutir sobre dicha situación y llegar a una respuesta más acertada.

Se estudia una primera generación de brocas, de esta nacen 27 hembras, en una segunda generación nacen 27, lo cual se puede representar como 27^2. En la segunda generación, se obtiene un total de 810 huevos, de estas salen 729 hembras y 27 por tres da 81 y de 810 menos 81 machos es igual a 729 hembras. En la primera generación tenían 30 brocas, de las cuales 27 eran hembras y en la segunda generación 27 hembras de las que se producen 729 hembras para la segunda generación.

La situación conlleva a determinar que hay un conocimiento aritmético, pero este tipo de variación conduce a que la reproducción de la broca a través de las potencias, donde la variable toma forma de variable, lo cual se puede expresar como función exponencial.

Donde se observa que los términos relacionados fueron: generación, broca hembra y macho. Entonces, se sabe que las hembras que produce cada hembra al salir de los huevos y la x es la cantidad de hembras que se tiene por generación, por lo que al final lleva a concluir que $f(x) = 27^x$ con $0 \leq x < 8$. Para los machos se realiza un razonamiento similar, por medio del cual se genera una construcción entre lo nuevo y lo conocido, lo que lleva a concluir que $f(x) = 3^{3x-2}$.

Posibles actividades a realizar en un futuro

Relacionar y modelar las variedades de tamaños del instrumento de recolección (canasto y cajuela) con diferentes medidas de capacidad.

Comparar el valor monetario de la jornada laboral en épocas pasadas y en la actualidad, haciendo uso de operaciones fundamentales con números naturales.

Medir la cantidad de terreno necesario para sembrar o determinar la distancia a la cual se debe poner el almácigo de café para evitar plagas, se utilizan distintas unidades de superficie.

La relación de la capacidad de los diversos tamaños de canastos que se usan en la actividad de la recolección del café, pues utilizan una medida creada por ellos la cual se llama la cajuela, a partir de esta medida se derivan diferentes medidas menores a la de la cajuela.

La confección de los canastos contiene una relación matemática, como lo es la cantidad de material que necesito para un determinado canasto, el tejido que se involucra durante dicho proceso, entre otros.

Referencias Bibliográficas

Arcila, J., Camayo, G., Chaves, B. y Jaramillo, A. (2003). Desarrollo floral del cafeto y su relación con las condiciones climáticas de Chichinchá-Caldas. Recuperado de http://www.cenicafe.org/es/publications/arc054(01)035-049.pdf

Berrio, M.; Bustamante, C.; Ocampo, D.; Osorio, J. y Villa-Ochoa, J. (2009). Sentido de realidad y modelación matemática: el caso de Alberto. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/890/1/jhony.pdf

Chavarría, J. y Chaves, E. (2008). Desarrollo histórico y percepción del proceso de implementación del Sistema Internacional de unidades de Costa Rica. Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno4/cuaderno4_c6.pdf

Gavarrete, M. (2013). La Etnomatemática como campo de investigación y acción didáctica: su evolución y recursos para la formación de profesores desde la equidad. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/3098/1/Gavarrete2013Laetnomatem%C3%A1tica.pdf

Granados, C. (1994). El impacto ambiental del café en la historia costarricense. Recuperado de http://historia.ucr.ac.cr/repositorio/bitstream/123456789/183/1/6vol4_n2cgranados.pdf

Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de estudio de matemáticas. Recuperado de http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Obando, J. y Sánchez, J. (2014). Construcción de modelos matemáticos en un contexto cafetero. Recuperado de http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/375/1/JC0873.pdf

Rodríguez, A. (2014). Costa Rica, historia de crisis con aroma y sabor a café. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4726172.pdf

Torres, A. (2012). Determinar la influencia de la luna en la agricultura. Recuperado de http://dspace.ucuenca.edu.ec/bitstream/123456789/3078/1/mag136.pdf

Universidad de Michigan. (2015). Roya del café: como destruir al enemigo de los cafetales. Recuperado de http://espanol.umich.edu/noticias/comunicados-de-prensa/2015/09/23/roya-del-cafe-como-destruir-al-enemigo-de-los-cafetales/

Universidad Nacional de Colombia. (2015). Modelo matemático que mide los ataques de la broca en cafetales. Recuperado de http://agenciadenoticias.unal.edu.co/detalle/article/modelo-matematico-mide-ataques-de-la-broca-a-cafetales.html

Lo inédito de la labor docente: creando actividades lúdicas para la comprensión de las matemáticas

Licda. Rosibel Brenes García
CINDEA de Heredia
Colegio de Limón Diurno
rbrenesgarcia@gmail.com

Resumen: Reflexionar sobre la enseñanza y el aprendizaje por medio estrategias metodológicas lúdicas, es útil para la comprensión de las matemáticas. A partir de la sistematización de tres actividades diferentes, tanto en el área específica de las matemáticas, como en la sensibilización para este aprendizaje y la valoración de autores que proponen un aprendizaje significativo e innovador, se motiva al docente para que elabore actividades lúdicas sencillas; pero enriquecedoras en el aula. También se presentan otras actividades lúdicas propuestas.

Palabras clave: lúdico, inédito, aprendizaje, enseñanza, currículo escolar, estrategia metodológica, innovación.

Introducción

El docente de matemáticas en el proceso educativo, se encuentra ante una sociedad que lo reta a buscar estrategias que atraigan la atención de los estudiantes. Mientras que el Ministerio de Educación Pública (MEP), establece cambios en los programas de estudios para mejorar la calidad de la educación, en los que se propone una mayor adquisición de conocimientos de los estudiantes para el mundo que enfrentará, la vida fácil que propone la actual sociedad da al traste con los nuevos desafíos propuestos.

El deterioro social va en aumento, continúa la desintegración familiar, los medios de comunicación difunden pornografía, sexo libre sin ningún tipo de responsabilidad física, emocional y mucho menos espiritual; escenas que promueven el narcotráfico, la violencia y la corrupción. Enfrentarse en nuestro país con la corrupción en diferentes esferas políticas y otros tipos de profesionales o funcionarios, se hace notorio y palpable cada vez más, así como él uso irracional de nuevas tecnologías, lo cual provoca visiones de un mundo sin valores y deberes.

Para los estudiantes que tienen su sentido de la vista habilitado para recibir información, el captar imágenes y colores es atrayente, de ahí que los celulares y Tablet, que son las herramientas tecnológicas de mayor accesibilidad, sean utilizadas muy frecuentemente, siendo un distractor en muchos de los casos dentro del aula, por el uso desmedido al contener en mucho de los casos juegos y otras aplicaciones que distorsionan el proceso educativo.

El aprovechar el contexto para impulsar el aprendizaje, es una estrategia metodológica por medio de la cual los estudiantes responden a una pregunta muy usual ¿para qué me sirven las matemáticas? Un contexto que está lleno de un sinnúmero de imágenes y colores, que son parte del diario vivir de los estudiantes. Es en este contexto de formas y colores, donde nacen muchas inquietudes de descubrir texturas, figuras y una variedad de situaciones que moldean la vida del estudiante.

Las matemáticas se encuentran inmersas en el diario quehacer de la humanidad, con lo que descubrirlas y aplicarlas en el entorno, dan sentido a estas, al respecto López y otros (2004) se refieren a que "Las matemáticas están constituidas por un grupo complejo de teorías, técnicas y conocimientos que tienen su desarrollo propio y que pueden ser usadas para el entendimiento y exploración de nuestro entorno social y natural gracias a su alto nivel de sofisticación” (p.2).

Siendo que el docente debe utilizar diversas técnicas dentro y fuera del aula para facilitar los aprendizajes, el uso de actividades lúdicas provoca ambientes de aceptación en el aprendizaje de las matemáticas, ayudándoles a superar barreras como desinterés, desmotivación, aplicaciones con el contexto, entre otros.

Esta estrategia metodológica se puede utilizar en todas las áreas del currículo de las matemáticas a saber números, geometría, relaciones y algebra, probabilidad y estadística así como trigonometría. A continuación se describen algunas actividades utilizadas.

Estrategia metodológica de colorear o utilización de colores

El colorear o utilizar colores, es una estrategia metodológica que requiere la creatividad e ingenio, para utilizarla en diferentes situaciones del quehacer docente. En si es innovadora y lúdica, ya que no establece específicamente para que actividades o áreas de las matemáticas se debe utilizar, además de crear un espacio de recreación en los estudiantes. En este sentido el docente crea la actividad, situación inédita en muchos de los casos, que requiere de acuerdo a las necesidades conocidas en el aula, al respecto Zaltman citado por Margalef y Arenas (2006) describen la innovación como:

> […] tres usos relacionados entre sí. Innovación en relación a “una invención”, es decir, al proceso creativo por el cual dos o más conceptos existentes o entidades son combinados en forma novedosa, para producir una configuración desconocida previamente. En segundo lugar la innovación es descrita como el proceso por el cual una innovación existente llega a ser parte del estado cognitivo de un usuario y de su repertorio conductual. Y por último, una innovación es una idea, una práctica o un artefacto material que ha sido inventado o que es contemplado como novedad, independientemente de su adopción o no adopción. (p.15)

Con el propósito de mostrar la creatividad de esta estrategia metodológica se realizó en una población heterogénea, del Colegio de Limón Diurno, modalidad académica, que requerían apoyo educativo.

En detalle la aplicación de la estrategia metodológica se realizó con estudiantes de octavo año, con edades entre 13 y 15 años. También, con estudiantes de noveno año, con edades de 14 a 16 años, sordos. Por último se utilizó la estrategia metodológica con estudiantes de décimo año, con edades entre los 15 y 17 años.

Por otra parte se describen actividades realizadas en el CINDEA de Heredia, Satélite de Cairo, donde la población tiene edades de 15 años en adelante.

Las actividades lúdicas pueden ser sencillas como las expuestas en este trabajo y ofrece libertad en su utilización para transmitir conocimientos a los estudiantes, en este caso se utilizaron lápices de color y hojas de papel, cartulina, impresora, transportadores, cuerdas, papel tamaño carta.

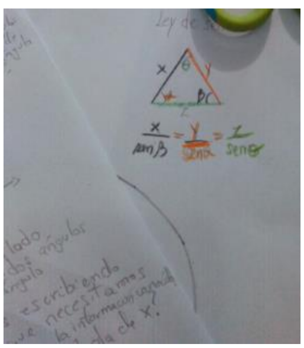
Actividades lúdicas desarrolladas en el Colegio de Limón Diurno

Identificando monomios, binomios, trinomios y polinomios

Con los estudiantes de octavo año, para identificación monomios, binomios, trinomios y polinomios, se brindaron los conceptos de estos y varios ejemplos. Posteriormente para la realización de la actividad evaluativa, se dan las indicaciones a los estudiantes de que deben colorear en una hoja las áreas demarcadas donde se encuentran los monomios, binomios, trinomios y polinomios.

Para cada tipo de los anteriores, se asigna un color diferente, el estudiante colorea y como resultado se obtiene un dibujo o figura. Se puede establecer dibujos o figuras diferentes lo cual permite un ámbito mayor de expectativas, al esperar el resultado, una vez que concluyan la actividad de colorear. O si se prefiere puede ser iguales para todos, lo que ofrece el mismo resultado. Durante el proceso, se evacuan dudas a los estudiantes y se replantean colores, donde fue mal coloreado alguno, para tener uniformidad en el resultado final. Puede utilizarse en trabajos extra clase.

Ley de senos

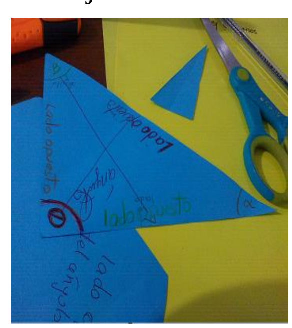


Para estudiantes de noveno año, en este caso estudiantes sordos y estudiantes de décimo año, en aplicaciones de geometría, como es la utilización de la ley de senos; se observa la dificultad de la relación del lado y su ángulo opuesto en un triángulo, por parte de los estudiantes, así como escribir la relación de proporcionalidad correspondiente a esta ley.

El docente utiliza un color para identificar cada lado con su ángulo opuesto, un color diferente para cada caso, y la aplicación de la ley de senos para determinar medidas de lados en triángulos; con los mismos colores que se utilizó en el triángulo, respectivamente.

Una vez realizada la explicación se procede a evaluar los aprendizajes por medio de una práctica donde los estudiantes resuelven varios ejercicios. El docente que es guía para aclarar dudas y corroborar que los procedimientos y respuestas sean correctas, está presente en todo momento durante la práctica para guiar a los estudiantes a la conclusión satisfactoria.

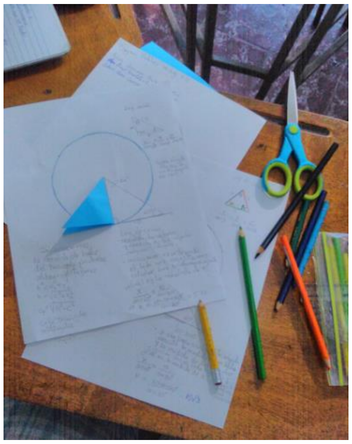
Al finalizar la práctica y a manera de actividad de cierre, el docente solicita a los estudiantes que dibujen a lápiz un triángulo con la representación de sus ángulos en letras griegas, según lo dibuja el docente en la pizarra. Posteriormente cada estudiante debe colorear con el mismo color un lado del triángulo y su lado opuesto, de igual forma realizar la relación de la ley de senos. Debe utilizar el mismo color de lápiz que uso en el triángulo para cada relación.



Una modificación en la actividad, la cual se hizo con los estudiantes de noveno año, fue el recorte de un triángulo en una hoja de color, se pegó en el cuaderno y de igual forma se coloreó un lado del triángulo con su ángulo opuesto con el mismo color. Concluye el estudiante al establecer la relación de la ley de senos con los colores respectivos.

Para fortalecer aún más estos conceptos se trazan una línea de diferente color dentro del triángulo para cada relación de un lado del triángulo con su ángulo opuesto, por ser un tema nuevo para estos estudiantes.

Teorema tangente perpendicular al radio en una circunferencia



En el caso de los estudiantes de décimo, la ley de senos es un tema de repaso previo al tema de la circunferencia y una recta tangente a ésta. Para la construcción de la circunferencia se recortó un triángulo isósceles y la altura que se forma al doblar este en dos triángulos congruentes, se utilizó para trazar la circunferencia, la cual corresponde a su radio.

Al ir trazando la circunferencia se utilizó un color de lápiz fuerte, luego se trazó el radio en la circunferencia, utilizando la altura del triángulo con la que se formó la circunferencia. Seguidamente se abrió el triángulo trazando este sobre la circunferencia, con lo que se estableció la relación de la recta tangente que es perpendicular al radio.

Las hojas adicionales que se utilizaron y recortes de papel, se deben pegar en los cuadernos para conservar el material como recurso de estudio.

Polígonos regulares

Para estudiantes de décimo año, una vez conocidos los elemento de un polígono regular, se les entrega una hoja de color y se les pregunta de cuantos lados desean el polígono, utilizando la fórmula del ángulo central y la medida del radio que desean, crean un triángulo, lo recortan y luego este les sirve de molde para marcar la cantidad de triángulos requeridos para el polígono que van a crear, en cada triángulo marcan el ángulo central.

Posteriormente pegan los triángulos juntos de manera que al lado queda siempre el ángulo central.

Actividades lúdicas desarrolladas en el CINDEA de Heredia, Satélite de Cairo.

Potencias

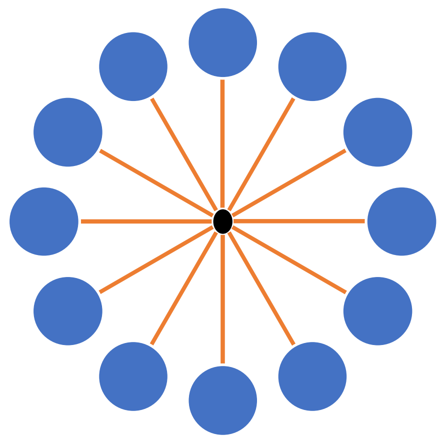
Para fortalecer el tema de propiedades de las potencias, en el segundo nivel del primer periodo, es necesario repasar la forma de potencia y su forma desarrollada, con una guía docente. Para este caso se elaboraron recuadros de diferentes colores con un número de un dígito en el centro de manera que se observe bien desde los pupitres a la pizarra, los cuales se utilizaron para interpretar la forma desarrollada de las potencias.

Se anotan diferentes formas de potencia en la pizarra y se le entrega a cada estudiante un número. Los números entregados coinciden con las potencias anotadas, con el propósito de que ellos construyan dicho concepto. Por último se enseña que el signo que une cada número, es un punto que representa una multiplicación.

Elementos de la circunferencia

Con los estudiantes de tercer nivel del primer periodo, se desarrolla una actividad que he denominado circunferencia humana. En dicha actividad se conforma una circunferencia con la participación de los estudiantes y se explican los elementos de la circunferencia previo al desarrollo de los temas afines a la misma.

El único material que se requiere son cuerdas de igual tamaño, deben considerar el tamaño del aula y la cantidad de estudiantes. Las cuerdas deben tener un nudo exactamente en el centro. Se entrega una cuerda cada dos estudiantes, los cuales la extienden, otros dos extienden la otra procurando unir el nudo del centro con el nudo del centro de la otra cuerda y así sucesivamente, cada dos estudiantes, de manera que los estudiantes conformen una circunferencia, según la siguiente figura:



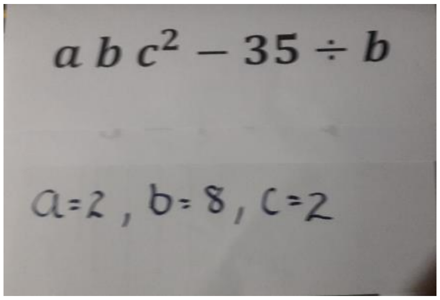
El color azul representa a los estudiantes (son puntos en la circunferencia), el color marrón son las cuerdas (representan radios y diámetros en la circunferencia, según corresponde), el color negro, son los nudos en el centro de las cuerdas (representa el centro de la circunferencia). También se tiene otra cuerda más larga que utilizan otros dos estudiantes para ejemplificar las rectas tangentes, secantes y exterior.

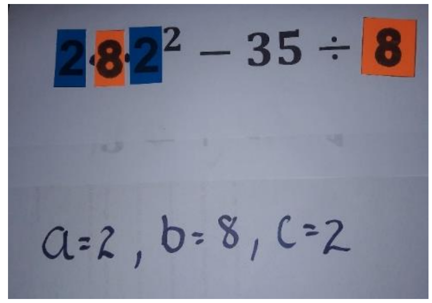
Otras actividades que se pueden desarrollar

Plantillas con fórmulas o expresiones algebraicas

En este caso se crean plantillas impresas con fórmulas o expresiones algebraicas y se tiene números impresos en recuadros recortados para que los estudiantes los coloquen sobre las plantillas según corresponda y puedan realizar los cálculos requeridos.

Un ejemplo es el siguiente:



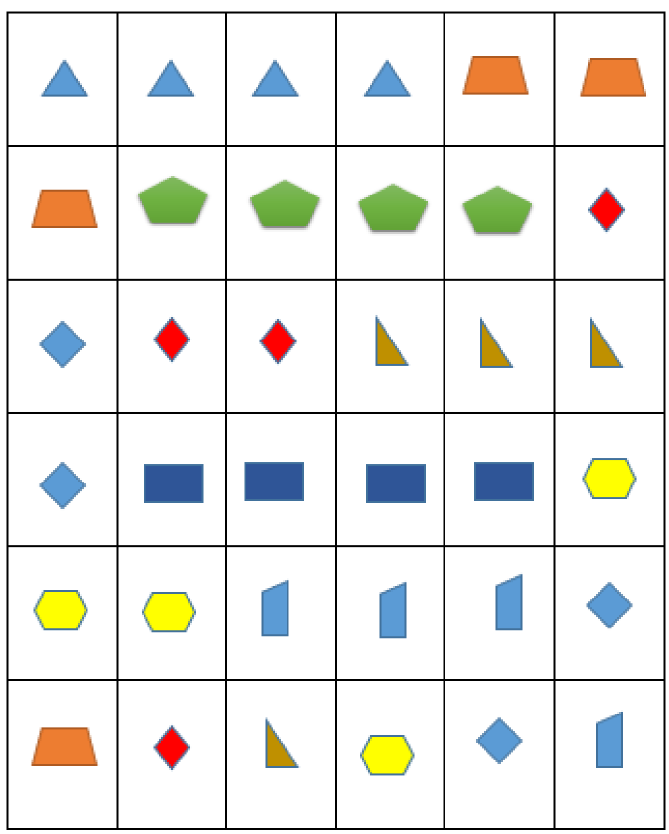


Juego “El Camino del Saber Matemático”

Instrucciones para el juego
1. Preferiblemente realice este juego en parejas o con dos grupos de competidores.
2. Seleccione un tema, para realizar las preguntas, las cuales escribirá o pegará detrás de la figura, una por ficha.
3. Cada ficha al contestarla correctamente, avanza un espacio el jugador, de lo contrario retrocede un espacio.
4. Pueden haber fichas “comodines”, que indiquen que avance un espacio, o dos, sin necesidad de incluir una pregunta.
5. Cada vez que todos los jugadores realicen una ronda, podrán tomar la nueva ficha en el lugar donde quedaron.
6. Si se encuentra en una zona segura, cuando inicia la ronda, avanza un espacio y toma la ficha correspondiente.
7. Quien llega a la meta gana el juego.

(Si desea puede crear sus propias instrucciones)

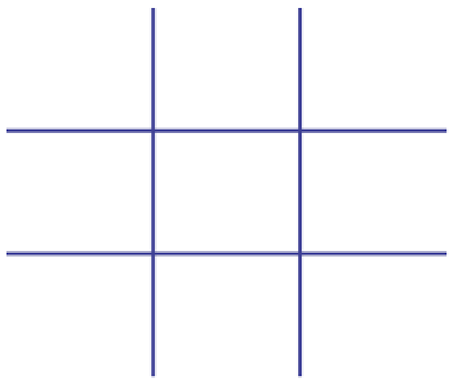
Fichas para el juego



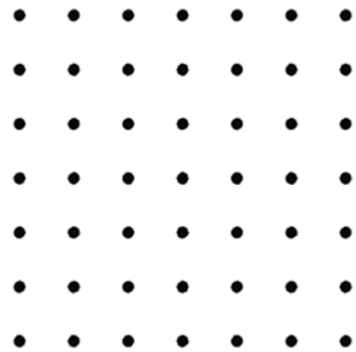
Juegos tradicionales modificados

Algunos juegos pueden ser modificados, como el juego del gato o puntos y el docente decide que preguntas utilizar. En el juego del gato se pueden utilizar preguntas de cierto grado de dificultad, para alargar el juego, el que contesta correctamente, puede realizar la jugada.

En el juego de puntos pueden haber diferentes niveles de complejidad de las preguntas, porque hay más opciones para jugar.



Juego del gato



Juego de puntos

Reflexión de la Experiencia

Al igual que en experiencias anteriores, resultó muy gratificante la utilización de estas actividades lúdicas, debido a que atrajo la atención de los estudiantes. En el caso de identificar los monomios, binomios, trinomios y polinomios, se observó cómo se dedicaron a colorear y concluir el trabajo, realizando algunas correcciones en el proceso, lo que les permitió identificar correctamente los diferentes conceptos.

De igual forma los estudiantes de noveno y décimo pudieron asimilar correctamente la ley de senos y la aplicación de esta en el cálculo de los diferentes lados de un triángulo. Para este caso es necesario que ellos recuerden la ley, razón por la cual se utilizaron los colores en su representación.

Al utilizar la estrategia metodológica de colorear o utilizar colores, al igual que en la utilización de cuerdas, se pretende que el aprendizaje sea significativo, el cual, según Ausubel (1970), citado por Méndez (2008), es “un proceso por el cual se relaciona nueva información, con algún aspecto ya existente en la estructura cognitiva de un individuo y que sea relevante para el material que se intenta aprender” (p.91).

Los estudiantes al tener que participar de las actividades, concretan su atención, con lo que la información podrá formar parte de sus conocimientos con mayor fluidez.

Conclusiones

La estrategia metodológica por medio de actividades lúdicas, promueve la participación activa de los estudiantes y facilita un aprendizaje significativo. Puede ser utilizada de acuerdo a la creatividad del docente y los propósitos perseguidos en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Debido al rechazo existente a las matemáticas aunado a que algunos estudiantes, es necesaria una actitud positiva por parte del profesor y mantener la motivación, durante todo el proceso. Es importante considerar los factores que intervienen en la motivación, según García (2007), las define como "motivación extrínseca (…) el control depende de personas o eventos externos al propio sujeto que realiza la actividad (…) motivación intrínseca (…) el sujeto es origen de su propia motivación y es él quien se administra los esfuerzos y castigos" (p.58).

En la búsqueda de recursos accesibles de bajo costo y que fomente la creatividad, estas actividades son excelentes, porque permiten ver las matemáticas desde un punto de vista divertido y atractivo; sin perder su importancia como base de conocimiento y análisis crítico.

Como se puede apreciar las actividades lúdicas se pueden emplear en diferentes áreas del saber matemático, en diferentes niveles y en diferentes actividades de la planificación docente.

Referencias Bibliográficas

García J. (2007). Haga que lo hagan. Fundación Confemental: Madrid.

López, M. y otros. (2004). Las matemáticas de nuestro entorno. Editorial Siglo XXI_ México.

Margalef, L. y Arenas, A. (2006) ¿Qué entendemos por innovación educativa? A propósito del desarrollo curricular. (47), 15.

Méndez, Z. (2008) Aprendizaje y cognición. Editorial EUNED: San José.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). Programas de Estudio de Matemática. Educación General Básica y Ciclo Diversificado. Costa Rica: autor.

Metodología para la enseñanza de ecuaciones por medio de las aplicaciones MathPapa y Balanzas

Lauren Tatiana González Chaves
Estudiante de Ciencias Actuariales y Estadística
Universidad de Costa Rica
tati742010@gmail.com

Resumen: En la actualidad, la tecnología se presenta como una de las principales herramientas para la enseñanza de la matemática, pues contribuye a que los estudiantes consideren más atractivos los contenidos académicos y permite una educación más sistemática. El objetivo principal de este laboratorio es brindarles a los educadores una metodología para la enseñanza del tema de ecuaciones, mediante la implementación de las aplicaciones MathPapa y Balanzas, ambos software libre y de fácil utilización. Se experimentará con estos dos programas, manipulando sus principales funciones y resolviendo algunos ejercicios. Se procurará que al finalizar el taller los profesores cuenten con los conocimientos necesarios para aplicar esta metodología en sus centros educativos.

Palabras clave: ecuaciones, metodología, MathPapa, Balanzas, secundaria, tecnología, enseñanza**.**

Antecedentes

En la actualidad, la sociedad se enfrenta a múltiples cambios, propiciados primordialmente por los avances tecnológicos. La información se postula como la principal herramienta para desarrollarse en este mundo globalizado. Por ello, los sistemas de educación se ven cada vez más forzados a utilizar nuevos métodos de enseñanza, donde se capaciten estudiantes competitivos y que éstos adquieran los conocimientos de una forma más atractiva.

Entre las principales herramientas que permiten una nueva metodología de enseñanza, se encuentran las Tecnologías de la Información y Ia Comunicación (TICs). MINEDUC, en su artículo *Estándares en Tecnología de la información y la Comunicación para la formación inicial docente* (2006), menciona:

> La inserción de las TICs en los contextos educativos puede reportar beneficios para el sistema educativo en su conjunto: alumnos, docentes y la comunidad educativa en general. En el caso de los docentes, las tecnologías ponen a su disposición diversos recursos digitales: software, documentos, página web, entre otros. Facilitan la participación en redes de docentes y apoyan el trabajo de proyectos en forma colaborativa con otros centros educativos (p. 9).

El Ministerio de Educación Pública (MEP), en su documento, *Programas de Estudio de Matemáticas para el I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada* (2012), se refieren a este tema mencionando que el uso de tecnologías es central para enriquecer y redimensionar la resolución de problemas y las estrategias educativas. Sin embargo, de forma inmediata puntualiza:

> No obstante, las habilidades específicas que se incluyen son relativamente pocas. Esto es así precisamente porque el país no posee todas las condiciones formativas para una introducción más intensa. La forma en que se coloca en los planes, sin embargo, permite que se puedan usar las tecnologías en diversas condiciones. Con el tiempo se deberá intensificar el uso de las tecnologías (p.29).

Como se plasma, existe un apoyo animoso por parte del MEP; sin embargo, la implementación de los TICs no es inmediata. Por ello, se incentiva la realización de talleres, como el presente, para brindar ideas eficientes pero sencillas, sobre métodos interactivos de enseñanza. En este sentido los programas MathPapa y Balanzas ofrecen varias ventajas, pues son software de distribución libre y totalmente gratuita.

Para la explicación, en específico, del tema de ecuaciones, el Programa de Estudio de Matemáticas del 2012, brinda una metodología basada en ejemplos de ejercicios para realizar en papel (visible en las páginas 240 y 241 del mismo documento), sin desarrollar ninguna actividad lúdica que propicie el interés del estudiante. Con la utilización de las aplicaciones MathPapa y Balanzas se pretende estimular a los alumnos para que creen sus propias estrategias en este campo y con esto favorecer la creatividad.

Objetivos del taller

El objetivo general es brindar una metodología para la enseñanza de ecuaciones, a nivel de secundaria, utilizando las herramientas tecnológicas MathPapa y Balanzas.

Los objetivos específicos son:

- Calcular el valor de incógnitas utilizando Balanzas.
- Experimentar las herramientas que ofrece MathPapa para la resolución de ecuaciones.

Justificación

La mayoría de niños, adolescentes y personas en general, cuentan con acceso a Internet. La tecnología trajo consigo una aceleración de los bienes y servicios, la información se transmite a velocidades exorbitantes. Son múltiples los programas, aplicaciones, juegos y medios interactivos que se encuentran en la web. Estos, captan la atención de las personas y figuran como uno de los principales pasatiempos. Pero, todo esto también conlleva a cambios en las formas de educar, los estudiantes necesitan métodos de enseñanza acordes con la sociedad donde se desarrollan. Una metodología que permita incentivar la curiosidad de los estudiantes, por los temas que están abordando en clase. En concordancia con esto, UNESCO (2008), menciona:

> Para vivir, aprender y trabajar con éxito en una sociedad cada vez más compleja, rica en información y basada en el conocimiento, los estudiantes y los docentes deben utilizar la tecnología digital con eficacia. En un contexto educativo sólido, las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) pueden ayudar a los estudiantes a adquirir las capacidades necesarias para llegar a ser: competentes para utilizar tecnologías de la información; buscadores, analizadores y evaluadores de información; solucionadores de problemas y tomadores de decisiones; usuarios creativos y eficaces de herramientas de productividad; comunicadores, colaboradores, publicadores y productores; y ciudadanos informados, responsables y capaces de contribuir a la sociedad (p.2).

Como se menciona anteriormente, las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC's) postulan como una herramienta importante para el desarrollo de los nuevos estudiantes. Modificando el enfoque tradicional, que se centra en el profesor, basado en prácticas alrededor del pizarrón y el discurso, fundamentado en clases magistrales, por una formación centrada principalmente en el alumno dentro de un entorno interactivo de aprendizaje. Con esto, se contribuye a la formación de entes más analíticos, capaces de razonar y comprender los procedimientos que están realizando, contraponiéndose, a una enseñanza lineal y mecanizada.

El docente es la persona que desempeña el papel más importante en la tarea de ayudar a los estudiantes a adquirir las capacidades antes mencionadas. Además, es el responsable de diseñar tanto oportunidades de aprendizaje como el entorno propicio en el aula que facilite el uso de las TIC´s por parte de los estudiantes. Por esto, es fundamental que los docentes se preparen, que reciban una guía y nuevas ideas para la mejora y actualización de sus métodos de enseñanza, que viene siendo, una de las principales metas del presente laboratorio.

Como una estrategia innovadora para la enseñanza de ecuaciones, se desea ofrecer las aplicaciones MathPapa y Balanzas, ambas software libre, descargables para la mayoría de dispositivos electrónicos y de muy fácil utilización. La primera de ellas, es una herramienta que brinda todos los pasos para la factorización y simplificación de operaciones. De igual forma, expone, de manera clara, los procedimientos para la resolución de ecuaciones e inecuaciones. Tomando el principio de que toda expresión algebraica tiene una representación gráfica asociada, llamada función, el programa permite la visualización de un mismo ente matemático desde todas sus diferentes interpretaciones, o sea, le permite al estudiante graficar funciones y entender la solución de una ecuación como la intersección de su gráfica con el eje de abscisas. En el caso de Balanzas, este programa, brinda una forma gráfica de ver las ecuaciones, al presentar una balanza que ejemplifica los dos extremos de una ecuación, a los cuales se les substrae o adiciona dígitos y variables, a su vez, estos son representados por esferas negativas o positivas y monedas. Con esto, se ayuda a que el estudiante comprenda, claramente y eficazmente, el concepto de ecuaciones.

El laboratorio pretende brindar un apoyo para la enseñanza de la matemática, no suplantar al profesor ni al material didáctico existente. Sino que, como menciona, Mazarío y Mazarío (2006), la relación entre enseñanza y aprendizaje, es un proceso en que nos "representamos" en espiral, en el que el sujeto va tomando conciencia de la lógica de sus propias acciones y operaciones como aprendiz, en la medida que el enseñante vaya proporcionándole experiencias de aprendizaje en las diferentes áreas del conocimiento a partir de las aportaciones de la didáctica y la psicología, por decir algunas, y de su propia experiencia docente (p.1).

Metodología

Primera etapa: Inicialmente, se realizará una introducción al laboratorio, abordando la importancia de la aplicación de las TICs a la enseñanza de las matemáticas y dando un panorama general de lo que se impartirá durante la capacitación.

Segunda etapa: Se brindará la primera fase de la metodología para la enseñanza de ecuaciones. La cual cosiste en:

- Para que el profesor introduzca el tema de igualdades, se recomienda dar la definición de ecuación como tal, aclarando que la igualdad no es una operación sino un símbolo para representar una relación. Dando como ejemplo, de esta relación, una balanza. Con esto se podrá explicar gráficamente, por medio de la aplicación Balanzas, los procedimientos que se deben realizar para resolver los ejercicios. Por ejemplo, sustracciones o adiciones a ambos lados de la ecuación (lados de la balanza).
  Como se nota en la Figura 1, la aplicación permite mostrar de forma gráfica e interactiva el concepto de ecuación y las reglas de las igualdades. Es importante que en esta etapa se le permita al estudiante experimentar con el programa y que realice todas las combinaciones que desee y que le permitan entender claramente los ejercicios.

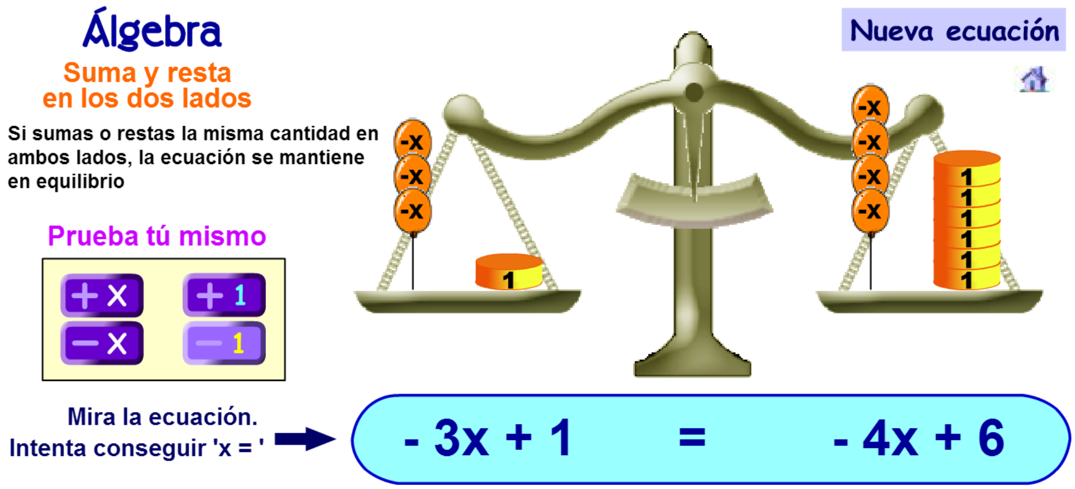


Figura 1. Ejemplo de ecuaciones mostradas en la aplicación Balanzas.

Además, se darán las instrucciones para la utilización de la aplicación Balanzas. Los docentes podrán manipular el programa y resolver algunas ecuaciones.

Tercera Etapa: Se brindará la segunda fase de la metodología para la enseñanza de ecuaciones. Basada en lo siguiente:

- Complementario a la clase del profesor, la aplicación MathPapa ayudará a los estudiantes a comprender ecuaciones más complejas, con polinomios de grado igual o mayor a dos y que implementan hasta dos variables. Como esta aplicación muestra paso a paso la resolución de los ejercicios, es excelente para utilizarla en trabajos extra clases. Se les puede brindar una lista de ejercicios para que los resuelvan con la ayuda del programa. Esto contribuirá al profesor, pues, en la mayoría de ocasiones, el tiempo de las clases no alcanza para dar una cantidad considerable de ejemplos, que aclaren todas las posibles dudas delos estudiantes. También es recomendable que el docente muestre la representación gráfica de las operaciones algebraicas, para estimular un pensamiento analítico en los alumnos. Si se desea enseñar matemática se debe dejar de lado la típica educación lineal e introducirse en una enseñanza basada en el análisis y la comprensión de los procedimientos. Esta aplicación también permitirá que los colegiales aclaren, por sí mismos, las interrogantes que les puedan surgir en sus casas, ya que permite explorar los casos especiales

Seguidamente, se explicará el funcionamiento de la aplicación MathPapa. Se experimentará con la graficación de funciones (ver Figura 2), la resolución de ecuaciones (ver Figura 3) y por último, con la factorización y simplificación de operaciones algebraicas.

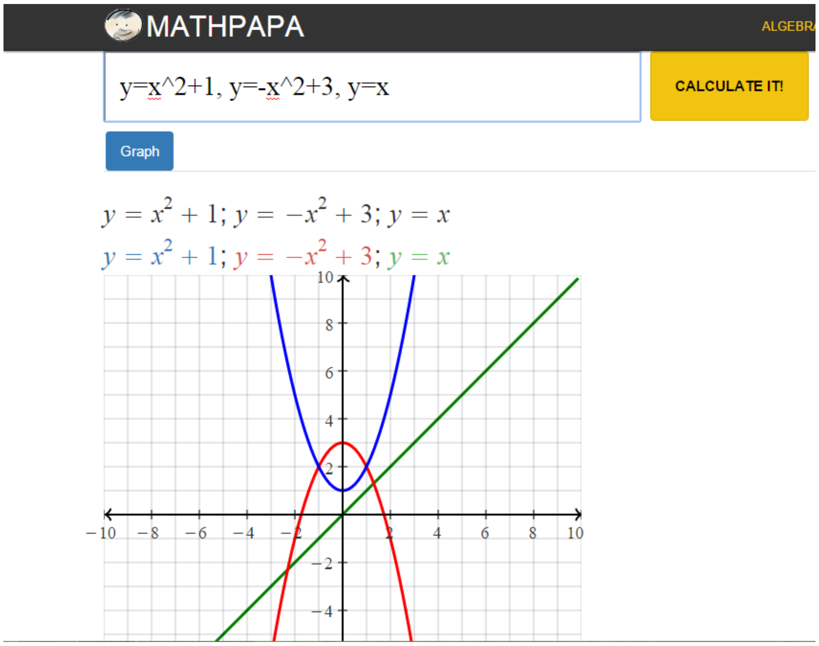


Figura 2. Ejemplo de gráfico brindado por la aplicación MathPapa.

4x+7=2x+1 **Calculate it!**

$4x+7=2x+1$

I will try to solve your equation.

$4x+7=2x+1$ (Simplify both sides of the equation)

$4x+7+-2x=2x+1+-2x$ (Add -2x to both sides)

$2x+7=1$

$2x+7+-7=1+-7$ (Add -7 to both sides)

$2x=-6$

$\frac{(2x)}{2}=\frac{(-6)}{2}$ (Divide both sides by 2)

$x=-3$

Figura 3. Ejemplo de una ecuación resuelta por la aplicación MathPapa.

Requerimientos:

1. Un laboratorio con computadoras.
2. Proyector multimedia.
3. Conexión a internet para ingresar al programa en línea MathPapa http://www.mathpapa.com/algebra-calculator.html
4. Descargar en las computadoras el archivo de la aplicación Balanzas.

Referencias Bibliográficas

Mazarío, I. y Mazarío, A. (2006). Enseñar y aprender: conceptos y contextos. Recuperado de http://www.bibliociencias.cu/gsdl/collect/libros/archives/HASHd99c.dir/doc.pdf

MINEDUC. (2006). Estándares en Tecnología de la información y la Comunicación para la formación inicial docente. Recuperado de http://www.enlaces.cl/portales/tp3197633a5s46/documentos/200707191420080.Estandares.pdf

Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de Estudio de matemáticas: I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada. San José, Costa Rica.

UNESCO. (2008). Estándares de Competencias en TIC para docentes. Recuperado de http://www.oei.es/tic/UNESCOEstandaresDocentes.pdf

Modelo de Rasch, una metodología para medir la confiabilidad de la prueba de diagnóstico en matemática (PDM)

José Andrey Zamora Araya
Universidad Nacional
andreyzamora@gmail.com

Resumen: La prueba de diagnóstico matemático (PDM) aplicada en la Universidad Nacional (UNA) requiere de un proceso tanto en su construcción como para analizar su nivel de confiabilidad. El modelo de Rasch es propuesto como herramienta para medir la confiabilidad de la PDM, debido a sus ventajas en términos de interpretación y análisis de la información. Se ejemplifica el uso de la metodología con la prueba aplicada durante el 2013, así como los resultados más importantes y recomendaciones para mejorar futuras pruebas.

Palabras clave: Educación superior, pruebas de diagnóstico, confiabilidad y modelo de Rasch.

Introducción

La Escuela de Matemática de la Universidad Nacional (UNA), desde el año 2009, elabora una prueba de diagnóstico matemático (PDM) para los estudiantes de nuevo ingreso que deben llevar al menos un curso de matemática durante su carrera, desde entonces ha venido evolucionando tanto en aspectos logísticos como técnicos. Precisamente y a partir del cambio dado en los programas de estudio de matemática del Ministerio de Educación Pública (MEP) es necesario la revisión de los temas que tradicionalmente se han evaluado: Números reales, álgebra, funciones y trigonometría.

En sus inicios la PDM respondió a la necesidad de conocer el nivel de conocimientos matemáticos que dominan los estudiantes de nuevo ingreso a la UNA, pues los índices de aprobación en los cursos introductorios, como Matemática General, se han mantenido bajos por varios años.

Con la aplicación de la PDM es posible detectar aquellos temas que presentan mayor dificultad para el estudiante y a partir de ello, tomar decisiones con respecto a sus resultados. Sin embargo, antes de poner en práctica cualquier actividad con respecto a la información arrogada por la PDM es necesario garantizar la confiabilidad de prueba mediante criterios técnicos adecuados.

Es aquí es donde el denominado modelo de Rasch resulta de gran utilidad para valorar la confiabilidad del instrumento; debido a la interpretación relativamente simple que permite realizar, muy apropiadas en contextos educativos.

Aspectos referentes a la Confiabilidad de las pruebas diagnósticas

Las pruebas diagnósticas se han utilizado en Costa Rica con el fin de *medir* el nivel de conocimientos que poseen los examinados respecto a un tópico particular. Por lo general estas pruebas abarcan muchos contenidos sobre una temática específica, cubiertos en un plazo de tiempo largo (Jornet y Suárez, 1996).

En el caso de la UNA, el PDM incluye temas relativos a números reales, álgebra, funciones y trigonometría que regularmente son impartidos en la educación secundaria. No obstante, con el cambio de programas del MEP (2012) es necesario una revisión a la forma de elaborar y analizar la PDM.

Un aspecto importante a considerar en este proceso es la confiabilidad, la cual en este contexto se refiere a la consistencia de las calificaciones obtenidas por los individuos. De acuerdo con Arginay (2006), el error de medición del instrumento esta asociado con la falta de confiabilidad.

Por esto se opta por aplicar el modelo de Rasch, perteneciente a los modelos de teoría de respuesta a los ítems (TRI), pues analiza la confiabilidad del instrumento no a un nivel agregado del test, sino a un nivel donde se puede evaluar cada ítem de la prueba, mediante la estimación de parámetros tanto para los examinados como para los reactivos de la prueba (Barbero, 1999)

Modelo de Rasch

El modelo de Rasch fue propuesto por Georg Rasch en la década de 1960 y tiene grandes ventajas en comparación a la TCT entre ellas: la variación del error a lo largo del atributo medidoy la interpretación gráfica que puede realizarse del nivel de habilidad de los examinados y la dificultad de los reactivos Jiménez (2010). Una de sus representaciones más usuales es:

$$P_{vi}(\theta) = \frac{e^{(\theta_v - b_i)}}{1+e^{(\theta_v - b_i)}} \qquad (1)$$

En esta formulación, θ representa el nivel de habilidad de la persona v en el constructo y b el nivel de dificultad del ítem. Otra ventaja del modelo, es que ambos parámetros están en la misma escala llamada logit. La expresión ($\theta_v - b_i$) indica el resultado probable de la interacción persona – ítem, donde la probabilidad de acertar el ítem aumenta de manera proporcional conforme aumenta el nivel de habilidad de la persona. (Embretson y Reise, 2000)

Criterios de bondad de ajuste

Como lo señalan Bond y Fox (2001), las propiedades que hacen atractivo al modelo de Rasch solo se obtienen si los datos se ajustan al modelo propuesto. Se debe recordar que, para utilizar un modelo, se asume que este representa el comportamiento de los datos y, por ende, puede inferirse el cumplimiento de los supuestos de dicho modelo para los datos analizados.

En la práctica los dos estadísticos de ajuste más utilizados, tanto para personas como para ítems, son el INFIT y el OUTFIT. Basados en simulaciones, Bond & Fox (2001) refieren que valores de media cuadrática mayores a 1,3 son indicativos de que los datos poseen un patrón de respuesta aleatorio y con mucha variabilidad, lo que provoca un bajo ajuste; por su parte, valores menores a 0,7 presentan patrones muy determinados y con poca variación, lo que provoca un sobre ajuste, por lo tanto, para estos autores un rango aceptable para dichos estadísticos de ajuste está entre 0,7 y 1,3. Para el análisis de los resultados se usará, como indicador de ajuste, el INFIT pues el OUTFIT es un indicador muy sensible a los valores extremos.

Metodología

En este estudio se analiza la confiabilidad de la PDM 2013, aplicando el modelo de Rasch. La muestra disponible son estudiantes de nuevo ingreso que realizaron la prueba diagnóstica en matemática 2013, la cual incluye estudiantes de todas las sedes de la UNA, donde la mayor proporción pertenece a la sede central ubicada en cantón central de Heredia.

Descripción de la muestra

Los datos para este estudio fueron suministrados por el departamento de registro de la UNA. La base de datos está constituida por 1457 registros de estudiantes de nuevo ingreso a la UNA.

Software

Mediante el software WINSTEP 3.72.3 se obtendrán los valores de INFIT y OUTFIT tanto para ítems como personas y se construyen los mapas de ítems *vs*. personas. Además para los análisis descriptivos se usará el software R 3.2.3

Resultados

Los resultados de la PDM 2013, en cuanto a aprobación son bastante desalentadores como se puede apreciar en la tabla 1.

Los resultados sugieren un bajo nivel de conocimientos matemáticos en el estudiantado de nuevo ingreso, no obstante, un grupo reducido de estudiantes logró aprobar el examen. Antes de tomar decisiones referentes a la PDM, es necesario establecer su confiabilidad, para poder interpretar de la mejor forma sus alcances.

Precisamente la medida de confiabilidad de las personas para la PDM 2013, es de 0,82 y para ítems es de 0,99 lo que muestra un buen ajuste de los datos al modelo, esto a pesar de los bajos resultados en cuanto a rendimiento mostrados por los examinados,

Tabla 1: UNA: *Estadísticas descriptivas de estudiantes, según nota obtenida en el examen de diagnóstico de matemática 2013*

	Año 2013
Total	1457
Mínimo	0,0
Máximo	100,0
Rango	100,0
Media	32,8
Mediana	30,0
Moda	27,0
Desviación estándar	13,8
Percentil 25	25,0
Percentil 50	30,0
Percentil 75	38,0
Percentil 90	50,0
Percentil 95	60,0
Cantidad de notas superiores o iguales a 70	42

Análisis

El modelo de Rasch se utiliza para evaluar la confiabilidad de la PDM 2013. En el tabla 2 se observan algunas estadísticas descriptivas de los ítems. La cantidad de respuestas correctas es una aproximación a la dificultad de la pregunta, por ejemplo, el ítem 51 parece ser un reactivo difícil, ya que solo 200 personas lo contestó correctamente, mientras que el reactivo ítem 6 pareciera ser un reactivo relativamente fácil ya que 468 examinados lo contestó correctamente.

Tabla 2: *UNA: Estadísticos descriptivos por ítem para la PDM 2013.*

Ítem	Número de respuestas correctas	Medida	Desviación estándar	Ítem	Número de respuestas correctas	Medida	Desviación estándar
51	200	1.19	.08	8	469	-.03	.06
33	205	1.15	.08	11	469	-.03	.06
60	227	1.02	.08	27	477	-.05	.06
44	230	1.00	.08	7	482	-.07	.06
52	246	.92	.07	50	485	-.08	.06
54	250	.89	.07	22	491	-.10	.06
46	258	.85	.07	12	497	-.12	.06
15	270	.79	.07	26	498	-.12	.06
48	276	.76	.07	17	500	-.13	.06
59	294	.67	.07	34	504	-.14	.06
35	305	.62	.07	19	508	-.16	.06
25	312	.59	.07	29	516	-.18	.06
55	324	.54	.07	38	517	-.19	.06
40	336	.48	.07	32	539	-.26	.06
24	348	.43	.06	31	557	-.32	.06
47	355	.40	.06	9	591	-.43	.06
16	361	.38	.06	39	616	-.51	.06
2	368	.35	.06	4	645	-.59	.06
37	379	.31	.06	28	652	-.62	.06
13	398	.23	.06	30	654	-.62	.06
58	398	.23	.06	10	657	-.63	.06
3	1091	.15	.06	20	660	-.64	.06
57	428	.12	.06	43	666	-.66	.06
1	438	.08	.06	21	674	-.68	.06
53	438	.08	.06	41	687	-.72	.06
56	439	.08	.06	5	690	-.73	.06
45	454	.03	.06	23	711	-.80	.06
14	457	.02	.06	49	873	-1.29	.06
42	464	-.01	.06	18	980	-1.64	.06

Elaboración propia basada en los datos suministrados por el departamento de registro de la UNA.

Tabla 3: UNA: Valores de INFIT y OUTFIT de los ítems aplicados en la PDM 2013

INFIT	Número de ítems	Porcentaje	OUTFIT	Número de ítems	Porcentaje
Menores a 0,70	0	0,0	Menores a 0,70	0	0,0
Entre 0,7 y 0,99	29	48,3	Entre 0,7 y 0,99	31	51,7
Entre 1 y 1,2	31	51,7	Entre 1 y 1,2	29	48,3
Total	60	100,0	Total	60	100,0

Elaboración propia basada en los datos suministrados por el departamento de registro de la UNA.

Tabla 4: UNA: Valores de INFIT y OUTFIT de las personas que efectuaron la PDM 2013

INFIT	Número de personas	Porcentaje	OUTFIT	Número de personas	Porcentaje
Menores a 0,70	0	0,0	Menores a 0,70	0	0,0
Entre 0,7 y 0,99	709	48,7	Entre 0,7 y 0,99	734	50,4
Entre 1 y 1,3	732	50,2	Entre 1 y 1,3	682	46,8
Mayores 1,3	16	1,1	Mayores a 1,3	41	2,8
Total	1457	100,0	Total	1457	100,0

Elaboración propia basada en los datos suministrados por el departamento de registro de la UNA.

Como lo muestran las tablas 3 y 4 los estadísticos de ajuste se encuentran dentro de un rango aceptable, por lo que es adecuado utilizar la metodología de Rasch.

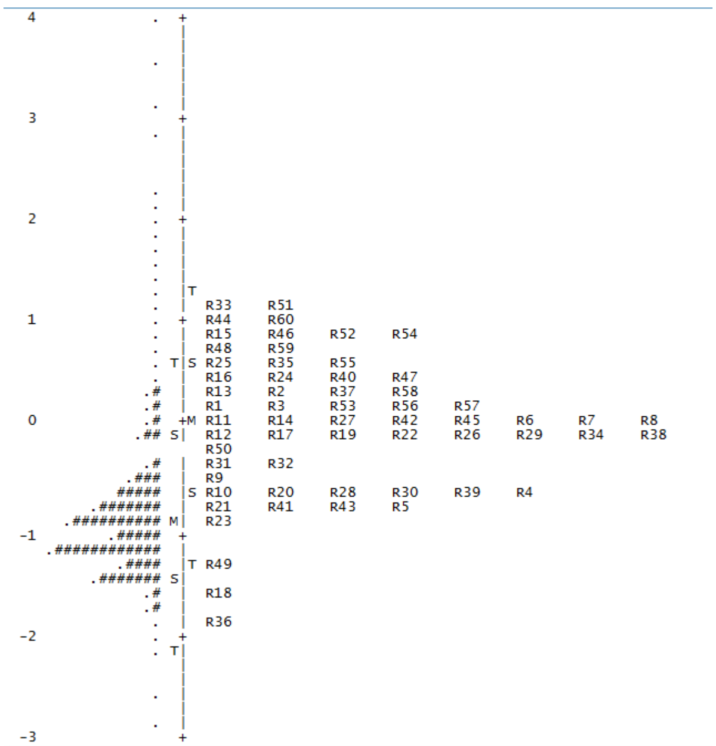


Figura 1. Mapa de ítems vs. personas para la PDM 2013. Cada "#" es 19. Cada "." va de 1 a 18
Elaboración propia basada en los datos suministrados por el departamento de registro de la UNA

Gracias a la propiedad que tiene el modelo de Rasch, de ubicar en la misma escala la habilidad de las personas y la dificultad de los ítems, se puede observar en la figura 1 donde se puede observar que existe una buena cantidad de ítems para medir niveles del constructo altos y medios. Aunque en niveles bajos existen ítems, una sugerencia sería incorporar algunos ítems cuya dificultad este acorde con este nivel de habilidad.

En general, la mayoría de los ítems se encuentran concentrados en niveles altos y medios con respecto al nivel de habilidad de los estudiantes, y hay pocos ítems que brinden información en niveles bajos de habilidad. Lo deseable en una prueba de diagnóstico, es contar con ítems que abarquen todo el rango de habilidad de los examinados.

Conclusiones

Aunque la PDM en la UNA no ha sido vinculante, se están haciendo esfuerzos para que lo sea por lo que resulta importante contar con una prueba técnicamente bien elaborada.

La metodología de Rasch resulta adecuada para brindar las evidencias de confiabilidad de la prueba, debido a sus ventajas frete a otras metodologías. Su interpretación es simple y el procesamiento de la información es rápido si se cuenta con las herramientas tecnológicas apropiadas.

La metodología brinda la posibilidad de analizar separadamente los ítems y las personas que los responden y al poder expresar los resultados en una métrica común, permite realizar interpretaciones en función de la habilidad de las personas y la dificultad de los ítems. Dentro de las posibles interpretaciones están el establecimiento de estándares de desempeño que podrían dar la posibilidad de brindar recomendaciones puntuales, dependiendo no solo de la cantidad de respuestas correctas sino del puntaje obtenido en la escala logit.

En este sentido, el uso de este tipo de metodologías tiene mucho potencial para tomar acciones tendientes a mejorar el rendimiento académico de los estudiantes que año con año se incorporan a la UNA.

Referencias Bibliográficas

Arginay, J. C. (2006). Técnicas psicométricas. Cuestiones de validez y confiabilidad. *Subjetividad y procesos cognitivos, 8*. Recuperado de http://dspace.uces.edu.ar:8180/dspace/handle/123456789/765

Barbero, M. (1999). Desarrollos recientes de los modelos psicométricos de la teoría de respuesta a los ítems. *Psicothema, 11*(1). Recuperado de http://www.psicothema.com/pdf/242.pdf

Bond, T.G., & Fox, C. M. (2001). *Applying the Rasch model: Fundamental measurement in the human sciences.* New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Embretson, S., & Reise, S. (2000). Item response theory for psychologists. Mahwah, NJ: LEA.

Jiménez, K. (2010). Validación de la prueba de diagnóstico de conocimientos y destrezas en matemáticas del estudiante al ingresar a la universidad de la escuela de matemática de la UCR (Tesis de maestría). Universidad de Costa Rica.

Jornet, J. M., & Suárez, J. M. (1996). Pruebas estandarizadas y evaluación del rendimiento: Usos y características métricas. *Revista de Investigación Educativa, 14*(2). Recuperado de http://www.uv.es/gem/archivos/RIE14.PDF

MEP (2012). Reforma curricular en ética, estética y ciudadanía programas de estudio de matemáticas I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada. San José: Costa Rica.

Modelos matemáticos

Edison de Faria Campos
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Asociación de Matemática Educativa
edefaria@gmail.com

Resumen: Se utilizan modelos matemáticos sencillos que contienen distintos tipos de funciones matemáticas para resolver problemas. Los modelos utilizados son discretos o bien continuos y en una situación se describe una simulación basada en el modelo dado. También se desarrolla una metodología para construir un modelo lineal de mejor ajuste para una serie de datos.

Palabras clave: Resolución de problemas; modelación matemática; simulación

Introducción

Los programas de estudio de matemática para I, II y III ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP) 2012, enfatizan la construcción y la utilización de modelos matemáticos para el desarrollo de la competencia matemática:

> […] una capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las Matemáticas en una variedad de contextos. Incluye razonar matemáticamente y usar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel de las Matemáticas en el mundo y hacer juicios bien fundados y decisiones necesarias para ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. (MEP, 2012, p. 23)

En los mencionados programas se explicita que un modelo es en esencia un conjunto de elementos matemáticos conectados que representan una realidad específica y que hay que utilizarlos para generar o reforzar aprendizajes. La modelización siempre aparecerá de manera integrada al proceso “Plantear y resolver problemas” (MEP, 2012, p. 31).

En resumen podemos decir que un modelo matemático consiste en la descripción de un sistema utilizando conceptos y lenguaje matemáticos, y que su importancia radica en una mejor comprensión del fenómeno estudiado, para predecir cualitativa y cuantitativamente el comportamiento del sistema bajo ciertas condiciones o en situaciones de interés.

Muchas veces el modelo utilizado es muy complejo y se hace necesario la simulación. En este caso hay que utilizar análisis numérico y tecnología digital para aproximar las soluciones numéricas de los modelos utilizados y simular, es decir, reproducir aproximadamente las principales características de su comportamiento. Una simulación por computador es un programa que intenta reproducir, con fines pedagógicos o científicos, un fenómeno natural a través de la visualización de los distintos estados que dicho fenómeno puede representar. El programa computacional puede ser de carácter general, como por ejemplo una hoja de cálculo o Geogebra, o bien específico para simulaciones como el Easy Java Simulations (EJS), Modelica, Simulationx, Modelicac o Wolfram System Modeler, entre otros.

A continuación se proponen situaciones relacionadas con la construcción o la utilización de modelos matemáticos.

Filtrado de medicina en la sangre

Suponga que cada 4 horas, sus riñones filtran el 25% de cierta medicina que se encuentra en su sangre. Si usted tomó una dosis de 1 000 mg de la medicina, construya un modelo matemático que relacione la cantidad de la medicina en la sangre en función del tiempo.

Inicialmente podemos hacer una *simulación* no digital para el fenómeno, utilizando material concreto. Para ello utilizaremos los siguientes materiales:

- Pichel de 2 litros
- Vaso de 250 ml
- Cuchara
- Colorantes de alimentos y bebidas
- Agua

Colocar 1 litro de agua en el pichel. Esta agua representa parte de la sangre que fluye en nuestro cuerpo.

Verter algunas gotas del colorante en el pichel y mezclar (utilice la cuchara). El colorante representa 1000 mg de la medicina ingerida.

Después de 4 horas los riñones filtran cerca del 25% de la medicina ingerida. ¿Cómo podemos modelar esto?

Elimine del pichel 250 ml de la mezcla (se supone que pasaron 4 horas) y coloque en él 250 ml de agua.

¿Cuántos miligramos de la medicina queda en la sangre?

¿Qué sucederá 4 horas después? ¿Qué cantidad de medicina será eliminada del cuerpo y qué cantidad queda en la sangre? ¿Qué sucederá a las 16 horas después de ingerida la medicina? ¿Todavía quedará medicina en la sangre o será completamente eliminada (líquido del pichel completamente claro)?

Hagamos el experimento para ver si la predicción es correcta. Repetir el procedimiento dos veces más. ¿Qué sucedió?

En el segundo periodo de 4 horas, los 250 ml de la mezcla eliminada contenían 750 mg de la medicina y por lo tanto a las 8 horas fueron eliminados 25% de los 750 mg de la medicina, lo que no corresponde a 250 mg.

Podemos representar en forma tabular la cantidad de medicina que queda en la sangre conforme transcurren las horas.

TIEMPO (HORAS)	CANTIDAD DE LA MEDICINA QUE QUEDA EN LA SANGRE (MG)
0	1000
4	¾ de 1000 = 750
8	¾ de 750 = ¾ de ¾ de 1000 = $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times 1000$
12	¾ de $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times 1000 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 1000$
16	¾ de $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 1000 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times 1000$
20	¾ de $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \times 1000 = \left(\frac{3}{4}\right)^5 \times 1000$

¿Cuántos miligramos de la medicina quedarán en la sangre 16 horas después de ingerir la medicina?

¿Cuántos mg de la droga queda en la sangre después de 1 día? ¿2 días?

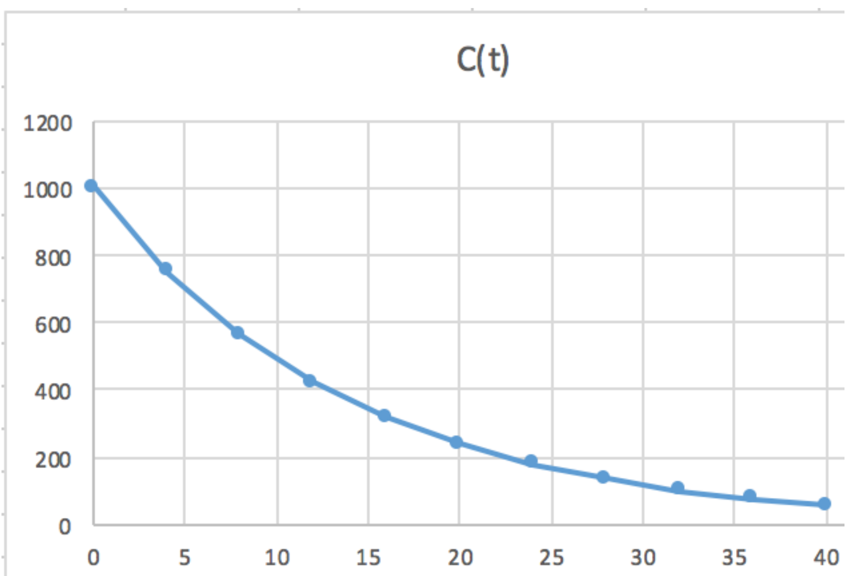
¿Qué modelo matemático es adecuado para representar el fenómeno?

Si $C(t)$ es la cantidad de medicina que queda en la sangre en el instante t, observando la tabla podemos concluir que un modelo matemático para esta situación es:

$$C(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^{t/4} \times 1000 \text{ mg}$$

¿Será completamente removida la droga de su sangre? Explique.

Podemos hacer una representación gráfica del modelo anterior.



De la gráfica anterior se puede inferir que en un tiempo finito, de vida humana, la medicina no será removida de la sangre.

¿Después de cuántos días quedará 1 mg de la droga en su cuerpo?

Para responder a la pregunta anterior hay que resolver la ecuación

$$C(t) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^{t/4} \times 1000 = 1$$

Podemos utilizar una calculadora para resolver la ecuación anterior. También podemos aplicar logaritmos

$$\frac{t}{4}\log_{10}\frac{3}{4} = \log_{10} 10^{-3} = -3$$

cuya solución aproximada es $t \approx 96$ horas.

Simulación de la propagación de una enfermedad contagiosa

Se propone un juego con el grupo.

Se solicitan a 10 voluntarios. Todos se ponen de pie y se asocia un número entero de 1 a 10 a cada uno de ellos.

Las 10 personas voluntarias son susceptibles de contraer una enfermedad contagiosa (una gripe).

En el primer día se generan 3 números aleatorios entre 1 y 10. Las salidas indican cuáles fueron infectados con el virus y que pueden tomar asiento.

El segundo día se generan otros 3 números aleatorios entre 1 y 10, y si alguna salida corresponde a una persona que se encuentra de pie entonces tendrá que tomar asiento pues está infectado.

Seguimos el procedimiento hasta que todos se encuentren infectados.

Día	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Cantidad de infectados									

Curva de ajuste para una serie de datos (parte 1)

Determinar un modelo polinomial para los datos registrados por Alicia en un experimento que corresponde al calentamiento de un líquido.

Tiempo(min)	Temperatura (^{0}C)
0	12
1	17
2	22
3	27
4	32

Datos registrados por Alicia

Una primera estrategia consiste en mirar las entradas de la tabla como los primeros términos de una sucesión numérica.

Los primeros términos de la sucesión $\{a_n\}$ son: 12, 17, 22, 27, 32, correspondientes a los valores de $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

En este caso la sucesión es una *progresión aritmética* con primer término12 y diferencia d igual a 5 (para pasar de un término al siguiente hay que sumar 5). El término general de la sucesión es: $a_n = a_0 + n \times d = 12 + 5n.$

Por lo tanto, al considerar la variable independiente n continua en lugar de discreta, reemplazando n por x, a_n por y, obtenemos el siguiente modelo: $y = 5x + 12.$

Una segunda estrategia consiste en calcular las diferencias primeras $\Delta x, \Delta y$ en donde Δx es la diferencia en el tiempo entre dos registros sucesivos y Δy es la diferencia entre las temperaturas registradas en tiempos sucesivos.

x (tiempo, min)	y (temperatura, ^{0}C)	Δx	Δy
0	12		
1	17	1 – 0 = 1	17 – 12 = 5
2	22	2 – 1 = 1	22 – 17 = 5
3	27	3 – 2 = 1	27 – 22 = 5
4	32	4 – 3 = 1	32 – 27 = 5

Datos registrados por Alicia

En la tabla anterior podemos observar que Δy es constante. Como $\Delta x = 1$ entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5$ es constante y esto nos indica que existe una relación lineal entre la variable dependiente y, y la variable independiente x, es decir, $y = ax + b$.

Lo anterior es porque para dos instantes sucesivos x_k , x_{k+1} las temperaturas correspondientes son $y(x_k) = ax_k + b, y(x_{k+1}) = ax_{k+1} + b$. Si restamos las dos ecuaciones obtendremos $\Delta y = y(x_{k+1}) - y(x_k) = a(x_{k+1} - x_k) = a\Delta x = a = 5.$

pues $\Delta x = 1, \Delta y = 5$. El número $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la pendiente de la recta.

Entonces los datos registrados por Alicia satisfacen la ecuación $y = 5x + b$. Para encontrar el valor de b, el intercepto-y, podemos utilizar cualquier fila de la tabla. Por ejemplo, cuando $x = 0$, $y = 12$. Esto es suficiente para concluir que $b = 12$. El modelo para los datos de Alicia es $y = 5x + 12$, coincide con la representación algebraica encontrada utilizando sucesiones.

Curva de ajuste para una serie de datos (parte 2)

David registró en un laboratorio los siguientes datos obtenidos en un experimento.

x	y
0	1
1	0
2	3
3	10
4	21
5	36

Él quiere encontrar un modelo polinomial que se ajuste a sus datos. ¿Es posible esto? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuál es el menor grado para el polinomio?

Podemos empezar con la estrategia utilizada en el problema anterior, incluyendo columnas para las primeras diferencias $\Delta x, \Delta y$.

x	y	Δx	Δy
0	1		
1	0	1	-1
2	3	1	3
3	10	1	7
4	21	1	11
5	36	1	15

Vemos que, aunque Δx es constante e igual a 1, Δy no es constante. Esto nos garantiza que el polinomio, si existe, no es de grado 1. Pero podemos agregar columnas en la tabla para calcular las diferencias segundas, la resta entre los valores de Δy ubicados en dos filas sucesivas: $\Delta^2 y = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$.

x	y	Δx	Δy	$\Delta^2 y$
0	1			
1	0	1	-1	
2	3	1	3	3 – (-1) = 4
3	10	1	7	7 – 3 = 4
4	21	1	11	11 – 7 = 4
5	36	1	15	15 – 11 = 4

Como las diferencias segundas son constantes y $\Delta x = 1$ también es constante, entonces los datos pueden ser ajustados por un polinomio de segundo grado, de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

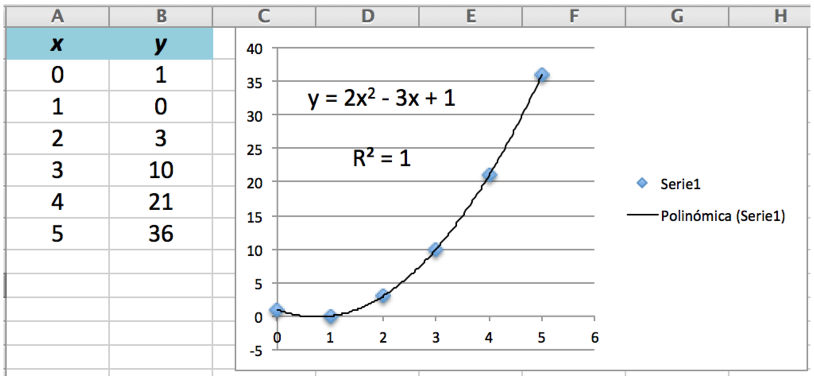
Para encontrar los valores de los parámetros a, b, c podemos utilizar tres filas de la tabla. Si utilizamos los puntos (0, 1), (1, 0) y (2, 3) obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = 2,\ b = -3, c = 1$. Por lo tanto los datos registrados por David son perfectamente ajustados por el polinomio de segundo grado

$y = 2x^2 - 3x + 1$

Esto puede ser comprobado con una hoja de cálculo como por ejemplo Excel, al determinar el polinomio de segundo grado de mejor ajuste para los datos de la tabla.



Comprobación con hoja de cálculo

Recta de mejor ajuste para una serie de datos

Federico registró en un laboratorio los siguientes datos obtenidos en un experimento.

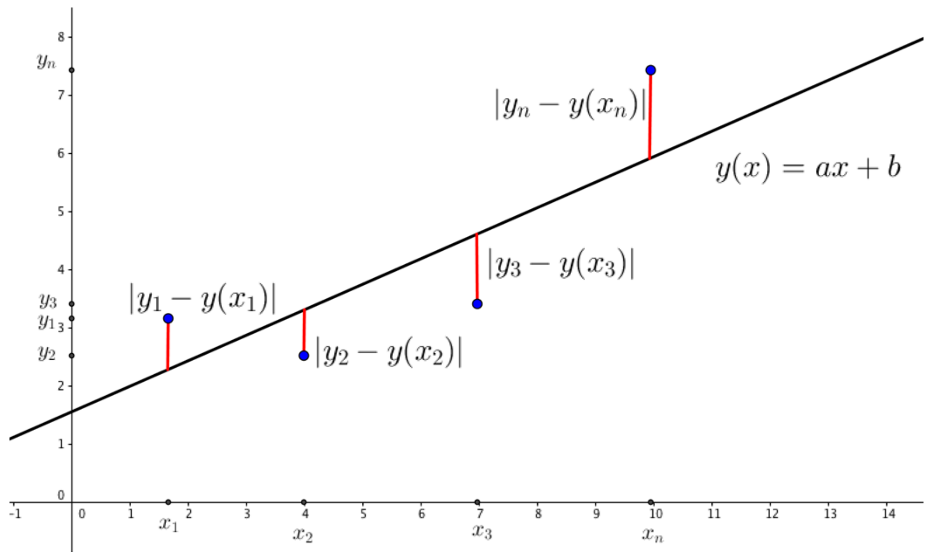
x	***y***
1	-1,2
2	1,5
3	2,8
4	5,3
5	6,8
6	9,4
7	11,4
8	12,8

Él quiere encontrar un modelo lineal para la curva de mejor ajuste a sus datos, utilizando únicamente sus conocimientos acerca de funciones lineales y cuadráticas. ¿Es posible esto? ¿Cómo hacerlo? ¿Se puede generalizar la metodología utilizada?

Dado un conjunto de n puntos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$, se quiere encontrar una recta con representación algebraica $y = ax + b$ de mejor ajuste para los datos, en dónde "mejor ajuste" significa que la suma de los cuadrados de las desviaciones en los valores de la ordenada "y" sea mínima. Esto quiere decir que la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos verticales que unen los círculos (que representan los datos) a la recta (de mejor ajuste) tiene que ser la menor posible (figura abajo).

Algebraicamente tenemos que minimizar la suma de los cuadrados de los errores (desviaciones)

$$[y_1-(ax_1+b)]^2+[y_2-(ax_2+b)]^2+\cdots+[y_n-(ax_n+b)]^2 \qquad (1)$$



Como hay que encontrar dos parámetros, a y b, podemos fijar uno de ellos (por ejemplo a) y obtener el otro parámetro (en este caso b) que minimiza la suma (1) del cuadrado de los errores.

Por ejemplo, si hacemos $a=2$ en la expresión (1) obtendremos la función cuadrática

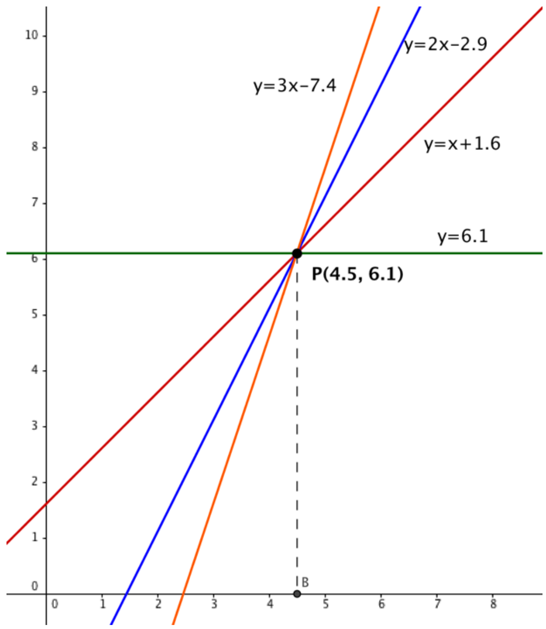
y = [-1,2 − (2×1 + b)]^2 + [1,5 − (2×2+ b)]^2 + [2,8 − (2×3+ b)]^2 + [5,3 − (2×4+ b)]^2 + [6,8 − (2×5+ b)]^2 + [9,4 − (2×6+ b)]^2 + [11,4 − (2×7+ b)]^2 + [12,8 − (2×8+ b)]^2
= $8b^2 + 46{,}4b + 68{,}02$

El valor mínimo de la función cuadrática anterior ocurre en el vértice de la parábola, es decir, en el punto de abscisa $b=\frac{-46{,}4}{2\times 8}=-2{,}9$. Como $a=2$, la recta de mejor ajuste es $y=2x-2{,}9$.

Si repetimos el procedimiento para varios valores de la pendiente a obtendremos una tabla como la que sigue (para a = 0; 1; 2 y 3).

$\boldsymbol{a}$	**SUMA DE CUADRADOS DE ERRORES (1)**	**VALOR DE *b* QUE MINIMIZA (1)**	**RECTA DE MEJOR AJUSTE**
0	$8b^2 - 97{,}6b + 468{,}02$	6,1	$y=6{,}1$
1	$8b^2 - 25{,}6b + 64{,}02$	1,6	$y=x+1{,}6$
2	$8b^2 + 46{,}4b + 68{,}02$	− 2,9	$y=2x-2{,}9$
3	$8b^2 + 118{,}4b + 480{,}02$	− 7,4	$y=3x-7{,}4$

Utilizando geogebra observamos que las cuatro rectas de mejor ajuste para las pendientes dadas tienen en común el punto $P(\bar{x},\bar{y})=(4{,}5\,,\ 6{,}1)$ conocido como *centroide* de los datos.



La abscisa $\bar{x}$ es el promedio de las seis entradas:

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = 4{,}5$$

mientras que la ordenada $\bar{y}$ es el promedio de las seis salidas:

$$\bar{y} = \frac{-1{,}2+1{,}5+2{,}8+5{,}3+6{,}8+9{,}4+11{,}4+12{,}8}{8} = 6{,}1$$

Todas las rectas que minimizan la suma (1) de los cuadrados de los errores (desviaciones) al fijar valores para el la pendiente a pasan por el *centroide* de los datos, y por lo tanto la recta de mejor ajuste que estamos buscando también pasa por el *centroide* de los datos. Nos hace falta encontrar otro punto de la recta de mejor ajuste, distinto del centroide de los datos, para resolver la situación dada.

Utilizaremos un procedimiento similar al aplicado anteriormente: fijar el valor de b y determinar el valor de a que minimiza la suma (1) de los cuadrados de los errores.

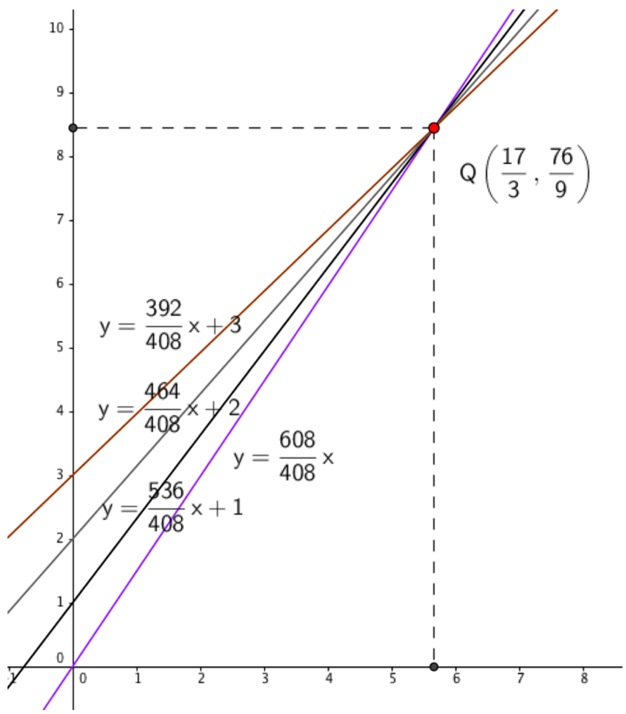
Por ejemplo, para $b = 3$ la expresión (1) se escribe como:

y = $[-1{,}2 - (a + 3)]^2 + [1{,}5 - (2a+ 3)]^2 + [2{,}8 - (3a+ 3)]^2 + [5{,}3 - (4a+ 3)]^2 + [6{,}8 - (5a+ 3)]^2 + [9{,}4 - (6a+ 3)]^2 +[11{,}4 - (7a+ 3)]^2 + [12{,}8 - (8a+ 3)]^2$
$= 204a^2 - 392a + 247{,}22$.

El valor mínimo de la función cuadrática anterior ocurre en el vértice de la parábola, es decir, en el punto de abscisa $a = \frac{-(-392)}{2\times 204} = \frac{392}{408}$. Para el valor dado de b la recta de mejor ajuste es $y = \frac{392}{408}x + 3$.

Si repetimos el procedimiento para varios valores de b obtendremos una tabla como la que sigue (para b = 0; 1; 2 y 3).

b	**SUMA DE CUADRADOS DE ERRORES (1)**	**VALOR DE a QUE MINIMIZA (1)**	**RECTA DE MEJOR AJUSTE**
0	$204a^2 - 608a + 468{,}02$	$\frac{608}{408}$	$y = \frac{608}{408}x$
1	$204a^2 - 536a + 378{,}42$	$\frac{536}{408}$	$y = \frac{536}{408}x + 1$
2	$204a^2 - 464a + 304{,}82$	$\frac{464}{408}$	$y = \frac{464}{408}x + 2$
3	$204a^2 - 392a + 247{,}22$	$\frac{392}{408}$	$y = \frac{392}{408}x + 3$



En la representación gráfica anterior, construida con geogebra, observamos que las cuatro rectas que minimizan la suma (1) de cuadrados de los errores, para los valores dados para b, tienen en común el punto $Q(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) = \left(\frac{17}{3}, \frac{76}{9}\right)$. Por lo tanto la recta de mejor ajuste para los datos de la tabla también pasa por el punto Q.

Si utilizamos los dos puntos, el centroide $P = \left(\frac{45}{10}, \frac{61}{10}\right)$ y $Q = \left(\frac{17}{3}, \frac{76}{9}\right)$ podemos determinar la ecuación de la recta de mejor ajuste para los datos de la tabla. La recta $y = mx + r$ que contiene los puntos P, Q tiene pendiente m es igual a

$$m = \frac{\frac{76}{9} - \frac{61}{10}}{\frac{17}{3} - \frac{45}{10}} = \frac{211}{105}$$

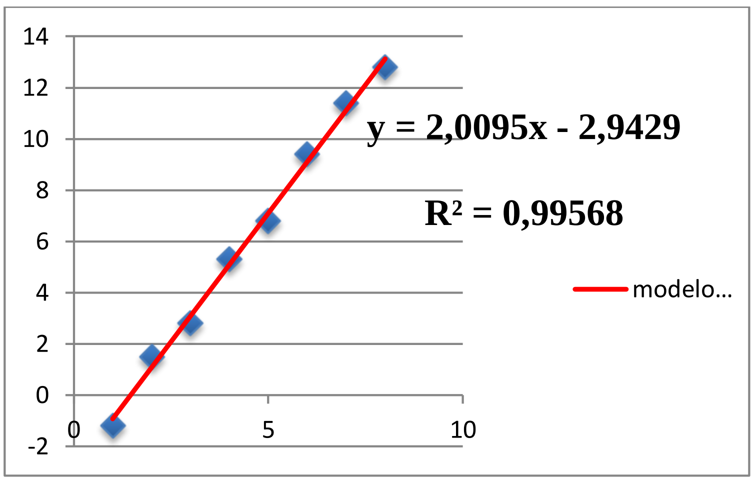
mientras que r el intercepto-y, si utilizamos el punto P es igual a

$$\frac{61}{10} - \left(\frac{211}{105}\right)\left(\frac{45}{10}\right) = -\frac{103}{35}$$

Concluimos que el *modelo lineal de la recta de mejor ajuste* para el conjunto de datos de nuestro problema con siete decimales es:

$$y = \frac{211}{105}x - \frac{103}{35} \approx 2.0095238x - 2.9428571$$

El modelo encontrado coincide con la curva de tendencia dada por Excel, truncado con 5 decimales. Excel también calcula el coeficiente de determinación R^2 y este valor es muy cercano a uno, lo que indica que el modelo lineal se ajusta muy bien a los datos de la tabla.



En este análisis hemos desarrollado una metodología para modelar la recta de mejor ajuste para un conjunto de datos, utilizando unicamente conocimientos de funciones lineales y cuadráticas. Una introducción a este tipo de modelación matemática se encuentra en (National Council of Teachers of Mathematics, 2010).

Hemos visto que la recta de mejor ajuste para un conjunto de datos representados como puntos en el plano cartesiano pasa por el centroide de los datos. Para encontrar otro punto de la recta basta fijar dos valores distintos para el intercepto-y, y encontrar el punto de intersección de las dos rectas que minimizan (1). Este método puede ser generalizado para una cantidad arbitraria de puntos en el plano.

Referencias Bibliográficas

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Costa Rica: autor.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2010. *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making in Algebra*. Reston, Va.: NCTM.

Modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales

Edison de Faria Campos
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Asociación de Matemática Educativa
edefaria@gmail.com

Resumen: Se utilizan ecuaciones diferenciales o ecuaciones en diferencia para construir modelos matemáticos que describen situaciones dadas. Se utilizarán herramientas computacionales para simular los modelos construidos.

Palabras clave: Resolución de problemas; modelación matemática; simulación

Introducción

Un modelo matemático consiste en la descripción de un sistema usando conceptos y lenguaje matemáticos.

Es importante construir modelos matemáticos para ciertos fenómenos, para una mejor comprensión de dichos fenómenos y para predecir cualitativa y cuantitativamente el comportamiento del sistema bajo ciertas condiciones o en situaciones que sean de nuestro interés.

La modelización matemática consiste en identificar un conjunto de valores (variables de estado, constantes y parámetros) que representan el estado del fenómeno estudiado, así como establecer un conjunto de relaciones matemáticas entre dichas variables que permiten conocer cómo responde el modelo a cambios en dichas variables. Con el modelo, el investigador podrá utilizarlo para comprobar y contrastar hipótesis de comportamiento del sistema modelado.

Cuando el modelo utilizado es muy complejo es necesario hacer una simulación del fenómeno. En este caso hay que utilizar análisis numérico y tecnología digital para aproximar las soluciones numéricas de los modelos utilizados y simular, es decir, reproducir aproximadamente las principales características de su comportamiento.

Una simulación por computador es un programa que intenta reproducir, con fines pedagógicos o científicos, un fenómeno natural a través de la visualización de los distintos estados que dicho fenómeno puede representar.

Utilizaremos ecuaciones diferenciales o en diferencia para construir algunos modelos matemáticos para describir ciertos fenómenos físicos y biológicos, y el software gratuito Easy Java Simulations (EJS) para hacer simulaciones con el modelo construido.

EJS es una herramienta de modelado y de autor de alto nivel que permite crear simulaciones digitales en Java. Al ejecutar la simulación, EJS genera código Java y lo compila. Además utiliza archivos auxiliares y de librerías para ejecutar el programa compilado. Otra ventaja del EJS es que contiene un editor de ecuaciones diferenciales que genera automáticamente el código Java necesario. Los algoritmos resuelven sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Existen otros ambientes para modelación y simulación como por ejemplo:

- Modelica
- OpenModelica
- Modelicac (Scilab lo incluye)
- SimForge
- IDA Simulation
- Dymola de Dassault Systems
- SimulationX
- Wolfram System Modeler
- Wolfram MathCore
- MapleSim de MapleSoft

A continuación se desarrollan o bien se proponen modelos matemáticos, con la solución analítica para los más sencillos o con la respectiva simulación para otros un poco más complejos. Algunos buenos textos para trabajar con modelos matemáticos vía ecuaciones diferenciales son Blanchard, Devaney y Hall (2012), Edwards y Penney (2001), Zill (2006).

Crecimiento poblacional (1 especie)

Sea $P(t)$ el número de individuos de una población (humana, insectos, bacterias) en el instante t. Supongamos que la tasa de nacimiento α (nacimientos por individuo por unidad de tiempo) y tasa de mortalidad β (muertes por individuo por unidad de tiempo) son constantes.

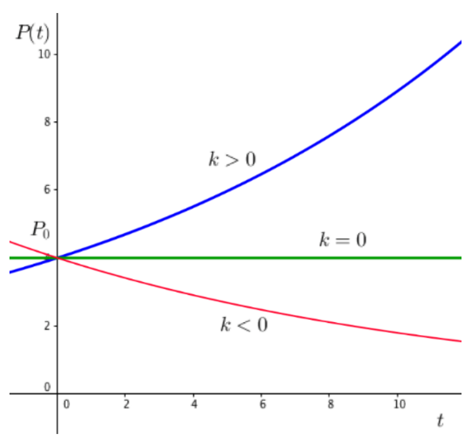
En un corto intervalo de tiempo Δt ocurren (en promedio) aproximadamente $\alpha P(t)\Delta t$ nacimientos y $\beta P(t)\Delta t$ muertes. Así, el cambio ΔP en $P(t)$ está dado aproximadamente por $(\alpha - \beta)P(t)\Delta t$, y por lo tanto

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = (\alpha - \beta)P(t) = kP$$

con $k = \alpha - \beta$.

Si $P(0) = P_0$ podemos encontrar $P(t)$ en cualquier instante t positivo resolviendo el problema con valor inicial $\frac{dP}{dt} = kP,\ P(0) = P_0$.

Separando variables e integrando tendremos: $\int \frac{dP}{P} = \int kdt + C$, es decir $\ln P(t) = kt + C$ lo que es equivalente a $P(t) = e^{kt+C} = P_0 e^{kt}$ en dónde $P_0 = e^C$ es el número de individuos de la población en el instante $t = 0$.

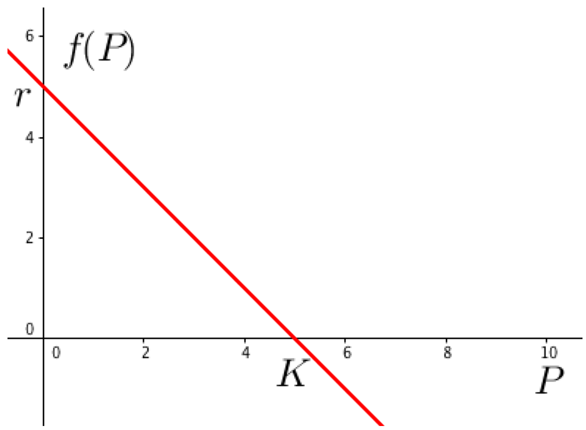


El economista y reverendo inglés Thomas Robert Malthus fue uno de los primeros en intentar modelar matemáticamente el crecimiento poblacional humano. En 1798 él publicó la primera (de seis ediciones) de su libro *Ensayo sobre el principio de la población* y su hipótesis era que la rapidez a la que crece la población en cierto instante es proporcional a la población total en ese momento. Este tipo de idea se conoce como maltusianismo.

En 1838, el matemático belga Pierre-François Verhulst, tras leer el ensayo de Malthus, publicó un modelo que contemplaba la capacidad del ambiente como un factor que impedía el crecimiento ilimitado de la población. Se supone que un medio ideal tiene una capacidad sostenible máxima y que por lo tanto

$$\frac{dP}{dt} = P(t)f(P)$$

tal que $f(P)$ haga que el crecimiento de la población sea más lento al acercarse a la capacidad máxima del ambiente. Por lo tanto $f(P)$ tiene que ser una función decreciente, y la más sencilla de ellas es una función lineal.



La ecuación de la recta anterior es $f(P) = r - \frac{r}{K}P$, y por lo tanto la ecuación de Verhulst es

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) = \alpha P(K - P), \quad \alpha = \frac{r}{K}$$

La ecuación anterior es más conocida como *ecuación logística* y su solución se denomina *función logística*. Es una ecuación en variables separables. La gráfica de la función logística se conoce como *curva logística*.

Es claro que $P \equiv 0\ \ y\ \ P \equiv K$ son soluciones de la ecuación. K es la capacidad máxima del ambiente (se supone que es una constante positiva). Si suponemos que $0 < P < K$, separando variables e integrando obtenemos

$$P(t) = \frac{Ke^{\alpha Kt}}{Kc + e^{\alpha Kt}} = \frac{K}{1 + Kce^{-\alpha Kt}}$$

c es una constante de integración. Observe que cuando t tiende a infinito, $P(t)$ tiende a K, la capacidad máxima del ambiente. Para calcular la constante c hay que dar una condición inicial. También se puede mostrar que

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 2\alpha^2 P\left(P - \frac{K}{2}\right)(P - K)$$

Por lo tanto $P(t)$ es creciente y cóncava hacia arriba si $0 < P < \frac{K}{2}$; creciente y cóncava hacia abajo si $\frac{K}{2} < P < K$. En $P = \frac{K}{2}$ existe un punto de inflexión.

En los modelos anteriores, utilizamos las siguientes hipótesis:

- La población en estudio se encuentra aislada, es decir, no compite con otras especies por sus alimentos ni por el hábitat.
- La población en estudio no sirve de alimento ni se alimenta de otra especie.
- La cantidad de alimento y el hábitat de la especie son abundantes (modelo de Malthus), pero limitados (modelo de Verhulst).

Crecimiento poblacional (2 especies)

En esta sección analizaremos modelos para dos especies gobernadas por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) = Ax(t)\big(a - bx(t) - cy(t)\big) & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) = By(t)\big(\alpha - \beta x(t) - \epsilon y(t)\big) & (2) \end{cases}$$

$x(t)$ representa el número de individuos de una población en el instante t, $y(t)$ representa el número de individuos de la segunda población en el instante t, $a, b, c, \alpha, \beta, \varepsilon$ son parámetros reales no negativos mientras que A, B son parámetros reales.

La tasa de crecimiento de la población x es $Aax(t)$ para A positivo. El término $Acy(t)$ en (1) y $B\beta x(t)$ en (2) se denomina términos de competencia. En la ausencia de ellos las ecuaciones se reducirían a las logísticas.

Un caso particular del sistema anterior que corresponden a $b = 0, \varepsilon = 0, A = 1, B = -1$ son las conocidas ecuaciones de Lotka-Volterra para un modelo depredador-presa.

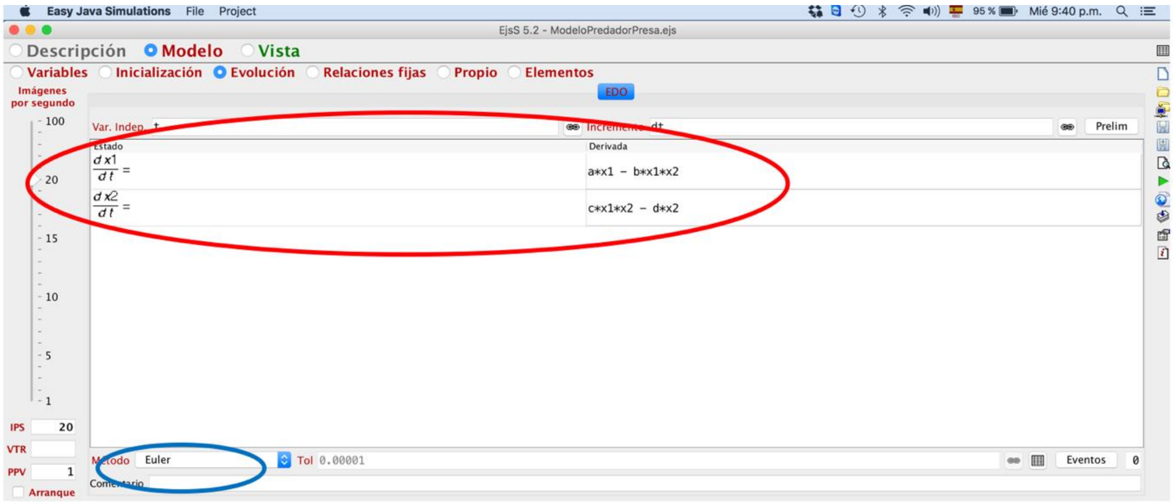
Modelo predador-presa

Consideremos las ecuaciones de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = ax_1 - bx_1x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = cx_1x_2 - dx_2 \end{cases}$$

x_1 representa el número de presas, x_2 el número de predadores en el instante t, a, b, c, d son parámetros, ax_1 y $-dx_2$ son las tasas de reproducción de cada especie en ausencia de interacción con la otra especie, cx_1x_2 representa el aumento de los predadores en la presencia de las presas y $-dx_1x_2$ la reducción de las presas en la presencia de los predadores.

Utilizaremos el ambiente de modelación y simulación EJS, ejecutando EjsConsole.jar y abriendo el archivo ModeloPredadorPresa.ejs.



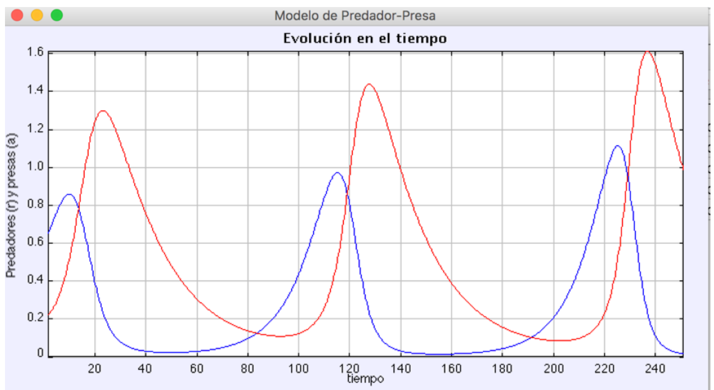
En la vista Modelo, Evolución observamos las dos ecuaciones diferenciales digitadas. El método numérico seleccionado es el de Euler.

En la vista variables (figuras abajo) definimos las variables dinámicas, sus valores iniciales normalizados

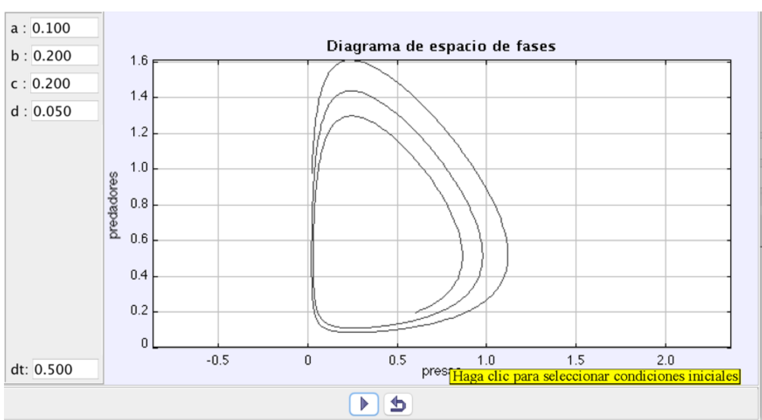
y los valores de los parámetros

Ejecutamos la simulación dando clic en el triángulo verde en el panel vertical del lado derecho

Inicializamos la evolución de las variables dinámicas con el tiempo, la gráfica azul representa la población de presas, la roja la de predadores.

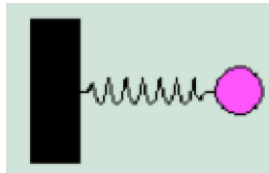


También graficamos, en el espacio de fases, la relación entre los predadores y las presas para los parámetros y las condiciones iniciales dadas. Posteriormente podemos cambiar los valores de los parámetros a, b, c, d y observar lo que sucede con las poblaciones de las presas y los predadores.



Sistema masa-resorte

Un objeto de masa m es conectado en un extremo de un resorte de longitud L y de masa despreciable. El otro extremo del resorte se encuentra fijo en un muelle (figura abajo).



Supongamos que la reacción del sistema al desplazamiento Δx desde la posición de equilibrio puede modelarse mediante la ley de Hooke: $F_{\Delta x} = -k\Delta x$ en donde k es una constante que depende de las características físicas del resorte.

Agregamos una fuerza de rozamiento que supondremos ser directamente proporcional a la velocidad del objeto y que se opone al movimiento: $F_r = -bv$, b es el coeficiente de rozamiento. Para finalizar añadimos una fuerza externa sinusoidal: $F_e = Asen(\omega t)$, ω es la frecuencia de la fuerza aplicada y A su amplitud.

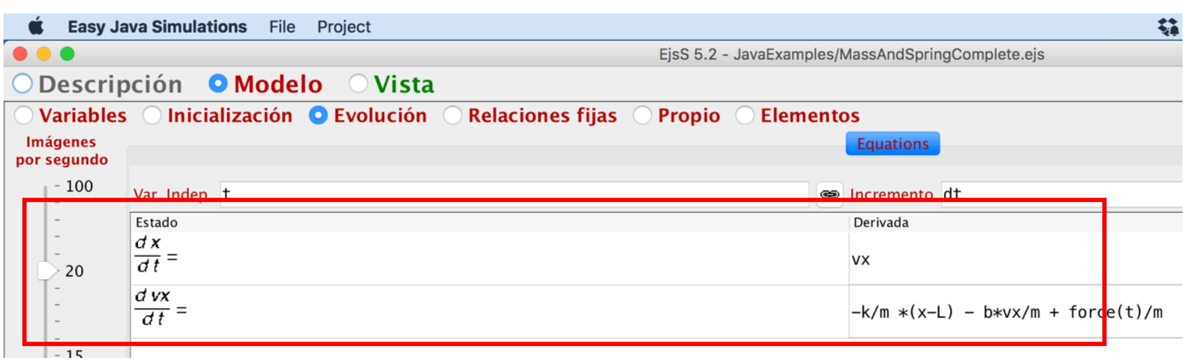
Si utilizamos un sistema de coordenadas con el eje x ubicado horizontalmente y con origen en el extremo fijo del resorte entonces la segunda ley de Newton se escribe como:

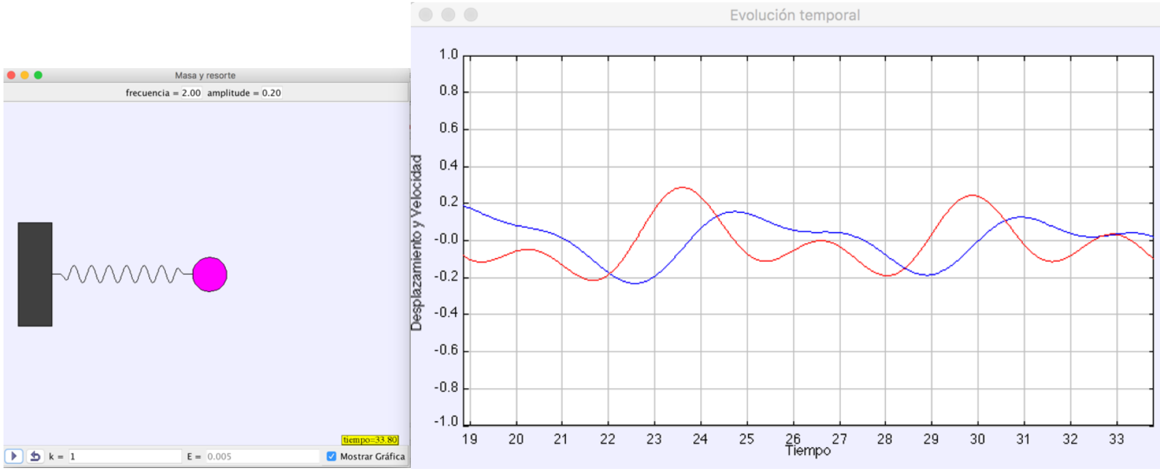
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-L) - b\frac{dx}{dt} + Asen(\omega t)$$

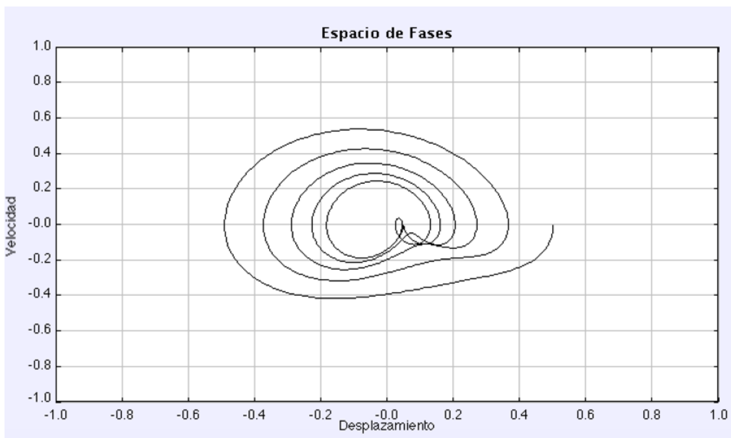
que se escribe como el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{k}{m}(x-L) - \dfrac{b}{m}v + \dfrac{A}{m}sen(\omega t) \end{cases}$$

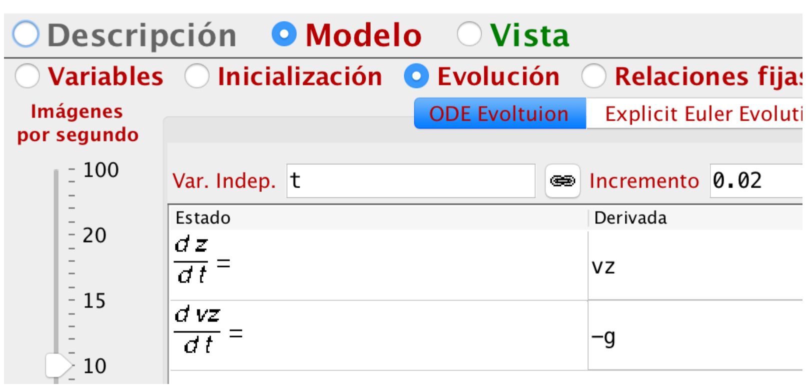
Sigue la implementación del modelo y su simulación con EJS.

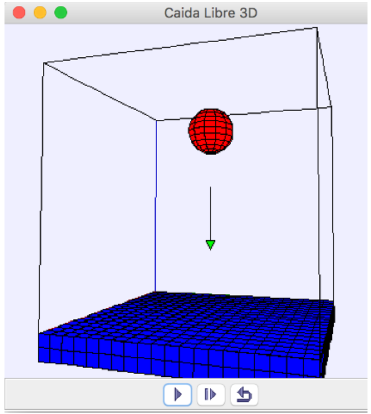


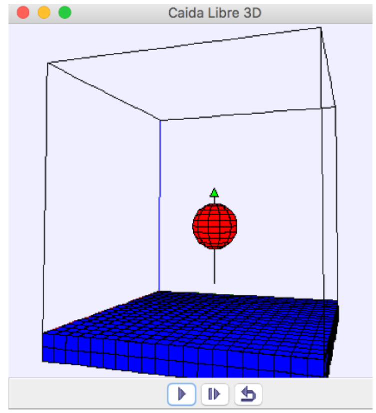




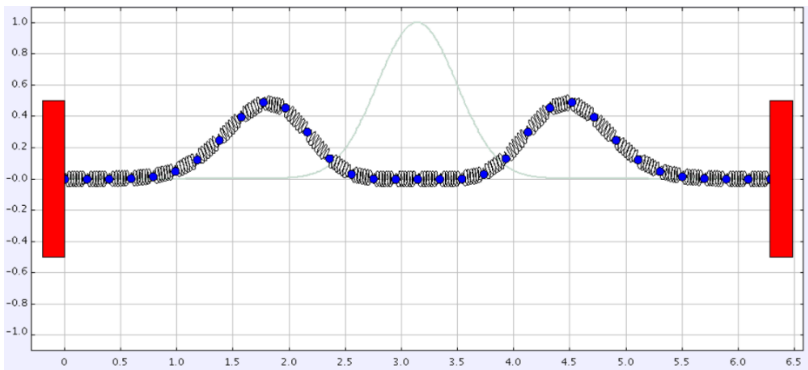
El sitio http://www.compadre.org/OSP contiene varios modelos matemáticos interesantes que pueden ser simulados con EJS, como por ejemplo el de una bola que cae libremente, bajo la acción de la gravedad, y es rebotada en el suelo, gobernada por la ecuación diferencial $\frac{d^2z}{dt^2} = -g$

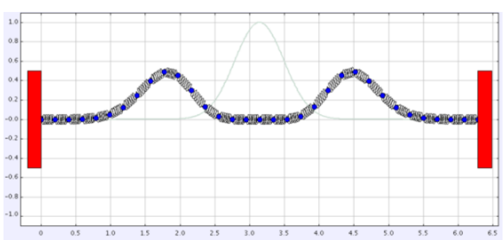


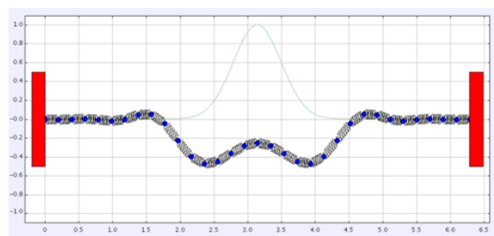




o bien de osciladores acoplados







Un modelo discreto sin simulación

Felix sacó una lata de soda de la refrigeradora. La temperatura inicial de la soda es 6 grados Celsius mientras que la temperatura ambiental, de su casa, es constante de 31 grados Celsius.

El cambio de temperatura en la soda por unidad de periodo de tiempo es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura ambiental y la de la soda, la cual se mantiene uniforme (ley de Newton de calentamiento).

Si T_n es la temperatura de la soda después de n periodos de tiempo entonces

$$\Delta T_n = T_{n+1} - T_n = k(31 - T_n)$$

Por lo tango el modelo para el calentamiento de la soda es

$$T_{n+1} = T_n + k(31 - T_n)$$

Félix mide la temperatura de la soda 1 periodo de tiempo después de sacarla de la refrigeradora y encuentra que es 11 grados Celsius. ¿Cuál es la temperatura de la soda 4 periodos de tiempo después de sacarla de la refrigeradora?

Para responder a la pregunta planteada podemos calcular el valor de k utilizando el modelo y los datos: $T_0 = 6,\ T_1 = 11$.

$$T_1 = T_0 + k(31 - T_0) = 6 + 25k = 11$$

Por lo tanto $k = 0{,}2$ y el modelo es

$$T_{n+1} = T_n + 0{,}2(31 - T_n)$$

Ahora podemos construir una tabla con el modelo:

n	0	1	2	3	4
T_n	6	11	15	18,2	20,76

Después de 4 periodos de tiempo la temperatura de la soda es 20,76 grados Celsius.

Referencias Bibliográfícas

Blanchard P., Devaney R., Hall, G. (2012). Differential equations. Fourth edition. Brooks/Cole. USA.

Edwards, H. Y Penney, D. (2001). Ecuaciones diferenciales. 4ª ed. Pearson Educación de México, S. A. De C. V. México.

Zill, D. (2006). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. 8ª ed. Thomson Editores S. A. De C. V. México.

Praxeologías matemáticas presentes en la resolución de tareas de azar y probabilidad

María José Castillo Céspedes
Universidad de Costa Rica
marijocastillo_24@hotmail.com

Jorhan José Chaverri Hernández
Universidad de Costa Rica
jorhan2009@hotmail.com

Resumen: El presente trabajo se desarrolla en torno a una actividad tipo taller, el cual tiene como propósito introducir el tema de probabilidad a estudiantes de educación secundaria, y vincular a la matemática con una actividad concreta de la vida real, en este caso específicamente con los juegos de azar. No obstante, se desea aplicar sin perder de vista cierto grado de formalidad en cuanto a los conceptos matemáticos, por lo cual el mismo se desarrolló en torno a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Además se describen aspectos relevantes que fundamenten la elección de dicho marco teórico, para lo cual se establece una breve revisión de otras teorías, enfatizando en sus ventajas y desventajas, de esta manera se muestra el proceso seguido para la elección del marco teórico pertinente de acuerdo con los objetivos del taller.

Palabras claves: praxeología matemática, tarea, técnica, tecnología, teoría.

Introducción

El presente trabajo surge en el seno del curso de licenciatura FD-0555 *Seminario de Enseñanza de la Matemática*, en él se describe una actividad tipo taller relacionada con el tema de probabilidad, el mismo tiene como propósito introducir el tema de azar y probabilidad en secundaria, evidenciando la relación de la matemática con juegos de azar que las personas suelen practicar en su vida cotidiana. Más concretamente se quiere resaltar el papel de la matemática como una actividad humana y social. Además se le ha proporcionado soporte teórico a través de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

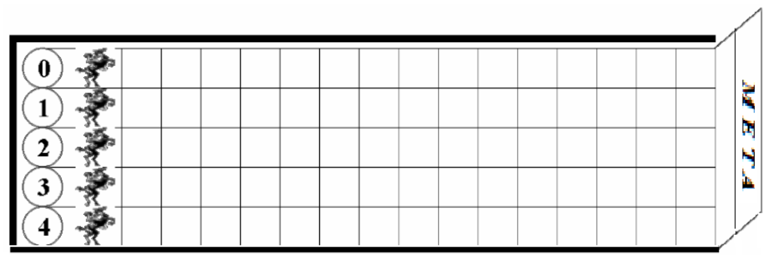
Lo anterior implica la necesidad de prestar especial atención a las diversas técnicas empleadas por lo estudiantes durante el desarrollo taller. Lo cual puede permitir al docente, entre otras cosas, poner en evidencia la existencia de múltiples estrategias para obtener la solución a un determinado problema. También sería relevante hacer ver a los estudiantes que muchas de las técnicas que usaron para obtener la respuesta a la tarea planteada se fundamentan formalmente en conceptos del tema de probabilidad, por ejemplo la *Ley de Laplace*.

Nuestro propósito es que el taller constituya una herramienta de fácil aplicación en el aula y que permita reflexión del proceso tanto por parte del docente como de los estudiantes. A continuación se muestra y describe el taller planteado, posteriormente y en base a los objetivos del mismo, se describe y justifica la elección del marco teórico en el cuál se encuadra el mismo, finalmente se ofrecen conclusiones y reflexiones.

Taller: ¡Apuéstale a la matemática y gana!

Actividad: Carrera de caballos

Utilizaremos material específico: monedas (nacionales de cualquier denominación) y tableros (figura adjunta).



Nota: el tablero anterior fue tomado y modificado de Grupo Alquerque (2007) y la imagen conjunta fue tomada de https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/0f/Pile_ou_face.png/170px-Pile_ou_face.png

Forma de jugar:

1. Se forman grupos de 5 estudiantes. Se reparten los tableros y las fichas (los caballos o alguna representación) a cada grupo.
2. Colocamos 5 caballos en la salida del tablero, enumerados del 0-4.
3. Cada jugador elige un caballo con el número correspondiente. No pueden haber dos jugadores con el mismo caballo.
4. Cada turno se lanzan 4 monedas al aire, (en cada grupo) se cuentan los escudos que han caído y avanza el caballo cuyo número sea igual a la cantidad de escudos.
5. Gana el jugador cuyo caballo llega primero a la meta.

Trabajo de los estudiantes:

- Se inicia con la siguiente pregunta a los participantes: ¿Todos los caballos tienen la misma probabilidad de ganar? (Deben contestar de forma breve, sin análisis).
- Jugar y terminar el juego, siguiendo todas las indicaciones.
- Determinar cuál es el caballo con mayor y menor probabilidad de ganar (con justificación matemática).
- Se le pide a los estudiantes que diseñen una(s) condición(es) para que el o los caballos con menor probabilidad de ganar bajo las condiciones dadas inicialmente, sean los que tengan la mayor probabilidad de gane.

Por otro lado, la Teoría Antropológica de lo Didáctico supone estudiar una actividad matemática como una práctica social; el tema del azar y probabilidad se acopla bien a este aspecto debido a que la mayoría de las personas hemos participado alguna vez en un juego de azar, además consideramos que puede ser atractivo para los estudiantes y para las personas en general.

El tema permite crear conciencia respecto a las adicciones a este tipo de juegos. También, el azar es un tema de la matemática donde algunos resultados o contenidos no necesitan de gran cantidad de conocimientos previos para obtenerlos. Como lo afirma Haigh (2003), es preferible conocer a ignorar; y una forma de tener un acercamiento a la probabilidad es mediante juegos en donde la misma tiene un papel relevante. Otra de las ventajas de las actividades de este bloque es que permiten el trabajo en equipo y exigen de los alumnos organización y reparto de tareas.

Propósito del taller bajo el marco teórico elegido (TAD)

De forma general, el propósito del trabajo que aquí se presenta es asociar la Teoría Antropológica de lo Didáctico con las actividades de probabilidad y azar.

Por otro lado, ya se ha descrito en forma general en qué consiste el taller, sin embargo, es relevante definir los objetivos que se quieren alcanzar a la luz de la TAD. En este sentido se pretende analizar las componentes de las praxeologías matemáticas (u organizaciones matemáticas) llevadas a cabo por los participantes, por lo cual es relevante detectar las técnicas utilizadas por estos y verificar si los mismos tienen claro cuál es la tecnología y la teoría presente en el desarrollo de dicha actividad, si no es así el docente debe aclararlo.

Más concretamente se busca lograr que los participantes identifiquen que la probabilidad de ganar de cada caballo no es la misma y determinar el por qué. Sin embargo la TAD permite al profesor ir más allá, identificando la aplicación de diversas técnicas, sean válidas o no, mostrando así que no existe una única forma de resolverlo. Posteriormente los estudiantes deberán formular nuevas condiciones para que las probabilidades cambien, lo que implica que los participantes deben entender en qué consisten las técnicas. Estarían trabajando con tareas inversas lo cual enriquece el proceso de enseñanza y aprendizaje. Posteriormente el docente puede aclarar qué contenidos matemáticos formales (definiciones, teoremas, enunciados entre otros) sustentan las técnicas utilizadas y así hacer el cierre de la clase.

Además esta es una actividad donde se estimula el trabajo en grupo de los estudiantes, el análisis y razonamiento. De acuerdo al MEP (2012), este problema se puede clasificar como problema de conexión, pues no es rutinario y se requiere conectar diferentes aspectos del mismo (datos, condiciones); y como problema de reflexión, ya que se necesita argumentar y justificar, chequear que los resultados correspondan a las condiciones del problema. Trabajar el mismo desde la TAD se acopla bien con las fases que estipula el MEP para impartir la lección a través de la metodología de resolución de problemas, pues se da espacio para que los estudiantes compartan las técnicas que han utilizado para resolver la tarea y luego que el profesor intervenga en los aspectos de formalización de contenidos.

Por tanto, es una situación que se apega a lo requerido para la educación secundaria, que a la vez se aísla de cierta forma de la rutina en la clase de matemática.

Con esta actividad, los estudiantes podrían tener mayor claridad de los fundamentos que sustentan las actividades matemáticas que han resuelto, y así afiancen ideas y conceptos, por lo cual es importante que entiendan los conceptos, definiciones, resultados que se relacionan con las soluciones que formularon. Esto ayudará a observar directamente cómo se aplica o puede aplicar la Matemática en esta situación específica.

Nota: Este taller es una modificación de la combinación entre el taller de "Carrera de Caballos" de Ruiz, Blanco, y Corchete (1998) y el taller "Carrera de Caballos" del Grupo Alquerque (2007), pero fundamentada con la TAD.

Descripción y justificación de la elección del marco teórico del Taller

Para la elección del marco teórico que proporciona soporte al taller, se ha realizado una revisión panorámica de diversas teorías estudiadas en el curso FD-0555 *Seminario de Enseñanza de la Matemática*, a continuación describimos de forma breve las razones que llevaron a elección de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Según Oliveira (2010) "la Teoría de Situaciones Didácticas en los años 70 (Brousseau, 1972), intuyó la necesidad, para la didáctica, de crear un modelo propio, explícito y contrastable de la actividad matemática que no la reduzca al estudio de los procesos cognitivos de los alumnos" (p.17). Este es el origen de la epistemología experimental, surgen así dos posiciones: el programa cognitivo y el programa epistemológico; existen diferentes teorías didácticas (Teoría de las Situaciones Didácticas, Teoría Ontológico-Semiótica, Teoría Antropológica de lo Didáctico) que comparten estos cimientos y que pertenecen al enfoque epistemológico.

Respecto a esta teoría de Brousseau, estamos de acuerdo en que aporta aspectos relevantes en cuanto a la adquisición y transmisión de conocimiento, y que ayuda al docente a adaptar problemas, o situaciones para generar conocimiento matemático, también es importante el hecho de que esta teoría se centre en la construcción del conocimiento a partir de situaciones didácticas.

A la vez, según Panizza (2004) el docente puede modificar estrategias de resolución mediante la variable didáctica. Bajo esta misma teoría, interesa que el alumno tenga la posibilidad de intentar nuevas soluciones, lo cual es importante para el objetivo de nuestro trabajo, no obstante, para la actividad propuesta interesa además que se considere la matemática como una actividad presente en la cotidianidad, como actividad humana y social; resaltando así la utilidad de la misma creemos que este aspectos queda más claro si se enmarca el taller desde la TAD.

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), en su intento de integrar varios modelos entre ellos el antropológico, abarca una gran cantidad de aspectos que no son relevantes en el taller, ya que lo que interesa aquí es ser específicos en cuanto a qué técnicas pueden llevarse a cabo por los estudiantes, y después fundamentar las mismas; para que así se visualice la aplicación de la matemática en actividades del azar. Hacer ver a los estudiantes que no existe un solo medio para obtener respuestas correctas, y que estos puedan luego fundamentar o argumentar de una manera más formal sus soluciones. Consideramos por tanto que EOS sería útil si se quisieran analizar aspectos más profundos, la idea en este trabajo es poder realizar una actividad de aula que se aplique y analice de forma rápida por el docente; considerando que el tiempo del mismo es limitado, y de esta forma realizar una reflexión sobre la propia práctica. Ahora bien si se quisiera ampliar y analizar otros aspectos que influyen, como aspectos afectivos, medicionales, entre otros no dudamos que la EOS sería de utilidad.

La Teoría de Marcos Conceptuales de acuerdo con Vergnaud (1990) proporciona un encuadre teórico para las actividades cognitivas, y tiene gran relevancia puesto que el concepto toma sentido de acuerdo a una situación que se quiere resolver, sin embargo la misma se enfoca primordialmente en aspectos cognitivos y en aspectos que tienen que ver con el lenguaje matemático de los significantes y los significados, aspectos que por ahora y en este caso, en particular, no interesan; aunque podrían eventualmente incluirse.

Algo similar a lo anterior sucede con la Teoría Acción, Proceso, Objeto, Esquema (APOE) pues la misma, siguiendo a Meel (2003), se centra en estudiar cómo se construyen los conceptos matemáticos y relacionarlo con la mente humana; si se tuviera como objetivo estudiar dificultades de un estudiante para entender un concepto por ejemplo, esta sería de gran utilidad, no obstante los fines que buscamos no son estos.

Por otro lado la Etnomatemática de D´Ambrosio se enfoca en estudiar los conocimientos producidos en entornos sociales y naturales, estudia por tanto los conocimientos en las prácticas sociales, lo cual sería interesante valorar para este trabajo, puesto que interesa visualizar la matemática como actividad social, y humana; sin embargo, según Peña-Rincón, Tamayo-Osorio y Parra (2015), en este marco teórico se corre el riesgo de que las comunidades no perciban el concepto matemático; sino solamente las prácticas, lo cual no concuerda con nuestros objetivos, ya que queremos asegurarnos de que esta relación entre resolución de tareas y tecnología exista al menos en esta actividad, además nos interesa centrarnos también en la parte formal de la matemática, es decir que el estudiante aprenda conceptos en el tema de probabilidad y se familiarice con algunos resultados, pues la idea es abarcar una habilidad del plan de estudio del MEP (2012).

Otra teoría socioepistemológica es la Teoría de Educación Matemática Crítica, que enfatiza los aspectos sociopolíticos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, esta teoría también se interesa en estudiar relaciones de poder de determinadas prácticas pedagógicas. En este sentido, la misma sería relevante en cuanto a que toma en cuenta el conocimiento matemático como una actividad social, sin embargo fuera de lo anterior no encontramos ninguna otra relación con los fines establecidos en el taller.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

Una de las concepciones que poseemos de la matemática, es que esta es una actividad social, ya que en todas las actividades que realicemos siempre podrá verse involucrada la matemática, por lo que no se debe considerar esta como un ente aislado a la realidad de cada individuo; además muchas profesiones tendrán esta disciplina como base fundamental.

Cabe mencionar que concordamos con Bosh (2000), en que el conocimiento es "el producto o la cristalización de determinado quehacer humano y queda siempre caracterizado por las actividades de las que surge y por las que permite realizar" (p. 15). Es por eso que se ha considerado la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard como sustento teórico para la realización de este trabajo.

La TAD inició por Chevallard a partir del establecimiento de la Teoría de la Transposición Didáctica (TTD), la transposición tiene que ver con los cambios que sufre el conocimiento en su paso del macro-espacio (la matemática como disciplina), y el micro-espacio (el salón de clase). En la Teoría de la Transposición Didáctica (TTD), aparece el saber sabio, saber para enseñar, saber enseñado, saber aprendido; lo que ha sido utilizado en la enseñanza de las matemáticas. Esta Transposición se refiere a los cambios que sufre un conocimiento en su transición en diferentes momentos o contextos, por ejemplo puede ser de lo cotidiano a lo matemático o viceversa; por lo que está relacionada con la TAD, pues esta hace referencia a actividades cotidianas.

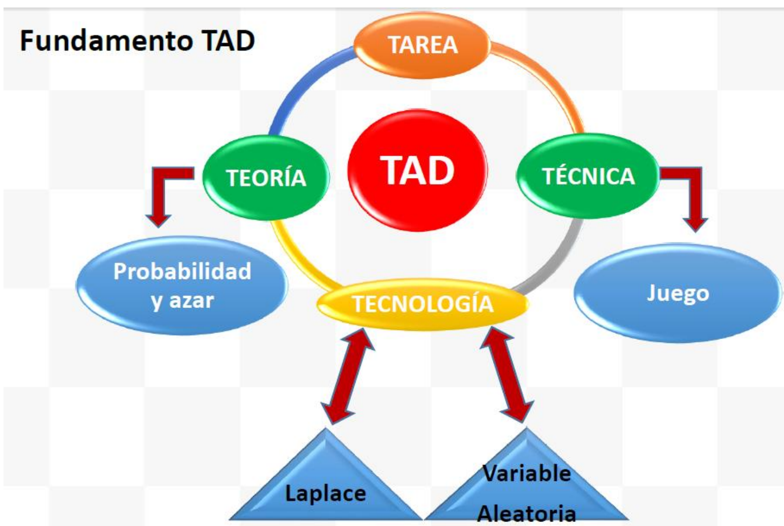
Esta teoría posiciona a la matemática en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales, esto justifica que la misma sea una teoría antropológica, según Bosch & Gascón (2009; citado por Morales, 2013). Dicha teoría se opone a la exclusión y, según Morales (2013), considera a la Didáctica de la Matemática como una actividad humana, y agrega que toda actividad humana puede describirse con un modelo único, lo que es llamado praxeología.

La noción de praxeología u organización matemática (OM) es una de las nociones claves de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Bosch y Gascón (2009) establecen que el término de praxeologías viene de la unión de los términos logos y praxis, y se refiere a cualquier actividad estructurada y el conocimiento implícito en esta, lo anterior descansa en la idea de que toda actividad está acompañada de una descripción o explicación, sobre lo que se hace, cómo se hace y por qué se hace.

De acuerdo con Morales (2013) el concepto de praxeología está vinculado a las tareas, actividades, ejercicios u otros; así la TAD presenta una estructura definida a partir de tareas, una técnica, una tecnología y una teoría. En concreto, la estructura de la TAD es [T/ô/θ/Θ], la cual permite analizar las tareas, donde:

1. T son las tareas (tipos de problemas).
2. ô es la técnica de T (maneras de hacer).
3. θ la tecnología de ô
4. Θ es la teoría de θ

El siguiente esquema (robot) muestra la relación específica del taller y la TAD,



Fuente: Elaboración propia, 2015

De esta manera las técnicas hacen referencia a aquellas reglas que usan los estudiantes para resolver las tareas que en este caso se realizarán mediante el juego, la tecnología constituye objetos de la matemáticas tales como: conceptos, definiciones, teoremas entre otros, y la teoría constituye el marco axiomático donde están inscritos los objetos matemáticos (Camacho, 2010), así se puede relacionar la tecnología con la fórmula (ley) de Laplace y el concepto de variable aleatoria, y la teoría con la Probabilidad y el Azar.

Chevallard (1999) con el fin de contar con herramientas más precisas para analizar los procesos didácticos especificó la distinción entre tipos de praxeologías según el grado de complejidad de sus componentes, estas son: *praxeologías puntuales*; son generadas por un único tipo de tareas, si estas se combinan integrando una estructura más compleja surgen las *praxeologías locales*, en estas la tecnología adquiere un papel relevante. Las *praxeologías regionales*, se obtienen mediante la integración, según una teoría matemática común, de diversas praxeologías locales. Por último están las *praxeologías globales*, que surgen agregando varias praxeologías regionales que integran diferentes teorías.

Cada una de las praxeologías posteriores surgen para dar respuesta a problemas que las praxeologías puntuales no pudieron dar respuesta. Además de las praxeologías matemáticas, existen las praxeologías didácticas, estas últimas están orientadas a la difusión social de las primeras. Según Camacho (2010), la unión de la praxeologías matemáticas y didácticas da origen al modelo epistemológico que ordena la enseñanza.

Respecto a las praxeologías didácticas, Chevallard (1999) describe seis momentos del estudio que son: el momento del primer encuentro, el momento exploratorio, el momento del trabajo de la técnica, el momento tecnológico-teórico, el momento de la institucionalización y el momento de la evaluación. La aplicación de dicha teoría supone llevar a cabo todo un procedimiento y trabajo de fondo por parte del profesor, que puede basarse en la aplicación y estudio de estos momentos. En este sentido el proyecto Amperes, planteado por el equipo de trabajo Belga-Francés-Español, está enfocado en las praxeologías didácticas, y plantean una serie de recomendaciones para llevar a cabo un actividades basadas en TAD, al respecto mencionan que: debe analizarse un tema que cause un problema a los estudiantes y estudiar las posibles soluciones del mismo, además el profesor debe realizar un análisis de las praxeologías matemáticas y reflexionar sobre qué se puede transponer a los estudiantes tomando en cuenta los conocimientos previos.

Como se puede notar, la aplicación de esta teoría y de cualquier otra no es trivial, supone el trabajo del profesor considerando múltiples condiciones del proceso de enseñanza y aprendizaje además de entender bien la teoría, aquí se ha mostrado de forma general en qué consiste la misma y cómo podría aplicarse al taller, esto sin ánimos de proporcionar un trabajo acabado, solamente un acercamiento a esta.

Conclusiones

La revisión de diversos marcos teóricos nos permitió encuadrar el taller dentro de la TAD, ya que esta fue la teoría que mejor se adaptó a los objetivos fijados previamente. Es relevante enfatizar en el hecho de que muchos de los marcos teóricos revisados se descartaron debido a que no concordaban con los propósitos que para la actividad se plantearon, por lo cual es fundamental tener claro cuál es el fin último del taller, a que población va dirigida, por qué y cómo se va a realizar entre otros aspectos. En este caso debe considerarse que el contexto de la actividad es la educación secundaria, por ende era relevante seguir la metodología de resolución de problemas propuesta por el MEP.

Además cabe mencionar que la realización de este trabajo supuso un ir y venir dentro de las diferentes posturas que proporciona cada teoría pero principalmente entre la teoría elegida en este caso TAD y la formulación de los objetivos del taller; es una adaptación constante que depende de los objetivos que se deseen alcanzar y es de gran relevancia utilizar la terminología adecuada al marco teórico respectivo, para así no perder de vista la esencia de nuestro trabajo.

Otro aspecto que deseamos mencionar, es que en ocasiones, una sola teoría no sea suficiente para lograr lo que deseamos, por tanto será conveniente revisar si otras podrían complementarse de forma tal que cubra de forma satisfactoria los propósitos, lo importante del caso es saber reconocer las principales características de cada teoría, en qué se diferencian entre otros aspectos.

Se considera que la búsqueda de un marco teórico es relevante, pues esto conducirá las acciones del docente no sólo antes, sino durante y después de la realización de cualquier actividad de enseñanza y aprendizaje; es relevante saber qué deseamos lograr y fundamentar nuestras ideas, lo importante es formar criterios, destacar por qué es importante tomar ciertas características de una teoría y por qué de otra no. Defender nuestros puntos de vista y tomar posición frente a una determinada situación.

En relación a la Teoría elegida, existen diversas investigaciones que han puesto de manifiesto problemas comunes de la enseñanza de la matemática en secundaria, tanto a nivel nacional como internacional, por ejemplo, Fonseca (2004) manifiesta que los alumnos tienen problemas con la nomenclatura, suelen manejar únicamente una técnica para resolver determinadas tareas y en general poseen dificultades para interpretarlas.

Asimismo Oliveira (2010) menciona que "muchas de las organizaciones matemáticas que se proponen para ser estudiadas en la escuela han perdido su razón de ser y su "sentido"." (p.44). En este sentido, la TAD pretende poner en evidencia la razón de ser de las praxeologías, ya que la misma permite reflejar aquellas situaciones a las que responde cierta tarea.

Esto permitiría romper con la rigidez con la que se muestran los contenidos en secundaria, además de vincular la matemática a la vida cotidiana en general constituyéndose en una actividad humana más. Asimismo al trabajar con esta teoría el profesor y el estudiante pueden tener conciencia de la estructura lógica y la coherencia entre los contenidos que se enseñan y aprenden en secundaria, pues tendrían una razón de ser. Muchas veces los contenidos se imparten de forma aislada, perdiendo así la continuidad en la enseñanza.

Además, otra de las ventajas de trabajar la TAD, es que permite mostrar los contenidos a enseñar desde un punto de vista social, lo cual implica que se puede aprovechar el recurso de la historia de la matemática que a la vez ayuda a desmentir el hecho de que los contenidos que se enseñan siempre han estado acabados tal y como se muestran en la escuela.

Es relevante que los estudiantes puedan manejar diversas técnicas para resolver una determinada tarea, además que puedan justificar las mismas, que razonen, argumenten, se expresen entre otras habilidades. Consideramos que estos y otros procesos matemáticos pueden abarcarse con la ayuda de este marco teórico.

Referencias Bibliográficas

Bosch, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. Recuperado de http://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/48271/01120092000001.pdf?

Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. Recuperado de https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/3628647.pdf

Camacho. (2010). Utilización de un Modelo Praxeológico para el Desarrollo de Organizaciones Didácticas. Recuperado de https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/3628647.pdf

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Fonseca, C. (2004). Discontinuidades Matemáticas y Didácticas entre la Secundaria y la Universidad. (Tesis doctoral), Universidad de Vigo, España.

Grupo Alquerque (2007). La carrera de caballos. *Revista SUMA*. Recuperado de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=10128:julio-2007-la-carrera-de-caballos-publicado-en-la-revista-suma-no-51-2006&catid=77:juegos-matemcos&directory=67

Haigh (2003*)*. Matemáticas y Juegos de Azar. Jugar con la Probabilidad. Editorial Tusquets, España.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión de la matemática y la Teoría APOE. RELIME. *Revista Latinoamericana de investigación en educación matemática educativa 6*(3), 221-27.

Ministerio de Educación Pública (2012). Programas de estudio en Matemáticas. I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada. San José, Costa Rica.

Morales, H.(2013). La Teoría Antropológica de la Didáctica de Chevallard como sustento teórico para analizar el saber didáctico y matemático en la formación de profesores en la Universidad Católica de Concepción. Recuperado de http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/183.pdf

Oliveira, C. (2010). Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas. (Tesis doctoral). Universidad de Vigo, España.

Panizza, M. (2004). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. Recuperado de http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf

Peña-Rincón, P., Tamayo-Osorio, C.; y Parra, A. (2015).Una visión latinoamericana de la Etnomatemática: Tensiones y Desafíos. RELIME. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *18*(2) ,137-150.

Ruiz, A., Blanco, M. y Corchete, A. (1998). *Taller de Matemáticas.* Recuperado de https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CB0QFjAAahUKEwi_hez_tovJAhUGOiYKHenSCDU&url=http%3A%2F%2Fwww.educarm.es%2Ftemplates%2Fportal%2Fficheros%2FwebsDinamicas%2F124%2FMatematicasRecreativas%2F116LibroTallerMatemticas.pdf&usg=AFQjCNGm5OqwHfBGr0nnqyGYcl6mCVAJHg&cad=rja

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques 10*(2) ,113-134.

Propuesta didáctica para la enseñanza de la Geometría mediante el empleo de recursos tecnológicos

M.Sc. Eric Padilla Mora
Universidad Estatal a Distancia
epadilla@uned.ac.cr

M.Sc. Allan Guillermo Gen Palma
Universidad Estatal a Distancia
agen@uned.ac.cr

Lic. Domingo Dinarte Bustos
Universidad Estatal a Distancia
ddinarte31@gmail.com

Resumen: El desarrollo de la tecnología ha propiciado diversos cambios en las sociedades actuales. Sin embargo, al parecer en la educación aún no ha provocado esa transformación que responda a las necesidades de la actual generación, quizá por la resistencia y falta de capacitación de los diversos actores del proceso. En este artículo se analizarán aspectos relacionados con la tecnología y su aporte a la educación, la Matemática y particularmente la Geometría. Además, se plantean algunas recomendaciones respecto a la didáctica de la geometría a partir del uso de recursos tecnológicos.

Palabras claves: educación, programas de estudio, geometría, software, tecnología, didáctica, Matemática.

Introducción

El auge de la tecnología, principalmente a finales del siglo XX, con la aparición de las llamadas *nuevas tecnologías*, que evolucionaron a las actuales tecnologías de la información y comunicación (TIC), así como el desarrollo de Internet, podrían atribuirse, entre otras consideraciones, a la afluencia masiva de información y el uso de diversos medios digitales, asimilados casi de forma natural por las nuevas generaciones; producto de la dinámica con la cual se vive, donde la información, el conocimiento y las maneras de comunicarse están en constante cambio.

Por ende, no resulta casualidad que a la actual sociedad se le considere como "la sociedad de la información", al respecto Martín-Laborda (2005) manifiesta:

> Se ha configurado una nueva sociedad, la nueva Sociedad de la Información (SI) también denominada, si damos un paso más, Sociedad del Conocimiento, que se caracteriza por la posibilidad de acceder a volúmenes ingentes de información y de conectarse con otros colectivos o ciudadanos fuera de los límites del espacio y del tiempo. (p.4).

Por su parte Chamoso, García y Rodríguez (2011) argumentan que la inserción de la tecnología en la educación

> No ha sido fácil por diversas razones como, por ejemplo, insuficiencia de ordenadores, escasez de software, aulas no preparadas, necesidad de una metodología diferente donde se modifica el papel del profesor y del alumno, escasez de directrices para desarrollarla, enseñanza tradicional fuertemente arraigada o falta de preparación del profesorado. (p.162)

Otra de las razones fundamentales que han dificultado su implementación en las aulas, según Hitt (1998, citado por Gamboa 2007), se debe a que los materiales que se encuentra el docente no son lo suficientemente convincentes ni se les ofrecen experiencias que le motiven a la implementación de la tecnología. Para Gamboa (2007) "[…] el profesor de matemáticas sentirá la necesidad del cambio cuando se le presenten materiales y estudios que muestren la efectividad de la tecnología en el aula" (p.19).

Ante estas situaciones, es necesario diseñar procesos de capacitación orientados a la sensibilización y concientización, y promover la inserción de la tecnología enfatizando en su didáctica, dado que podría suceder que existan instituciones equipadas tecnológicamente, pero los educadores no estén capacitados ni interesados en utilizarlos. Peor aún que los empleen sin el diseño de actividades y estrategias metodológicas que favorezcan los procesos de enseñanza y de aprendizaje, lo cual podría provocar no solo el aburrimiento en los estudiantes sino que además, impida el logro de los objetivos educativos propuestos.

Debe considerarse que al incorporar las TIC en el proceso de enseñanza esto no debe conllevar a un desafío, sino que debe verse como una necesidad para que los estudiantes puedan desenvolverse de una mejor manera dentro de la nueva sociedad; lo cual se convierte en la excusa ideal para introducir en la educación nuevos elementos que realicen una profunda transformación. La discusión ya no debe centrarse en si se emplea o no la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje, dado que debe comprenderse que la tecnología en la educación supone ser una manera para mejorar la calidad de la enseñanza y una vía para dar respuesta a las exigencias de la actualidad.

Al incorporar la tecnología a dichos procesos debe valorarse el rol asignado a la misma, es decir, si se está incorporando en los centros escolares desde un punto de vista tecnológico o también desde una perspectiva pedagógica y en qué medida, o si existe algún tipo de valoración de la eficacia para la mejora de la calidad de la enseñanza y el aprendizaje. Es necesaria una transformación que modifique e influya en la metodología educativa a través de la interactividad, fomentando el trabajo colaborativo y, sobre todo, la innovación, la creatividad, el dinamismo y la flexibilidad.

El docente debe tener claro, que la tecnología no lo desplaza, por el contrario, resulta evidente que su utilización depende, en gran medida, de la actitud que este tenga hacia las mismas, de su creatividad y sobre todo de su formación tecnológica y pedagógica. Es fundamental considerar que

> La tecnología no es la solución al problema del aprendizaje. La enseñanza no se puede automatizar y el profesor no se puede reemplazar. No obstante, las nuevas tecnologías abren espacios en los que el estudiante puede vivir experiencias difíciles de reproducir con los medios tradicionales como el lápiz y el papel. (Ureña, 2007, p.25)

La tecnología y su avance exigen cambios significativos en el ámbito educativo, es necesario que los docentes reconozcan el apoyo que ello podría generarle, sientan la necesidad de capacitarse en el conocimiento de diversas herramientas tecnológicas, pero sobre todo, en cómo emplearlas para el logro de un aprendizaje significativo. Corresponde a los entes gubernamentales brindar los espacios necesarios para capacitaciones, la infraestructura correspondiente y replantear de forma consecuente los Programas de Estudio del currículo educativo, con ello se pretende no solo una mejora cuantitativa sino además cualitativa de la educación.

Programas de Estudio, Matemática y tecnología

En Costa Rica a partir de la modificación a los Programas de Estudios en distintas asignaturas y específicamente en Matemática, en el 2012, se pretende un cambio sustancial del proceso educativo, lo cual se ha asumido como un reto para los diversos actores y ha evocado: la revisión y transformación del *curriculum*, la innovación en las estrategias metodológicas, y la propuesta de una enseñanza que tenga como eje principal la resolución de problemas, donde la tecnología y su empleo se vislumbra como una aliada a partir de la selección consciente, inteligente y visionaria, dado que no se puede asegurar que el empleo de la misma conlleva al mejoramiento del aprendizaje.

Es a partir de la tecnología con sus diversas herramientas para realizar: cálculos aritméticos y algebraicos, cálculo de medidas de centralización y variabilidad, simulaciones, gráficas, gráficos y construcciones geométricas, entre otras, y el empleo de estrategias didácticas adecuadas que podría contribuirse con el desarrollo de habilidades como: razonamiento, argumentar, intuición, creatividad, colaboración, comunicación y análisis. En los Programas de Estudio (2012) se advierte:

> La tecnología puede ser un poderoso aliado para potenciar el pensamiento matemático. Y es precisamente la resolución de problemas en entornos reales donde éstas pueden aportar sus beneficios de la mejor manera, en contexto de aprendizajes que favorezcan las habilidades y capacidades matemáticas. (p.41)

Además se enfatiza en que:

> La utilización de tecnologías, sin embargo, no conduce necesariamente al mejoramiento de los aprendizajes en las Matemáticas, peor aún: un mal uso puede debilitarlos. La tecnología debe entonces introducirse de forma pertinente y precisa en los distintos niveles educativos y de acuerdo a las condiciones materiales y humanas existentes en el contexto educativo nacional. (p.41)

Se pretende que las técnicas, métodos y recursos empleados en las aulas, por parte de los docentes, que en ocasiones favorecían poco el logro de los objetivos, se transformen. Las lecciones deben convertirse en espacios más reflexivos, analíticos, dinámicos, interactivos y visuales, donde la tecnología a partir del empleo de videos, presentaciones multimedia o animaciones y la utilización de software específico, en ciertas áreas, pueda beneficiar la forma de presentar los contenidos a los estudiantes y contribuir con su asimilación y compresión. Es claro que no se busca el uso de la tecnología como un fin en sí mismo.

Con el apoyo de la herramienta tecnológica en la enseñanza de la matemática, algunos problemas típicos que aparecen en las guías de estudio elaboradas por los docentes o en los típicos libros de texto podrán ser transformados en acciones no rutinarias, permitiendo a los estudiantes reflexionar sobre actividades del quehacer matemático y de la vida cotidiana, como la formulación de conjeturas, uso variado de argumentos y la forma correcta de comunicar resultados. Esto conlleva a que los docentes planifiquen sus clases de manera que los estudiantes vivan una nueva experiencia matemática, al estar éstos expuestos no solo a procesos algorítmicos sino también a la construcción de relaciones, "[…] es importante que el estudiante encuentre la solución de un problema y también que, siempre que sea posible, busque varias formas de solución y de la misma manera investigue otras conexiones o extensiones del problema". (Camacho y Santos, 2004, p.107)

Otro aspecto a considerar es que el uso de la tecnología, en la enseñanza de la matemática, permite al docente diseñar situaciones de aprendizaje tomando en cuenta las necesidades del estudiante, así como aprovechar las características que presenta la herramienta tecnológica, lo cual según Gómez (2000) hace "[…] que el estudiante perciba que los problemas en matemáticas no tienen necesariamente una única estrategia de resolución". (p.11)

Geometría y recursos tecnológicos

Un área que presenta dificultades en su enseñanza y en el aprendizaje de la Matemática corresponde a la Geometría, en parte por su nivel de abstracción que debe considerarse desde su inicio con las nociones básicas: espacio, plano, punto, recta, rayo y semirrecta, entre otros. Aunado, los recursos que usualmente se emplean durante su enseñanza: tiza, pizarra, borrador, libro de texto, en algunos casos juego de geometría y el uso de material concreto, con los cuales se busca representar diversos conceptos y construcciones geométricas de manera estática.

De acuerdo con Argudo (2013), debería hacerse un replanteamiento sobre la forma en la cual se ha tratado de enseñar los diversos conceptos geométricos, dado que:

> La forma tradicional de enseñar geometría se ha basado por tanto en el estudio de geometría estática, pudiendo considerarse la geometría dinámica como un campo bastante nuevo. Pero en la vida real las figuras se mueven, se desplazan, se producen cambio… por ello es tan importante fomentar el aprendizaje de la geometría dinámica en los centros, porque si no estaríamos dejando de enseñar muchos contenidos de gran importancia, sobre todo para futuros ingenieros, arquitectos, informáticos…o enseñándolos de estática, que más que fomentar la correcta comprensión del concepto la dificulta. (p.12).

Por ello, quizá con el empleo de recursos tecnológicos: pizarra electrónica, proyector, computadoras y algún software dinámico podrían favorecerse y contribuir su explicación y el aprendizaje.

Temas como: polígonos, círculo y circunferencia, y estereometría, así como las relaciones entre los diversos elementos y teoremas geométricos obtendría beneficios, dado que con un simple movimiento podría lograrse diversas transformaciones, situación que no se logra al representar, por ejemplo, un triángulo con tiza en la pizarra, al cual darle movimiento resulta prácticamente imposible. El poder visualizar, conjeturar y establecer resultados como *la suma de la medida de los ángulos internos en todo triángulo da 180°* o *la suma de todo ángulo externo es igual a la suma de la medida de los ángulos internos no adyacentes a él* o comprobar que las mediatrices en todo triángulo se intersecan en un punto y que dicho punto siempre está en el interior del triángulo, podrían tomar mayor sentido y compresión si al manipular gran variedad de triángulos y variar su tamaño y posición se puede verificar que efectivamente así es.

Aportes que brinda la tecnología y algunos de los recursos en la web

La mayoría, de los programas han sido creados con el fin de estudiar los elementos de las figuras geométricas, las relaciones entre ellos y sus propiedades, a partir de la manipulación directa, lo cual según Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004) en relación con los estudiantes, "[…] sirve para desarrollar las habilidades mentales que les posibilitarán acceder posteriormente al estudio formal de la geometría" (Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta, 2004, p.15). Además, agregan:

> Con el acceso a la manipulación directa, la enseñanza de la Geometría ofrece un interesante desarrollo hacia una nueva conceptualización de ésta, como el estudio de las propiedades invariantes de las figuras geométricas. Al permitir la posibilidad de experimentar con una especie de "materialización" de los objetos matemáticos, de sus representaciones y de sus relaciones, los estudiantes pueden vivir un tipo de experimentación matemática que otros ambientes de aprendizaje no proporcionan. (p.15).

Las posibilidades de arrastre y desplazar los diversos objetos geométricos son quizá la gran diferencia que se puede encontrar respecto a los ambientes de aprendizaje tradicional. En las diversas aplicaciones cada figura construida se convierte en una serie de objetos que permite hacer todo un análisis, establecer conjeturas y aprobarlas o rechazarlas.

Por su parte el incremento de aplicaciones y software diseñado para el trabajo de la geometría ha sido notorio, algunos de ellos son:

a) **Cabri-Géomètre II**: tipo comercial. Diseñado para geometría interactiva y al parecer es el más utilizado a nivel mundial. Incluye aplicaciones para geometría analítica, transformacional y Euclidiana. Sus funciones abarcan la construcción de puntos, líneas, triángulos, polígonos, círculos, entre muchas más.
b) **CaRMetal**: programa gratuito multiplataforma de geometría dinámica, fácil de usar. Puede emplearse en el trabajo de los conceptos elementales como: rectas, rectas paralelas y rectas perpendiculares, segmentos, circunferencias, polígonos y ángulos.
c) **GeoGebra:** es gratuito y es un programa de diseño y de cálculo simbólico para trabajar la geometría, el álgebra y las funciones, entre otras aplicaciones. Lo más destacable es su posibilidad de interactividad; una vez construida una figura se puede mover cualquiera de los objetos independientes que la forman y automáticamente se modifican todos los que dependen de él. Además, construida una figura, ésta puede ser exportada como HTML y así crear el applet correspondiente.
d) **Geometer's Sketchpad**: software comercial, herramienta útil para explorar geometría. Se puede utilizar para hacer construcciones geométricas, con la ventaja que a diferencia de las que se hacen con lápiz y papel, estas se pueden cambiar de forma interactiva.
e) **Poly:** comercial, está diseñado fundamentalmente para explorar poliedros.
f) **Regla y compás**: libre, permite generar applet's geométricos interactivos.
g) **Tangram**: libre, juego educativo universal. Ideal para trabajar en transformaciones isométricas.

Estos programas acentúan la posibilidad de generar construcciones interactivas, situación que podría favorecer de gran forma la enseñanza y el aprendizaje de conceptos básicos de la geometría, así como manipular los diversos objetos para establecer resultados a partir de la observación y experimentación, lo cual contribuiría con la comprobación de resultados y teoremas propios de dicha área. Además, se le atribuye al menos tres características elementales:

1. La capacidad de arrastre de las figuras construidas: esto tiende a constituirse en una gran ventaja. Con solo un movimiento se pueden generar un sin número de figuras que podrían ser empleadas para que los estudiantes: exploren, conjeturen y establezcan resultados o teoremas.
2. El uso extensivo de lugares geométricos y el permitir dejar huella de alguna figura cuando se le arrastra podría favorecer el descubrir hechos geométricos.
3. Las animaciones de las figuras o elementos, lo cual permite presenciar el proceso constructivo de un ente geométrico.

Es claro que la geometría es un área que ha sido beneficiada con el desarrollo de la tecnología. El uso de algún tipo de software, para la enseñanza, podría contribuir con el logro de los objetivos educativos y favorecer dicho proceso. Quizá, con la implementación adecuada de algún programa, se podría obtener mejores resultados, la posibilidad de dinamismo e interacción con los diversos entes geométricos es, sin duda, una de las grandes virtudes de las aplicaciones y contribuiría, por qué no, con el aprendizaje.

Propuestas didácticas para el uso de la tecnología en la enseñanza de la Geometría.

La enseñanza de los contenidos de geometría en los primeros niveles, de acuerdo con las posibilidades, debería realizarse a partir de la relación de los aprendizajes con la vida real de los estudiantes. Haciendo uso de las experiencias que los niños poseen, mediante el apoyo con actividades prácticas y con la manipulación de objetos concretos y familiares, se puede avanzar hasta llegar a la creación de formas más figurativas y simbólicas que faciliten la abstracción. El empleo de material concreto (estructurado o no estructurado): los geoplanos, los legos, los bloques, el tangram, la papiroflexia, el recorte, construcción de figuras tridimensionales, el doblado de papel y construcciones con regla y compás son recursos muy valiosos; los cuales bien direccionados podría favorecer el aprendizaje.

Por su parte, los diversos recursos tecnológicos con que se cuenta en la actualidad parece no ser una limitante y empleados sea de forma exclusiva o como complemento a otros, podría contribuir con el diseño de estrategias metodológicas que favorezcan no solo la enseñanza.Es importante señalar que el empleo de la tecnología en el aula como herramienta didáctica, probablemente, logrará que las lecciones sean más amenas; sin embargo, no debe perderse de vista que lo fundamental es incitar el interés por un estudio más profundo de la Matemática y con ello lograr por parte de los estudiantes un aprendizaje significativo; por tanto, las situaciones que se propongan deben implicar un reto para los estudiantes.

En respuesta a la atención de los distintos niveles de escolaridad y del desarrollo cognitivo del estudiante, consideramos que los recursos tecnológicos podría ser empleados con diversos fines, esto en función de las estrategias metodológicas propuestas por el docente y fundamentalmente de los objetivos educativos planteados. Se analizarán algunos de ellos.

El uso de videos: pueden emplearse de diversas formas en el trabajo de aula, sea para: introducir el tema, presentar el contenido, desarrollar aspectos históricos, como complemento al desarrollo de la teoría, ilustrar conceptos, ejemplificar el uso o presencia de los conceptos en situaciones de la vida cotidiana o la naturaleza, entre muchas otras. De acuerdo con Infantes (2011),

> […] el uso del vídeo en clase facilita la construcción de un conocimiento significativo dado que se aprovecha el potencial comunicativo de las imágenes, los sonidos y las palabras para transmitir una serie de experiencias que estimulen los sentidos y los distintos estilos de aprendizaje en los alumnos. Esto permite concebir una imagen más real de un concepto.
>
> Por otro lado, la imaginación vuela, los conceptos se reagrupan y se redefinen, y es entonces cuando la presencia del maestro se reafirma, ya que es él quien determina cómo, cuándo y para qué se debe utilizar, lo cual, le da sentido y valor educativo. (p.1)

No obstante, es importante que el docente revise no solo la calidad de la información sino también la pertinencia, y sobre todo que esta responda a los objetivos educativos propuestos. Sería conveniente que sea él quien diseñe el material.

El uso de software dinámico*:* de acuerdo con los objetivos educativos propuestos y del equipo disponible, el uso de software podría ser a partir de laboratorios, los cuales para Mora (1997) permiten dar un nuevo enfoque al aprendizaje de las Matemáticas, dado que se logra éxito en los siguientes aspectos:

- “Es un medio que ofrece oportunidad de alcanzar el dominio en el uso de abstracciones, al estudiante que no lo ha logrado. Por esta razón las lecciones laboratorio son particularmente adecuadas para considerar las diferencias individuales, para ayudar a los marginados culturalmente y para evitar la deserción.
- Las posibilidades de trabajo individual e independiente hacen que la lección laboratorio sea llamativa y provechosa para estimular la creatividad del estudiante talentoso.
- Como resultado de la independencia del laboratorio, las actitudes positivas hacia las matemáticas y hacia el profesor de matemáticas constituyen uno de los principales logros.
- La completación de un experimento se traduce en un producto individual o en un descubrimiento independiente que da al estudiante evidencia tangible del proceso realizado.” (p.221)

Por tanto se realizará una propuesta y clasificación de los laboratorios tomando, principalmente, como base el alcance cognitivo que estos podrían brindar, además, se propone algunas actividades que podrían servir de guía y motivación para la formulación de otras:

Laboratorios para visualización de figuras: consiste en presentar una serie de actividades en las cuales los estudiantes deben visualizar figuras y diversos cuerpos geométricos. Ideal para el análisis de traslaciones, simetrías y el reconocimiento de patrones, entre otros contenidos, en el cual determinan los diversos elementos que los conforman. Este tipo de actividades permite favorecer la visualización, reflexión, concentración, exploración y comunicación. En los primeros niveles de escolaridad sería un complemento al uso de material concreto.

Software recomendado: Poly, GeoGebra, Geometer´s Sketchpad, Tangram, Regla y compás.

Algunos ejemplos:

a) Identificar figuras planas en cuerpos sólidos, a partir del empleo de imágenes en contextos de la vida real.
b) A partir de una imagen determinar cuáles figuras se pueden apreciar en ella y realizar clasificaciones de acuerdo con el número de lados, su forma y la medida de sus ángulos internos. Así como realizar una posible clasificación de ellas.
c) Analizar una serie de imágenes para determinar cuáles has sido producto de traslaciones y cuáles de rotaciones de otra original.
d) Se hacen túneles que atraviesan un cubo grande como se indica en la figura

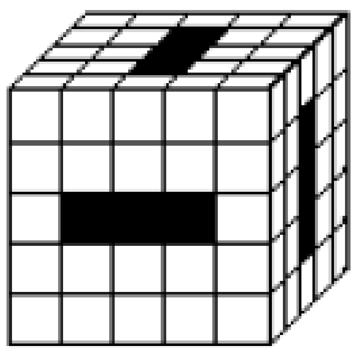


Figura 1

Con base en dicha información y la figura, determine cuántos cubos pequeños quedan.

e) El siguiente dibujo, mostrado en la figura 2, corresponde a una toma panorámica de cierto pueblo.

Figura 2

Actividad tomada de Godino, J y Ruiz, F. (2002). Geometría y su didáctica para maestros

Si las siguientes imágenes son posibles planos ¿Cuál de ellos corresponde al de la imagen del pueblo? Justifique su respuesta

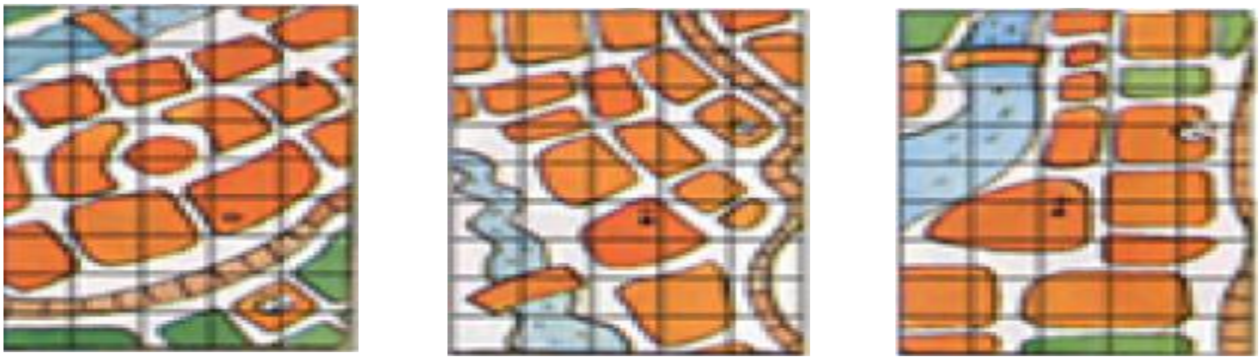


Figura 3

f) Considere las seis posiciones dadas de un mismo cubo.

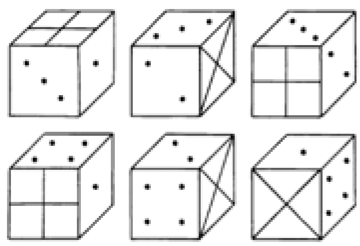


Figura 4

Si la siguiente figura 5 corresponde al desarrollo del cubo, con base en la figura anterior, en cada cuadro escriba el número o figura que corresponda.

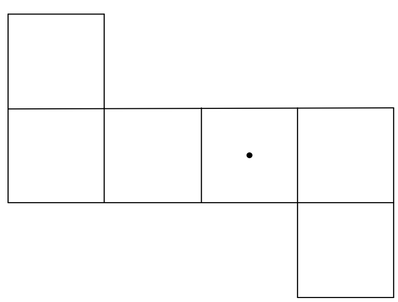


Figura 5

Laboratorios para exploración de conceptos: se pueden presentar situaciones donde se enfatiza la comprensión de conceptos a partir de gráficos, tablas, imágenes u otros cálculos. Son ideales para establecer caracterizaciones de los conceptos.

Software recomendado: Poly, GeoGebra, Geometer´s Sketchpad, Tangram y CaRmetal.

Algunos ejemplos:

a) Dado un rectángulo, a partir de la manipulación de uno de los vértices, comprobar que sus ángulos internos son rectos, así como que las diagonales son congruentes. Esta actividad podría adecuarse para cualquier figura.
b) Si la casa de Pedro está a la misma distancia de la de Ana (casa A) y la de Luis (casa B). De acuerdo con la siguiente figura 6 en la cual se indican las posiciones de las casa de Ana y Luis ¿Será posible encontrarle más de diez posiciones a la casa de Pedro?

Casa A

Casa B

Figura 6

c) A partir de una imagen o fotografía comprobar, por ejemplo, cuáles ventanas tienen forma rectangular (no cuadrada) y cuáles de ellas son cuadradas.
d) Reconocer ejes de simetría en diversas figuras.
e) Identificar los diversos elementos que conforman a los diversos cuerpos sólidos.
f) Que la altura en cualquier triángulo es perpendicular al lado opuesto o a su prolongación.

Laboratorios para construcción de figuras*:* los cuales pretenden que el estudiante a partir de la definición y con el uso de algún software logre construir algunas figuras o trate de representar imágenes que han sido previamente diseñadas, es importante que al finalizar la construcción se justifique de forma clara cada uno de los argumentos empleados.

Bajo esta estructura se puede solicitar al estudiante que realice diversas construcciones. La idea fundamental es reforzar los conceptos y justificar cada uno de los procesos realizados, debe existir un razonamiento lógico que acompañe la construcción. Otra técnica que se podría emplear es el dictado de figuras. Este tipo de laboratorios podría estar acompañado del uso de construcciones con regla y compás.

Software recomendado: Poly, GeoGebra, Geometer´s Sketchpad, Tangram, Regla y compás.

Posibles actividades:

a) Representar diversos elementos geométricos: un segmento y dividirlo en tres partes iguales, ángulos, mediatrices y polígonos regulares e irregulares, entre otros.
b) Construir la circunferencia inscrita y circunscrita en un polígono regular.
c) Dado un círculo, sin conocer el centro, construir el diámetro.
d) Dado un segmento y su medida, construir un triángulo equilátero cuya altura tenga la misma longitud que el segmento dado.
e) Construir diversos cuerpos sólidos.
f) Considere la siguiente cuadrícula y la figura dada en ella. Tomando al punto **K** como uno de los vértices reproducir el triángulo REV.

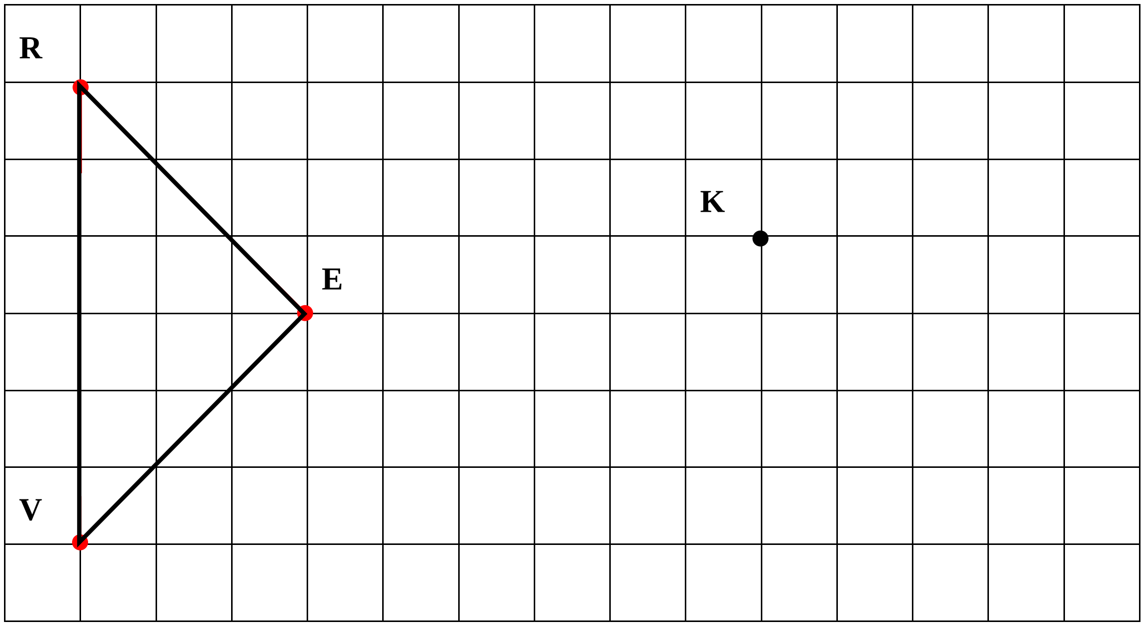


Figura 7

Existirá una única posición para la reproducción de dicha figura. Justifique.

Laboratorios de verificación: con su implementación se puede comprobar o verificar, de manera experimental, algún resultado abstracto.

Software recomendado: GeoGebra, Geometer´s Sketchpad, *Cabri-Géomètre II*, Regla y compás, CaRmetal.

Algunas actividades:

a) Se solicita al estudiante que construya un triángulo cualquiera y trace la altura sobre cada uno de los lados o su prolongación. Luego se indica que verifique que el área de la región triangular es la misma independientemente del lado que se utilice como base.
b) Verifique que el área de toda región cuadrada inscrita en una circunferencia de radio "r" está dada por la fórmula $A = 2 \cdot r^2$.
c) Comprobar que la medida de cualquier ángulo externo en un triángulo es igual a la suma de la medida de los ángulos internos no adyacentes a él.
d) Dado un ángulo inscrito en una circunferencia comprobar que su medida es igual a la mitad de la medida del arco que lo subtiende.
e) Considere las siguientes rectas l_1 y l_2 en la siguiente figura 8

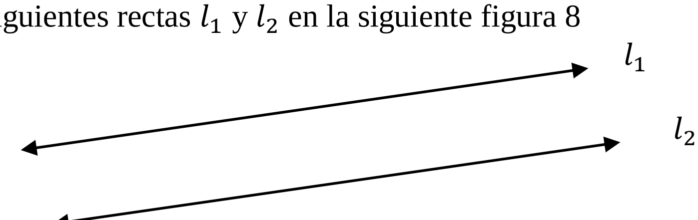


Figura 8

¿Cómo harías para comprobar o verificar si son o no paralelas?

f) Construya un segmento AB y trace la mediatriz de dicho segmento. Marque un punto P sobre la mediatriz y al punto medio del segmento desígnelo con M. Además, construya los segmentos AP y BP. Verifique que la mediatriz es un eje de simetría de la figura.
g) Comprobar que en un prisma recto sus caras laterales son cuadriláteros.

Laboratorios de experimentación y descubrimiento: presenta situaciones donde se pueda conducir al estudiante a establecer algún método para resolver un problema. Este tipo de laboratorios requieren despertar en el estudiante una sospecha a través de la observación de un patrón.

Software recomendado: GeoGebra, Geometer´s Sketchpad, *Cabri-Géomètre II*, Regla y compás, CaRmetal.

Algunas actividades:

a) Construya una circunferencia y un punto en el exterior de ella. Trace dos rectas tangentes desde dicho punto a la circunferencia y mida los segmentos que van desde el punto exterior hasta el punto de tangencia. Arrastre diversos elementos de la circunferencia y el punto exterior ¿Qué puede concluir con la medida de ambos segmentos?

b) En un triángulo cualquiera ABC se marcan los puntos que dividen a cada lado en tres partes iguales y se unen con el vértice opuesto, tal como se indica en la figura 9; los segmentos así trazados determinan el triángulo IJK ¿Qué relación hay entre las áreas de las regiones triangulares ABC e IJK?

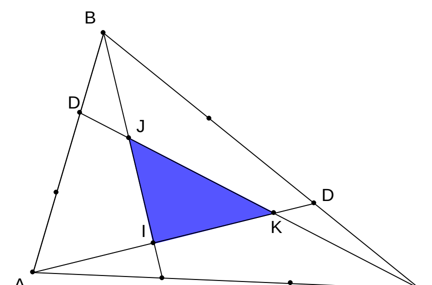


Figura 9

c) Considere el triángulo ABC mostrado en la figura 10 adjunta. Sea M el punto medio del segmento BC y P un punto cualquiera de la mediana AM. Si además, se trazan rectas que pasen por P y sean paralelas a los lados AB y AC que cortan a $\overline{BC}$ en los puntos E y F respectivamente ¿Qué relación hay entre los segmentos EM y MF? ¿Dónde hay que situar el punto P para que $\overline{BE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FC}$?

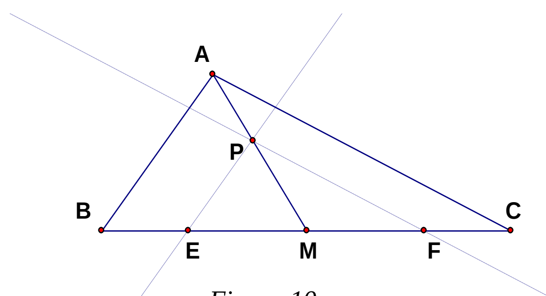


Figura 10

d) Construir figuras semejantes y establecer relaciones o conjeturas entre la medida de los lados, el perímetro y el área.

e) Considere la siguiente figura 11 en la cual $\overline{AB} \| \overline{CD}$.

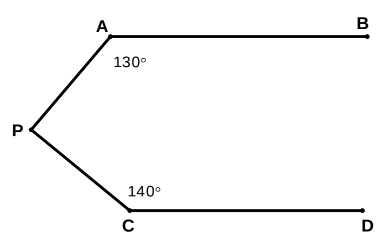


Figura 11

De acuerdo con los datos en ella. Determine $m\angle APC$. Justifique su respuesta.

Construcciones y demostraciones: bajo esta modalidad se pretende que el estudiante realice alguna construcción, establezca alguna conjetura y luego demuestre si es válida o no.

Software recomendado: GeoGebra, Geometer´s Sketchpad, Regla y compás, *Cabri-Géomètre II* y CaRmetal.

Posibles actividades:

a) Construya un triángulo isósceles, trace la altura sobre el lado desigual. Luego mida la longitud de los segmentos en los cuales ha quedado dividido el lado desigual ¿Qué puede concluirse? ¿Será dicha altura una mediana del triángulo? Realice una demostración para cada una de sus conclusiones.
b) Construya una circunferencia, trace una cuerda cualquiera y un radio que sea perpendicular a dicha cuerda. Verifique que dicha cuerda es bisecada por el radio. Realice una demostración que compruebe dicho resultado.
c) Verifique que en una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, cuerdas congruentes equidistan del centro. Luego realice una demostración de este resultado.
d) Verifique si una región poligonal regular se satisface o no que $A = \dfrac{n l^2 \tan\left(\dfrac{m\angle i}{2}\right)}{4}$, donde n es el número de lados, l es la longitud del lado y $m\angle i$ es la medida del ángulo interno. Además, en caso de cumplirse dicho resultado demuéstrelo.
e) Dados dos puntos en el plano con coordenadas (x_0, y_0) y (x_1, y_1) demostrar que la distancia entre estos dos puntos está dada por: $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.
f) Demostrar que en toda circunferencia se satisface la relación $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$ con r la medida del radio y (h,k) el centro.

Es importante que el rol protagónico sea del estudiante, quién deberá finalizar cada uno de los laboratorios propuestos, y contribuir, así, con su formación y aprehensión del conocimiento. Por su parte, el profesor será un guía y motivará a partir de las actividades planteadas para cada una de las lecciones, por tanto cada actividad propuesta, dentro de los laboratorios, conllevará un planeamiento didáctico.

Conclusiones

El incorporar recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza no debe verse como un desafío, sino más bien como una necesidad para que los estudiantes puedan desenvolverse de una mejor manera dentro de la nueva sociedad; además, resulta ser la excusa ideal para introducir en la educación nuevos elementos que realicen una profunda transformación. Debe comprenderse que la tecnología en la educación supone ser una manera para mejorar la calidad de la enseñanza y una vía para dar respuesta a las exigencias de la actualidad.

En empleo de tecnologías sin estrategias didácticas adecuadas, podrían no conducir con la mejora de los aprendizajes. La tecnología debe entonces introducirse de forma pertinente y precisa en los distintos niveles educativos y de acuerdo con las condiciones materiales y humanas existentes en el contexto educativo nacional.

La enseñanza de la Geometría a partir del empleo de software dinámico podría verse beneficiada dado que con un simple movimiento se logran diversas transformaciones. Las posibilidades de arrastre y desplazar los diversos objetos geométricos son quizá la gran diferencia que se puede encontrar respecto a los ambientes de aprendizaje tradicional.

La enseñanza de los contenidos de geometría en los primeros niveles debería realizarse a partir de la relación de los aprendizajes con la vida real de los estudiantes. El empleo de material concreto (estructurado o no estructurado) y de construcciones geométricas con regla y compás son recursos muy valiosos, los cuales bien direccionados podría contribuir a favorecer el aprendizaje. Esto podría permitir avanzar hasta llegar a la creación de formas más figurativas y simbólicas que faciliten la abstracción hasta llegar, en los últimos niveles, a establecer conjeturas y demostraciones.

Los diversos recursos tecnológicos con que se cuenta en la actualidad parece no ser una limitante y empleados sea de forma exclusiva o como complemento a otros podría contribuir con el diseño de estrategias metodológicas que favorezcan no solo la enseñanza. Es importante señalar que el empleo de la tecnología en el aula como herramienta didáctica, probablemente, logrará que las lecciones sean más amenas; sin embargo, no debe perderse de vista que lo fundamental es incitar el interés por un estudio más profundo de la Matemática, por tanto las situaciones que se propongan deben implicar un reto para los estudiantes.

Referencias Bibliográficas

Argudo, M. (2013). Las TIC y el aprendizaje de la Geometría. Recuperado de: http://dspace.ceu.es/bitstream/10637/5626/1/TFM_Argudo%20Ortiz,%20Marta.pdf

Camacho, M. y Santos, L. (julio, 2004). *Revista de Didáctica de las Matemáticas,* (37), Año X, 105-122, Editorial Grao.

Castiblanco, A. Urquina, H. Camargo, L. y Acosta, M. (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Recuperado de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf

Chamoso, J. García, J. y Rodríguez, M. (2011). Análisis de una experiencia de contenidos estadísticos con tecnología hipermedia para la formación de docentes. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Año 6. Número (8). Junio 2011.

Fernández, T. (2016). Atendiendo habilidades de visualización en la enseñanza de la geometría. Memoria del IX Festival Internacional de Matemática. Costa Rica. ISBN 978-9968-641-33-3.

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de la Matemática. Tecnologías digitales en la educación matemática. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 2. Número 3. CIMM/UCR.

Godino, J y Ruiz, F. (2002). Geometría y su didáctica para maestros. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf

Gómez, P (2000). Tecnología y Educación Matemática. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/319/1/GomezP97-1919.pdf ISSN: 2172-752x

Infantes, C. (2011). El video de como recurso didáctico. Recuperado de http://www.auladelpedagogo.com/2011/03/el-video-como-recurso-didactico/

Martín-Laborda, R. (2005). Las nuevas tecnologías en educación. Cuadernos/sociedad de la información (5). A una fundación. España. Recuperado de http://estudiantes.iems.edu.mx/cired/docs/ae/pp/fl/aeppflp11pdf01.pdf

Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de Estudio de Matemática. San José, Costa Rica.

Mora, W (1997). Ideas sobre la lección laboratorio asistida por computadora. Memoria del V Encuentro Centroamericano de Investigaciones en Matemáticas.

Ureña, W. (2006). Impacto de la tecnología en la educación. Recuperado de http://www.monografias.com/trabajos-pdf/impacto-tecnologia-educacion/impacto-tecnologia-educacion.pdf

TIC's para la Educación Matemática

M.Sc. Jesennia Ma. Chavarría Vásquez
Universidad Nacional de Costa Rica
jesenniach@gmail.com

M.Ed. Marcela García Borbón
Universidad Nacional de Costa Rica
magarcib@gmail.com

Resumen: En el presente trabajo se presentan algunos ejemplos de estrategias metodológicas, haciendo uso de las tecnologías para complementar el aprendizaje de las matemáticas, enfatizando en el uso de recursos tecnológicos a nivel de secundaria, tales como blogs didácticos, videos educativos y aula virtual.

En la exposición de este proyecto se propone un conjunto de elementos que puedan servir de guía para el diseño, elaboración y evaluación de proyectos a través del uso de las TIC's. Su finalidad es generar una reflexión en los docentes sobre la incorporación de las tecnologías en la educación matemática.

Palabras Claves: educación matemática, tecnologías de la información y la comunicación

Introducción

La incorporación de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación exigen el desarrollo de habilidades, destrezas y actitudes, por parte del docente y del estudiante, en tanto que, el primero requiere no solo un conocimiento adecuado de la tecnología como recurso didáctico, sino de habilidades de comunicación y ser selectivo con la información. Por otro lado, el estudiante debe desarrollar habilidades y destrezas metacognitivas y de procesamiento de información que lo lleven a apropiarse del conocimiento.

Lo anterior se fundamenta en teorías de aprendizaje no tradicionales, como la constructivista, en las cuales el estudiante adquiere un mayor protagonismo en su aprendizaje y el docente se convierte en un facilitador y orientador.

En el caso de la enseñanza de la matemática, esta se ha visto afectada en forma positiva por nuevas las tecnologías. Actualmente existen diferentes *software* sobre matemáticas, así como herramientas multimediales y tecnológicas que pueden ser utilizadas para complementar y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. Sin embargo, antes de utilizar estos medios, se debe considerar su uso adecuado y óptimo, con el propósito de generar aplicaciones multimedia de calidad que tomen en cuenta aspectos tan "simples" como la comunicación de un mensaje o tan "complejos" como aspectos técnicos o de programación.

Marco Teórico

Para la utilización de recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza y aprendizaje, es necesario considerar aspectos de importancia a nivel teórico, semiótico y de diseño, los cuales se detallan a continuación.

Inventario teórico y semiótico

Constituye la primera etapa en la utilización de un recurso multimedia; consiste en tener dominio del tema a desarrollar, así como conocimiento de los elementos semióticos que serán utilizados, es decir, se requiere de un análisis adecuado de las potencialidades de la comunicación.

En la transmisión y construcción de un determinado conocimiento, priva inicialmente la necesidad de comunicar las ideas, y que esta comunicación sea efectiva y eficaz. Esta necesidad conlleva a la comprensión del sistema de signos y de sus funciones que interactúan e intervienen en la aplicación multimedia desarrollada para aprender y enseñarle a un usuario, entendiéndose por signo "un estímulo cuya imagen mental está asociada en nuestro espíritu a la imagen de otro estímulo que ese signo tiene por función evocar con el objeto de establecer una comunicación." (Guiraud, 1976)

En el caso particular de utilización de recursos tecnológicos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se debe considerar el lenguaje propio de esta disciplina, dotado de procedimientos de significación y códigos no lingüísticos para su propia axiomática, en donde dichos códigos gozan de precisión. De esta forma, es fundamental revisar que la aplicación multimedia que se utilizará no presente ambigüedades en el uso del lenguaje.

Elementos para el diseño y elaboración de recursos didácticos utilizando tecnología

La utilización de tecnología para los procesos educativos, se asemejan a una investigación, en tanto es necesario tener claridad y dominio del contenido, establecer una metodología a utilizar y ser consciente que representa un proceso continuo de ajuste desde la elaboración y diseño, hasta la implementación.

Tal y como lo expone Valverde (2014), para la elaboración de material didáctico, se requiere tener claridad en el qué, a quién y para qué. De forma que se establece en el qué, el tema específico que se abordará con el material didáctico, es decir, el contenido que será objeto de narración o explicación a través del medio, y la factibilidad que posee dicho contenido de ser tratado a nivel multimedial. Asimismo, deben considerarse elementos como la valoración de los materiales y su impacto con el medio ambiente, el uso adecuado de imágenes y sonidos, que sean pertinentes al tema a tratar y no se constituyan en una distracción que vaya en detrimento del aprendizaje. Estas imágenes, sonidos y simbologías que se utilicen deben considerar el respeto a la diversidad y la equidad.

La selección del contenido puede realizarse, según Valverde (2014) a través de criterios como: los intereses personales del diseñador, la novedad o lo controversial del tema a tratar, el valor estético o artístico y el interés pedagógico o formativo, este último siendo el de mayor trascendencia.

Al referirse a quién, consiste en tener claro cuál es la población destinataria de la información. Esta población debe definirse de un modo genérico pero preciso, considerando aspectos como edad, curso, necesidades educativas, entre otros.

Finalmente, en cuanto al para qué, como cualquier proyecto, requiere desde el inicio haber determinado los objetivos y propósitos que se persiguen con el material multimedial. Este aspecto es trascendental porque define e impregna todo el proceso, desde el material multimedia a utilizar, hasta la forma en la cual se utilizará.

Una vez que se ha dado respuesta a la triada qué, quién y para qué, se continua con la elaboración de un diseño multimedia. Existen múltiples teorías sobre los elementos a considerar para el diseño de un material multimedia, que van desde la ergonomía, la paralingüística, la kinésica, la prosémica y la sinestésica, hasta el dominio de las leyes perceptivas o leyes de la forma que influyen directamente en nuestra visión y por ende en nuestra percepción de los objetos.

Para efectos de este estudio, no se profundizará sobre dichos elementos, no obstante serán abordados en distintos momentos de la elaboración del material didáctico. En este estudio se consideraron como pautas indispensables para el diseño de un recurso didáctico, contar con un inventario teórico y semiótico, con un guión didáctico y un guión técnico

Guión didáctico

El guion didáctico, consiste en un documento que acompaña al material audiovisual y que consta de los siguientes apartados, según lo establece (Valverde, 2014), Identificación, Contenido, Descripción, Análisis Didáctico, Orientaciones educativas y Materiales complementarios del producto.

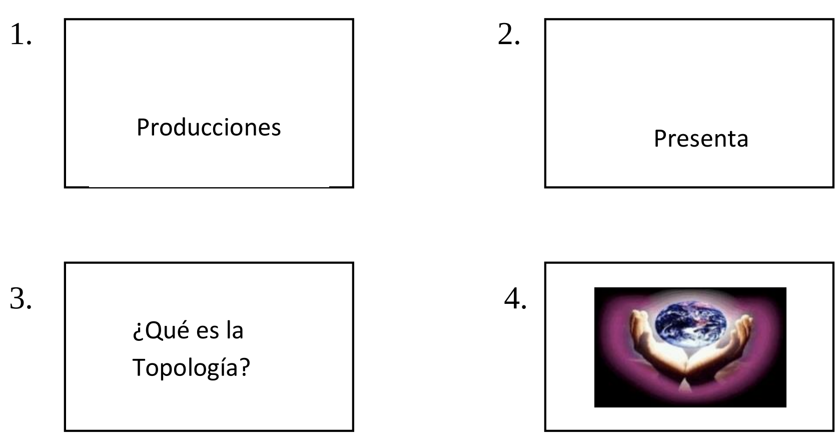
Identificación del producto refiere a las características administrativas del material didáctico, como son título, autores, duración del material, fecha de producción y formato. En cuanto al contenido del producto, la idea es incluir mapas conceptuales o mentales que describan el desarrollo del mismo. El análisis didáctico refiere a información sobre los destinatarios del audiovisual, definición y redacción de los objetivos educativos. Las orientaciones educativas, por su parte, consideran las sugerencias de actividades educativas previas y posteriores al uso del material, así como las sugerencias en evaluación. Los materiales complementarios, consisten en todos los materiales de consulta que puede utilizar el destinatario para enriquecer el proceso de utilización del material multimedia.

Finalmente, en lo que refiere a la descripción del producto, éste consiste en el guión técnico, el cual será detallado a continuación.

Guion Técnico

La construcción de un guión técnico demanda una descripción detallada de todas y cada una de las escenas del audiovisual, es decir, narra en forma visual el mensaje que se ofrecerá a través del producto audiovisual, e indica además, aspectos técnicos como tiempo, formato, personajes y detalles ambientales.

En primera instancia se establece un *boceto* del recorrido que haría un usuario del producto multimedia, es decir, se determina la forma de interacción del usuario con el contenido del proyecto. Esto se puede efectuar a través de un *story board*, que constituye un documento en el cual se muestra a grandes rasgos lo que acontecería pantalla por pantalla, a nivel de imagen y texto. Por ejemplo:



Fuente: Chavarría J. y Alfaro, C. (2008).
Producción de Multimedia: una experiencia en el campo de las matemáticas.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Número 4. San José, Costa Rica

Posteriormente, se indican los detalles técnicos en cuanto a la aparición de textos, imágenes, sonidos, videos, música y los efectos que puedan acompañar estos elementos, a este tipo de documento se le denomina guión técnico. Se puede establecer, por tanto, una analogía entre el guión técnico y la aplicación multimedia, de forma que el guión es a la aplicación como un algoritmo es al programa.

Una vez que se han escogido las imágenes y sonidos a utilizar, así como su utilización, se indican los tiempos de aparición de cada recurso y los efectos que permitirán enlazar cada uno. A continuación presentamos un extracto de un guión técnico.

Guion Técnico: La Topología y sus aplicaciones en la vida cotidiana			
Video	Tiempo	Audio	Tiempo
La pantalla tiene un fondo negro. **Entra Título "Producciones El Nudo" con efecto STP-Warp (Hollywood FX)**	0 - 4,27	Entra música Radio Ga Ga 1 en primer plano	0 - 4,27
La pantalla tiene un fondo negro. **Entra título "Presenta" con efecto Clock Wipe (alpha magic)**	4,27 – 8,26	Música pasa a segundo plano.	4,27 – 8,26

Fuente: Chavarría J, Alfaro C. (2008).
Producción de Multimedia: una experiencia en el campo de las matemáticas.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Número 4. San José, Costa Rica

Ejemplos de proyectos con el uso de las TIC's

Una vez analizados los elementos que deben considerarse para el diseño de recursos tecnológicos, nos proponemos compartir algunos ejemplos elaborados por los estudiantes del curso Recursos Didácticos para el Aprendizaje de las Matemáticas 2014 de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la UNA.

Elaboración de un video didáctico

Por medio de la herramienta tecnológica *Movie Maker*, así como de cámaras fotográficas o de video, los estudiantes elaboraron un video educativo de aproximadamente 8 minutos, cuyo propósito fue compartir historia y aportes de la Geometría Analítica así como incluir algunas construcciones haciendo uso del Geogebra.

El video se desarrolló siguiendo las tres etapas:

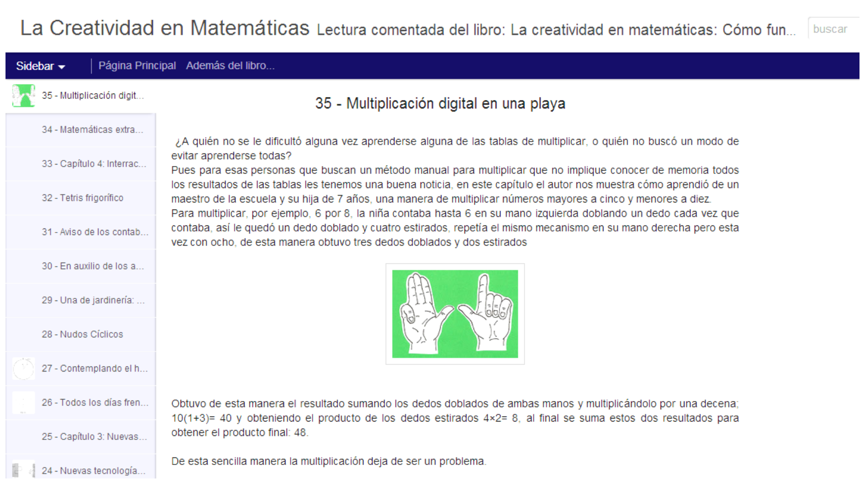
1. Diseño del guión didáctico
2. Diseño del guión técnico
3. Grabación y edición del video educativo.

Fuente: Video elaborado por estudiantes del curso Recursos didácticos para la Enseñanza de la Matemática, 2014

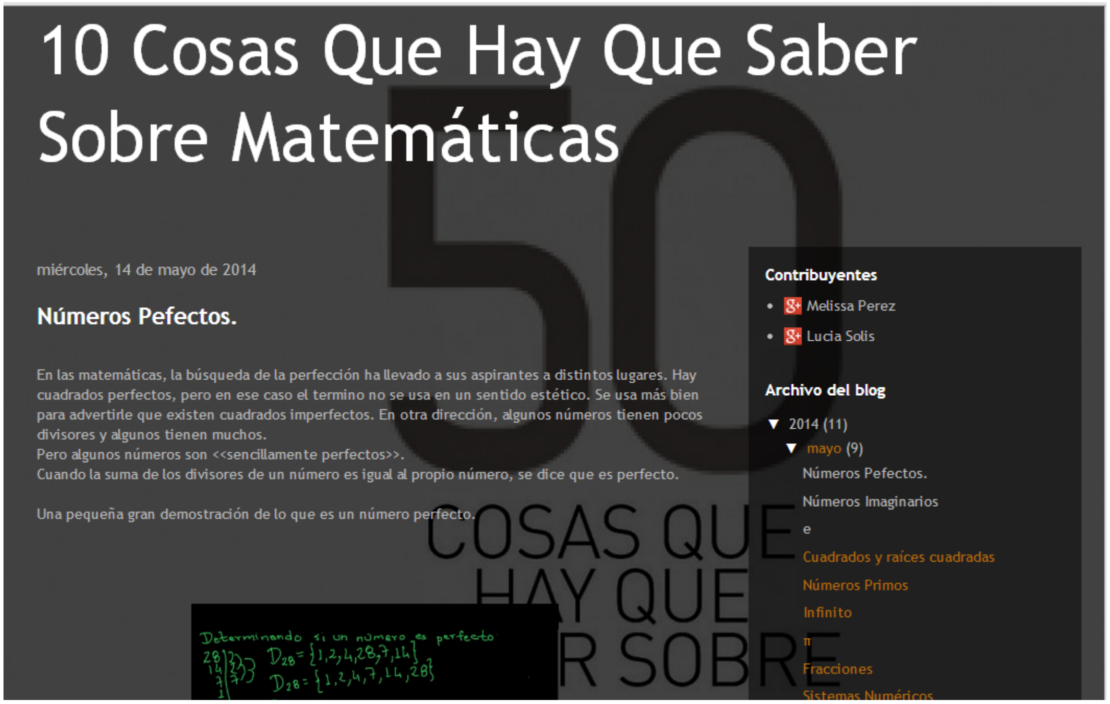
Blog educativo

El blog educativo consiste en una página en línea en la cual se puede incluir información escrita, compartir videos, enlaces, entre otros. La herramienta del blog exige que su creador actualice constantemente la información y mantenga un "diálogo virtual" con sus seguidores, de manera que esta se convierta en una ventana de acceso entre profesor y estudiantes, donde se puedan compartir no solo conocimientos matemáticos propios del programa de estudio, sino otros elementos interesantes alrededor de la matemática como historia, inventos, artículos, problemas relacionados con el contexto, entre otras.

Para este caso particular, haciendo uso de la herramienta tecnológica Blogger, los estudiantes de la carrera elaboraron diferentes blogs basados en libros que exponen la matemática de una manera práctica e histórica. Algunos de los libros en los que se basaron los estudiantes son: El Enigma de Fermat de Simon Sign, La Sorpresa de los Números: Un viaje al fascinante universo de las matemáticas de Anna Cerasoli, La burla de los sentidos: El arte visto con ojos matemáticos de Francisco Martín Casalderrey, entre otros. El objetivo del blog consistió en fomentar la lectura en los estudiantes –como futuros educadores– y desarrollar la capacidad de síntesis, de manera que pudieran compartir, la información con la comunidad académica, de una forma didáctica.



Fuente: http://lacreatividadenmatematicas.blogspot.com/2013/06/29-una-de-jardineria-el-triangulo.html

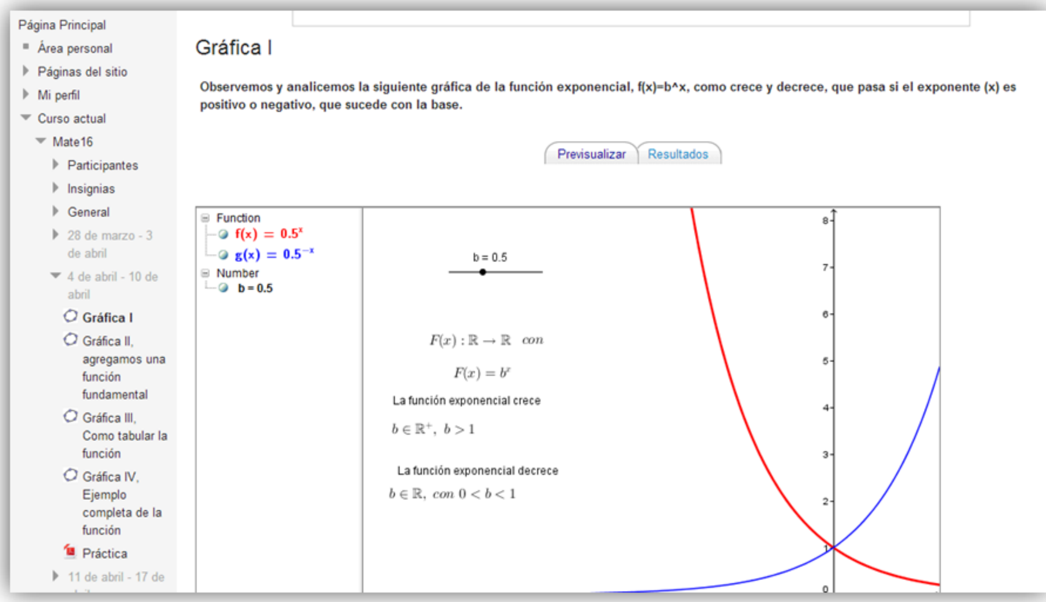


Fuente: http://10cosassobrematematicas.blogspot.com/

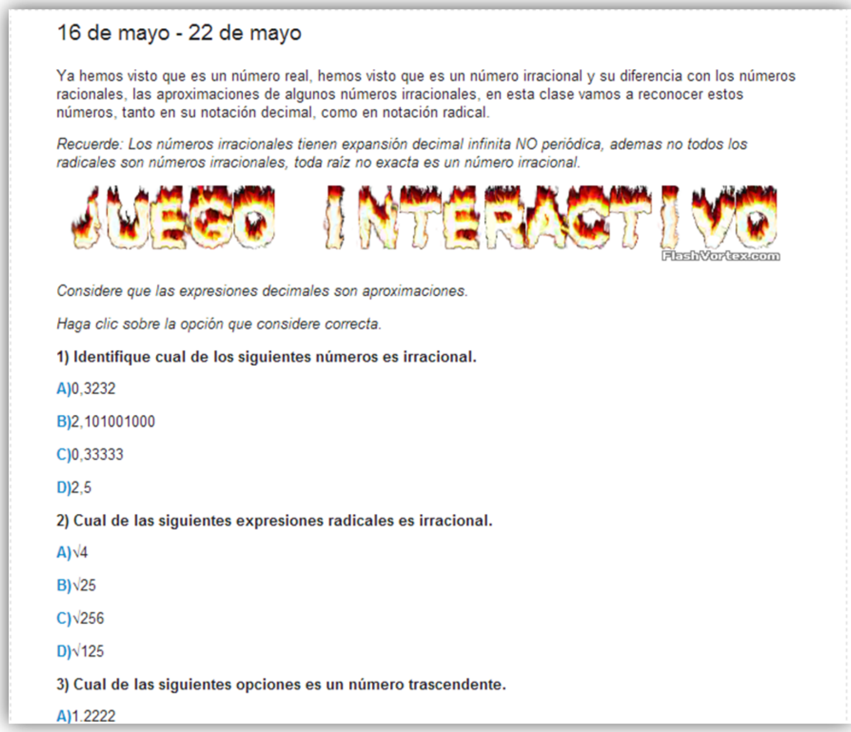
Aula virtual

El aula virtual es una herramienta tecnológica que potencia el e-learning en todas sus dimensiones. Constituye un amplio espacio didáctico que puede ser aprovechado por todo educador para complementar las diferentes temáticas en estudio y evaluarlas. Así, el aula virtual ofrece espacios como chats de dudas, foros de discusión donde el estudiante participa activamente. También, permite "subir" videos, documentos en Word o PDF, mapas conceptuales, gráficas y prácticas elaboradas en Geogebra que complementen el estudio de determinado tema y contiene herramientas como cuestionarios que el estudiante puede completar en línea y que le permiten al docente conocer el rendimiento de forma inmediata.

Como ejemplo, los estudiantes de la carrera (en subgrupos) elaboraron sus aulas virtuales haciendo uso de la herramienta tecnológica gear.milaulas.com (https://gear.milaulas.com/login/index.php) basándose en el desarrollo de un contenido específico de secundaria. Así, asumiendo la figura de docente de un nivel educativo de secundaria, consideraron las habilidades establecidas en los programas del MEP, plantearon diferentes propuestas metodológicas y de evaluación haciendo uso de las herramientas del aula virtual según el nivel educativo, durante cuatro semanas.



Fuente: Aula virtual elaborada por estudiantes del curso Recursos Didácticos para el aprendizaje de la Matemática, 2014



Fuente: Aula virtual elaborada por estudiantes del curso Recursos Didácticos para el aprendizaje de la Matemática, 2014

Conclusiones

A pesar de que existen diversos software y herramientas tecnológicas para facilitar el aprendizaje de la matemática, éste no se dará en una forma óptima sino se consideran los elementos expuestos a lo largo de este artículo; elementos que permiten una mejor organización y planificación del contenido.

Por otro lado, es de fundamental importancia, que el docente de matemática tenga conocimiento de los recursos tecnológicos disponibles, sus alcances y la mejor forma de utilizarlos. De forma, que estos recursos, no sólo faciliten el aprendizaje sino que creen un vínculo generacional entre el docente y los estudiantes.

En la actualidad, los docentes deben ser receptivos a la utilización de recursos tecnológicos y dejar a un lado las resistencias que puedan generarse, principalmente en función de estudiantes nativos de la era de la información y comunicación, que cuentan con un lenguaje y uso de tecnología innato y que demandan ese estilo de aprendizaje del sistema educativo.

De esta forma, como docentes, debemos ser capaces de tomar riesgos y explotar nuestra creatividad en pro del aprendizaje de nuestros estudiantes. A pesar de que no somos especialistas en el campo de la tecnología, somos parte fundamental del proceso educativo, lo que nos obliga e insta a capacitarnos y formar parte de equipos multidisciplinarios en los cuales se promueva el diseño y producción de materiales didácticos con uso de la tecnología.

Referencias Bibliográficas

Bou, G (1997). El guión Multimedia. Editorial ANAYA Multimedia, S. A y la Universitat Autónoma de Barcelona, Madrid-España.

Guiraud, P (1976). La Semiología. Editorial Siglo Veintiuno editores, SA, México DF.

Valverde, J. (s.f.). Pautas para la elaboración de un material educativo multimedia. Disponible en: http://www.unex.es/didactica/Tecnologia_Educativa/guion02.htm

Una experiencia de aprendizaje en el marco de los planteamientos del NCTM

Dra. Annia Espeleta
Facultad de Educación
Universidad de Costa Rica
annia.espeleta@gmail.com

Licda. Wendy Zamora Monge
Facultad de Educación
Universidad de Costa Rica
wendy.zamoracr@gmail.com

Resumen: Se presenta una experiencia desarrollada con estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica y una docente del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). La fundamentación teórica de dicha actividad considera lo postulado en el documento *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*, considerado como contenedor de la filosofía que respalda el deber ser de la Educación Matemática en todos los niveles educativos. Entre los resultados se evidencia que una forma de aprender estrategias didácticas es vivenciándolas y reflexionando sobre su puesta en práctica.

Palabras clave: estrategias didácticas, Educación Matemática, mediación pedagógica, procesos de enseñanza y aprendizaje, didáctica de la Matemática.

Introducción

El presente artículo describe una experiencia de aprendizaje, realizada con estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica. La misma estuvo a cargo de la Dra. Trena Wilkerson, y se llevó a cabo en marzo del 2015. La Dra. Wilkerson es miembro del National Council of Teachers of Mathematics, y ofreció el taller *Prácticas Efectivas en Enseñanza de la Matemática que favorecen el aprendizaje de los estudiantes*, con el fin de exponer e implementar estrategias didácticas efectivas para la enseñanza de esta disciplina y otros tópicos.

Dicha actividad forma parte de un proyecto de investigación mayor, acerca de estrategias didácticas en Matemática. Se implementó entre otras razones, con el fin de conocer estrategias didácticas acerca de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática y también de conocer acerca de otros elementos vinculados con la aplicación de estrategias didácticas en la clase de Matemática.

Los planteamientos del National Council of Teachers of Mathematics a continuación se describen.

Enseñanza eficaz de la Matemática: planteamientos del National Council of Teachers of Mathematics

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2015) plantea una lista de ocho prácticas de enseñanza de la disciplina que identifican lo que se denomina una educación matemática de alta calidad, concebidas a partir de la revisión de experiencias de docentes con varios años de servicio y de investigaciones científicas. A continuación se detallan dichas prácticas.

1. Establecimiento de metas matemáticas enfocadas en el aprendizaje

En el documento *De los principios a la acción*. P*ara garantizar el éxito matemático para todos* del NCTM se señala que la "Enseñanza eficaz de las matemáticas comienza con una comprensión compartida entre los maestros sobre las matemáticas que los estudiantes están aprendiendo y la manera en que éstas se despliegan a lo largo de desarrollos de aprendizaje. Tal comprensión compartida incluye la clarificación de metas matemáticas más amplias, mismas que guían la planificación basada en unidad por unidad, así como las metas matemáticas más específicas que orientan las decisiones educativas, basadas en lección por lección. El establecimiento de metas claras no sólo guía las decisiones de los docentes durante una lección, sino también centra la atención de los estudiantes en el seguimiento de su propio progreso hacia los resultados de aprendizaje propuestos." (NCTM, 2015, p.13)

2. Implementación de tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas

"La enseñanza eficaz de las matemáticas involucra a los estudiantes en tareas de resolución y análisis, las cuales promueven el razonamiento matemático y la resolución de problemas, además de que permiten que haya múltiples maneras de abordar los problemas y existan estrategias de resolución variadas… Para garantizar que los alumnos tengan la oportunidad de comprometerse con un pensamiento de alto nivel, los docentes deben seleccionar e implementar en forma regular tareas que estimulen el razonamiento y la resolución de problemas. Dichas tareas alientan el razonamiento y el acceso a las matemáticas mediante diversas formas de abordar los problemas, que incluyen la utilización de variadas representaciones y herramientas, así como la resolución de problemas a través de diferentes estrategias de solución." (NCTM, 2015, p.18).

3. Uso y vinculación de las representaciones matemáticas

"La enseñanza eficaz de las matemáticas obliga a los estudiantes a establecer conexiones entre representaciones matemáticas para profundizar el entendimiento de conceptos y procedimientos matemáticos, así como para concebir a ambos como herramientas para la resolución de problemas… Cuando los estudiantes aprenden a representar, analizar y hacer conexiones entre las ideas matemáticas de múltiples formas, demuestran un entendimiento matemático más profundo, así como el progreso de sus habilidades para resolver problemas." (Fuson, Kalchman y Bransford 2005; Lesh, Post y Behr, 1987; en NCTM, 2015, p.25).

4. Favorecimiento del discurso matemático significativo

"La enseñanza eficaz de las matemáticas promueve el diálogo entre los estudiantes a fin de que puedan construir una comprensión compartida de las ideas matemáticas a través del análisis y comparación de enfoques y argumentos… La enseñanza eficaz de las matemáticas compromete a los estudiantes con la elaboración de un discurso, de modo que toda la clase avance en el aprendizaje matemático. El discurso matemático incluye el intercambio deliberado de ideas mediante el análisis grupal y a través de otras formas de comunicación: verbal, visual y escrita." (NCTM, 2015, p.30).

5. Planteamiento de preguntas deliberadas

"La enseñanza eficaz de las matemáticas se apoya en plantear preguntas que estimulen a los estudiantes a explicar y reflexionar sobre su propio pensamiento, lo cual representa un componente esencial del discurso matemático significativo. Las preguntas deliberadas permiten a los docentes discernir lo que los estudiantes saben a fin de adaptar las lecciones para alcanzar diversos niveles de comprensión; asimismo ayudan a los estudiantes a efectuar conexiones matemáticas importantes y los apoyan para que planteen sus propias preguntas. No obstante, el sólo hecho de plantear preguntas no resulta suficiente para garantizar que los alumnos le den sentido a las matemáticas y para que hagan progresos en su razonamiento. Deben tomarse en cuenta dos aspectos fundamentales: los tipos de preguntas que los maestros plantean y el modelo de cuestionamiento que usen." (NCTM, 2015, p.37).

6. **Elaboración de la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual**

   "Una enseñanza de las matemáticas efectiva logra la fluidez en los procedimientos basados en la comprensión conceptual, de manera que los estudiantes, con el tiempo, se vuelvan hábiles en el empleo flexible de procedimientos, a medida que resuelven problemas contextuales y matemáticos." (NCTM, 2015, p.43).

7. **Favorecer el esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas**

   "La enseñanza eficaz de las matemáticas apoya a los estudiantes en sus esfuerzos productivos conforme están aprendiendo matemáticas. Dicha enseñanza adopta una concepción de los esfuerzos de los estudiantes como oportunidades para ahondar más en la comprensión de la estructura matemática de los problemas y de las relaciones entre ideas matemáticas, en vez de buscar sencillamente soluciones correctas." (NCTM, 2015, p.49).

8. **Obtener y utilizar evidencias del pensamiento de los estudiantes**

   "Una enseñanza eficaz de las matemáticas utiliza evidencia del pensamiento del estudiante para evaluar el progreso en la comprensión matemática y para adecuar continuamente la enseñanza en formas que apoyen y extiendan el aprendizaje." (NCTM, 2015, p.54).

Considerar y propiciar la aparición de las ocho características anteriores en las acciones docentes realizadas en el aula, favorece procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática más inclusivos y encaminados al éxito para todos los estudiantes, de ahí que resulte oportuno tomarlas en consideración a la hora de gestionar estrategias, técnicas y actividades didácticas (NCTM, 2015).

Metodología

La presente investigación se concibe como investigación aplicada debido a la naturaleza del fenómeno a investigar, ya que se desarrolla un taller de estrategias didácticas aplicadas a la clase de Matemática. Se considera metodología cualitativa aquella que "produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable" (Quecedo y Castaño, 2003, p.7). Lo anterior con el fin de profundizar en el análisis de los datos recabados y en la discusión e interpretación que tienen sobre esta temática las personas participantes.

El acercamiento del presente trabajo es del tipo investigación acción, en función de que los participantes involucrados reflexionan acerca de las prácticas de aula. Tal y como afirma Elliot (1993, en Latorre, 2005)

> La reflexión sobre la práctica revela la teoría inherente a la misma y permite teorizar sobre la práctica. Esta idea supone un cambio crucial: el profesorado puede investigar sus propuestas educativas y construir valiosas teorías de su práctica. (p.14)

Para la recolección de los datos se utiliza la técnica observación no participante.

Respecto a la observación no participante, Chávez (2000) señala que es aquella en la que el investigador es ajeno al grupo, solicita autorización para permanecer en él, y observar los hechos que requiere.

Se decide trabajar con esta técnica de recolección de datos pues la misma permite la interpretación y descripción de las situaciones desarrolladas.

La investigación se desarrollará con un grupo de estudiantes en formación que serán docentes de Matemática, debido a que las investigadoras son docentes de esta carrera, dicha investigación se lleva a cabo para mejoras en su labor profesional, parte de una investigación en el Instituto de Investigación en Educación (INIE).

En la siguiente tabla se presentan los sujetos participantes en la investigación, las técnicas de recolección de la información implementadas con éstos, una breve descripción de lo que se hizo con dichas técnicas, las categorías de análisis que se utilizarán en el análisis de los datos recolectados y los principales hallazgos con cada técnica efectuada.

Descripción del procedimiento de recolección de datos

SUJETOS PARTICIPANTES	TÉCNICA DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN	¿QUÉ SE HIZO?	DISCUSIÓN	ELEMENTOS A ATENDER EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES DE MATEMÁTICA
ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA DE LA UCR, CON LA DRA T. WILKERSON (2015).	Aplicación Investigación Acción	La Dra. Wilkerson, ofrece el taller “Prácticas Efectivas en Enseñanza de la Matemática que favorecen el aprendizaje de los estudiantes” con el fin de exponer, discutir e implementar estrategias didácticas efectivas para la enseñanza de esta disciplina y otros tópicos.	Elementos vinculados con la aplicación de estrategias didácticas en la clase de Matemática.	Control de la organización de la clase. Papel de los estilos de aprendizaje. Papel de la afectividad de los estudiantes en su aprendizaje. Características propias de los grupos. Papel de los años de experiencia del docente.

Acerca de la Dinámica del Taller

La Dra. Wilkerson comparte un conjunto de técnicas didácticas entre los y las participantes en el Taller.

Con apoyo de una presentación de Power Point se señala a los y las participantes que en el desarrollo de las clases de Matemática, los y las docentes deben plantear situaciones a su estudiantado, darles tiempo para pensarlas y luego compartirlas con la persona que está al lado y luego con todo el grupo. Al tiempo que plantea a los y las participantes las siguientes interrogantes: ¿Qué es lo que ustedes han experimentado en un colegio o que han observado en otros profesores como una práctica efectiva para dar clases en matemáticas? ¿Cuáles son características de una buena enseñanza de la matemática?, y otorga un tiempo prudencial para que piensen en las respuestas, las compartan con sus compañeros(as) inmediatos(as) y posteriormente, al resto del grupo. Esta dinámica se sigue a lo largo del Taller, en cada una de las preguntas y re-alimentaciones planteadas por la Dra. Wilkerson.

Los y las estudiantes siguen atentos(as) los planteamientos, preguntas y consideraciones de la facilitadora y conforme se avanza en la dinámica del Taller se logra observar no sólo el involucramiento de los y las estudiantes, sino también la vivencia de sí la técnica les parece efectiva o no.

Como respuestas a las primeras dos interrogantes, los y las estudiantes señalan que: "-Enseñar, practicar y ver aplicaciones. -Ver de las aplicaciones, de lo que se ve en la realidad, crear Matemática. -Tratar de pasar de lo inductivo a lo deductivo".

A lo que la Dra. Wilkerson señala que "Es una forma correcta de acercarse a la matemática. Primero pienso en la aplicación y luego cómo me devuelvo a la matemática pura. Eso genera la pregunta ¿Deberíamos comenzar con una aplicación y luego pensar en matemática? o ¿Empezar matemática y llevo a la aplicación?"

La respuesta de los y las estudiantes no contesta dicha interrogante, pero sí pone en evidencia algo que es necesario de tomar en cuenta en el ejercicio docente "Por el miedo que se le tiene a la matemática, se tiene que tener buena actitud, tanto hacia la materia como hacia el estudiante."

Lo cual es confirmado por la Dra. Wilkerson al señalar que "Ese es el reto del profesor, hacer que al estudiante le guste la matemática tanto como nos gusta a nosotros, o por lo menos un estudiante que venga a la próxima clase. En los Estados Unidos los récords que tienen es que a los niños les gusta la matemáticas, desde pequeños, luego cuando son adolescentes no tanto. ¿Pasa lo mismo aquí?"

Los y las estudiantes de igual modo señalan que "Si, luego cuando llegan a la universidad no soportan ni el contacto. Buscan carreras que no tengan nada que ver con las matemáticas."

A lo que la Dra. Wilkerson señala que "Su gran meta entonces, es hacer una persona que aprecie las matemáticas y que sepan que es importante para ellos. ¿Cómo se hace esto? Un principio de la organización que está aquí [NCTM], es que una enseñanza efectiva de la matemática requiere un conocimiento claro de que los estudiantes saben o por lo menos necesitan saber, además lo importante que debe ser, o el reto que significa apoyarlos para que lo aprendan bien. ¿Cómo hacemos para asegurarnos de que aprendan bien matemática pero que les damos un soporte correcto durante todo ese proceso? ¿Qué es lo que tengo que saber yo como profesor para ser un profesor efectivo? *(Se les pide a los estudiantes que respondan de manera inmediata a la pregunta anterior, lo primero que piensan).* ¿Técnicas didácticas? ¿Disciplina? ¿Amar la matemática? Si a ustedes no les gusta realmente lo que están enseñando, a los estudiantes tampoco les gustará. ¿Hay alguna de la rama de la matemática que más le guste, que más le llame la atención?"

Los y las estudiantes contestan: -Análisis. -Geometría. -Trigonometría.

La Dra. Wilkerson señala "Cuando ustedes enseñan esas ramas, cada uno ¿Lo enseñan con pasión?"

Los y las estudiantes responden -Los estudiantes lo notan. -Hasta le parecen más fáciles.

La Dra. Wilkerson señala "¿Ustedes van a enseñar casi siempre lo que más les gusta? Pero ustedes si necesitan tener el mismo entusiasmo cuando enseñan a los estudiantes esas otras ramas que no les gustan tanto. Eso es ser como un actor, una actriz, por lo menos algunas veces. Alguien mencionó anteriormente que se debe manejar bien la teoría, tener buenos contenidos. Buenas estrategias, mejores recursos para el aula. Tener un ambiente que atrae. Tiene que ver con disciplina y como los profesores manejan a los estudiantes. Pero tiene que ir más allá, no es solo disciplina, y como el estudiante no sólo trabaja con el profesor, sino como logra conectar con los compañeros *(Se invita a leer la Página 4 del documento que tienen a mano)* Vamos a ver algunas de las prácticas que están en el folleto, yo voy a hacer algunas preguntas, ustedes también pueden preguntar de vuelta."

Durante el tiempo restante en el Taller la Dra. Wilkerson siguió la dinámica de preguntas y socialización de respuestas. Asimismo, implementó algunas actividades cortas donde se abordaron problemas matemáticos, interrogantes acerca de lo pedagógico, didáctico y curricular, además de responder a interrogantes de los y las participantes en el Taller.

Conclusiones

Los estudiantes que serán docentes manifestaron necesidad de vivenciar estrategias didácticas y expresaron satisfacción por tener experiencias con la aplicación de estrategias desarrolladas en el taller con la Dra. Wilkerson, pues en el mismo se entró en detalle sobre elementos necesarios para la práctica en la Enseñanza de la Matemática, tales como:

- Establecer metas matemáticas centradas en el aprendizaje. Una enseñanza efectiva de las matemáticas establece metas matemáticas claras de lo que están aprendiendo los estudiantes sitúa las metas en una progresión de aprendizaje, y utiliza dichos objetivos para guiar las decisiones instruccionales.
- Implementar tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas. La enseñanza efectiva de las matemáticas involucra a los estudiantes en actividades que implican resolver y discutir, aquellas que promueven el razonamiento matemáticas y la resolución de problemas, y que permiten que emerjan múltiples maneras de abordar los problemas y una variedad de estrategias de resolución.
- Usar y relacionar representaciones matemáticas. La enseñanza efectiva de las matemáticas motiva a los estudiantes a hacer conexiones entre diferentes representaciones matemáticas para profundizar en la comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos, y como herramienta para la resolución de problemas.
- Facilitar un discurso matemático significativo. La enseñanza efectiva de las matemáticas promueve el diálogo entre los estudiantes, para que ellos puedan construir una comprensión compartida de ideas matemáticas, a través del análisis y comparación de los enfoques y argumentos.
- Poner preguntas con un propósito. Una enseñanza efectiva de las matemáticas utiliza preguntas con el propósito de evaluar y mejorar el razonamiento del estudiante y hacer sentido de ideas y relaciones matemáticas importantes.
- Lograr competencias procedimentales desde la comprensión conceptual. Una enseñanza de las matemáticas efectiva logra destrezas en procedimientos matemáticos basándose en la comprensión conceptual, de manera que los estudiantes, en el tiempo, se vuelvan hábiles usando procedimientos flexiblemente, a medida que resuelven problemas contextuales y matemáticos.
- Apoyar el esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una enseñanza de las matemáticas efectiva brinda consistentemente a los estudiantes oportunidades individuales y colectivas, y apoyo necesario para que se involucre en discusiones productivas a medida que se enfrentan con ideas y relaciones matemáticas.

- Obtener y usar evidencias del pensamiento de los estudiantes. Una enseñanza de las matemáticas efectiva utiliza evidencia del pensamiento del estudiante para evaluar el progreso de comprensión matemática y ajustar continuamente la enseñanza de la forma que apoye y extienda el aprendizaje.

Esta discusión llevó a considerar las estrategias didácticas en la planificación de la clase de Matemática como el medio que permite lograr aprendizajes en los estudiantes. Aunque la conceptualización de las estrategias didácticas no sea conocida, éstas tienen un significado entre los docentes que las vinculan con el trabajo de aula y lo que se ha aceptado como clases de Matemática.

Tradicionalmente se asocia a la Matemática con una disciplina difícil, en la que no todos logran obtener buenos resultados o buen rendimiento, parte de las creencias con las que tiene que trabajar el docente. Se debe desarrollar el gusto o motivación por el aprendizaje de la Matemática, eso es tarea de los y las docentes de Matemática.

En la formación docente se podría trabajar la creatividad para desarrollarla en la utilización de estrategias didácticas, una forma es experimentándolas en las mismas clases para así valorarlas en cuanto a su alcance, disfrute, posibilidades y logros, pero también para mejorarlas. Asimismo, es necesario aprender cuáles estrategias didácticas podrían ser idóneas o pertinentes para los objetivos o logros de los aprendizajes esperados, aspecto que se valoró en el Taller.

Se sugiere fortalecer la formación de docentes implementando estrategias didácticas y abrir espacios para el intercambio de experiencias con los docentes en formación y en servicio.

Referencias Bibliográficas

Chávez, D. (2000). Conceptos y técnicas de recolección de datos en la Investigación Jurídico Social. Recuperado de www.une.edu.py/maestriacs/tecnicas_de_recoleccion_de_datos.pdf

Latorre, A. (2005). La investigación acción. Conocer y cambiar la práctica educativa. (3a ed.). Barcelona: Graó.

National Council of Teachers of Mathematics (2015). De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos. Estados Unidos: NCTM.

Quecedo, R. y Castaño, C. (2003). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. *Revista de Psicodidáctica*, (14), 5-40. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=17501402

Una forma alternativas de hacer cuentas: Algoritmos Abiertos Basados en Números

Veronica Albanese
Universidad de Granada
vealbanese@ugr.es

Natividad Adamuz-Povedano
Universidad de Córdoba
nadamuz@uco.es

Rafael Bracho-López
Universidad de Córdoba
rbracho@uco.es

Resumen: Presentamos los algoritmos alternativos ABN (Abiertos Basados en Números) dentro de una tipología de algoritmos llamados transparentes, porque en ellos se deja ver qué está pasando. Estos son flexibles y se adaptan a las capacidades y nivel de desarrollo del aprendiz. Permiten realizar las cuentas *con sentido* basándose, y a la vez desarrollando, el cálculo mental. En el taller trabajaremos los contextos de los problemas aditivos, los algoritmos para la suma y resta y la invención de problemas.

Palabras clave: Cálculo mental, algoritmos ABN, sentido numérico.

Introducción

En este documento describimos el taller de iniciación al método ABN (Martínez, 2008) para la formación de maestros de educación primaria.

El método ABN se basa en un enfoque educativo por competencias que insiste en el saber-hacer de modo que considera la resolución de problemas como el foco central del proceso de aprendizaje de la matemática.

Ser competente en matemática en una sociedad donde la tecnología prima en todos los sectores de la vida requiere un cambio de perspectiva respecto al aprendizaje memorístico y procedimental que permitía resolver operaciones complejas con lápiz y papel pero no fomentaba la agilidad mental en el cálculo. Hoy en día estas operaciones complejas se realizan con calculadoras u otras herramientas tecnológicas mientras el aprendizaje tiene que mirar al desarrollo de técnicas y estrategias para el cálculo mental en operaciones relativamente no tan complejas y la estimación de resultados cuya precisión se alcanza después recurriendo a los medios tecnológicos.

La clave del método ABN es el desarrollo de algoritmos alternativos Abiertos Basados en Números (de aquí la sigla ABN). Estos algoritmos pretenden sustituir las operaciones tradicionales por otros formatos más asequibles y que producen un mayor grado de competencia matemática.

A diferencia de los algoritmos tradicionales, estos están *basados en números* porque no trabajan con las cifras, desligándolas de su valor posicional, como sucede en los algoritmos tradicionales, sino que en todo momento se concibe el número en relación con su significado cuantitativo. Esto permite a los discentes incorporar facetas del sentido numéricos como la percepción de la magnitud de los números y la adquisición de destrezas para estimar.

Los algoritmos se denominan *abiertos* porque no hay una forma única y unívoca de realizar los pasos. Dado que los algoritmos se basan en la descomposición y composición de los números, cada estudiante puede elegir trabajar con los números de la forma que se sienta más cómodo (por ejemplo, más o menos pequeños). Esta característica hace que los algoritmos se adapten fácilmente al nivel de desarrollo del estudiante, respetando la diversidad del alumnado y de alguna forma facilitando la inclusión (Adamuz-Povedano y Bracho-López, 2014) ya que se rompe con la idea de ser válido o no para las matemáticas.

Relevancia

El aprendizaje de estos algoritmos alternativos se basa en el conocimiento profundo del sistema de numeración decimal y sobre la utilización constante de la composición y descomposición de los números combinada con las propiedades de las operaciones (Martínez, 2010). Estas características permiten el desarrollo de estrategias de cálculo que resultan muy provechosa también en el cálculo mental y la estimación.

Debido a todas estas ventajas en numerosos colegios españoles, sobre todo de Andalucía y Cataluña, pero también de otras comunidades autónomas y en otros países, se ha adoptado o se está dando el paso hacia este método. En algunas regiones, como la de Córdoba, ya se está trabajando desde las administraciones públicas a través del Centro de Formación del profesorado (son los centros en los que los profesores pertenecientes a la escuela pública realizan su la formación continua) y de la Universidad (Lucena-Rubio, Adamuz-Povedano, Bracho-López, y Albanese, 2015). La decisión sobre el cambio metodológico debe ser tomada por el conjunto de docentes del centro ya que implica a todos los cursos. Se empieza en preescolar y primeros cursos de educación primaria con una metodología sistemática basada en el uso de recursos manipulativos didácticos, que permita al alumnado desarrollar un conocimiento profundo y flexible sobre la numeración, continuando con la introducción paulatina del algoritmo escrito en todos los cursos de educación primaria.

En investigaciones realizadas en centros donde los niños y niñas trabajan con los algoritmos ABN se ha observado que la competencia matemática desarrollada por este alumnado es mayor que la desarrollada por niños y niñas que trabajan con algoritmos tradicionales (Bracho-López, Gallego-Espejo, Adamuz-Povedano, & Jiménez-Fanjul, 2014). Al mismo tiempo se ha observado que estos niños y niñas desarrollan grandes habilidades en el cálculo mental y mejoran sus habilidades de estimación.

Por otro lado, cabe destacar otro hallazgo importante y es que en los centros donde se trabaja con algoritmos ABN se ha mostrado un crecimiento efectivo de la motivación y un cambio favorable de actitud hacia la matemática, tanto por parte del alumnado como por parte del profesorado.

Resolución de problemas y Algoritmos ABN

Los problemas aritméticos son aquellos que presentan en su enunciado datos en forma de cantidades y establecen entre ellos relaciones de tipo cuantitativo y para resolverse es necesaria la realización de operaciones aritméticas. Son a los que más tiempo se les dedica en la etapa de educación primaria.

Siguiendo a Echenique (2006) se clasifican en problemas aritméticos de primer, segundo, o tercer nivel teniendo en cuenta el número de operaciones que es necesario utilizar para su resolución. Dentro de los problemas de primer nivel encontramos los problemas de estructura aditiva (suma y resta) se presentan en diferentes contextos donde las tres cantidades juegan roles diferentes, independientemente del lugar donde se encuentra la incógnita. Así, podemos encontrar:

- **Problemas de cambio:** Se identifican porque en el texto del enunciado incluyen una secuencia temporal. Parten de una cantidad inicial, la cual se ve modificada en el tiempo, para dar lugar a otra cantidad final. También se conocen como problemas ETE (Estado-Transformación-Estado).
- **Problemas de combinación:** En su enunciado se describe una relación entre dos conjuntos P1 y P2, que unidos forman el todo. La pregunta del problema hace referencia a la determinación de una de las partes o del todo.
- **Problemas de comparación:** Son aquellos en los que en su enunciado se está estableciendo alguna comparación (con más que o menos que). Tenemos una cantidad de referencia, una diferencia y una cantidad comparada.

A continuación presentamos algunos ejemplos de problemas aditivos-sustractivos que resolveremos usando algoritmos ABN.

Problema 1)

Para llegar desde Limón a San José hay que recorrer 159 km y desde San José a Puntarenas hay 95 km. Si estoy en el congreso de Limón para volver a mi casa en Puntarenas, ¿cuántos kilómetros tendré que recorrer?

Se trata de un problema de combinación, en el que nos dan dos partes de un conjunto y nos piden el total, se resuelve con una suma: 159+95.

MUEVO	**159**	**95**
100	59	195
5	54	200
54	0	254

MUEVO	**159**	**95**
1	160	94
40	200	54
54	254	0

Figura 1. Algoritmo ABN para la suma: dos formas de realizar 159+95.

Matemáticamente el algoritmo se basa en la propiedad asociativa de la suma. En la práctica lo que hacemos es ir *moviendo* cantidades diversas de un lado para otro (en el primer ejemplo de izquierda a derecha, en el segundo de derecha a izquierda, según la dirección de la flecha), la cantidad que se mueve se pone en la primera columna, y se va substrayendo de lado donde se quita y sumando al lado donde se añade. Vemos así como obtenemos resultados parciales hasta conseguir 0 por un lado, es decir, hemos "juntado" todo en uno de los sumandos. La elección de la cantidad a mover depende completamente de quien realiza el algoritmo. Por ejemplo, se puede elegir ir completando a la decena o centena más cercana (lo que denotaría que el estudiante tendría adquiridas ya ciertas estrategias convenientes al cálculo) o ir moviendo la unidad de más alto grado. También se podría haber elegido mover cantidades más pequeñas y entonces realizar más pasos. En resumen, hay muchas formas de hacerlo, pero todas válidas para llegar al resultado. Este hecho es muy importante porque refuerza la autoestima del alumnado.

Sin lugar a dudas, la puesta en común con el grupo clase de las diferentes formas de hacerlo, da opción al docente una oportunidad magnífica de enriquecimiento ya que puede ir destacando aquellos pasos más convenientes o los que nos "reducen" el camino.

En el caso de la resta existen distintas interpretaciones o modelos que nos llevan a implementar diferentes algoritmos en ABN. Así podemos encontrar:

- Resta como diferencia
- Resta como comparación
- Resta como cuánto me falta para llegar a.

Problema 2)

El X Censo Nacional de Población de Costa Rica del 2011 se reportan los siguientes datos sobre las poblaciones de los territorios indígenas: Los Bribris son 12 785, los Cabécares son 12 707. ¿Cuántos Bribris más hay que Cabécares?

Es un problema de comparación, que se resuelve con una operación de resta: 12785-12707.

Como hemos mencionado antes, el algoritmo ABN nos da opción de realizar cuatro tipos de resta: detracción, comparación, escalera ascendente y escalera descendente. La elección de cada uno de estos tipos va a venir determinada por el contexto del problema. En este caso lo realizaremos por detracción.

QUITO	QUEDA	QUEDA
	12 785	12 707
10000	2 785	2 707
2000	785	707
700	85	7
5	80	2
2	78	0

Figura 2. Algoritmo ABN para la resta.

Matemáticamente lo que se aplica es una propiedad de la resta, que nos dice que si quitamos la misma cantidad a dos cantidades que están restando, la diferencia entre ellas es la misma.

La idea del algoritmo es ir *quitando* una misma cantidad a los dos términos de la resta hasta que uno de ellos se quede a cero. Aquí también la elección de la cantidad a quitar está en la persona que realiza el algoritmo. Así una adecuada elección permite simplificar mucho el cambio de decenas o centenas (véanse los últimos dos pasos de la Figura 2), lo que en el algoritmo tradicional corresponde el "tomar prestado".

Proporcionamos un ejemplo más para el significado de la resta de escalera ascendente (cuanto me falta para llegar).

Problema 3)

Un montañero ha montado su campamento base en la Reserva de Talamanca a 2 345 m de altura. El pico del Cerro de la muerte está a 3 491 m de altura, ¿cuántos metros les faltan para llegar?

De nuevo se trata de un problema de combinación que se resuelva con la resta: 3491-2345.

SUBO	LLEGO A
1000	3 345
100	3 445
5	3 450
40	3 490
1	3 491
1146	

La idea del algoritmo es ir añadiendo al segundo término distintas cantidades (que voy registrando en la columna de la izquierda) hasta llegar al número pedido (en la columna de la derecha). Una vez conseguido esto, se suman las cantidades añadidas de la primera columna para obtener el resultado.

Objetivo

El objetivo que perseguimos en el taller del X Festival Internacional de Matemática de Limón es iniciar a los maestros de educación primaria en el cálculo con algoritmos ABN.

En particular nos centramos en los algoritmos de las operaciones de la estructura aditiva (suma y resta) presentándolas en el contexto de problemas.

El taller

El taller se compone de dos partes. En una primera parte realizaremos una presentación, con el apoyo de diapositivas, presentando los algoritmos ABN.

En una segunda parte proponemos la resolución individual de operaciones de suma y resta con los algoritmos ABN en el contexto de problemas.

Conclusiones

Consideramos que los algoritmos ABN proporcionan una forma de trabajar la aritmética escolar que encaja muy bien en el enfoque por competencia. La competencia matemática reside en la capacidad de resolver problemas en contextos reales de una manera eficaz y eficiente. Cuando se trata de las operaciones, ser competente abarca el empleo de estrategias de cálculo mental y estimación cuyo desarrollo constituye uno de los puntos de fuerza de un aprendizaje basado en los algoritmos ABN.

La formación de los maestros es un paso previo indispensable para dar el cambio en los centros escolares hacia la utilización de metodologías alternativas que fomenten un aprendizaje por competencia.

Con el taller que llevaremos a cabo esperamos contribuir en este sentido a la incorporación de la competencia matemática en el currículo de primaria en Costa Rica.

Referencias Bibliográficas

Adamuz-Povedano, N., y Bracho-López, R. (2014). Algoritmos flexibles para las operaciones básicas como modo de favorecer la inclusión social. *Revista Internacional de Educación para la Justicia Social (RIEJS)*, *3*(1), 37-53.

Bracho-López, R., Gallego-Espejo, M., Adamuz-Povedano, N., y Jiménez-Fanjul, N. (2014). Impacto Escolar de la Metodología Basada en Algoritmos ABN en Niños y Niñas de Primer Ciclo de Educación Primaria. *Unión. Revista iberoamericana de educación matemática*, *29*, 97-109.

Echenique, I. (2006). Matemáticas resolución de problemas. Gobierno de Navarra.

Lucena-Rubio, M., Adamuz-Povedano, N., Bracho-López, R., y Albanese, V. (2015). Formación continua del profesorado para una transformación metodológica en lo relativo a la aritmética escolar. En C. A. Huertas, R. Serrano, & M. E. Gómez (Eds.), *Educación y Cooperación al Desarrollo 2015. Año Europeo del Desarrollo*, 63-64. Córdoba: ArCiBel Editores S.L.

Martínez, J. (2008). Competencias básicas en matematicas: una nueva práctica. Madrid: Wolters Kluwer.

Martínez, J. (2010). Algoritmos abn. el cálculo del futuro. *Clave XXI. Reflexiones y Experiencias en Educación*, *2*, 4-11.

Uso de *Wolfram Mathematica* como apoyo para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática discreta

Enrique Vílchez Quesada
Escuela de Informática
Universidad Nacional de Costa Rica
enrique.vilchez.quesada@una.cr

Resumen: el trabajo constituye un estudio descriptivo para analizar una metodología asistida por computadora implementada en un curso de matemática discreta. El estudio se realizó sobre una muestra de ochenta y cinco estudiantes de la materia *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática*, la cual forma parte del plan de estudios de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA). El objetivo de la investigación se sustentó principalmente en identificar las debilidades y fortalezas de la propuesta didáctica desarrollada, sobre el uso del conocido software comercial *Mathematica*. La justificación de esta pesquisa se fundamentó en una necesidad diagnóstica con la intención primaria de mejorar la metodología adoptada desde el año 2012.

Palabras clave: software, *Wolfram*, matemática, discreta, educación.

Introducción

La matemática discreta constituye un área de conocimiento esencial en la formación de los futuros profesionales en Ingeniería en Sistemas de Información o Ciencias de la Computación. Recientemente comienza a demandar un nivel de significancia cada vez más preponderante en los planes de estudio. Martín y Cuenca (2002) a este respecto afirman que "la matemática discreta, que ha sido un campo de "segunda fila" dentro de las matemáticas, se ha convertido en un instrumento básico para el desarrollo de la ciencia de la computación y de la biología moderna" (p. 198). Lo anterior refleja un reto inexorable, exigiendo cambios sólidos en el marco de acción curricular de las instituciones de educación a nivel medio superior.

El uso de la tecnología con fines didácticos en este sentido, aproxima escenarios donde la teoría matemática en el rumbo de la resolución de problemas representables a través de modelos no continuos, cobra vida mediante el diseño de animaciones o el abordaje de ejercicios complejos cercanos a situaciones de la vida real. En la Escuela de Informática de la Universidad Nacional de Costa Rica, se ha tomado conciencia sobre esta necesidad palpable, cuya penetración se manifiesta a través de la consigna de cambio, contraída por ciertos grupos de profesores con el objetivo de modificar sus metodologías clásicas en el proceso educativo. Particularmente, en la cátedra del curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática*, los esfuerzos se han circunscrito en la incorporación de software y lenguajes de programación que muestran al estudiantado, herramientas para desarrollar formas de razonamiento, reconocimiento de patrones y una mayor comprensión conceptual.

Desde el año 2012, se ha venido innovando a través del empleo del conocido software comercial *Wolfram Mathematica*, hacia la búsqueda de una oferta educativa que entra en concordancia con la formación de competencias. Una competencia es entendida en este contexto, como la capacidad de poder reaccionar de manera eficaz ante una determina tarea, mediada por el conocimiento disciplinario, pero sin limitarse a él (Montoro, Morales y Valenzuela, 2014). En esta dirección, el software *Mathematica* se ha visualizado en el curso *EIF-203*, como una plataforma de generación de experiencias educativas donde el alumno tenga la posibilidad de jugar con el contenido matemático discreto y así mismo, ofrezca opciones de visualización y manipulación de objetos.

En este proceso de transformación, los desafíos asumidos contrastan con las limitaciones aprendidas en el duro camino de la mutabilidad, hacia un entorno educativo de naturaleza más experimental. El trabajo aquí expuesto, representa un continuo de este conjunto de experiencias, con la intención de analizar las fortalezas y debilidades de la metodología asistida por computadora empleada desde el año 2012, hasta su evolución actual. Los resultados de esta investigación de carácter descriptivo, resultan indispensables para organizar una serie de engranajes hacia el perfeccionamiento de la didáctica utilizada y servir de base en el desarrollo de un paquete de software con fines educativos, específicamente, en el dominio de la matemática discreta.

Educación basada en competencias, modelación matemática y uso de tecnología

La educación con un enfoque apoyado en el desarrollo de competencias, responde a un mercado laboral cada vez más competitivo y globalizado de este siglo XXI, donde el profesional no solamente debe poseer una clara potestad sobre su ámbito de conocimiento, sino también, un cúmulo de habilidades que le permitan integrarlo a la resolución de problemas en un tiempo de respuesta óptimo. Osorio, López y Valenzuela (2014) conceptualizan las competencias como "una confluencia de habilidades, conocimientos, experiencias y capacidades, afectividad y voluntad para realizar -en este caso- la profesión con calidad y excelencia". (p. 20). Con frecuencia, se suele dar prioridad al perfeccionamiento de las competencias básicas, supeditadas con la comunicación, la matemática y el adecuado uso de las tecnológicas contemporáneas (Osorio, López y Valenzuela, 2014).

La cuantía que se le ha otorgado en el campo educativo a la apropiada utilización de las tecnologías de la información y comunicación (comúnmente llamadas "TIC"), no es una casualidad. Se reconoce en ellas un alto valor dado su impacto en la potenciación de las competencias disciplinarias y sus interacciones con el razonamiento, lo cual a su vez, tiene una fuerte incidencia sobre la capacidad del individuo para trascender de la comprensión teórica al acto de la interpretación, análisis y solución. Desde luego, esta concurrencia no obedece a las tecnologías de una forma per se, se relaciona con la habilidad del docente para facilitar espacios de aprendizaje con estas características (Montoro, Morales y Valenzuela, 2014).

A este respecto, en educación matemática la metodología por "modelación" aparece actualmente como una clara alternativa de los docentes ante la necesidad de formar estudiantes aptos en la resolución de problemas vinculados con la carrera que cursan. Rodríguez (2012) apuntala su significación a que "se pretende que el alumno a partir de una situación real y que a través del establecimiento de un modelo matemático (en nuestro caso, una ecuación diferencial, una gráfica o incluso una tabla numérica) pueda dar respuesta a una problemática determinada" (p. 24). El tejido del aprendizaje se concibe bajo esta perspectiva, como el resultado de una epifanía teórico-práctica hacia la consecución de un objetivo común. Alcanzar este objetivo demanda no solamente una conquista conceptual, sino el hecho de contar con las herramientas tecnológicas necesarias, que en conjunto faciliten una metamorfosis de resultados físicos o concretos a la construcción de un modelo abstracto o matemático (Rodríguez, 2010). En el seno de la materia *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática*, la incorporación del uso de software como medio de aprendizaje, ha intentado oxigenar una metodología cercana a la modelación.

La complejidad de un tratamiento didáctico donde se reconozca al alumno como un ser social *informívoro* (Valerio y Valenzuela, 2011) o consumidor constante de información y su realidad en las instituciones educativas orientadas en muchos casos a promover una movilidad cognitiva de la teoría a la práctica, instaura a los docentes universitarios hacia a la innovación. La cátedra del curso *EIF-203,* reconoce las pautas marcadas por estas tendencias y sus repercusiones fundamentales en la formación del estudiantado. Tal y como lo argumentan Rodríguez y Quiroz (2014) "la enseñanza de las matemáticas tiene como una meta importante el preparar ciudadanos críticos los cuales desarrollen las competencias adecuadas que permitan identificar y resolver problemas en cualquier contexto" (p. 1). En correspondencia con estas premisas, la educación en el ámbito de la matemática discreta se idealiza en este trabajo, como un insumo hacia la construcción de modelos y la exposición de situaciones de aprendizaje más integradoras, dentro de una cultura de uso y reforzamiento de competencias.

El diagnóstico un recurso de mejoramiento en las instituciones educativas

Diagnosticar la efectividad de un proceso en cualquier institución u organización se trasluce en una clara intencionalidad de mejora. En el ámbito educativo puede orientarse al área administrativa o eventualmente al quehacer académico que se realiza dentro del aula. En cualquier caso, el tratamiento de la información recolectada por lo general, se orienta a definir un conjunto de acciones en el marco de un planeamiento apegado a objetivos concretos. De acuerdo con Sobrado (2005) el diagnóstico "se caracteriza por realizar un proceso sistemático de recogida constante de información, de valoración y toma de decisiones respecto a una persona o grupo de ellas" (p. 86).

En la investigación compartida en el presente documento, se adhiere a la intencionalidad diagnóstica como un recurso sustancial para mejorar una metodología asistida por computadora que se comenzó a implementar desde el año 2012. La definición de un conjunto de juicios de mérito en este plano didáctico se transpuso en la práctica docente, ante la balanza exigida por las aspiraciones iniciales dentro de la cátedra, en contraposición con las limitaciones o necesidades nacientes del ejercicio profesional. Se reconoce de forma explícita, que la evaluación en las instituciones educativas no es una tarea sencilla, al encontrarse impregnada de valores sociales y creencias, tal y como lo proponen Valenzuela, Ramírez y Alfaro (2011) "hace falta generar una nueva cultura de la evaluación, lo que implica tener valores socialmente compartidos, dar cuenta de nuestras responsabilidades y afrontarlas; es decir, estar abiertos y promover que se evalúe el producto de nuestros compromisos" (p. 47).

El diagnóstico educativo constituye un acto de autoevaluación de eficiencia interna, que cronológicamente, debería tener una huella histórica en el aprendizaje de los estudiantes (Bolívar, 2006). En cuanto al uso de tecnología con fines educativos y específicamente la utilización del software *Wolfram Mathematica* para el curso *EIF-203*, se ha pretendido con este estudio evidenciar su impacto didáctico en una tradición escolar que demanda esclarecer sus alcances y limitaciones.

Experiencias previas en el curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática*

La emancipación del modelo educativo tradicional que había personificado los procesos de aprendizaje del curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* en la Universidad Nacional de Costa Rica, inició su primera fase transitoria en el segundo semestre de año 2012. En aquella ocasión, a través de la experimentación de aula, se tomó un grupo piloto con la intención de probar el uso de una estrategia asistida por computadora.

El software elegido fue *Wolfram Mathematica* por su alto potencial en el área de la matemática discreta y la compra institucional realizada por la UNA sobre la licencia de este programa. Con esmero se diseñaron clases tipo laboratorio dando al estudiante la oportunidad de visualizar conceptos y construir conjeturas (Vílchez y González, 2014). Se obtuvieron resultados positivos en cuanto al acercamiento de la población estudiantil en la resolución de problemas y aparecieron nuevos retos ante un cambio pionero con resistencias ocultas.

En la búsqueda implacable de soluciones y el convencimiento creado por el deseo hacia la innovación, se escribió un libro titulado *Estructuras discretas con Mathematica* (Vílchez, 2015), cuyas primeras versiones fueron depuradas en la docencia durante los años 2013 y 2014. El texto aborda la teoría y la práctica del curso *EIF-203* con un enfoque asistido por computadora. Presenta ejemplos muy bien seleccionados en los principales tópicos de la matemática discreta, bajo una óptica refrescante que combina el uso de software y el abordaje clásico de la teoría.

Durante el año 2015, se instauró una transformación más sustancial en la metodología del curso *EIF-203*, al estar publicada la obra *Estructuras discretas con Mathematica* y al reconocerse por parte de la administración de la Escuela de Informática de la UNA, la necesidad de impartir esta materia en un laboratorio. Las condiciones ya estaban creadas en un nuevo ecosistema educativo. Pese a ello, algunos docentes de la cátedra incluyendo el autor de esta propuesta, comenzaron a sobrellevar dificultades recurrentes relacionadas con el tiempo disponible, las demandas cognitivas de la materia y aparentes dificultades sintácticas y semánticas alrededor del software. El diagnóstico aquí elaborado, erige una respuesta y un punto de anclaje a estas contrariedades, con la intención primaria de repensar pedagógicamente la praxis formativa.

Diagnóstico de una metodología asistida por computadora en el curso *EIF-203*

El estudio realizado y expuesto con el presente trabajo constituye un diagnóstico sobre una muestra de ochenta y cinco estudiantes de la materia *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática*, quienes habiendo recibido el curso con una metodología basada en el uso del software comercial *Mathematica*, brindaron información pertinente sobre las características de la metodología, sus ventajas y oportunidades de mejora. La investigación fue de carácter descriptivo a través de la aplicación de un cuestionario validado mediante el coeficiente alfa de *Cronbach* y el uso del programa estadístico *SPSS*.

Los alumnos se encontraban distribuidos en cuatro grupos distintos de la Sede Central en la Universidad Nacional de Costa Rica. Se les impartió la materia con un enfoque asistido por computadora y al finalizar el semestre, se administró un cuestionario para recoger sus percepciones en cuanto a las características del curso y la utilidad del software *Mathematica* en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Con relación a la muestra de los participantes: 54 fueron de género masculino y 31 de género femenino, 35.3% poseían entre 17 y 19 años de edad, 56.5% entre 20 y 23 años y 8.2% entre 24 y 27 años. Además, un 72.9% tenían una carga académica completa con 12 o más créditos matriculados. Un aspecto importante lo demarca el nivel de repitencia escolar manifestado en el cuestionario, solamente 24 alumnos estaban llevando el curso por primera vez, es decir, la mayor parte de ellos gozaba de algún conocimiento previo con respecto a los contenidos abordados.

Características del curso *EIF-203*

Con el objetivo de valorar las características intrínsecas de esta materia, se consideraron las siguientes variables: nivel de dificultad, si es un curso interesante, relevancia con respecto a la carrera, bases previas del estudiante y ejes temáticos de naturaleza abstracta. La tabla 1 resume los resultados obtenidos.

Tabla 1: Característica del curso *EIF-203*

SINGULARIDADES DEL CURSO EIF-203	1. Muy de acuerdo	2. De acuerdo	3. Medianamente de acuerdo	4. En desacuerdo	5. Muy en desacuerdo
Lo considero un curso difícil.	12.9%	35.3%	42.4%	8.2%	1.2%
El curso es interesante.	28.2%	48.2%	21.2%	1.2%	1.2%
Es un curso importante dentro de mi formación profesional.	25.9%	40%	29.4%	3.5%	1.2%
Mis bases previas en matemáticas son las adecuadas.	8.2%	32.9%	42.4%	15.3%	1.2%
Los contenidos son abstractos.	21.2%	37.6%	25.9%	14.1%	1.2%

Fuente: Cuestionario dirigido a los estudiantes del curso EIF-203, período lectivo 2015

De acuerdo con los porcentajes mostrados hay una fuerte tendencia de considerar el curso como una materia difícil, pese a ello, 76.4% de los participantes opinaron que los contenidos son interesantes y un 65.9% los perciben de importancia para el contexto de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información. Este último porcentaje denota a nivel del profesorado, que aún no se ha logrado plasmar una oferta de curso donde el estudiante pueda vincular de una manera más directa los temas de matemática discreta vistos en clase, con su área de desarrollo profesional. El factor devela una componente muy importante pues demandará a futuro el replanteamiento de experiencias de aprendizaje que así lo permitan.

Por otra parte, se puede intuir que los alumnos catalogan en su mayoría la matemática discreta como abstracta y se consideran mediamente aptos en cuanto a sus conocimientos matemáticos previos. A este respecto, si el curso *EIF-203* es caracterizado así, el reto en este sentido se circunscribe en la creación de herramientas tecnológicas (dentro del software *Mathematica*) mediante las cuales se puedan volver tangibles los conceptos o propiedades más difíciles de explicar o visualizar cognitivamente.

Percepción sobre el uso del software *Mathematica* en el curso *EIF-203*

La tabla 2 presenta los resultados porcentuales derivados del análisis del instrumento aplicado.

Tabla 2: Percepción sobre el uso del software *Mathematica*

FORTALEZAS Y DEBILIDADES	**1. Muy de acuerdo**	**2. De acuerdo**	**3. Medianamente de acuerdo**	**4. En desacuerdo**	**5. Muy en desacuerdo**
Mathematica es útil para el curso.	32.9%	28.2%	29.4%	7.1%	2.4%
Mathematica facilita la visualización de conceptos y propiedades.	40%	22.4%	30.6%	5.9%	1.2%
Mathematica permite resolver problemas.	51.8	35.3	5.9	3.5	3.5
El uso de software facilita el aprendizaje.	29.4%	28.2	30.2%	7.1%	4.7%
Es la primera vez que llevo un curso asistido por computadora.	15.3%	14.1%	15.3%	15.3	40%
El uso de software considero que mejora la enseñanza.	20%	30.6%	38.8%	8.2%	2.4%
Mathematica es una herramienta adecuada para el curso.	25.9%	20%	48.2%	4.7%	1.2%
Le agrada el uso software.	22.4%	24.7%	35.3%	4.7%	12.9%
Preferiría una metodología tradicional en este curso.	14.1%	11.8%	37.6%	20%	16.5%

Fuente: Cuestionario dirigido a los estudiantes del curso EIF-203, período lectivo 2015

Lo anterior exterioriza ventajas sobre el uso del software *Mathematica* y la metodología madurada a la fecha en la cátedra del curso *EIF-203*. Algunas de ellas son:

- El software se considera útil.
- Facilita la visualización de conceptos y propiedades.
- Se resuelven problemas con mayor facilidad.
- Mejora el aprendizaje.

En las respuestas indicadas por los alumnos participantes es fundamental reconocer desde un punto de vista diagnóstico que no hay una certeza en el mejoramiento de los procesos de aprendizaje, ni en la efectividad del uso del software para apoyar las áreas de contenido de la materia *EIF-203*. Muchos estudiantes están parcialmente de acuerdo en preferir una metodología tradicional, aunque en su mayoría les agrada el uso de software. Si bien es cierto en la muestra hay un 29.4% de alumnos neófitos en cuanto al empleo de una metodología asistida por computadora, estas oportunidades de mejoramiento apuntan a buscar mecanismos que transciendan el umbral de usar tecnología con fines educativos, donde ésta se vuelva transparente a la población objetivo.

En el cuestionario suministrado a los estudiantes, se consultó también, mediante dos preguntas abiertas las fortalezas y debilidades sobre el uso de software en el curso *EIF-203*. La tabla 3 muestra las categorías encontradas.

Tabla 3: Fortalezas y debilidades

Fortalezas	Debilidades
Minimiza esfuerzo hecho a mano	Falta de conocimiento previo en cuanto al uso del software
Repuestas eficientes	Falta de tiempo para la comprensión
Facilita procedimientos	Mayor práctica de uso de software
Se aplica a temas abstractos	Se requiere un manual

Fuente: Cuestionario dirigido a los estudiantes del curso EIF-203, período lectivo 2015

Los docentes de la cátedra del curso *EIF-203* compartimos la percepción del estudiantado respecto a la ausencia de tiempo durante un semestre, para lograr profundizar el uso de software y brindar introducciones técnicas más adecuadas.

Conclusiones

La metodología asistida por computadora que inicio en el año 2012 para el curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* ha evolucionado durante sus años de implementación gracias al esfuerzo conjunto en la elaboración de planeamientos y material didáctico, además de distintos recursos de apoyo. Pese a ello, las intenciones de crear situaciones de aprendizaje orientadas al desarrollo por competencias y a construir ambientes próximos a las necesidades de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información de la UNA, aún no se han logrado consolidar.

Las dificultadas en este contexto entre el tiempo disponible de clase, las bases previas de la población estudiantil y las características sintácticas y semánticas del software *Mathematica*, están exigiendo acciones concretas. En el marco de las posibilidades de solución, se ha analizado y justificando la creación de un paquete de software que facilite un avance efectivo y genere las condiciones oportunas en un curso de naturaleza instrumental, al dotar herramientas de consulta directa de resultados y generación de animaciones conceptuales. Esta será la próxima etapa de transformación curricular dentro de la cátedra del curso *EIF-203* en la Escuela de Informática de la UNA.

Referencias bibliográficas

Bolívar, A. (2006). Evaluación institucional: entre el rendimiento de cuentas y la mejora interna. *Revista Gestión en Educación*, *9*(1), 37-60.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill Interamericana.

Martín, G. y Cuenca, B. (2002). Importancia de la matemática discreta en el desarrollo de la biología y la bioinformática. En L., Saénz (Comp.), *Memorias del IX Congreso Nacional de Informática Médica*, 193-198. Valencia, España: Sociedad Española de Informática de la Salud.

Montoro, J., Morales, G. y Valenzuela, J. (2014). Competencias para el uso de tecnologías de la información y la comunicación en docentes de una escuela normal privada. *Revista Virtualis*, *1*(9), 20-33.

Murillo, J. (2004). Un marco comprensivo de mejora de la eficiencia escolar. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *9*(21), 319-359.

Osorio, M., López, G. y Valenzuela, J. (2014). Profesionales éticamente competentes. *Revista Polisemia*, *1*(17), 18-39.

Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2014). Modelación y uso de tecnología en un curso de ecuaciones diferenciales. *Revista de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología*, *1*(1), 1-9.

Rodríguez, R. (2012). Modelación y uso de tecnología *TI-Nspire CX CAS* en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Innovaciones Educativas*, *1*(1), 24-26.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13*(4), 191-210.

Sobrado, L. (2005). El diagnóstico educativo en contextos sociales y profesionales. *Revista Investigación Educativa*, *23*(1), 85-112.

Valenzuela, J., Ramírez, M. y Alfaro, J. (2011). Cultura de evaluación en instituciones educativas: comprensión de indicadores, competencias y valores subyacentes. *Revista Perfiles Educativos*, *33*(131), 42-63.

Valerio, G. y Valenzuela, J. (2011). Redes sociales y estudiantes universitarios: del nativo digital al informívoro saludable. *Revista El Profesional de la Información*, *20*(6), 667-670.

Vílchez, E. (2015). *Estructuras discretas con Mathematica*. México: Alfaomega.

Vílchez, E. y González, E. (2014). Percepción estudiantil sobre una metodología asistida por computadora en las áreas cognitivas del álgebra lineal y la matemática discreta. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, *14*(1), 1-16.