II ECAME

II Encuentro Centroamericano de Matemática Educativa

MEMORIAS

TEC | Tecnológico de Costa Rica

II ECAME

II Encuentro Centroamericano de Matemática Educativa

Comité Organizador:

Jorge Luis Chinchilla (ITCR) Coordinador, Luis Gerardo Meza (ITCR), José Rosales (ITCR), Zuleyka Suárez (ITCR), Lourdes Quesada (ITCR), Leví Castro (UPNFM)

Comité Científico:

José Rosales, Coordinador (ITCR), Marco Gutiérrez, (ITCR), Zuleyka Suárez (ITCR), Reiman Acuña (ITCR)

Editores Científicos:
Mario Villalobos, Reiman Acuña, Marco Gutiérrez

Asistentes de organización:
Kattia Morales, Mario Villalobos, Didier Castro

Cartago, julio 2014

Prólogo

Con la finalización **del Primer Encuentro Centroamericano de Matemática Educativa** (I ECAME, año 2012) desarrollado en la Universidad Nacional Pedagógica Francisco Morazán (UNPFM), en Tegucigalpa, Honduras, se definió como sede prioritaria para el desarrollo del II ECAME, a**l Instituto Tecnológico de Costa Rica** (ITCR) situado en Cartago, Costa Rica; esto con el propósito de cambiar las sedes en cada evento y darle oportunidad de divulgación a cada país anfitrión.

Como acuerdo común, cada congreso se coordina con las universidades que se integran para su realización, definiendo diferentes comités organizativos y científicos, esto con el visto bueno de las universidades participantes y los coordinadores de dichas instituciones. Para II ECAME, en el 2014, los países de Honduras y Costa Rica se encargaron en conjunto de su definición.

El II ECAME tiene objetivo principal, abrir espacios de discusión entre estudiantes y docentes de varios países centroamericanos relacionados con prácticas e investigaciones educativas que favorezcan una formación matemática más actualizada y pertinente. Para ello se ofrecerán conferencias, ponencias y talleres específicos sobre temas orientados tanto a educación matemática secundaria, como investigación y uso de tecnología de software.

Cabe complementar que, en cada congreso, se reúnen estudiantes y profesores de enseñanza de las matemáticas, en los diferentes niveles de los sistemas de educación de países centroamericanos, con el objetivo de compartir y discutir la realidad de las matemáticas, la educación y su aprendizaje a través de conferencias, talleres, ponencias, reuniones y carteles.

Esperamos que cada trabajo sea un insumo de reflexión y aprendizaje, pero más allá, una demostración de la preocupación por la enseñanza de las matemáticas canalizado en investigación, extensión y docencia.

Atentamente

Los Editores

Introducción

La historia de la integración centroamericana en lo que a matemática respecta es casi nula, tanto a nivel de matemática pura y aplicada como a nivel de matemática educativa. El número de eventos que se han desarrollado en este sentido son escasos. En un primer momento, el evento que se puede señalar como tendiente a integrar la matemática en Centroamérica, fue el ECADIM, siglas del Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemática.

El primer ECADIM data del año 1993 y se realizó en Managua, Nicaragua. Los objetivos que se propusieron para el ECADIM fueron los siguientes:

- Fortalecer a nivel regional la docencia y la investigación en el campo de la matemática pura, aplicada y educativa.
- Promover la divulgación y el intercambio de experiencias relacionadas con el quehacer matemático.
- Contribuir a una auténtica integración centroamericana a través de las posibilidades reales que ofrece la matemática mediante sus conexiones naturales con la educación, la tecnología y la economía.

Explícitamente el tercer objetivo señala a la integración centroamericana en el quehacer matemático. Lamentablemente el ECADIM se suspendió en el año 2000, y fue retomado en el año 2010, y de allí en adelante no se ha restaurado.

En la actualidad existen en Centroamérica eventos locales, no así regionales, en lo que respecta a la promoción del talento joven en matemática con miras a su posible inserción en programas latinoamericanos y norteamericanos de matemáticas puras, tal es el caso de las llamadas EMALCA (Escuela de Matemáticas de América latina y el Caribe) así como el SIME (Simposio Internacional de Matemática Educativa). Sin embargo, estos eventos son dictados en su mayoría por expertos que son ajenos a la región. No hay interacción entre los expertos de la región centroamericana en estos programas.

Fue a mediados del año 2012 que un grupo de matemáticos de Tecnológico de Costa Rica (TEC) y de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM), Honduras, iniciaron conversaciones con miras a realizar un evento que llenara el vacío existente en términos de integración matemática en Centroamérica. Después de un tiempo de intercambiar ideas al respecto, se llega al compromiso de realizar un evento permanente en Centroamérica que permita crear esos espacios de discusión con miras a integrar la matemática educativa que se desarrolla en la mayoría de las universidades Centroamericanas. Los principales objetivos del evento denominado ECAME fueron los siguientes:

- Intercambiar ideas en cuanto a la formación de profesionales en la enseñanza de la matemática.
- Dar a conocer algunos de los proyectos de investigación que se han realizado en ambas universidades en cuanto a matemática educativa y matemática universitaria.
- Conocer la experiencia en posgrado que ha generado la UNPFM, y utilizarla para la eventual formulación de una maestría que ofrecería la escuela del ITCR.
- Potenciar el intercambio académico entre la escuela de matemática de la UNPFM y la escuela de matemática del ITCR.

Cabe señalar que en un principio tales objetivos se diseñaron en base a las necesidades de la UPNFM y del ITCR de ese momento. El evento ECAME tuvo un feliz inicio el mes de noviembre de 2012 en Tegucigalpa Honduras. Los colegas de la UPNFM lograron realizar un evento que contó con la participación masiva de estudiantes y profesores de dicha institución y de la participación de 5 colegas del ITCR y un colega de la UCR. Al final del evento nos comprometimos a realizar el segundo ECAME en suelo costarricense y en nuestro ITCR.

Durante el segundo semestre del año 2013 un grupo de profesores del ITCR, con apoyo institucional, empezó las labores de organización y preparación del segundo ECAME. Se fijó el mes de julio del 2014 para realizarlo en común acuerdo de colegas de la UPNFM, y con el compromiso de involucrar a más universidades Centroamericanas. Es así como en esta nueva edición del ECAME se tuvo integración de estudiantes provenientes de la UNAN-LEON la Universidad Tecnológica de Panamá, de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras, De la Universidad Tecnológica de Panamá y del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, México. Además contamos con varios colegas de la UCR, UNA y la UNED, así como la participación de Instituto Geogebra de Costa Rica.

Para esta ocasión se ofrecieron diversas conferencias, ponencias y talleres específicos sobre temas orientados tanto a educación matemática primara, secundaria y superior, así como investigación y uso de tecnología de software.

Un equipo conformado por docentes y estudiantes trabajó en la organización de este evento que, sin dudas, permitió enriquecer a los profesionales interesados en la Educación Matemática de nuestros países.

Sobre la Evaluación

Para la evaluación del II ECAME se implementó un cuestionario al final del evento, propiamente en la conferencia de clausura. En este aspecto se propuso una serie de indicadores cualitativos (Excelente-Muy buena-buena-regular-deficiente) que permitieran al comité organizador del ECAME considerar la apreciación general del evento en los siguientes aspectos

- Organización
- Calidad de las conferencias
- Calidad de las ponencias
- Calidad de los talleres
- Calidad de la mesa redonda
- Calidad de los expositores
- Impacto y pertinencia del evento para su formación
- Cumplimiento de sus expectativas
- Atención brindada
- Opinión general sobre el segundo ECAME

Se obtiene, para un total de 70 participantes que respondieron las preguntas, un resumen en la siguiente tabla

Tabla 1 Resumen sobre la evaluación del II ECAME

Aspectos considerados en el II ECAME	Excelente	Muy buena	Buena	Regular	Deficiente	Total
Organización	38	21	8	1	0	68
Calidad de las conferencias	25	33	8	2	0	68
Calida de las ponencias	26	34	8	1	0	69
Calidad de los talleres	29	32	4	0	0	65
Calidad de la mesa redonda	27	28	13	1	0	69
Calidad de los expositores	30	27	6	0	0	63
Impacto y pertinencia del evento para su formación	44	20	5	0	0	69
Cumplimiento de sus expectativas	34	22	10	1	0	67
Atención brindada	52	13	4	1	0	70
Opinión general sobre el segundo ECAME	40	25	2	1	0	68
Promedio	34,5	25,5	6,8	0,8	0	67,6

De este modo, se observa, en todos los rubros, que todos los aspectos fueron catalogados de excelente y muy bueno. El mayor rubro votado de excelente fue la atención brindada y, en su contraparte, la calidad de las conferencias, tuvo 25 votaciones de excelente. Para efectos de los organizadores, este ha sido un panorama muy agradable del congreso, por lo cual, quedamos satisfechos con la apreciación recibida.

El II ECAME logra sobre estas estadísticas que profesores, maestros, investigadores y estudiantes compartan nuevas experiencias y conocimientos en un ambiente de comunidad comprometida con el desarrollo integral de nuestra educación matemática.

Finalmente destacamos que el proceso de elaboración de las memorias pasó por una exhaustiva revisión, corrección y edición que permitiera fortalecer la calidad requerida en los trabajos expuestos, así como en su divulgación.

Agradecemos a las autoridades del Instituto Tecnológico de Costa Rica, así como a los miembros del comité organizador y editor, por su aporte en la elaboración del presente trabajo.

Atentamente,

Comité organizador II ECAME

Lista de contribuciones[1]

[1]En estricto orden alfabético de acuerdo con el nombre del expositor de la contribución.

Área de medidas del primer ciclo de educación general básica, algunas consideraciones para su abordaje en el aula

ALPÍZAR, MARIANELA[I]

Costa Rica

Resumen

El rendimiento académico en Matemáticas y la percepción por parte de los estudiantes hacia esta asignatura ha ido en decadencia año con año, este comentario se escucha en medios de comunicación, lugares de encuentro públicos y en centros de enseñanza superior. En el 2012 se aprobó en Costa Rica una modificación a los Programas de Estudio del Ministerio de Educación Pública (MEP) para Matemáticas, estos programas son desarrollados en todas las instituciones públicas del país, desde primaria hasta secundaria, En el programa se establecen cinco áreas de conocimiento que deben desarrollarse a través de toda la formación básica formal del estudiante; a saber: Números, Relaciones y Álgebra, Geometría, Probabilidades y Estadística y Medidas. Este taller va enfocado al área de Medidas, en relación a lo planeado por el MEP en el Programa de Estudios y algunas consideraciones de investigadores internacionales acerca de la metodología para enseñar dicha temática en I Ciclo de la Educación General Básica.

Palabras clave: medidas, I ciclo, matemáticas.

A. Introducción

El rendimiento académico en Matemáticas y la percepción por parte de los estudiantes hacia esta asignatura ha ido en decadencia año con año, este comentario se escucha en medios de comunicación y es tema de discusión en diversos eventos relacionados con el gremio de educadores.

Año tras año en diversos eventos nacionales e internacionales se habla de la necesidad de reorientar los procesos de aprendizaje de la matemática de tal manera que se presente a los estudiantes la cara humana de esta asignatura, que se consideren factores afectivos, éticos, actitudinales y socioculturales en el momento de enseñar sus contenidos en el aula.

B. Estado de la cuestión

En el 2012 se aprobó en Costa Rica una modificación a los Programas de Estudio del Ministerio de Educación Pública (MEP) para Matemática, estos programas son desarrollados en todas las instituciones públicas del

[I]UNA, Costa Rica.

país, desde primaria hasta secundaria, con estos se busca un cambio con miras a mejorar la formación básica de los costarricenses, con una matemática que los prepare para la vida; donde la resolución de problemas y las situaciones contextualizadas toman un papel muy importante (Alfaro, Alpízar, Morales, Salas y Ramírez (2013)).

En el programa se establecen cinco áreas de conocimiento que deben desarrollarse a través de toda la formación básica (primaria y secundaria) del estudiante; a saber: Números, Relaciones y Álgebra, Geometría, Probabilidades y Estadística y Medidas. Cada área tiene distinta representatividad según el año escolar, en la figura adjunta se presenta la distribución de las áreas según el ciclo educativo.

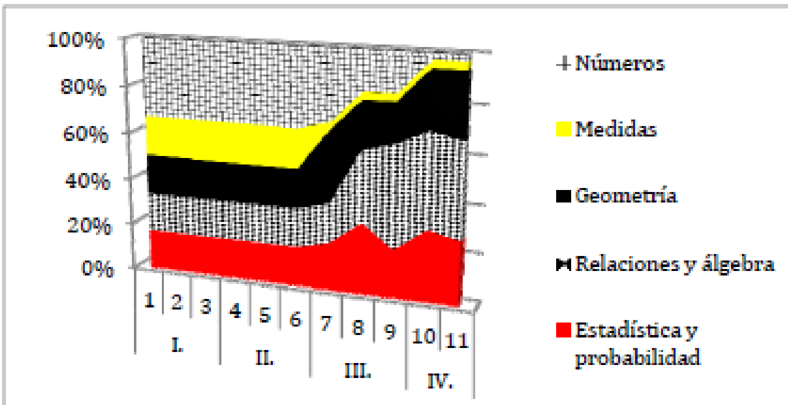


Figura 2. Las cinco áreas matemáticas en los cuatro ciclos educativos.

Fuente: Programa del MEP(MEP,2012,p.49)

De la mano con el planteamiento de un nuevo programa, la inclusión de nuevos contenidos y el acomodo o la eliminación de otros, deben ir acciones que se realicen en torno a los docentes, ya que estos son los que deben llevar a las aulas lo que contempla el programa (Castillo, 2010).

La enseñanza de las Matemáticas en primer y segundo ciclos de la Educación General Básica está a cargo de docentes, que generalmente, su formación no es exclusiva en esta asignatura, sino que abarca al menos las cuatro materias básicas; a saber: Matemáticas, Estudios Sociales, Ciencias y Español. El docente tarda en promedio 4 años en obtener su título de bachillerato y cinco en licenciatura si se encuentra cursando estudios en una universidad estatal. En el país tres universidades estatales y más de 20 universidades privadas imparten carreras relacionadas con la labor docente en los ciclos citados; sin embargo no deben seguir un currículo común. (Alfaro, Alpízar, Morales, Salas y Ramírez (2013)).

De lo anterior se puede suponer que la preparación de los docentes en cada asignatura es sobre conceptos básicos ya que no tendrían mucho tiempo de profundizar en cada una de ellas. Por lo tanto es muy importante la labor de capacitación que se realiza y actualización de los docentes para tener buenos resultados en la implementación de una nueva propuesta curricular. A raíz de la aprobación del nuevo programa de estudios en Matemática el MEP ha realizado procesos de capacitación anual para docentes de primaria y secundaria, con distintos énfasis desde contenido hasta el abordaje metodológico en el aula. (Alfaro, Alpízar, Morales, Salas y Ramírez (2013)). Por otra parte, en Costa Rica un niño entra a primaria si cuenta a febrero del año en curso con seis años y tres meses, y debería graduarse seis años después. El desarrollo mental del niño de seis a doce años es importante de considerar en la toma de decisiones de las actividades y temáticas que se abordarán en las aulas, por ende en el Programa de Estudios debe contemplarse y los docentes deben tenerlo claro.

En el ámbito cognitivo, el niño de siete años entra en la etapa denominada como de inteligencia operatoria concreta, esto significa que el niño es capaz de utilizar el pensamiento para resolver problemas, de entender la noción de conservación y el carácter reversible de las acciones tales como: combinar, clasificar; siempre y cuando estas operaciones estén estructuradas y organizadas en función de fenómenos concretos, sucesos que suelen darse en el presente inmediato. (Piaget, 1993). Para Guerrero (sf) el niño en edad escolar (a partir de los seis años) va a lograr realizar las siguientes operaciones intelectuales: clasificar objetos en categorías (color, forma, etc.), cada vez más abstractas; ordenar series de acuerdo a una dimensión particular (longitud, peso, etc.); trabajar con números, comprender los conceptos de tiempo y espacio, y distinguir entre la realidad y la fantasía.

En el Programa de Matemática del MEP se respeta el desarrollo cognitivo de los estudiantes al ir desarrollando habilidades en ellos de manera paulatina, considerando conocimientos previos y creando los pilares necesarios para niveles avanzados.

El niño en edad escolar trabaja, especialmente en sus primeros años, con hechos (espacios concretos), para pasar a trabajar poco a poco con leyes y procedimientos más abstractos por ello la formación básica es elemental, ya que si en ella se aprenden de manera adecuada los conceptos básicos y se dan las estrategias de pensamiento adecuadas los niveles posteriores no serán un problema para el estudiante. Este documento abarca de manera específica el tema de Medidas. Según el MEP (2012) en el primer Ciclo esta área se asocia en mayor medida con la de Números, en el segundo ciclo con Geometría, Estadística y Probabilidades, en tercer ciclo y el ciclo diversificado se abarca de manera transversal en las otras áreas. De manera más específica, se tratará aquí, el desarrollo del tema en el I Ciclo de la Educación General Básica tanto en aspectos que se definen a nivel internacional así como los lineamientos del nuevo programa de estudios de nuestro país. Es importante considerar que al emplear actividades para desarrollar destrezas y habilidades en medida se pueden desarrollar competencias pertinentes a otras áreas de la Matemática. (NCTM, 2000). Es importante considerar que el uso de las medidas y el lenguaje asociado cambia de acuerdo al contexto donde se estén desarrollando, para Godino, Batanero y Roa (2002) existen tres contextos:

a) En la vida cotidiana y en las ciencias experimentales se habla de magnitudes para propiedades o cualidades de los objetos o fenómenos susceptibles de tomar diferentes valores numéricos, por ejemplo peso, velocidad, longitud.

b) En las ciencias humanas y sociales las “cantidades”vienen a ser las distintas modalidades o valores que puede tomar el rasgo o característica del objeto o fenómeno en cuestión.

c) En la matemática (pura), con la palabra magnitud se designa un conjunto de objetos abstractos (cantidades) dotado de una cierta estructura algebraica, y medida es un isomorfismo entre dicha estructura y un subconjunto apropiado de números reales. (página 615)

El docente debe conocer cada uno de los contextos, para saber cuál es el correspondiente ante sus alumnos y conocer acerca de la didáctica en los diferentes niveles de instrucción ya que es distinto el abordaje que se le da para un niño de primaria que un joven de secundaria. Aunado a esto se considera que el mayor inconveniente que tiene la medida es la manera es que se comunica o transfiere el conocimiento a otras personas alejadas en tiempo y espacio. Godino, Batanero y Roa (2002).

A nivel de primer ciclo, la medición que interesa es la relacionada con aspectos cotidianos con valores numéricos. El uso de instrumentos de medición se ha ido dejando de lado ya que se consideraba que era una actividad rutinaria que los estudiantes aprendían fuera de las aulas; sin embargo esta es una idea que debe repensarse ya que, actualmente, en los hogares no se enseña y el uso de los mismos es fundamental para abordar el tema de las mediciones y su importancia. Debido a la problemática de la comunicación de las medidas y el proceso de enseñanza y aprendizaje del mismo es que se recomienda que el estudio del Sistema Internacional de Unidades sea abordado después de haber trabajado de manera exhaustiva con medidas arbitrarias, ya que adquirir las habilidades relacionadas con medición son complejas para niños de primaria; por otra parte el trabajo con unidades debe darse de manera manipulativa (cuando el tamaño lo permita) para que el estudiante se familiarice con el orden de la magnitud, requisito para estimaciones en medida. (Chamorro, 2003). Según el NCTM 2000

> Los conceptos básicos sobre la medida capacitan a los estudiantes para utilizar sistemas, instrumentos y técnicas de medida, deberían establecerse a partir de experiencias directas de comparación de objetos, contar unidades y realizar conexiones entre conceptos espaciales y el número. (p. 107)

Para el primer ciclo los estudiantes deben manipular materiales, utilizar medidas arbitrarias, el docente debe irlos orientando para que en ellos descubran la necesidad que tienen los seres humanos de medir la longitud, la capacidad, el peso, entre otros, y hacer comparaciones entre diversas mediciones.

A nivel de aula, los estudiantes pueden empezar comparando la longitud de sus lápices, zapatos, cabello, estatura; tener objetos de pesos distintos en sus manos y saber cuál pesa más. Los niños en este nivel deben tener experiencias al medir con balanzas (pueden ser construidas de manera artesanal), pueden comparar la capacidad de un recipiente al llenarlo con agua o arena y pasarlo a otro; además debe saber medir el tiempo y los hechos que suceden a su alrededor que dependen de la medición del tiempo y la distribución de meses y días de la semana que se tiene en la vida cotidiana.

El docente es el responsable de crear los espacios adecuados para que los estudiantes puedan efectuar las mediciones, proporcionando los recursos necesarios y adecuados al nivel de instrucción. Es importante que cuando los estudiantes se encuentren realizando mediciones y comparaciones el docente efectúe diversas preguntas relacionadas con los procedimientos que está realizando para ir comprobando que está a las habilidades de manera adecuada. (NCTM, 2000).

C. Programa de estudios 2012, Ministerio de Educación Pública

Según el MEP (2012) antes de su ingreso a la escuela los niños han adquirido ciertas ideas intuitivas relacionadas con mediciones. Normalmente dichas ideas se vinculan con el sentido de comparación de medidas entre objetos del entorno. Por ello se promueve utilizar estas ideas como punto referencial para introducir los conocimientos básicos sobre el área de Medidas y de estimación en mediciones. Los estudiantes deben visualizar que una misma característica que es común a varios objetos permite la comparación de mediciones, y de este modo, se pueden determinar u observar semejanzas y diferencias entre esos objetos y así crear diversas clasificaciones.

Según el MEP (2012) la posibilidad de generar una medida corresponde a una característica propia de algunos objetos físico-matemáticos; sin embargo, "no todo atributo es medible cuantitativamente, y en el caso de los que admiten la medición siempre hay un sentido de aproximación. Tanto por el sujeto que la haga como por el instrumento que se utilice aparece un porcentaje de error."(p.64)

Por lo anterior, la noción de estimaciones debe tener un valor muy importante ya que la justa medida solo se puede obtener por la realización de un cálculo y no por toma directa de una medida, debido al margen de error que se tiene por la calibración del instrumento o errores que comete el encargado de medir. (Chamorro, 2003).

Se promueve para este ciclo la generación de los principales conocimientos que favorezcan el sentido de la medición. Esto implica que concebir la medición no es solamente como un dato numérico vinculado con alguna particularidad de un objeto sino con significado de utilidad práctica en problemas particulares. De este modo, ?los estudiantes podrán realizar mediciones, hacer estimaciones y comparaciones de diversas medidas y utilizarlas en distintos contextos? (MEP, p. 123). Las medidas deben ser concebidas como una característica de los fenómenos del contexto donde se desarrollan los estudiantes.

El propósito de enseñanza del área de Medidas para este ciclo, según el MEP (2012) es dar inicio a la comprensión del concepto de medida y que se calcule, estime, compare y aplique algunas de ellas (pag, 123). Para ello deben manipular instrumentos tradicionales y no tradicionales para enfrentarse a mediciones, considerar errores y discutir acerca de las diferencias que existen según el instrumento de medición a utilizar.

Las habilidades generales que deberán ser adquiridas en el área de Medidas, al finalizar el Primer ciclo, son:

- Construir la noción de medición (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad).
- Utilizar instrumentos de medición.
- Realizar mediciones (longitud, moneda, peso, tiempo).
- Estimar medidas (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad).
- Aplicar la medición en diversos contextos. (p. 123).

Es importante destacar que cada tipo de medición debe iniciarse con ideas intuitivas acerca de cada tipo de característica medible, la importancia del tema de medidas radica en su uso en las actividades cotidianas.

Por otra parte en el Programa de Estudio de Matemática, se plantean cinco procesos matemáticos que los estudiantes deben desarrollar en su paso por la escuela de manera transversal, estos procesos son: razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, comunicar, conectar y representar (MEP, 2012). Cada uno de estos procesos debe ser considerado a la hora de plantear las actividades que ayudarán en el desarrollo del área de medidas.

A manera de conclusión, la aprobación de nuevos programas no repara todas las inconsistencias de nuestro sistema educativo, pero sí da una primera herramienta para trabajar con el fin de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas a nivel de educación primaria y por ende tener estudiantes mejor preparados para la educación secundaria y la universidad. Vivimos en una sociedad de cambios a los cuales tenemos que adaptarnos. El área de Medidas es una de las temáticas más cercanas a la vida cotidiana y puede conectarse con cualquiera de las otras áreas de desarrollo, lo que se requiere es creatividad por parte del docente para generar actividades donde se establezcan conexiones y aplicaciones.

Referencias

[1] Alfaro, A.L. y Alpízar, M. Morales, Y., Ramírez, M. y Salas, O. (2013). La formación inicial y continua de docentes de Matemáticas en Costa Rica. Cuadernos de Investigación y formación en Educación Matemática. 8. Número especial, noviembre 2013, 131-179.

[2] Castillo, M. (2010). La educación matemática en el Primer Ciclo de la Educación Primaria, Estado del Arte. Proyecto "Integración Centroamericana por medio de la Reforma Educativa" Fondos del Gobierno de China en Taiwán. Guatemala.

[3] Chamorro, M.C (2003). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En Didáctica de las Matemáticas, Ed M.C Chamorro. Editorial Pearson. España.

[4] Godino, J. Batanero, C., y Roa, R. (2002). Medidad de magnitud y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Mestros, Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada.

[5] Guerrero, A. (s.f). Desarrollo del niño durante el periodo escolar. Recuperado de http://escuela.med.puc.cl/paginas/publicaciones/manualped/desspsicesc.html

[6] Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de estudio en Matemáticas para la Educación general Básica y el Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica: autor.

[7] National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics. Reston: NCTM, Inc.

[8] Piaget, J. (1993). Seis estudios de psicología (traducción de Six études de psychologie, 1964). Editorial Planeta-De Agostni, S.A. Barcelona, España.

Implementación de GeoGebra como herramienta útil para la comprensión de temas de geometría

ARIAS, ADRIANA[I] CALDERÓN, DAYANA

Costa Rica

Resumen

Durante el taller, se les explicará cómo realizar distintas animaciones de temas de geometría, planteados en el plan de estudios del Ministerio de Educación Pública (MEP) de Costa Rica, de manera que los participantes, con el material dinámico que se les otorga durante el taller y con las guías para seguir paso a paso los procedimientos de la animación expuesta (protocolos de construcción), puedan innovar en sus clases con el propósito de que sus estudiantes, puedan generar sus propias conclusiones sobre las diversas formas de visualizar la geometría. Por ejemplo; las animaciones dadas en el taller se les mostrarán primero cómo debería de verse el resultado final, se les planteará una situación donde se determina por qué la visualización es tan importante al momento de una clase, y finalmente se les enseña cómo hacer las animaciones paso a paso con las diversas herramientas que posee GeoGebra.

Palabras clave: GeoGebra, geometría, tecnología, didáctica.

A. Objetivo

Implementar estrategias que permitan dinamizar e innovar las lecciones de geometría mediante la utilización del software GeoGebra.

B. Problemática en que se centra el taller

Actualmente los y las docentes de matemáticas de nuestras instituciones educativas requieren de herramientas que permitan hacer más dinámicas e innovadoras sus lecciones, y así hacer que sus estudiantes logren un aprendizaje significativo de manera individual y colectiva. Utilizando la herramienta GeoGebra, los estudiantes trabajaran comprendiendo los conceptos matemáticos, al observar distintas animaciones, además podrán construir sus propias conclusiones con sus resultados.

El presente taller pretende enseñar diversas utilidades de este software de acuerdo a los nuevos programas de estudios de matemática establecidos por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, a nivel de secundaria. Al respecto, se incluye contenidos como visualización espacial, solidos, ángulos, entre otros. De esta forma los participantes podrán construir luego sus propias animaciones e implementarlas en sus clases para que sus

[I]TEC, Costa Rica. adri.arias.69@gmail.com

estudiantes tengan una visión más óptima de las figuras geométricas. Además, podrán darse la oportunidad de investigar acerca de las aplicaciones del software, por medio del Instituto GeoGebra.

C. Planteamiento del taller

El taller está planteado para realizarse en una sesión de 1 hora con 40 minutos. Primero se hará entrega de material impreso donde se identifica distintas herramientas básicas del software Geogebra de manera que el participante pueda utilizarlo en las construcciones a realizar en el taller. Con ayuda de guías impresas se realizarán diferentes construcciones sobre temas de geometría, así los participantes podrán tener a mano ejemplos para luego aplicarlo en sus lecciones.

D. Fundamentación teórica

El programa GeoGebra, por su carácter dinámico, brinda la posibilidad de enriquecer el tratamiento de los contenidos que proponemos en el taller, por ejemplo la vinculación entre dibujo y figura, el carácter anticipatorio y de validación que nos ofrece la geometría, la vinculación entre la aritmética y la geometría, entre otras.

En relación al carácter dinámico, Arcavi y Hadas (2000) plantean que un ambiente dinámico permitiría a los alumnos construir figuras con ciertas propiedades y así poder visualizarlas de forma más significativa, y al mismo tiempo, les permitiría transformar aquellas construcciones en "tiempo real", lo que contribuiría a la formación del hábito de transformar (mentalmente o por medio de un instrumento). Un ejemplo particular para estudiar variaciones; visualmente sugiere invariantes, así como proporcionar la conformación de las bases intuitivas para justificaciones formales. Podemos agregar en este sentido, lo que plantean Cassina e Iturbe (2000) cuando expresan "el mismo software permite la validación inmediata de los resultados, ya que se puede observar de una manera interactiva si al variar los datos se alteran o no las condiciones establecidas".

En cuanto a cómo abordar los contenidos propuestos en las clases, se da prioridad a enfrentar a los alumnos a prácticas matemáticas, a la resolución de problemas que den lugar a la toma de decisiones y a debates sobre procedimientos, resultados y conclusiones en un ida y vuelta entre teoría y práctica, entre trabajo individual, grupal y colectivo. En estas clases el papel de profesor es acompañar, orientar a los alumnos, animar los debates, evaluar e institucionalizar los contenidos. Por lo anterior, el software Geogebra se convierte en una herramienta que permite maximizar espacios de posibilidad de variación de problemas para que el alumno explore en forma autónoma diversas formas de conocer dichos contenidos en estudio, además, durante el proceso de solución, dicha herramienta permite la búsqueda y exploración de relaciones matemáticas, así como la visualización y exploración del significado de esas relaciones. Para Santos Trigo (2007), "este ciclo de visualizar, reconocer y argumentar son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes pueden practicar sistemáticamente con la ayuda de este tipo de herramientas" (p. 51).

Si bien no dudamos de la importancia de incorporar herramientas tecnológicas en nuestras clases, concordamos con Fioriti (en Ferragina, R., 2012) cuando señala al respecto, los posibles riesgos de su implementación: limitar la enseñanza a "mostrar" lo que se ve en pantalla o vaciar de contenido la enseñanza. En el mismo sentido coincidimos con Arcavi y Hadas (2000) cuando afirman que la incorporación de herramientas tecnológicas, es de poco valor si no se acompaña de situaciones problemáticas que hagan más significativo su uso, y sin la implementación por parte de un docente que proponga preguntas apropiadas en los momentos apropiados, que anime a los estudiantes a tomar postura sobre un problema, a tratar con resultados inesperados, a solicitar justificaciones, a tratar con intuiciones o conocimientos que puedan ser sustentados en una predicción incorrecta, que guíe la discusión, que promueva la coordinación entre diferentes representaciones.

E. Actividades del taller

Guía básica sobre el software GeoGebra

Se trabajara con el programa GeoGebra principalmente por las siguientes dos razones:

- Es una herramienta informática muy versátil y útil para los estudiantes y docentes de Matemática.
- Es un software libre.

GeoGebra es un software de Matemática que reúne geometría, álgebra y cálculo. Lo desarrolló Markus Hohenwarter en la Universidad Atlántica de Florida (Florida Atlantic University) para la enseñanza de matemática.

Al abrir el software aparece una ventana en la cual se pueden identificar cuatro secciones: Barra de herramientas, Ventana de Álgebra, Zona gráfica y Campo de entrada.

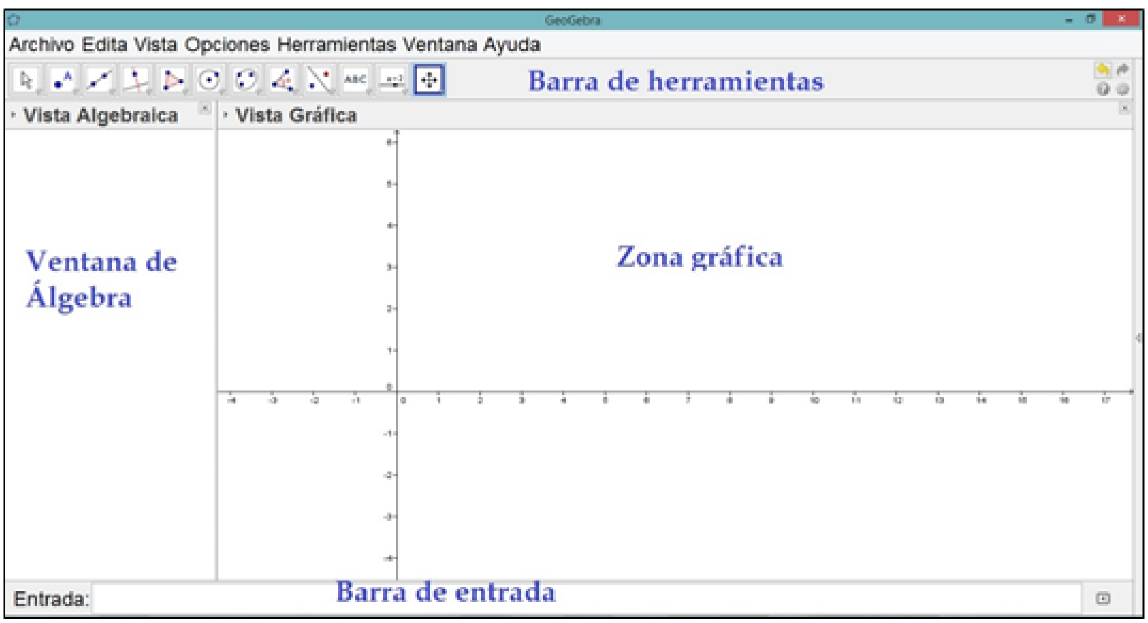


Figure 1: Interfaz del programa GeoGebra

Llevando el mouse y seleccionando las casillas que se encuentran en la Barra de herramientas pueden construirse figuras sobre la Zona gráfica cuyas coordenadas o ecuaciones aparecen en la Ventana de Álgebra.

En la barra de entrada pueden anotarse directamente coordenadas, ecuaciones, comandos y funciones que pasarán a representarse en la Zona gráfica al ingresarse pulsando la tecla "Enter".

Para el trabajo en este taller se hará énfasis en la Zona gráfica y el menú de la parte superior de la pantalla. También se hará referencia a la Ventana de Álgebra, sin entrar en detalles sobre las ecuaciones de los objetos geométricos.

Antes de hacer construcciones se hará un recorrido por las diferentes opciones que brinda el menú del GeoGebra:

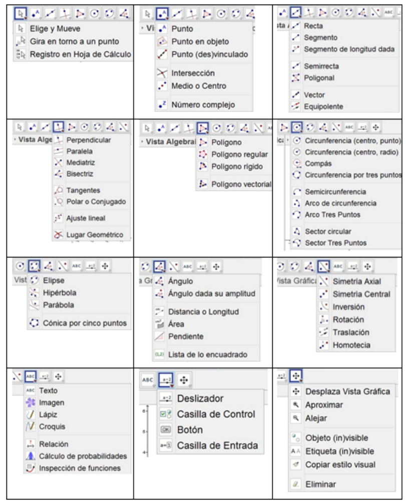


Figure 2: Herramientas disponibles en GeoGebra

F. Construcciones básicas con GeoGebra útiles para la enseñanza de la geometría

Para esta segunda actividad del taller se parte de la siguiente premisa: los y las participantes conocen las herramientas básicas de Geogebra y así que ya podemos iniciar con construcciones básicas, en este taller se realizarán cuatro animaciones, que se trabajará con los participantes paso a paso, siguiendo su protocolo de construcción. A continuación se muestra un ejemplo de una de las guías para los participantes.

Se propone una actividad que se hace referencia en la figura siguiente:

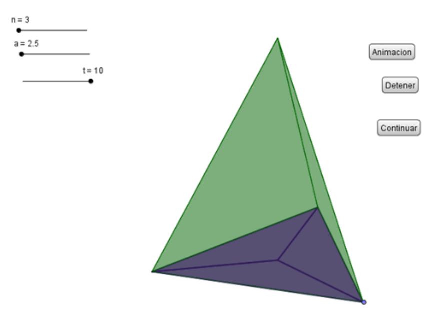


Figure 3: Pirámide dinámica en GeoGebra.

En la animación representada en la imagen anterior se propone crear una pirámide donde, al mover el punto C el estudiante la pueda hacer girar y observar todas sus caras. Además, al activar el botón llamado "Animación", la figura empezará a girar, según las características que le asignemos con los deslizadores de la izquierda; donde "n" determina la cantidad de caras de la pirámide, "a" el tamaño de la misma y "t" hace que la pirámide se abra o se cierre.

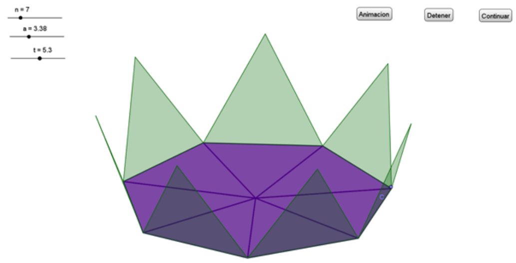


Figure 4: Pirámide creada con GeoGebra.

Para ello se seguirá la enumeración de la siguiente tabla que indican cada paso que debemos realizar para la construcción:

Nº	Nombre	Definición	Comando
1	Punto A	Punto sobre EjeX	Punto[EjeX]
2	Número n	Deslizador(indica el número de lados)	Min=3, Max=20, Incremento=1
3	Número a	Deslizador(indica el volumen de la pirámide)	Min=2.5, Max=5, Incremento=0.001
4	Circunferencia c	Circunferencia con centro A y radio a	Circunferencia[A, a]
5	Punto C	Punto sobre c	Punto[c]
6	Circunferencia d	Circunferencia con centro A y radio 2.5a	Circunferencia[A, 2.5a]
7	Lista lista1	Secuencia[Polígono[Rota[C, 360°i / n, A], Rota[C, 360° (i + 1) / n, A], A], i, 1, n]	Secuencia[Polígono[Rota[C, 360°i / n, A], Rota[C, 360° (i + 1) / n, A], A], i, 1, n]
8	Semirrecta e	Semirrecta que pasa por A, C	Semirrecta[A, C]
9	Punto D	Punto de intersección de d, e	Interseca[d, e]
10	Número t	Deslizador	Min=0, Max=i, Incremento=0.001
11	Punto E	(x(A), y(A) + t)	(x(A), y(A) + t)
12	Recta g	Recta que pasa por E paralela a e	Recta[E, e]
13	Recta b	Recta que pasa por A perpendicular a EjeX	Perpendicular[A, EjeX]
14	Punto B	Punto sobre b	Punto[b]
15	Segmento i	Segmento [A, B]	Segmento[A, B]
16	Segmento j	Segmento [B, D]	Segmento[B, D]
17	Punto F	Punto de intersección de j, g	Interseca[j, g]
18	Lista lista2	Secuencia[Polígono[Rota[C, 360°i / n, A], Rota[C, 360° (i + 1) / n, A], Rota[F, (360i / n)° + (180 / n)°, E], Rota[C, 360°i / n, A]], i, 1, n]	Secuencia[Polígono[Rota[C, 360°i / n, A], Rota[C, 360° (i + 1) / n, A], Rota[F, (360i / n)° + (180 / n)°, E], Rota[C, 360°i / n, A]], i, 1, n]
19	Botón Inicio	Reproducir animación	t=0 IniciaAnimación[t]
20	Botón Pausa	Detener animación	IniciaAnimación[t, false]
21	Botón Continuar	Retomar animación	IniciaAnimación[t, true]

Figure 5: Pasos de construcción.

Un aspecto interesante del Geogebra es que permite extraer imágenes y usarlas en otros programas. Para esto es preciso utilizar las herramientas del menú superior Archivo, en la opción Exporta. De esta forma puede llevar sus figuras al Word o a algún otro procesador de texto. También puede abrirlas con algún manipulador de imágenes (Photoshop, Paint u otro similar) y realizar diferentes acciones con ellas.

En la herramienta "Vista" se encuentra la opción "Protocolo de la Construcción" donde se enumera la secuencia de la construcción realizada; así se puede seguir paso a paso cómo se ha efectuado, en este taller estamos trabajando con protocolos de construcción.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, GeoGebra ofrece características importantes que ayudan a la enseñanza de la geometría:

- Las construcciones geométricas jerarquizadas
- Medio Interactivo.
- Recuperación y recopilación de procedimientos

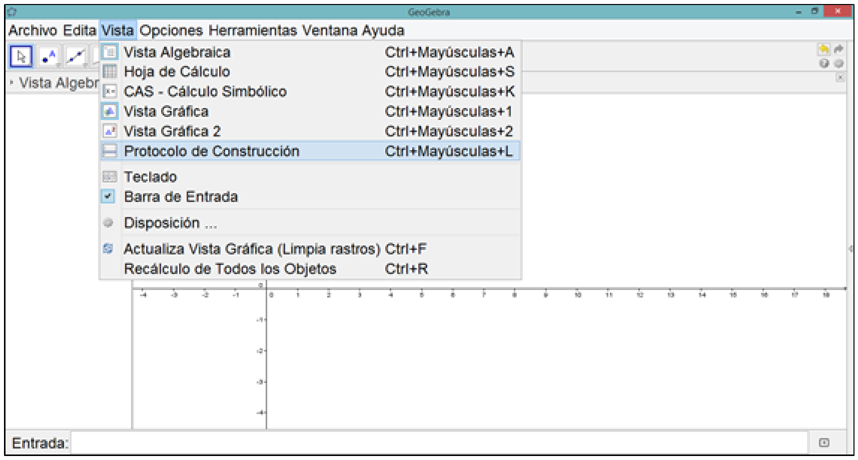


Figure 6: Protocolo de construcción

A través de esto, el estudiante puede crear un vínculo de descubrimiento con el software y apreciar las acciones realizadas cuantas veces sea necesario, ya que permite recolectar los movimientos ejecutados y la información que genera el proceso de construcción.

Sin pretender que la utilización de tecnología en el aula, en este caso el software Geogebra, sea la solución a todos los problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, se considera que es una herramienta mediacional en este proceso, debido a las grandes potencialidades que esta puede prestar a la exploración, acercamiento y adquisición del conocimiento.

Tanto el profesor como el estudiante, al plantearse nuevas situaciones pueden construir una nueva visión del contenido matemático, del proceso de enseñanza y aprendizaje y del papel que cada uno de ellos puede jugar en la construcción del conocimiento; por tanto es importante fortalecer la formación de los profesores, tanto en aspectos matemáticos como pedagógicos para mejorar la enseñanza de las matemáticas, sin recaer en la inconformidad y miedo al uso de herramientas tecnologías como GeoGebra. Los participantes de este taller podrán ingresar a la sitio oficial de Geogebra http://www.geogebra.org, en el momento que deseen y desde ahí descargar las animaciones de su interés, y con la información de este taller, seguir su protocolo para construirla, así podrán modificarlas de según las necesidades de su clase.

Referencias

[1] Arcavi A. & Hadas N. (2002). Computer mediated learning: an example of an approach. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5, 63-85.

[2] Cassina, S., Iturbe, A. (2000) Construcciones geométricas con un software. Recuperado de http://www.educ.ar/educar/site/educar/dr.-geo.html.

[3] Ferragina, R., Amman, S.; Bifano F.; Cicala R.; González C.; Lupinacci L. (2012). GeoGebra entra al aula de matemática. (1a.ed.). Argentina: Miño y Davila.

[4] Hohenwarter, M. y Preiner J. (2009). Documento de Ayuda de GeoGebra. Manual Oficial de la Versión 3.2. Recuperado en junio de 2014 desde: http://www.geogebra.org/help/docues.pdf>.

[5] Santos Trigo, L. (2007) La educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Querétaro. México.

Importancia de la implementación de juegos didácticos en la enseñanza de las matemáticas

BARRIENTOS, LAURA [I] OSORIO, EDWIN ANTONIO.
QUINTERO, RODIL ELADIO.

Honduras

Resumen

El juego es una estrategia importante para conducir al estudiante en el mundo del conocimiento. Además el juego matemático planificado con responsabilidad, cubre la integración de los contenidos de las diversas áreas y entrelaza los ejes transversales de una manera amena y satisfactoria, permitiendo el desarrollo del pensamiento matemático. Este trabajo se realizó gracias a la compilación de diferentes documentos de investigación que fomentan la importancia que tienen los juegos en la enseñanza de las matemáticas. También se basa en la experiencia favorable, obtenida durante la exposición de diversos juegos en centros educativos del país (Honduras). Se presenta además las bases pedagógicas que sustentan el presente documento y que le dan junto a otros elementos el formalismo al trabajo que se ha realizado. Es muy importante tener siempre presente que el fin último y más importante es la mejora de nuestras prácticas educativas como docentes de matemáticas.

Palabras clave: Juegos Didácticos, pensamiento matemático, enseñanza de las matemáticas

A. Introducción

La actividad lúdica es calificada como una de las acciones más agradables conocidas para el ser humano. Este sentimiento de placer debe ser considerado para permitir la inclusión del juego en las aulas de clase. La matemática es un área de conocimiento que en muchas ocasiones su aprehensión no resulta tarea fácil para el aprendiz, como tampoco resulta accesible para muchos compartirla aunque se tenga vasto conocimiento de la misma. Dada esta situación, la intervención de la didáctica es fundamental ya que a través de esta, se proponen métodos y técnicas de enseñanza. Precisamente hablando de técnicas, el juego puede ser utilizado como tal, siempre y cuando responda a las finalidades educativas establecidas y en su estructura cumpla con características esenciales, y pueda ser sustentado en bases pedagógicas, de igual forma su diseño debe regirse en reglas académicas.

El educador dada su labor está llamado a proponer e innovar en sus clases, y el juego bien elegido le favorece y facilita su trabajo, como también fortalecerá en forma integral la formación de sus estudiantes.

[I]UPNFM, Honduras.

Objetivos

1. Determinar la importancia de los juegos didácticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

2. Fomentar en el aula de clases la inclusión de actividades lúdicas para desarrollar el pensamiento matemático.

B. Algo de historia

Según Minerva (2002), "el juego es una estrategia importante para conducir al estudiante en el mundo del conocimiento. Tuvo sus orígenes en Grecia. Desde entonces se ha tomado como una forma de aprendizaje más adaptada a la edad, las necesidades, los intereses y las expectativas de los niños".

El juego es reconocido por todos sin distinción de razas, de credos o ideologías. La idea helénica del juego aparece en la épica de Homero y de Hesíodo y se le concibió como una noción de poder físico, luego pasa a ser parte de la Paideia (palabra griega intraducible), la formación como el juego en los niños

C. Importancia

Torres, (2002), menciona que la didáctica considera al juego como entretenimiento que propicia conocimiento, a la par que produce satisfacción. En este sentido el juego favorece y estimula las cualidades morales en los niños (as) como son: el dominio de sí mismo, la honradez, la seguridad, la atención se concentra en lo que hace, la reflexión, la búsqueda de alternativas para ganar, el respeto por las reglas del juego, la creatividad, la curiosidad, la imaginación, la iniciativa, el sentido común y la solidaridad, pero sobre todo el juego limpio.

Una forma de propiciar estos valores es la inclusión de la competitividad pero con el objetivo de la búsqueda de aprendizaje no para estimular la adversidad ni para ridiculizar al contrincante, sino como estímulo para el aprendizaje significativo. Torres, (2002).

Con los juegos matemáticos se potencializa el desarrollo de aptitudes para aplicar estrategias de pensamiento lógico y creativo, potenciar la toma de decisiones, reafirmar la autoestima, entre otros valores como los descritos anteriormente.

Las estrategias lúdicas están sustentadas en objetos como curiosidades matemáticas, trucos y acertijos que tienen la propiedad de tener, en su esencia, contenidos que permiten explicar el porqué de lo que acontece en esas situaciones.

Es por ello que es menester relacionar la matemática con los juegos sobre todo en la educación inicial como lo dice Rodríguez, (2010) en su artículo "la matemática: ciencia clave en el desarrollo integral de los estudiantes de educación inicial", en el cual considera que los juegos en los que se gana o pierde, favorecen el desarrollo de las conductas éticas, estimulan el desarrollo de los procesos cognitivos, como la atención, percepción, razonamiento e inteligencia lógica y el de las emociones como la inteligencia interpersonal, expresión de sentimientos, auto- control y la autoestima. Cuando se trata de juegos con movimientos, estos favorecen el desarrollo del comportamiento psicomotor y el desarrollo integral de la personalidad.

Por otro lado menciona que, al aprender matemática jugando se mejora la empatía, al permitir que el niño y niña puedan ponerse en la posición de otro en determinadas oportunidades; esto favorece la socialización y se cultiva la tolerancia; se abren espacios para aceptar la diversidad de ideas y personas; también se reflexiona sobre las culturas y creencias; desde luego el valor de la cooperación, el apoyo mutuo y las relaciones humanas.

D. Finalidades del juego

Por su parte Rodríguez, (2010), propone que los juegos en la enseñanza de la matemática permiten: desarrollar la personalidad; formar en las diferentes áreas del currículo; desarrollar social, psicológica, sensorial, motriz y cognitivamente; integrándose con la cotidianidad del estudiante, desarrollando sus potencialidades: psíquicas, emocionales, cognitivas y formando un individuo en valores y con amor por la matemática.

Bases Pedagógicas del Juego

Miguel de Guzmán, (2003), en su artículo "Juegos matemáticos en la enseñanza"establece que son muchos los juegos que se pueden encontrar que conllevan un contenido matemático profundo y sugerente.

Este matemático español menciona las áreas de la matemática en las que el juego está inmerso. Se mencionaran algunas de ellas:

1. En el caso de la aritmética, ésta se encuentra inmersa en los cuadrados mágicos, cambios de monedas, juegos sobre pesadas, adivinación de números.

2. El álgebra por su parte interviene en muchos acertijos sobre edades, medidas, en el famoso juego de los 15, en el problema de las ocho reinas.

3. La probabilidad es sin duda alguna la base de todos los juegos de azar, de los que precisamente nació.

4. La lógica da lugar a un sinfín de paradojas y acertijos muy interesantes que llaman la atención por su profundidad y por la luz que arrojan sobre la estructura misma del pensamiento del lenguaje.

Por ello en el artículo "Juegos matemáticos en la enseñanza"menciona que el juego bueno, el que no depende de la fuerza o maña físicas, el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático.

La matemática así concebida es un verdadero juego que presenta el mismo tipo de estímulos y de actividad que se da en el resto de los juegos intelectuales. Tanto en el juego como en la aprehensión de las matemáticas uno aprende las reglas, estudia las jugadas fundamentales, experimentando en partidas sencillas, observa a fondo las partidas de los grandes jugadores, sus mejores teoremas, tratando de asimilar sus procedimientos para usarlos en condiciones parecidas, trata finalmente de participar más activamente enfrentándose a los problemas nuevos que surgen constantemente debido a la riqueza del juego, o a los problemas viejos aún abiertos esperando que alguna idea feliz le lleve a ensamblar de modo original y útil herramientas ya existentes o a crear alguna herramienta nueva que conduzca a la solución del problema. Guzmán, (2003).

Pero Guzmán, también nos aclara, con mucha precisión, cordura y sobre todo para evitar malentendidos, algunas distinciones y es que "La matemática es, en gran parte, juego, y el juego puede, en muchas ocasiones, analizarse mediante instrumento matemáticos. Pero, por supuesto, existen diferencias substanciales entre la práctica del juego y la de la matemática. Generalmente las reglas del juego no requieren introducciones largas, complicadas, ni tediosas. En el juego se busca la diversión y la posibilidad de entrar en acción rápidamente".

En el caso de las matemáticas aunque ?muchos problemas matemáticos, incluso algunos muy profundos, permiten también una introducción sencilla y una posibilidad de acción con instrumentos bien ingenuos, pero la matemática no es sólo diversión, sino ciencia e instrumento de exploración de su realidad propia mental y externa y así ha de plantearse, no las preguntas que quiere, sino las que su realidad le plantea de modo natural, Guzmán, (2003).

Según (Cofré A. y Tapia L., 2003) "?en la educación el juego no ha de ser un fin en sí, sino uno de los medios (cognoscitivo, afectivo y social) más eficaces para educar al niño".

Características del juego didáctico

Como se ha descrito en este artículo un juego didáctico no sólo favorece a la adquisición de conocimientos, sino que también desarrolla actitudes morales en los participantes, por tanto debe incluir en su esencia algunas características que diste del juego meramente placentero pero sin intención didáctica.

Dentro de las características que se pueden observar en un juego didáctico en general, Sánchez y Casas (1998) dicen que son cuatro las características que debe reunir un buen juego para ser empleados en clase de Matemáticas:

1. Tener reglas sencillas y desarrollo no extenso.
2. Ser atractivos en su presentación y desarrollo.
3. No ser puramente de azar.
4. A ser posible, juegos que el alumno conozca y practique fuera del ambiente escolar y que puedan ser "matematizados".

En este escrito consideramos otras características más que un juego didáctico debe poseer:

- Intención didáctica.
- Poseer un contenido
- Objetivo didáctico.
- Un número de jugadores.
- Una edad específica.
- Diversión.
- Curiosidad
- Motivación
- Trabajo en equipo.
- Competición.

El juego no sólo debe cumplir con estas características sino también deben responder a las exigencias curriculares vigentes en el sistema educativo, ya que estos son un recurso didáctico y como tal su inclusión en el aula de clase debe ser meditada y previamente planificada.

Clasificación

Juegos de ejercicio: Pretenden la asimilación de contenidos matemáticos, acompañada de un placer y de un sentimiento de potencia. Además:

1. Hacen referencias a tópicos de los programas de Matemáticas.
2. Son un recurso para un aprendizaje más rico.
3. Sirven para adquirir o afianzar conceptos o algoritmos.

Juegos simbólicos: Fortalece la comprensión, la realización de deseos y la liquidación de conflictos. Además este tipo de juegos:

1. Desarrollan procedimientos de la Resolución de Problemas.
2. Activan procesos mentales.
3. Preparan para el estudio de modelos matemáticos.
4. Son los que más resistencia encuentran en el profesorado pues sus efectos no son inmediatos ni fácilmente medibles.

El juego de Reglas: Resulta de la organización colectiva de las actividades lúdicas. Además, son conocidos por los alumnos fuera del ámbito escolar, se pueden utilizar sin variaciones, o con cambios más o menos profundos.

E. Ventajas

Según Torres, (2002), El juego tomado como estrategia de aprendizaje no solo le permite al estudiante resolver sus conflictos internos y enfrentar las situaciones posteriores, con decisión, con pie firme, siempre y cuando el facilitador haya recorrido junto con él ese camino, puesto que el aprendizaje conducido por medios tradicionales y desconocimiento de los aportes tecnológicos y didácticos, tiende a perder vigencia.

También describe que el juego en el aula sirve para facilitar el aprendizaje siempre y cuando se planifiquen actividades agradables, con reglas que permitan el fortalecimiento de los valores: amor, tolerancia grupal e intergrupal, responsabilidad, solidaridad, confianza en sí mismo, seguridad, que fomenten el compañerismo para compartir ideas, conocimientos, inquietudes, todos estos valores facilitan el esfuerzo para internalizar los conocimientos de manera significativa y no como una simple grabadora.

Sánchez y Casa ya en 1998, citado por Rodríguez, (2010), nos ofrece una gama de ventajas que trae consigo el uso de juegos en el proceso de enseñanza- aprendizaje:

a) Mejora la actitud de los alumnos ante las matemáticas.

b) Desarrolla la creatividad de los alumnos, acostumbrándoles a enfrentarse con problemas que no tienen una solución determinada de antemano aplicando un algoritmo.

c) Desarrollar estrategias para resolver problemas.

d) Desarrolla la personalidad.

La acertada inclusión de un buen juego didáctico no solo favorece al desarrollo integral del estudiante sino que también favorece a la labor docente haciendo esta actividad más dinámica, amena, innovadora, creativa, eficiente y eficaz, donde su ingenio se convierta en eje central de la actividad.

Algunas sugerencias antes de realizar los juegos: que propone Torres (2002)

1. No juegue por pasar el tiempo, es decir, cubrir el horario.
2. Revise y analice las áreas del nuevo diseño curricular y ajuste el contenido a la técnica del juego.
3. Relacione los ejes transversales y los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales a los objetivos del juego.
4. Adapte el juego a la edad, a los intereses, a las necesidades, a las expectativas de los jugadores, no a los suyos.
5. Recuerde que cada juego es una oportunidad del alumno para fomentar los valores y los conocimientos.
6. Haga énfasis en las actividades que realice con la finalidad que los alumnos se interesen por ellas.
7. Cambie de actividad cuando observe que el grupo se cansa.
8. Todo el material que use debe ser atractivo, funcional y durable. Esto incentiva la participación del jugador.
9. Establezca las reglas del juego. Ajústelas con los estudiantes para fomentar la comunicación, la participación, la conducta exigida, los movimientos, el tiempo del juego, entre otros.
10. De oportunidad a los estudiantes para que aprendan a dirigir el juego.
11. Evalúe justa y objetivamente la satisfacción personal de cada uno y la del grupo mayor, el qué y para qué aprende con ese juego.
12. Pregunte sobre la forma como hacer un análisis crítico de la sesión realizada.
13. Practique el juego antes de llevarlo a los jugadores. Recuerde que si descubren su talón de Aquiles, pierde la autoridad y el respeto.
14. Prepare todo antes de realizar el juego, cualquier detalle coarta la motivación para ejecutar el juego.

G. Conclusión

Como conclusión podemos decir que al ser el juego una actividad gustada por el ser humano desde su infancia, los profesores debemos aplicarlos como un medio didáctico para obtener muy buenos resultados en el proceso de enseñanza-aprendizaje y así desarrollar el pensamiento lógico de los estudiantes que muy pocas veces se ve reflejado en esta disciplina de estudio.

La inclusión del juego en el aula de clase, hará que esta se desarrolle de forma agradable y cobre interés para el estudiante, siempre y cuando éste sea apto para el tópico que se desea enseñar.

Referencias

[1] Torres, C.M. (2002). El juego: una estrategia importante Educere, vol. 6, núm. 19, octubre-diciembre, 2002, pp. 289-296, Universidad de los Andes Venezuela, recuperado en: http:/www.redalyc.org/articulo.oa?id=35601907 el 06 de junio de 2014.

[2] Rodríguez, M.C. (2010). La matemática: ciencia clave en el desarrollo integral de los estudiantes de educación inicial Zona Próxima, núm. 13, pp. 130-141, Universidad del Norte Colombia recuperado de: http:/www.redalyc.org/articulo.oa?id=85317326009 el 05 de junio de 2014.

[3] Guzmán, M. d. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. pp.1-38.

[4] Muñoz, P. A. (2013). Juegos y materiales para construir las matemáticas en educación primaria. pp.1-60.

Resultados del proyecto: Simulaciones para la Enseñanza de la Geometría

BORBÓN, ALEXANDER[I] GUTIÉRREZ, MARCO

Costa Rica

Resumen

En este documento se describen los fundamentos y resultados obtenidos después del trabajo realizado en el proyecto que se denominó SIPEG (Simulaciones para la enseñanza de la geometría). Entre los objetivos que se plantearon en este proyecto estuvo el diseño, validación e implementación de simulaciones y guías de trabajo con problemas matemáticos para cada uno de los objetivos del área de geometría que fueron identificados en el nuevo programa de estudio del Ministerio de Educación Pública, para el nivel de sétimo año. Además, se realizó una investigación cuantitativa sobre el impacto en el aprendizaje de los estudiantes participantes después del uso de estas unidades didácticas, todas ellas con la validación por parte de jueces expertos. Para la recolección de la información se llevó a cabo una intervención pedagógica en el aula con estudiantes de octavo nivel, con la aplicación de las simulaciones creadas con el uso del programa gratuito GeoGebra, esto para realizar una comparación estadística sobre conocimientos adquiridos en geometría. En un segundo momento se realizó la intervención en el aula con estudiantes de sétimo año, donde fueron aplicados los diferentes problemas que se plantearon en cada una de las guías. Para la medición cuantitativa se aplicaron dos pruebas (pre-test y pos-test) de conocimiento sobre resolución de problemas en el área de geometría, esto para establecer el alcance de las habilidades en el conocimiento matemático. Para la valoración de la actitud de los estudiantes ante la resolución de problemas se aplicaron dos diferenciales semánticos. Entre los principales resultados de la investigación se tiene que no se encontraron diferencias significativas en el sentir de los estudiantes al enfrentarse a los problemas matemáticos cuando se utiliza la metodología tradicional contra la metodología de resolución de problemas, sin embargo, sí se encontraron diferencias significativas en la percepción hacia los problemas a favor de los estudiantes que utilizaron la metodología de resolución de problemas, por último, se determinó que la metodología tradicional obtiene mejores resultados que la metodología de resolución de problemas al enfrentarse a un test de conocimientos matemáticos.

Palabras clave: Geometría, resolución de problemas, simulación, sétimo año, GeoGebra.

A. Introducción

Santos (2011), indica que:

[I]TEC, Costa Rica.

> Las propuestas recientes del currículum sugieren que los estudiantes utilicen herramientas computacionales en sus experiencias de aprendizaje. Sin embargo, ante el notable desarrollo de la tecnología y el reconocimiento de distintos instrumentos pueden ofrecer diferentes caminos y oportunidades para los estudiantes en los procesos de comprender y resolver problemas matemáticos, se hace necesario investigar el potencial que ofrecen algunas de estas herramientas en la construcción del conocimiento de los estudiantes.

Por otro lado, este autor afirma que "entre las reflexiones importantes alrededor de los temas de investigación en la educación matemática se destaca el reconocimiento de que aprender matemáticas va más allá de que el estudiante domine un conjunto de reglas, algoritmos, fórmulas o procedimientos para resolver listas de problemas rutinarios."(Santos, 2011, p.1). La resolución de problemas viene siendo un tema de gran relevancia en la investigación matemática de los últimos años, donde en el currículum de matemática y las prácticas para llevar a cabo una notable y significativa educación matemática incorpora esta dinámica en muchos países del mundo, incluyendo nuestro país a partir del año 2013.

Bajo esas premisas, en esta investigación se planteó como propósito general el diseño de simulaciones con el software GeoGebra como apoyo para la enseñanza de temas de geometría, estipulados en el programa de estudio del Ministerio de Educación Pública (en adelante MEP), junto con una guía de problemas matemáticos enmarcados en contextos particulares, esto con la finalidad de producir situaciones problema, con la intención de ilustrar la aplicabilidad de la matemática en escenarios comunes y con ello visualizar su importancia en la resolución de problemas de la vida cotidiana. Además, se incluyó la evaluación cuantitativa del impacto pedagógico sobre el aprendizaje, de los contenidos matemáticos en geometría para el nivel de sétimo año, en la que el programa GeoGebra y la guía de problemas constituyeron herramientas pedagógicas innovadoras, ajustándose a la propuesta del MEP para la educación matemática del país. En efecto, la investigación se desarrolló con la intención de generar una guía didáctica que incorporara un conjunto de problemas matemáticos junto con una secuencia de simulaciones dinámicas para el aprendizaje de los temas de geometría en sétimo año, que permitieran desarrollar procesos de enseñanza y de aprendizaje significativos, de acuerdo con la metodología de resolución de problemas implementada por el MEP a partir del año 2013.

La investigación se justificó en la intención de construir materiales didácticos que, enmarcados en los parámetros oficiales de nuestro país, posibiliten al docente de matemática acceder de una manera más sencilla a una guía orientada en la nueva metodología, ofreciendo diversos problemas para el trabajo de aula con los estudiantes y permita la visualización mediante los efectos dinámicos creados por las distintas simulaciones. El uso de la computadora como facilitador de los procesos de aprendizaje de la matemática se enmarcó bajo la perspectiva del uso de programas de software libre. De esta manera, la investigación aporta conocimientos y productos que se espera contribuyan a facilitar los procesos de aprendizaje de la matemática en la educación media, a la vez que propician el uso de la tecnología computacional en dichos procesos y acerque al docente y a los estudiantes al empleo de programas computacionales de software libre como facilitador en el proceso de aprendizaje de la matemática.

Con la incorporación del nuevo programa de estudio se hace necesario un replanteamiento de la metodología y de los recursos que se utilizan tradicionalmente para la enseñanza de la matemática; dentro de estas modificaciones corresponde un cambio de estrategias e implementación de métodos que logren que el estudiante sea el constructor de su propio conocimiento, que garantice una buena adquisición de competencias matemáticas, que logre diseñar estrategias adecuadas para la resolución de problemas, así como una comunicación de sus resultados. Con lo que respecta al profesor, dentro del proceso de lo que se denomina "institucionalización del conocimiento", se hace cada vez más necesario el recurso de apoyo didáctico, como el material concreto y el uso de la tecnología, con lo cual se necesita que el docente conozca y maneje adecuadamente programas computacionales que fortalezcan la enseñanza de la matemática, y que a la vez promueva una verdadera construcción del conocimiento matemático por parte del alumno. La riqueza en el uso de programas computacionales como apoyo para la enseñanza de la matemática es innegable, y cada vez más debe atribuírsele la importancia que merece, se convierte en una herramienta útil para los procesos de visualización, de conjetura y de aprendizaje significativo de la matemática. En estos procesos las diversas tecnologías computacionales ha contribuido en los últimos diez años a desarrollar nuevas estrategias de aprendizaje, propiciando un nuevo sentido a los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

De hecho, la NCTM (2000) identifica el uso de la tecnología como un elemento esencial que debe sustentar las propuestas curriculares:

> Las computadoras y las calculadoras cambian lo que los estudiantes pueden hacer con las representaciones convencionales y expandan el conjunto de representaciones con las que trabajar. Por ejemplo, los estudiantes pueden mover, invertir, reducir, visualizar relaciones a través de programas de utilidades o software dinámico. Cuando los estudiantes aprenden a utilizar estas nuevas herramientas versátiles, pueden también analizar las formas en que algunas representaciones que se realizan empleando la tecnología difieren de las representaciones convencionales (p.68-69).

En la propuesta que plantea el MEP incluye de forma vinculante el uso de la tecnología para la enseñanza de la matemática, esto como recurso de mediación pedagógica en el contexto de la resolución de problemas, específicamente en el programa de estudio vigente desde el año 2013 se dice que:

> El uso de tecnologías es central para enriquecer y redimensionar la resolución de problemas y las estrategias educativas. En estos planes de estudio se incorporan mediante el tratamiento de varios tópicos, aumentando su uso con el avance en los años lectivos. Esto se hace por medio de indicaciones puntuales, así como otras que se colocan al final de cada área en cada ciclo. La selección de algunos contenidos asume este enfoque (como las rotaciones en el Ciclo diversificado). No obstante, las habilidades específicas que se incluyen son relativamente pocas. Esto es así precisamente porque el país no posee todas las condiciones formativas para una introducción más intensa. La forma en que se coloca en los planes, sin embargo, permite que se puedan usar las tecnologías en diversas condiciones. Con el tiempo se deberá intensificar el uso de las tecnologías.

Es importante mencionar que el uso de la tecnología como recurso pedagógico requiere de una planificación, y en sí misma un conocimiento adecuado del software, esto permitirá que su uso sea más efectivo, que sea compatible con los objetivos que se desean alcanzar, que su empleo se centre en el aprendizaje, y en consecuencia se evitará un uso inapropiado y poco efectivo de dicha tecnología.

Con respecto a esta afirmación en el programa del MEP se indica que:

> El uso de tecnología en el aula debe hacerse de manera apropiada. Existen diferencias en los fines y posibilidades de cada tecnología. Es necesario tener muy claro que el uso de tecnologías debe hacerse en función estricta del aporte que ofrezca al logro de fines de aprendizaje consignados, no debe adoptarse su uso por el valor intrínseco de la tecnología, sea cual sea éste. (MEP, p.69).

En este proyecto se empleó el recurso tecnológico mediante la construcción de simulaciones con ayuda del programa GeoGebra, esto permitirá que el docente pueda tener en ellas un apoyo para que el estudiante visualice, explore y conjeture, logrando así un conocimiento mucho más natural, y con ello obtener una adecuada formación matemática, reduciendo así la barrera que puede existir entre el estudiante y quién plantea el conocimiento o saber.

Es conveniente considerar que aunque sea de una forma paulatina y tal vez escalonada, la educación tiene la obligación de centrar su atención en preparar a individuos pensantes, críticos y capaces de utilizar los medios y recursos tecnológicos disponibles para su formación, pero no dejamos de lado que nuestra posición se centra en que se debe tener claro cuál es la educación que se desea impulsar, para que la tecnología juegue un papel importante en la labor educativa. La labor educativa será eficaz y tendrá éxito cuando también los docentes estén adecuadamente preparados para hacer frente a las nuevas decisiones en sus creencias y, por ende, los cambios que la tendencia actual le hace tomar, por tanto el docente debe poseer un conocimiento que va más allá del nivel que enseñará y ser capaz de adaptarse a las variaciones de los métodos. Bajo la perspectiva de la nueva metodología que fue impulsada por el MEP es necesario que el docente adquiera una serie de competencias tales como: compromiso, preparación, organización, ser innovador y entusiasta por conocer las nuevas tecnologías, esto con el fin de que su enseñanza esté acorde con los tiempos actuales. En el nuevo planteamiento que se propone en el plan de estudio sin duda alguna el docente tiene que estar preparado, debe adaptar sus métodos de enseñanza y sobre todo conocer la corriente pedagógica a la que debe orientar su enseñanza. Por esa razón en este proyecto se presenta un insumo de recursos tanto con el uso de la tecnología como la propuesta de problemas que faciliten la comprensión del docente en como debe re-direccionar su propuesta de enseñanza.

En esta nueva reforma educativa el pensamiento del docente es importante para el cumplimiento de los objetivos que en ella se plantean. El profesor no actúa únicamente como un técnico que aplica instrucciones, sino es un constructor que asimila la información, es reflexivo, toma decisiones, genera instrumentos y conocimientos, actúa y posee creencias que influyen en la práctica profesional.

Los nuevos programas de estudio al incorporar un aprendizaje basado en competencias presentan un gran reto para lograr diferenciar aquellos saberes que deben ser básicos y los que deben ser imprescindibles. Con esta corriente educativa se busca promover un aprendizaje de la matemática bajo la premisa de una formación del individuo en las condiciones actuales y que estén enmarcadas en las competencias matemáticas.

Las innovaciones curriculares en matemáticas son esenciales porque se logra superar en gran medida el estancamiento que en forma natural los sistemas educativos conservan donde éstos se convierten en monótonos debido a las prácticas tradicionales, improvisadas y hasta mecánicas de los profesores. Los cambios curriculares representan una modificación en la visión y en la forma de enseñar, por ende son “inevitables ”y “necesarios”, que a su vez incorporan algunos elementos fundamentales como lo son la adaptación a este proceso de cambio, el conocimiento y aplicación de una nueva corriente filosófica en el campo de la educación y la disposición que tenga el profesor para enfrentar este cambio de forma adecuada, modificando sus prácticas tradicionales, que ya por si mismas están arraigadas desde su formación profesional. Los nuevos programas de estudio, al incorporar un aprendizaje basado en resolución de problemas, presentan un gran reto para lograr que esta dinámica sea fundamental en el proceso de enseñanza.

B. Metodología de resolución de problemas

La resolución de problemas ha sido ya por más de tres décadas una corriente pedagógica que ha sido incorporada en la investigación matemática mundial y en los currículums actuales de muchos países. Si bien es cierto, existe aún una discusión sobre su definición e identidad, autores como Schoenfeld y Pólya proponen su génesis y principios fundamentales que orientan esta forma de aprender matemáticas.

Pólya y Schoenfeld dedican su exposición en resaltar la importancia que el estudiante sea el constructor de su conocimiento, que realice un trabajo similar al que realiza un matemático a la hora de proponer sus hallazgos y resultados. En este proceso se establece un posible mecanismo que logre guiar de una manera más natural al estudiante en el encuentro de su conocimiento mediante las llamadas heurísticas.

La resolución de problemas se identifica como una forma de pensamiento, de tal forma que se involucre tanto al profesor como al alumno en la construcción del conocimiento, que se busquen diversas maneras o estrategias para resolver una situación problema y que lo trascendental no sea únicamente brindar una respuesta al problema, sino identificar y comprobar diversas maneras de representar, explorar y resolver el problema.

Schoenfeld (1985, pipi) indica sobre la resolución de problemas que "aprender a pensar matemáticamente involucra más que tener una gran cantidad de conocimiento de la materia al 'dedillo'. Incluye ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina, usar el conocimiento propio eficientemente, y comprender y aceptar las reglas tácticas del juego".

En esta manera de concebir el aprendizaje de la matemática es fundamental el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante, esto quiere decir que es muy importante que éste se involucre en las actividades problema que se le propongan, esto con el objetivo que se refleje un verdadero quehacer matemático. Es decir, se reconoce la importancia del proceso de construcción del conocimiento matemático.

En forma general el gran reto de la enseñanza de la matemática basado en la resolución de problemas es crear ambientes que reflejen esta práctica, es decir, actividades que fomenten un espíritu de investigación, propio de las tareas en la creación del conocimiento matemático.

C. La resolución de problemas en los nuevos programas

Autores como Pólya y Schoenfeld tienen aportes importantes en la resolución de problemas, cada uno proponiendo sus ideas y consideraciones, y desde esa perspectiva se han fundamentado los nuevos programas de estudio, donde se incorpora una visión de las matemáticas mucho más realista y cercana al contexto, que pretende involucrar al estudiante en el proceso de construcción de conocimientos, que se valore las matemáticas, y que el estudiante deje de cuestionarse ¿esto para qué me sirve?, sino que interiorice en la rama y se siente motivado por estudiar y aprender matemáticas.

Generalmente el estudiante aprende definiciones, teoremas, algoritmos y trata de generalizarlo para toda situación nueva, sin embargo con esta propuesta se espera reconstruir esa visión y poner al estudiante como protagonista del proceso de aprender matemáticas.

Es importante resaltar que desde el contexto de la educación media en los nuevos programas de estudio, se propone que se tome en cuenta cuatro pasos o momentos centrales para el aprendizaje de los conceptos:

1. Propuesta de un problema.
2. Trabajo independiente del estudiante.
3. Discusión interactiva y comunicativa.
4. Clausura o cierre.

En el contexto donde se desarrolló este proyecto, se buscó que el apoyo de las guías de problemas matemáticos así como el empleo de los recursos tecnológicos con las simulaciones creadas con el programa GeoGebra sirvieran de insumo para aportar con mayor naturalidad a la institucionalización de los saberes, que su utilización en el aula aportara los conocimientos adecuados y correctos y lograra seguir la secuencia de pasos que se mencionó anteriormente.

D. Uso de las tecnologías en resolución de problemas

Como se dijo anteriormente, en la metodología de resolución de problemas también se contempla el uso de la tecnología como punto central para enriquecer y redimensionar tanto a dicha metodología como a las estrategias educativas. En este plan de estudio se recomienda su incorporación mediante el tratamiento de varios tópicos, aumentando su uso con el avance en los años lectivos. Esto se puede hacer por medio de indicaciones puntuales, así como otras que se colocan al final de cada área en cada ciclo.

Este proyecto fue elaborado con el fin de promover cada vez más el uso de la tecnología en el aula de matemática y, en particular, con el diseño de simulaciones para apoyar la enseñanza de la geometría de acuerdo al nuevo plan de estudio; además de facilitar la tarea en la resolución de problemas aprovechando las facilidades que ofrecen las nuevas tecnologías, donde se promueve la construcción del pensamiento matemático.

El uso de las simulaciones en las distintas actividades que fueron desarrolladas en este proyecto, permitió que los estudiantes se sintieran más motivados, despertando una curiosidad por construir sus propias deducciones o conjeturas, que sin duda alguna, es lo que se desea reflejar en la resolución de problemas.

E. Metodología

El objetivo principal de la investigación fue diseñar, implementar y validar un conjunto de simulaciones con el programa GeoGebra para apoyar el desarrollo de algunos objetivos propuestos en el programa de la educación secundaria en el área de la geometría para el nivel de sétimo año, la población a la que va dirigido el producto final es justamente la de sétimo nivel de secundaria de nuestro país. El proyecto logró un producto final que consiste en dos libros dirigidos a Geometría de Sétimo año que utilizan las simulaciones realizadas y la investigación como tal es analizar el impacto de este producto sobre el aprendizaje de los estudiantes una vez aplicadas las simulaciones.

Para llevar a cabo el estudio se tomó la muestra por criterios valorados por los investigadores, como la cercanía y disponibilidad de participación, para ello se contactaron algunos colegios y se escogieron bajo los criterios de interés del profesor participante y tipo de colegio, luego se solicitaron los permisos correspondientes para aplicar los cuestionarios. Los colegios que participaron fueron tres colegios de la provincia de Cartago.

Desde el inicio de la investigación se encontraron algunas dificultades que se fueron solventando. La primera dificultad se dio porque el Ministerio de Educación Pública (MEP) implantó los nuevos programas con la metodología principal de resolución de problemas de forma sorpresiva a inicios del año 2013, esto quitó la posibilidad de contar con grupos experimentales y grupos de control del mismo nivel; bajo esta circunstancia se decidió tomar a los estudiantes de octavo año como grupos de control, ellos cursaron el nivel de sétimo el año anterior bajo la metodología tradicional y se consideró que era la única posibilidad de tener dicho grupo de control.

Durante la investigación se aplicó un pre-test y un post-test a los estudiantes, la aplicación de dichos test se dio a lo largo del año 2013 en varias etapas:

1. Se aplicó el pre-test a los estudiantes de sétimo año al inicio del ciclo lectivo, entre los meses febrero y marzo.

2. Se realizó una clase de refuerzo para los estudiantes de octavo con la metodología tradicional y así evitar un poco el sesgo provocado por las vacaciones de estos estudiantes, esta clase tenía una duración de 80 minutos. En la clase inmediata posterior se aplicaba el post-test a estos estudiantes de octavo nivel, este fue aplicado también en los meses de febrero y marzo.

3. Al final del año (después de estudiar el tema de geometría) se le aplicó el post-test a los estudiantes de sétimo.

El pos-test fue aplicado en el mes de diciembre, inicialmente se tenía planeado aplicarlo en junio para hacer el análisis de datos en la segunda mitad del año, sin embargo, de acuerdo a los nuevos programas del MEP el tema de geometría, que siempre se daba en el primer trimestre, pasó a ser estudiado en el último trimestre. Esta fue otra dificultad que se dio en la investigación ya que los datos para hacer el estudio cuantitativo llegaron hasta el final del año.

F. Métodos, técnicas e instrumentos de investigación

El proyecto se dividió en dos etapas, la primera en donde se dio el diseño, implementación y validación de las guías en conjunto de la creación de las simulaciones que las acompañaban y que, eventualmente, finalizó con la publicación de dos libros dirigidos a geometría de sétimo año y la segunda etapa en donde se llevó a cabo la medición del impacto del material realizado en la enseñanza, al ser utilizado por profesores de matemática en sus aulas.

Para la primera etapa, una vez que se tenían las versiones preliminares de las guías y las simulaciones, se llevó a cabo una validación por parte de expertos, para eso se les solicitó la ayuda a nueve profesores de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Para la recolección de la información de la segunda etapa se realizaron tres instrumentos.

1. Un diferencial semántico compuesto por 10 parejas de antónimos para medir cómo se sienten los estudiantes al enfrentarse a un problema matemático, las parejas utilizadas fueron: Feliz-Triste, Emocionado-Aburrido, Confiado-Preocupado, Confundido-Claro, Deprimido-Alegre, Calmado-Angustiado, Optimista-Pesimista, Tonto-Inteligente, Bien-Mal y Frustado-Motivado. De manera intuitiva se tiene la hipótesis de que los estudiantes, después de utilizar la metodología de resolución de problemas, estarán más acostumbrados a enfrentarse a los problemas y obtendrán mejores resultados en este diferencial semántico que los estudiantes que utilizaron la metodología tradicional.

2. Un diferencial semántico compuesto de 10 parejas de antónimos para medir las creencias de los estudiantes sobre resolver un problema matemático, las parejas de antónimos fueron: Fácil-Difícil, Aburrido-Divertido, Rápido-Lento, Claro-Confuso, Complicado-Sencillo, Cansado-Descansado, Necesario-Innecesario, Útil-Inútil, Tedioso-Entretenido, Feo-Bonito. De igual forma, se esperaba que los estudiantes al aplicar la metodología de resolución de problemas se acostumbraran a ellos y los vieron desde una mejor perspectiva que los estudiantes que utilizaron la metodología tradicional.

3. Un cuestionario compuesto por 10 preguntas matemáticas, la mayoría de ellas de desarrollo con algunas de respuesta breve. En este cuestionario se buscaba medir los conocimientos matemáticos que tenían los estudiantes al momento de responder. Los temas que se trabajaron son: rectas perpendiculares, bisectriz, mediatriz, ángulos y segmentos congruentes, construcciones geométricas, ángulos adyacentes, par lineal, ángulos entre dos paralelas y una transversal, suma de los ángulos internos y externos de un triángulo, desigualdad triangular, ángulos internos y externos de un cuadrilátero, ángulos complementarios, ángulos congruentes, área de polígonos y conceptos básicos de geometría.

G. Procedimientos de recolección de información

En la primera parte de la investigación donde se realizó la evaluación de las guías por parte de expertos se le brindaron dos guías a cada experto además de los archivos de las simulaciones y el cuestionario sobre aspectos que tenían que revisar de la propuesta, posteriormente los expertos devolvían el cuestionario y las guías con la información solicitada.

Para la recolección de los datos de la segunda parte de la investigación se hicieron varias visitas a los distintos colegios:

1. En una primera visita se realizó la sesión de refuerzo con los estudiantes de octavo año para que recordaran los conceptos vistos en sétimo nivel.
2. Se realizaron algunas visitas posteriores para poder aplicar el pre-test a los grupos de sétimo año y el post-test a los de octavo.
3. A lo largo del desarrollo del tema de geometría se realizaron un par de visitas para observar el desarrollo de los temas por parte del profesor. En estas oportunidades también se realizaron entrevistas informales al profesor.
4. Por último, cuando el profesor había finalizado el tema de geometría, se realizaron algunas visitas para poder aplicar el post-test a los estudiantes de sétimo nivel.

H. Resultados

En los diferenciales semánticos se dio una clara disminución de los resultados al comparar la aplicación del pre-test al inicio del año lectivo con respecto al post-test aplicado al final del año lectivo. La hipótesis inicial del proyecto era que la metodología de la resolución de problemas lograría que los estudiantes mejoren su percepción hacia los problemas matemáticos, resultado que no se dio; sin embargo, la disminución fue mayor en los estudiantes que utilizaron la metodología tradicional. Es decir, en ambos casos la percepción empeora, pero la resolución de problemas logra que no disminuya en forma significativa.

Se debe profundizar más sobre este resultado inesperado e identificar los factores que hacen que esta percepción empeore, sobre todo se debe analizar bien la transición de los estudiantes de primaria a secundaria. Se debe revisar, por ejemplo, el tipo de problemas que se ven en primaria y la forma en que los maestros los resuelven y contrastarlo contra los problemas que se trabajan en secundaria. También es importante revisar la definición de problema que tienen los maestros y los profesores ya que es fácil confundir el término “problema”con el término “ejercicio”y esto podría estar afectando los resultados de los diferenciales semánticos.

Dentro de los resultados preocupantes de esta diferencia entre pre-test y post-test es que los estudiantes tienden a creer que los problemas matemáticos son más aburridos, lentos, cansados, innecesarios, inútiles y feos que cuando entraron a sétimo año, esto cuando se utiliza la metodología tradicional, resultado que no varía mucho con respecto a la metodología de resolución de problemas ya que al final de sétimo los estudiantes tienden a pensar que resolver un problema matemático es más aburrido, innecesario e inútil que cuando entraron en sétimo nivel.

Aun así se obtuvo que la metodología de resolución de problemas logró que los estudiantes se sintieran más inteligentes y, en general, mejor al resolver problemas matemáticos que la metodología tradicional. Además, aunque los estudiantes piensan que resolver un problema matemático puede ser un poco lento, complicado y cansado tienen claro que los problemas matemáticos son útiles y necesarios. Por último, la aplicación de la nueva metodología de resolución de problemas provocó que los estudiantes creyeran que los problemas son más fáciles, divertidos, claros, descansados, necesarios, útiles y bonitos que aquellos estudiantes que habían recibido las clases con las metodologías tradicionales. Estos resultados son alentadores, sin embargo, deben tomarse con cautela ya que es normal que los estudiantes reciban con entusiasmo una nueva metodología, se cree necesario volver a llevar la investigación cuando la resolución de problemas esté bien asentada dentro del sistema educativo nacional.

Con respecto al test de contenidos matemáticos se observó que hubo una mejora significativa en ambos casos, lo que demuestra que ambas metodologías logran su objetivo de enseñar a los estudiantes los contenidos matemáticos, sin embargo, el mejor resultado se obtuvo con la metodología tradicional. Aun cuando se produjo una mejora en ambos casos, un resultado muy preocupante es que, en general, se obtuvieron resultados muy bajos en el test (un promedio de 20 sobre 100 en el caso de la resolución de problemas y un promedio de 28 sobre 100 en el caso de la metodología tradicional).

En todas las preguntas que presentan diferencias significativas siempre se dio un mejor promedio hacia los estudiantes de octavo que utilizaron la metodología anterior, lo que indica que la metodología anterior fue más efectiva que la nueva metodología. Sin embargo, este resultado puede deberse a varias limitaciones que se dieron durante la investigación:

1. El pre-test se aplicó al inicio del curso lectivo cuando los estudiantes están muy motivados por el nuevo año de estudios, lo mismo que el post-test aplicado a los grupos de octavo que utilizaban la metodología anterior. En cambio, el post-test de los grupos de sétimo fue aplicado al final del año lectivo cuando los estudiantes ya estaban por salir a vacaciones por lo que no aplicaron su mayor esfuerzo.
2. La nueva metodología no fue aplicada en su totalidad y en todas las lecciones, por estar en un periodo de transición los profesores utilizaron la metodología anterior y eventualmente aplicaban clases con la resolución de problemas, pero fueron pocas.
3. La metodología anterior ya tenía mucho tiempo de haber sido implementada y el profesor estaba acostumbrado a dar sus clases con ella mientras que está en un periodo de transición con la nueva metodología y se necesita un tiempo para que el profesor y los estudiantes se adapten a ella.

Aun así, en la investigación el resultado es claro de que la metodología tradicional logró mejores resultados en contenidos matemáticos que la resolución de problemas. Nuevamente se sugiere volver a llevar el estudio cuando la metodología de resolución de problemas esté mejor implantada en la educación del país.

Referencias

[1] Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Publicado con el título: Fondaments et méthodes de la didactique des Mathématiques. En la revista: Recherches en Didactique de Mathématiques, Vol. 7 No. 2, pp. 33-115, 1986.

[2] Ministerio de Educación Pública, Costa Rica. (2013). Programas de Estudio Educación Diversificada.

[3] NCTM (2000). Principles and Standars for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Matehematics.

[4] Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas, reimpresión 2002.

[5] Santos-Trigo, M. (2011). La educación matemática, resolución de problemas y el empleo de herramientas computacionales. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, CIAEM. 6(8): 35-54.

[6] Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Relación del máximo común divisor con los puntos reticulares y algunas de sus consecuencias

BRADDOCK, GEORGE[I]

Costa Rica

Resumen

Existe una estrecha relación entre el máximo común divisor de dos números n y d, con el número de puntos reticulares que están en el segmento que une los puntos $(n, 0)$ y $(0, d)$; cuando representamos esos números en un sistema de coordenadas cartesiano. Usando esa relación, el matemático Marcelo Polezzi, de la Universidad Estatal Paulista (Brasil), establecido en 1997 una fórmula explícita para el máximo común divisor de dos números. Teniendo en cuenta que un número primo es coprimo con todos los enteros menores que él, y usando la fórmula de Polezzi, se demostró un teorema que relaciona a los números primos con la función parte entera y con el polinomio $n^3 - 4n^2 + 5n - 2$. En uno de sus corolarios se relacionan los números primos, la función parte entera, los números cuadrados y los triangulares. Ese teorema y sus corolarios servirán como test de primalidad para un número n.

Palabras clave: Máximo común divisor, puntos reticulares, función parte entera, números primos, test de primalidad, números triangulares, números cuadrados, fórmula de Polezzi.

A. Introducción

Los “puntos reticulares”son los puntos con coordenadas $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

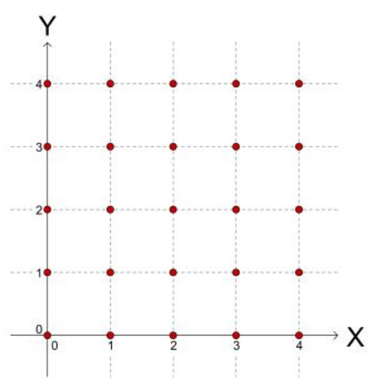


Figure 7: Los puntos reticulares del plano cartesiano.

[I]CUC , Costa Rica

Existe una estrecha relación entre el máximo común divisor de dos números n y d, con el número de puntos reticulares que estánn en el segmento que une los puntos $(n, 0)$ y $(0, d)$ cuando representamos esos números en un sistema de coordenadas cartesiano.

Usando esa relación, el matemático Marcelo Polezzi, de la Universidad Estatal Paulista (Brasil), estableció en 1997 una fórmula explícita para el máximo común divisor de dos números.

Teniendo en cuenta que un número primo es coprimo con todos los enteros menores que él, y usando la fórmula de Polezzi, se demostró un teorema que relaciona a los números primos con la función parte entera y con el polinomio $n^3 - 4n^2 + 5n - 2$.

En uno de sus corolarios se relacionan los números primos, la función parte entera, los números cuadrados y los triangulares.

El teorema se expresa de la siguiente manera: Un número n es primo si y solo si

$$\boxed{2n \sum_{d=2}^{n-1} \sum_{k=2}^{n-1} \left\lfloor \frac{dk}{n} \right\rfloor = t_{(C_{n-1}-1)}}$$

Ese teorema y sus corolarios servirán como test de primalidad para un número n.

B. Relación MCD-Función parte entera

Relación del mcd con los puntos reticulares

Ejemplo para $n = 15$ y $d = 10$, donde $mcd(15, 10) = 5$

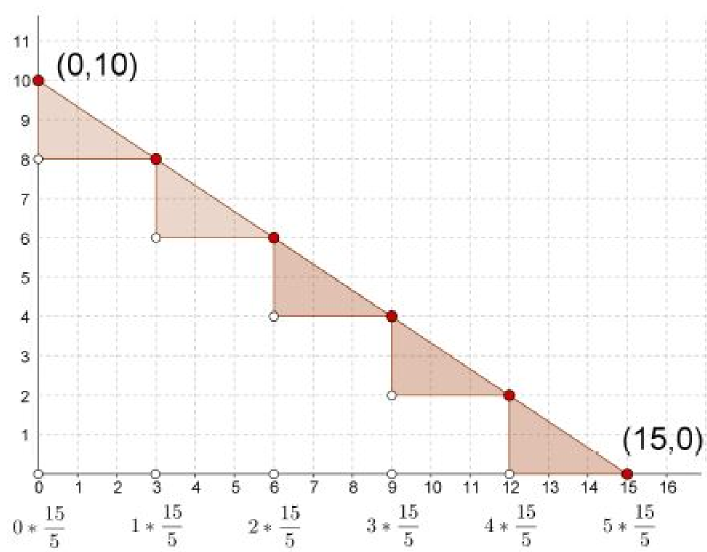


Figure 8: Representación de puntos reticulares.

De acuerdo con la figura anterior, dado que $mcd(15, 10) = 5$ y $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ hay 5 triángulos rectángulos con catetos de medida 2 y 3, cuya hipotenusa está en la hipotenusa del triángulo ABC, como se muestra en las regiones sombreadas. El número de puntos reticulares en la hipotenusa es igual a $1 + mcd(15, 10) = 1 + 5 = 6$.

En general, si el cateto inferior mide n y el otro cateto mide d, tendremos que la ecuación de la línea que une los puntos $A(n, 0)$ y $B(0, d)$ es:

$$y = d - \frac{a}{b}x \quad \text{donde} \quad a = \frac{d}{mcd(n, d)}, \;\; b = \frac{n}{mcd(n, d)}$$

como puede observarse en la siguiente figura:

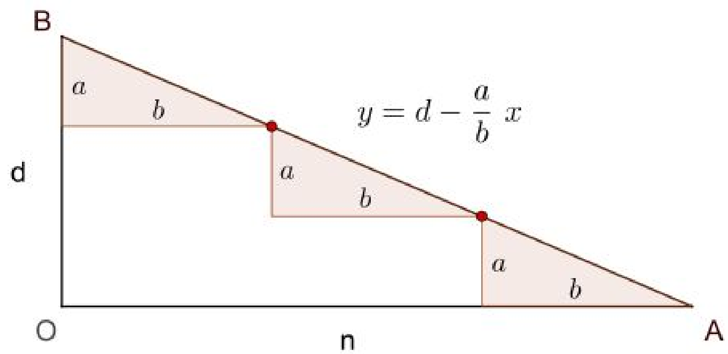


Figure 9: Triángulo rectángulo.

La cantidad $\frac{a}{b}x$ será igual a un entero w si se cumple que

$$x = bw$$

La teoría de las ecuaciones diofánticas nos dice que las soluciones de esta ecuación son

$$x = bz \qquad \text{y} \qquad w = az \qquad \text{con} \quad z \in \mathbb{N}$$

Entonces a un valor de x igual al entero bz, le corresponderá un valor de y igual a $d - w$, que será también entero. Por lo tanto el punto (x, y) será un punto reticular que está en la hipotenusa del triángulo rectángulo AOB.

El siguiente teorema relaciona el mcd con los puntos reticulares:

Teorema # 1 (Relación mcd - puntos reticulares).

Si n y d son enteros positivos, entonces

$$|H| = 1 + mcd(n, d),$$

donde H es conjunto de puntos reticulares en el segmento que une los puntos $(n, 0)$ y $(0, d)$.

Como consecuencia inmediata se tienen los corolarios siguientes:

Corolario # 1.

Si se le llama h al conjunto de puntos reticulares en la hipotenusa del triángulo rectángulo AOB, sin contar a los puntos $(0, d)$ y $(n, 0)$, entonces

$$mcd\,(n, d) = |h| + 1$$

Corolario # 2.

Si n y d son coprimos, entonces $|h| = 0$, donde h es el conjunto de puntos reticulares en la hipotenusa del triángulo rectángulo AOB, sin incluir los puntos $(n, 0)$ y $(0, d)$.

La fórmula de Polezzi

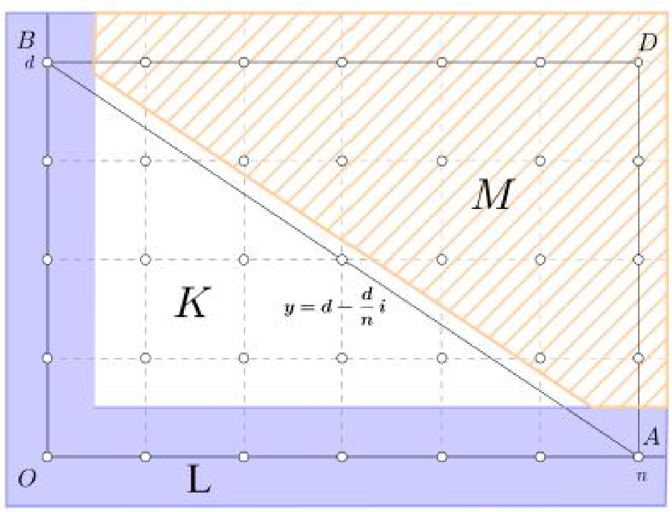


Figure 10: El número de puntos reticulares que están dentro y en el borde del rectángulo $OADB$ es igual a la suma del número de puntos reticulares de cada una de las regiones L, K, M.

Si llamamos $|L|, |K|, |M|$ número de puntos reticulares en la respectiva región, entonces

$$|L| = n + d + 1 \qquad |K| = \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{dk}{n} \right\rfloor$$
$$|M| + |H| = |L| + |K| \qquad |H| = 1 + mcd(n, d)$$

y de aquí se puede deducir la relación

$$|M| = n + d - mcd(n,d) + \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{dk}{n} \right\rfloor \quad (*1)$$

Por otro lado, a partir de las relaciones

$$2|M| + |H| = (n+1)(d+1) \qquad |H| = 1 + mcd(n,d)$$

se puede deducir la relación

$$|M| = \frac{nd + n + d - mcd(n,d)}{2} \quad (*2)$$

A partir de (*1) y (*2) Polezzi pudo deducir el teorema que sigue.

Teorema # 2 (La fórmula de Polezzi).

Si n y d son enteros positivos, entonces

$$mcd\,(n,d) = n + d - nd + 2\sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{d\,k}{n} \right\rfloor$$

Relación primos-puntos reticulares

Definición # 1 (Definición alternativa de número primo).

Un número n es primo si y solo si es coprimo con todos los naturales menores que él.

Con base en esta definición de número primo, se deduce el siguiente teorema:

Teorema # 3.

Un número entero positivo n es primo si y solo si ninguna de las rectas que unen el punto $(n,0)$ con los puntos $(0,d)$ con $d \in \{1,2,3,4,\ldots,n-1\}$ contiene algún punto reticular, distinto de ellos.

En la Figura 11 se observa que, si n es un número primo, no hay puntos reticulares en las líneas que unen el punto $(n,0)$ con el punto $(0,d)$(sin incluir esos puntos).

En la Figura 12 se observa que, si $k = mcd(n,d)$ y n es un número compuesto, habrá $k-1$ puntos reticulares en la línea que une el punto $(n,0)$ con el punto $(0,d)$ (sin incluir esos puntos).

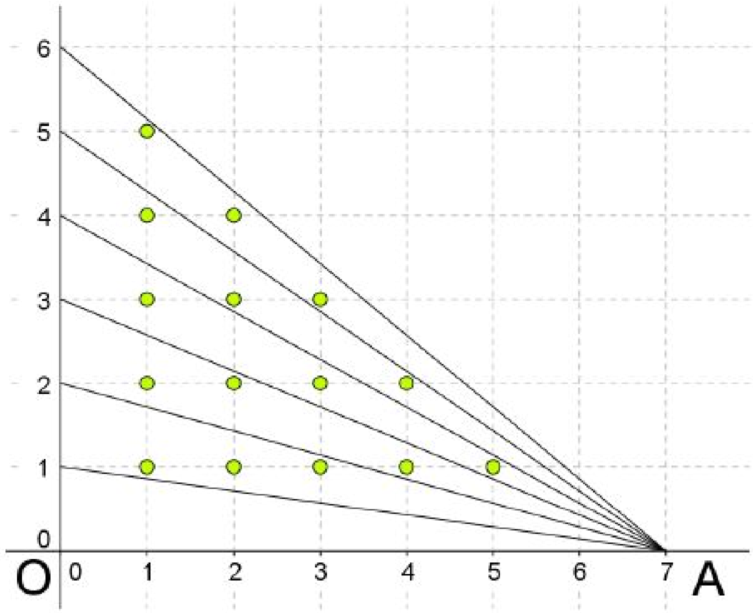


Figure 11: Como el número 7 es primo, no hay puntos reticulares en ninguna de las líneas que unen el punto $(7, 0)$, con los puntos $(0, d)$ con $0 < d < 7$.

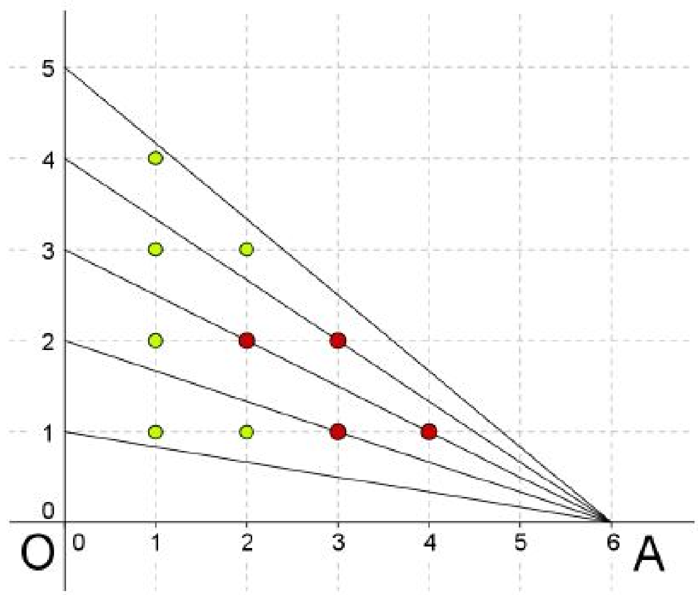


Figure 12: Como el número 7 es primo, no hay puntos reticulares en ninguna de las líneas que unen el punto $(7, 0)$, con los puntos $(0, d)$ con $0 < d < 7$.

Relación primos-función parte entera

Los resultados anteriores permiten establecer la siguiente proposición:

Teorema # 4.

El número de puntos reticulares de la región K de la Figura 3 está dado por

$$|K| = \frac{(n-1)(d-1)}{2}$$

si y solo si n y d son coprimos.

Un entero positivo n es primo si y solo si

$$\sum_{d=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left\lfloor \frac{dk}{n} \right\rfloor = \sum_{d=1}^{n-1}\frac{(n-1)(d-1)}{2}$$

Simplificando esa fórmula se llega al siguiente teorema:

Teorema # 5.

Un entero positivo n es primo si y solo si

$$\sum_{d=2}^{n-1}\sum_{k=2}^{n-1}\left\lfloor \frac{d\,k}{n} \right\rfloor = \frac{n^3 - 4\,n^2 + 5\,n - 2}{4}$$

El teorema anterior puede expresarse de varias formas alternativas, que se muestran en los corolarios que siguen.

Corolario # 3.

Un entero positivo n es primo si y solo si

$$\sum_{d=2}^{n-1}\sum_{k=2}^{n-1} n\left\lfloor \frac{d\,k}{n} \right\rfloor = \binom{n-1}{2}\binom{n}{2}$$

Demostración del corolario 5.

El corolario 4, puede expresarse así, debido a las identidades:

$$t_{n-2}t_{n-1} = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-1)n}{2}$$

Corolario # 4.

Un entero positivo n es primo si y solo si

$$\sum_{d=2}^{n-1}\sum_{k=2}^{n-1} n\left\lfloor\frac{d\,k}{n}\right\rfloor = t_{n-2}\,t_{n-1}$$

donde $(t_n)_{n\in\mathbb{N}+\{0\}}$ es la secuencia de números triangulares.

Corolario # 5.

Un entero positivo n es primo si y solo si

$$2\,n\sum_{d=2}^{n-1}\sum_{k=2}^{n-1}\left\lfloor\frac{d\,k}{n}\right\rfloor = t_{(C_{n-1}-1)}$$

donde $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la secuencia de números cuadrados y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}+\{0\}}$ la de números triangulares.

$$t_{n-2}t_{n-1} == \frac{(n-1)^2[(n-1)-1][(n-1)+1]}{2^2}$$

$$t_{n-2}t_{n-1} = \frac{(n-1)^2[(n-1)^2-1]}{2^2}$$

$$2t_{n-2}t_{n-1} = \frac{C_{n-1}(C_{n-1}-1)}{2}$$

$$2t_{n-2}t_{n-1} = t_{(}C_{n-1}-1)$$

Referencias

[1] Polezzi, M. A Geometrical Method for Finding an Explicit Formula for the Greatest Common Divisor. American Mathematical Monthly 104, 445-446, 1997.

Pensamiento lógico

MARCO ANTONIO, CABALLERO[I] CASCO, EDGAR PAZ, LUIS MIGUEL

Honduras

Resumen

El presenten documento describe las actividades que conforman un taller para el desarrollo del pensamiento lógico, presentando inicialmente una pequeña fundamentación teórica. La cual se basa en la teoría de autores de renombres como Piaget y Russel. Mostrando que el desarrollo del pensamiento lógico se puede lograr en el aula de clases si se utiliza correctamente problemas que generen en el alumno un conflicto cognitivo, permitiendo que el alumno interactúa con su entorno en busca de una método que le permita solucionar el problema en cuestión. Logrando de esta manera desarrollar el pensamiento lógico que le servirá al alumno en el desarrollo de su vida.

Palabras clave: Pensamiento lógico, desarrollo, taller.

A. Pensamiento lógico

La lógica, decía Bertrand Russell (1985), es la juventud de la matemática y, la matemática es la madurez de la lógica. Bien entendido, lo admito. No veo matemática donde no vea una dinámica de relaciones lógicas.

La lógica no viene del lenguaje, sino de la interpretación del lenguaje; de la acción a la que ese lenguaje significa. Es, por ello, por lo que el desarrollo del razonamiento lógico no se consigue únicamente cuando trabajamos actividades de un contenido lógico específico sino en todo momento en el que una acción o conjunto de acciones ha provocado una idea.

Piaget (citado en Santamaría, 2002), explica que a medida que el niño crece, utiliza gradualmente representaciones más complejas para organizar la información del mundo exterior que le permite desarrollar su inteligencia y pensamiento para lo cual hace referencia a la presencia de tres tipos de conocimiento:

- El conocimiento físico, que es el que adquiere el niño a través de la manipulación de los objetos que están a su alrededor y su interacción con el medio.
- El conocimiento lógico-matemático, surge de una abstracción reflexiva ya que este conocimiento no es observable y es el niño quien lo construye en su mente a través de las relaciones con los objetos, aclarando que el conocimiento adquirido una vez procesado no se olvida, ya que la experiencia no proviene de los objetos sino de la acción sobre los mismos.
- El conocimiento social, es el conocimiento que adquiere el niño en su relación con otros niños y los adultos.

[I]UPNFM, Honduras.

El conocimiento lógico-matemático surge entonces en el niño, a partir de un pensamiento reflexivo, ya que el niño lo construye en su mente a través de las relaciones con los objetos, desarrollándose siempre de lo más simple a lo más complejo.

Para Piaget (1999) los niños deben entender la lógica de las relaciones matemáticas y la clasificación para comprender las relaciones de equivalencia y a consecuencia de ello, el significado del número, de modo que la equivalencia es el fundamento psicológico de la comprensión del número, de manera que para establecer una igualdad, los niños tienen que llevar la cuenta de los elementos que han emparejado mediante la imposición de un orden.

Por otro lado, el (CNIIE, 2004) mencionan que el pensamiento lógico es, ante todo, una forma ordenada de expresar nuestras ideas y es, precisamente, esa expresión la que puede llevarnos al convencimiento de que tenemos razón. Pensar lógicamente es, ante todo, obtener nuevas ideas, a partir de ideas existentes, siguiendo unas reglas precisas. Esto es: razonar, argumentar.

B. Acto didáctico. La lógica de la enseñanza

1. Etapa de Elaboración. El educador, respetando el trabajo del educando y el vocabulario por él empleado, creará, a partir de las ideas observadas, desafíos precisos que sirvan para canalizarlas dentro de la investigación que esté realizando en su camino de búsqueda.

2. Etapa de Enunciación. Llegados al punto en que el niño ha comprendido a partir de la generación mental de una serie de ideas expresadas libremente con su particular vocabulario, se hace necesario enunciar o simbolizar lo que ha comprendido, respecto a la nomenclatura o simbología correctas: los convencionalismos. Este es el objetivo de esta etapa: poner nombre o enunciar con una correcta nomenclatura y simbología.

3. Etapa de Concretización. Es la etapa en la que el educando aplica, a situaciones conocidas y ejemplos claros ligados a su experiencia, la estrategia, el concepto o la relación comprendida con su nomenclatura y simbología correctas. Se proponen actividades similares a las realizadas para que el alumno aplique el conocimiento adquirido, y evaluar en qué medida ha disminuido el desafío presentado en la situación propuesta en la etapa de Elaboración.

4. Etapa de Transferencia o Abstracción. Etapa en la que el niño aplica los conocimientos adquiridos a cualquier situación u objeto independiente de su experiencia. Es capaz de generalizar la identificación de una operación o concepto y aplicarlo correctamente a una situación novedosa, tanto en la adquisición de nuevos contenidos, como en la interrelación con el mundo que le rodea.

C. Actividades

Actividad Uno: “Los desarrollos del Cubo”.

Objetivo: Encontrar todos los desarrollos del cubo y deducir un procedimiento para hallar dichos procedimientos de manera más eficiente.

Materiales:

- Seis cuadrados de cartulina por cada participante.
- Una hoja de papel bon tamaño carta por cada participante.

- Cinta adhesiva.

Desarrollo de la Actividad:

Profesor: Reparte a cada alumno un juego de 6 cuadrados y una hoja de papel bon. Les pide a los alumnos que con cinta adhesiva construyan un cubo, luego les pide que vuelvan a desarmar el cubo con la condición que los cuadrados deben quedar unidos por al menos una arista y dibuja este desarrollo. A continuación expresar a los alumnos que siguán este procedimiento para encontrar más desarrollos del cubo.

Alumnos: Trabajan el procedimiento especificado por el profesor por al menos 15 minutos.

Profesor: Luego de los 15 minutos, les pide a los alumnos que comuniquen a sus compañeros los desarrollos que cada uno encontró, dibujando todos los desarrollos distintos encontrados en la pizarra. En el caso de encontrar un desarrollo equivocado, se debe poner en discusión de los alumnos.

Alumnos: Presenta al profesor los desarrollos que el encontró y discute cada desarrollo encontrado por sus compañeros.

Profesor: ¿Habrán más desarrollos? ¿Cuántos desarrollos se pueden formar colocando 4 cuadrados en una fila?

Alumnos: Trabajan con su cuadrados para encontrar todos los desarrollos con la condición especificada por el profesor anteriormente.

Profesor: ¿Cuántos desarrollos se pueden formar colocando 3 cuadrados en una fila?

Alumnos: Trabajan con su cuadrados para encontrar todos los desarrollos con la condición especificada por el profesor anteriormente.

Profesor: ¿Cuántos desarrollos se pueden formar colocando 2 cuadrados en una fila?

Alumnos: Trabajan con su cuadrados para encontrar todos los desarrollos con la condición especificada por el profesor anteriormente.

Profesor: Dibuja cada Desarrollo nuevo en la pizarra. Profesor: Concluye que la cantidad máxima de desarrollos del cubo es 11. ¿Cuál fue el procedimiento que seguimos para encontrar todos los desarrollos?

Alumnos: Concluye que el método para encontrar los desarrollos, fue dejar fijo una cantidad específica de cuadrados en una fila y colocar los cuadrado sobrantes de tal manera que se pueda formar un cubo.

Actividad Dos: "Calcular el área de un triángulo"

Objetivo: Que el alumno deduzca el área del triángulo sin restringirle la forma en que lo haga.

Materiales:

- Cuatro triángulos del mismo tamaño
- La guía de la actividad

Desarrollo de la actividad:

El piso de la jaula de los monos tiene forma triangular ¿Cuánto mide el área de la jaula?

Observe la figura adjunta.

El alumno para la resolución de esta actividad debe de poseer diversos conocimientos previos como ser: el área de cuadrados, rectángulos y triángulos rectangulares. Pero además de los conocimientos previos el educando

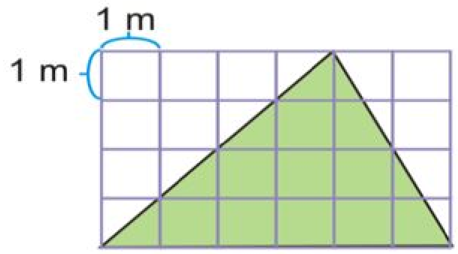


Figure 13: Triángulo.

puede utilizar varias formas para encontrar el área de este triángulo como ser, el dividir el triángulo en figuras ya conocidas o el de transformarlo en figuras que ya conoce.

Se les orientara a los participantes con preguntas, por ejemplo: ¿Cómo podemos encontrar el área del piso de la jaula de los monos? indicándoles que escriban la forma preferida y los resultados pero además se le motivara que piense en otra forma para resolverlo.

Después de que cada uno tenga una respuesta a la situación planteada se discutirá las diferentes estrategias observando tanto lo puntos similares, así como, los diferentes entre las ideas.

Algunas de las estrategias que se espera que los alumnos realicen son las siguientes:

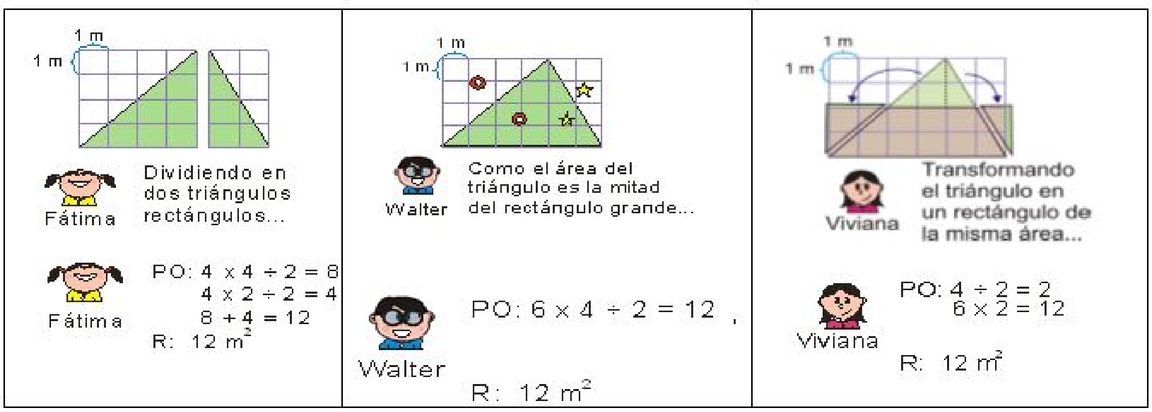


Figure 14: Posibles estrategias de solución.

Actividad Tres: “Calcular el área trapecio”.

Objetivo: Que el alumno deduzca el área del trapecio sin restringirle la forma en que lo haga.

Materiales:

- Una hoja de papel bon tamaño carta por cada participante.
- La guía de la actividad.

Desarrollo de la actividad:

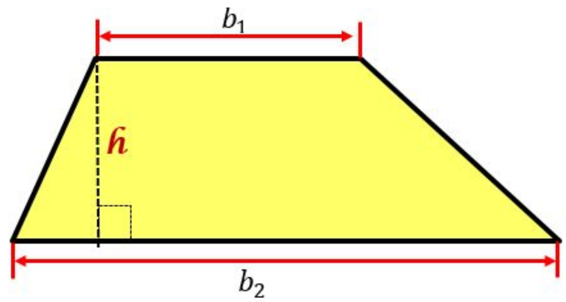


Figure 15: Trapecio.

Escriba más de 2 formas diferentes para deducir la fórmula para calcular el área del trapecio.

Los individuos resolverán la actividad de manera individual pero además, se le harán preguntas orientadoras como ser:

¿Qué nos pide el planteamiento de este ejercicio?

¿Cómo podemos deducir la fórmula para calcular el área del trapecio?

¿Podemos descomponer la figura en figuras que ya conocemos? Si esto es posible.

¿Cuáles son esas figuras?

Luego que todos los individuos desarrollen la actividad planteada, se discutirán y analizaran todas las distintas estrategias de las cuales se valieron para resolver la actividad observando tanto lo puntos similares así como los diferentes entre las ideas. Después de la etapa de discusión y análisis se concluye con la generalización de la fórmula para calcular el área del Trapecio:

$$\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

Algunas de las formas que se espera que surjan de los alumnos es la de dividir el trapecio en figuras conocidas, por ejemplo:

$$A_t = \textbf{Área del trapecio}$$
$$A_T = A_1 + A_2 + A_3$$
$$A_T = \frac{1}{2}xh + b_1h + \frac{1}{2}yh$$
$$A_T = \left(b_1 + \frac{1}{2}(x+y)\right)h$$
$$A_T = \frac{1}{2}(2b_1 + x + y)h \quad \text{como } b_1 = b_2 - x - y$$
$$A_T = \frac{1}{2}\left(2b_2 - 2x - 2y + x + y\right)h$$
$$A_T = \frac{1}{2}\left(b_2 + b_2 - x - y\right)h$$
$$A_T = \frac{1}{2}\left(b_1 + b_2\right)h$$

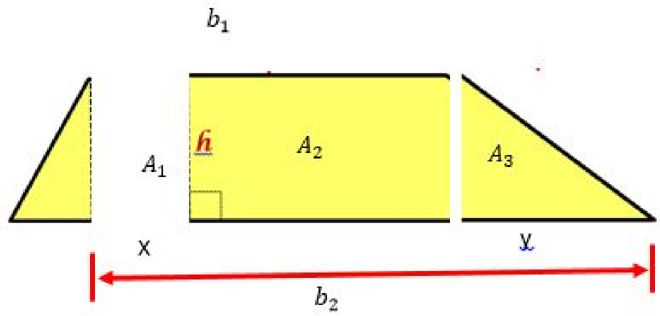


Figure 16: División del trapecio.

Descripción de la estrategia para deducir el área del círculo

En el DCNB e introduce este contenido, a partir de la estimación del área del círculo transformando a una figura conocida. De tal manera, se orienta hacia la fórmula del área de círculos, dando importancia a las actividades en que se apliquen los conocimientos adquiridos para que los mismos niños y niñas descubran la fórmula sin que el maestro o la maestra la diga.

A través de experimentar el proceso de estas actividades, es decir el proceso para llegar a una conclusión o descubrimiento, se puede desarrollar la habilidad de pensar lógicamente y dar la oportunidad de sentir alegría o diversión al hacer matemática. Vamos a pensar en la forma para encontrar el área del círculo con el cálculo.

Construir un círculo y pensar en la forma de encontrar el área.

¿Cómo hemos encontrado el área de una figura que no se conoce su fórmula?

Que recuerden que se han encontrado las fórmulas transformando las figuras en figuras que se conoce su fórmula.

1. Indicar que construyan un círculo y lo utilicen para pensar la manera de transformarlo
2. Después del tiempo de la resolución independiente, escuchar las ideas de los niños y las niñas.
3. Es muy importante que los niños y las niñas experimenten varios tipos de transformación intercambiando las ideas y los procedimientos para llegar al

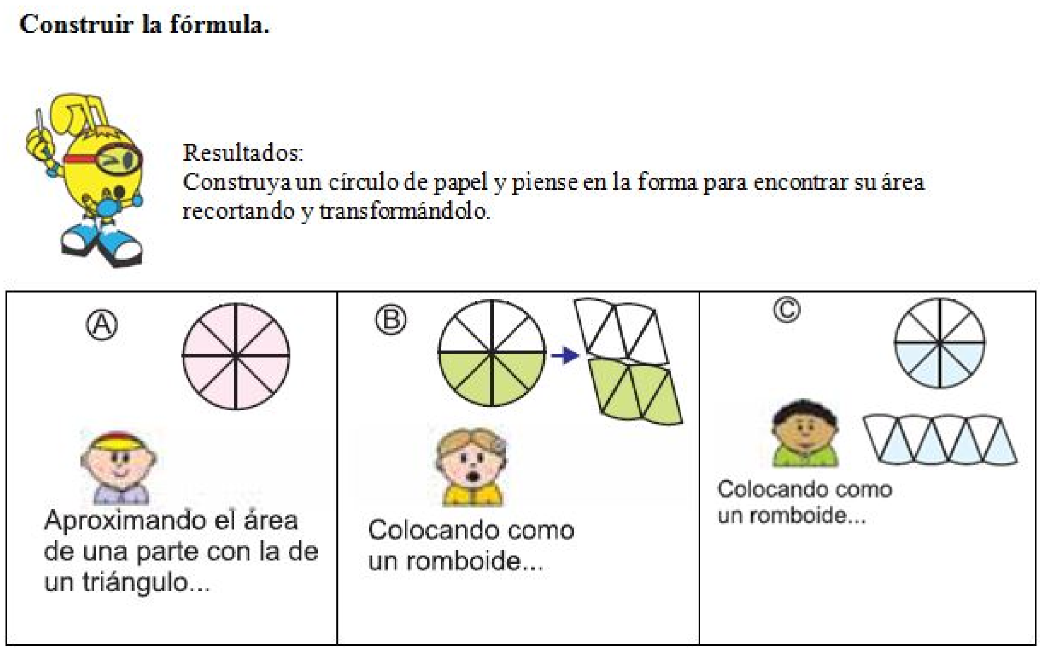
PO. Para eso, se puede permitir el uso de un círculo dividido entre 16 partes para variar las ideas.

Observar la transformación de la forma:

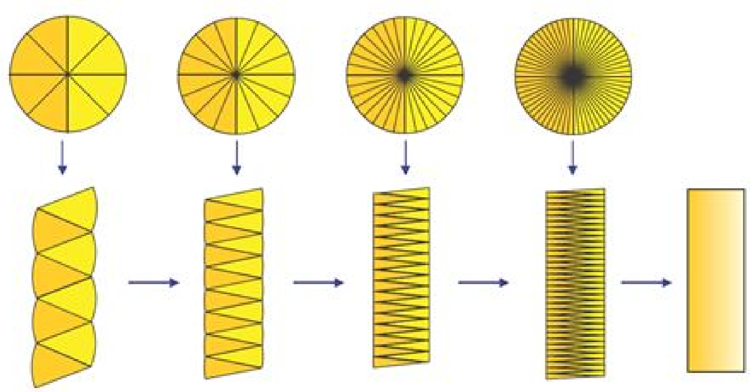
¿A qué figura se acerca más cuando se transforma en la forma C dividiendo el círculo en más partes? Que se den cuenta que se acerca más al rectángulo.

Proponer el uso de la forma C para encontrar el área del círculo. Pero, es recomendable que después encuentren el área utilizando el cálculo de otras formas expresadas también. En este caso, no es necesario tomar en cuenta su tamaño. Sin embargo, sería mejor dibujar el tamaño real (10 cm de radio) para la percepción del área. Es mejor que pinten la mitad del círculo antes de recortar para la mejor comprensión de la longitud del largo del rectángulo cuando se transforma. Se puede dividir un círculo en 8 partes o 16 partes iguales doblándolo. No es necesario explicar el procedimiento cada vez, sino dejar la oportunidad de aplicar los estudios anteriores en la actividad.

Pensar en las longitudes necesarias. Que se den cuenta que la longitud del largo coincide con la mitad de la longitud de la circunferencia, y la longitud del ancho coincide con la longitud del radio.



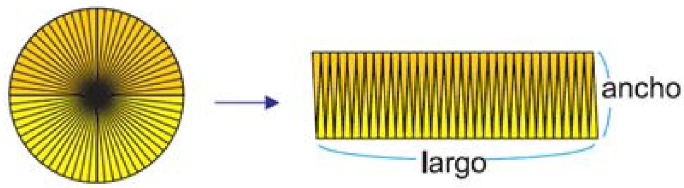
Observe la siguiente imagen y responda cuanto más se divida el círculo, ¿a qué figura se parece más?

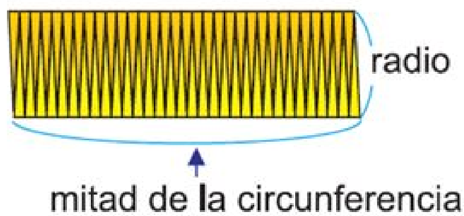


Cuanto más se divida un círculo, la figura compuesta por las partes será un rectángulo.

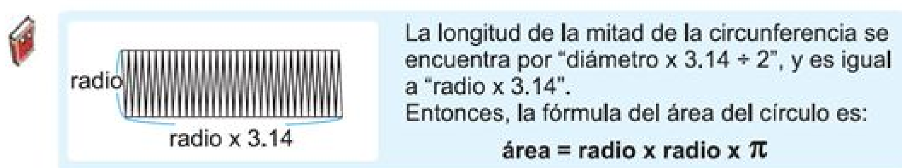
¿Con qué longitud dl círculo coincide la longitud del largo y ancho del rectángulo?

El ancho del rectángulo coincide con el radio del círculo, el largo del rectángulo coincide con la mitad de la longitud de la circunferencia.





Deduzca la fórmula para encontrar el área del círculo.



Referencias

[1] Fernández Bravo, J. A. (2001). Aprender a Hacer y conocer: El pensamiento lógico. Congreso Europeo: Aprender a ser, aprender a vivir juntos (pág. 19). Santiago de Compostela: Ponencias.

[2] Leiva Leiva, M. d. (2006). EL pensamiento lógico en la Educacion Infantil. I+E Revista Digitak "Investigacion y Educación", 50-65.

[3] Paltan Sumba, G. A., & Quilli Morocho, K. I. (2010). "Estrategias metodológicas para desarrollar el razonamiento lógico-matemático en los niños y niñas del cuarto año de educación básica de la escuela. "Martín Welte"del cantón Cuenca, en el año lectivo 2010-2011". Cuenca: Universidad de Cuenca.

[4] Riverón Portela, O., Martín Alfonsoo, J. A., Gonzales Companionis, I., & Gómez Argüelles, Á. (2011). Influencia de los Problemas Matemáticos en el Desarrollo del Pensamiento Lógico. Cuba: Universidad de Ciego de Ávila.

Implementación del sotfware exelearning en la creación de unidades didácticas

CASTRO, DIDIER[I]

Costa Rica

Resumen

El uso de sotfware libre en la actualidad permite que la educación tenga más herramientas para desarrollar una clase. En este caso se trabajara con exelearning en el cual permite la creación de unidades didácticas, donde se puede incluir el uso de la mayoría de software libre como por ejemplo GeoGebra. Por lo que en este taller se abarca el uso de las principales herramientas de exelearning para la creación de unidades didácticas.

Palabras clave: Software libre, exelearning, GeoGebra.

A. Introducción

El software libre eXelearning es un editor HTML también conocido como eXe y su principal función es ayudar a diseñar a los docentes la creación de unidades didácticas y sitios web para un mejor desarrollo de la clase. El programa eXelearning permite la incluir las funciones de varios software libre entre estos GeoGebra e Inkscape. Además no se necesita el uso de internet para utilizar este software esto hace que cualquier profesor pueda enfrentarse a este programa utilizando pocas herramientas.

En este taller se abordarán los principios básicos para el desarrollo de una unidad didáctica utilizando sus herramientas más importantes y algunas aplicaciones realizadas en GeoGebra e Inkscape para mayor enriquecimiento para el futuro estudiante a la hora de interactuar con dicha unidad. Además no se incluirá todo el uso del programa sino que se basará en el desarrollo de contenidos básicos para el participante que no conozca o no sabe utilizar el programa.

B. Principios básicos

La herramienta eXeLearning presenta un entorno de trabajo intuitivo y fácil de manejar para crear y editar contenidos de aprendizaje. Una vez se accede a la herramienta, el entorno de trabajo está dividido en diferentes espacios o zonas de trabajo. A continuación se muestra y explica brevemente como es y que partes forman ese entorno.

[I]TEC, Costa Rica.

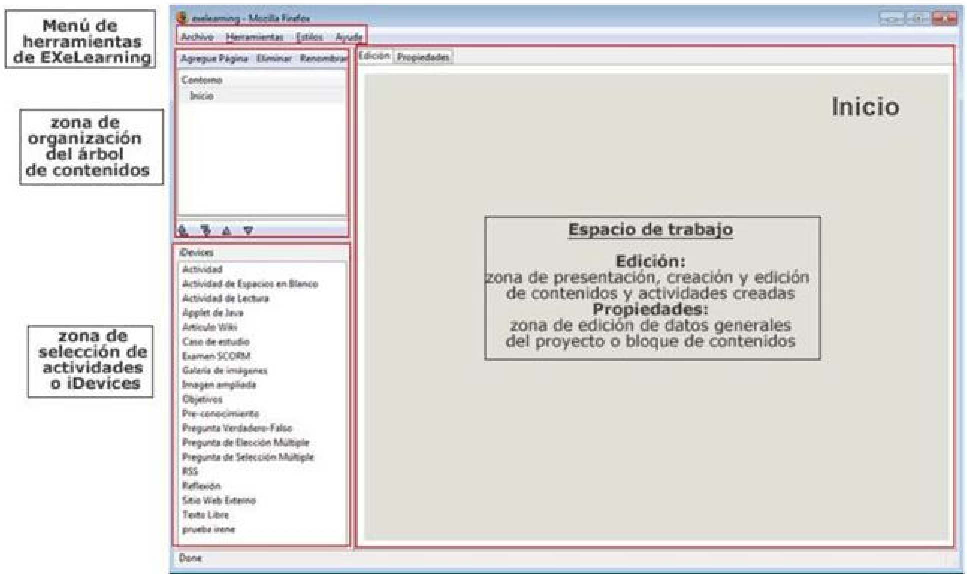


Figure 17: Entorno gráfico de eXelearning.

Menú de herramientas

- **Menú Archivo:** Permite crear archivos, abrir uno que ya esté creado, acceder a uno de los últimos editados, guardarlos o modificar el nombre al proyecto. También permite imprimir, exportar o importar paquetes, o salir del programa. Es importante esta última opción, ya que no podemos salir del programa haciendo clic sobre la cruz de cierre de la ventana, como lo haríamos en cualquier otro programa.

- **Menú Herramientas:** Tiene acceso al redactor de Instrumentos de diseño (iDevices), cambiar el idioma o actualizar la vista del proyecto.

- **Menú Estilos:** Permite cambiar la interfaz del proyecto en función de 16 estilos de diseño diferentes.

- **Menú Ayuda:** Para acceder a diversas ayudas online sobre la herramientas.

Zona de organización del árbol de contenidos, índice o estructura: este es el espacio donde podemos organizar el árbol de contenidos o estructuras de las páginas que tendrá nuestro proyecto o contenidos. Es decir, indicaremos qué páginas dependen unas de otras y como organizar el índice de contenidos en sí.

Zona de selección de Instrumentos de diseño o iDevices: se muestran el total de instrumentos de diseño o actividades que eXeLearning nos ofrece por defecto para configurar nuestros contenidos, así como aquellos iDevices creados por nosotros mismos, en el caso en que lo hagamos.

Espacio de trabajo: la parte o superficie más amplia de la herramienta está formada por lo que denominaremos espacio de trabajo. Aquí será donde podremos ver y editar nuestros contenidos. Este espacio dispone de dos pestañas a través de las cuales se pue-de configurar nuestro proyecto:

- Edición: es el espacio donde se puede configurar los contenidos, donde se traba-jará directamente con los Instrumentos de diseño previamente elegidos, y donde podemos ver cómo va quedando el resultado de nuestra edición.

- Propiedades: nos permite configurar los datos y metadatos principales de nuestro proyecto en general.

C. Tipos de instrumentos de diseño

Los Instrumentos de diseño o iDevices son los elementos o componentes que podemos incluir para crear y organizar nuestros contenidos. La herramienta por defecto nos ofrece 18 tipos que podemos organizar en función de su finalidad como son:

- Insertar texto y contenidos: podemos incluir contenidos a través de la edición de texto. eXeLearning dispone de un editor WYSIWYG (What You See Is What You Get) que es común a todos los Instrumentos de Diseño (iDevices). Con este editor podemos dar formato al texto e incluir elementos multimedia, imágenes etc.
- Elementos de presentación de contenidos: son instrumentos de diseño que sirven para insertar texto en las páginas de un proyecto eXeLearning, como introducción o presentación de contenidos. A diferencia del instrumento de diseño que nos permite insertar texto únicamente "texto libre", el texto que se inserta se muestra con un formato diferente, un título y un icono representativo para destacar.
- Actividades: son actividades de tipo enunciado. Están representadas por diferentes iconos para distinguirlas entre varias opciones. Son actividades de realización fuera del contenido. Es decir, son enunciados o instrucciones para realizar una actividad, no se ofrece retroalimentación ni puntuación a los alumnos.
- Preguntas de autoevaluación: son instrumentos de diseño que sirven para que los alumnos evalúen sus conocimientos. Estas actividades no registran las respuestas de los alumnos, excepto el examen SCORM, por lo que se suelen utilizar para que el alumno compruebe su propia comprensión de los contenidos. La diferencia principal con las actividades simples sería que estas preguntas de autoevaluación ofrecen una retroalimentación o puntuación a los estudiantes.
- Insertar imágenes: estos iDevices permiten incluir imágenes en nuestros contenidos, a través de nuevos instrumentos de diseño.

D. Crear y editar instrumentos de diseño(iDevices)

Un Instrumento de Diseño, o iDevice, es un elemento o acción que podemos incluir en las páginas, previamente creadas, de nuestro proyecto, para crear contenidos de aprendizaje. Para insertar uno de estos elementos en una página, solamente debemos pinchar sobre el nombre del que deseemos, de entre los ofrecidos en la lista de iDevices, situada en la parte inferior izquierda del entorno de trabajo. Ver figura 18.

Cada uno de ellos puede editarse y organizarse, de forma que el resultado final sea el deseado. En cualquier momento se puede editar la actividad o texto pulsando sobre el botón de editar situado justo debajo de su presentación que nos permite regresar a editor html del elemento. Ver figura 19.

También se dispone de una serie de iconos o botones que nos permiten editar estos instrumentos de diseño en el momento en el que se están creando o transformando. Estos iconos pueden verse justo debajo del campo de texto donde estamos editando y sus acciones serían:

Previsualización: permite crear una vista general de la página que se va creando sin los elementos de edición. Es decir, mientras se está creando un contenido, puede ir viéndose la presentación y resultado final. De esta forma podremos ir haciendo los cambios oportunos. Además nos permite ir guardando los cambios que vayamos realizando. Ver figura 20.

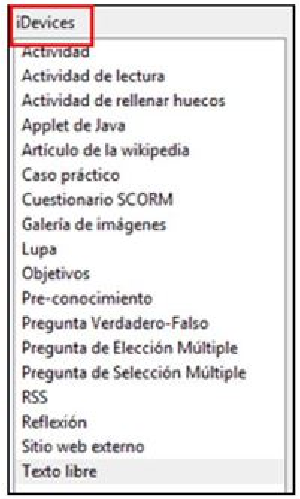


Figure 18: iDevices en eXelearning.

Figure 19: Botón de editar.

Figure 20: Pestaña de Previsualización.

Guardar sin cambios: este icono nos permite mostrar nuestro contenido sin los últimos cambios realizados. Sería el equivalente al deshacer de otras herramientas más utilizadas como el office.

Borrar: con este icono podemos borrar el instrumento de diseño que estemos editando. Solamente borra el iDevice actual. Una vez pulsado nos saldrá un mensaje de confirmación donde debemos pulsar "OK" para borrar definitivamente la actividad o texto.

Mover: a través de estas dos flechas podemos colocar y organizar nuestros instrumentos de diseño dentro de una misma página. Es decir, si tenemos varios Instrumentos de diseño dentro de una página, con estas flechas podemos cambiar el orden en el que se mostrarán, colocando por encima o por debajo el iDevice que estemos editando.

Mover entre páginas: esta opción nos permite trasladar el Instrumento de diseño que estemos editando a otra página diferente de nuestro proyecto. Las páginas que hayamos creado, se mostrarán en este menú desplegable para poder enviar aquellos iDevices que por el motivo que sea creemos más convenientes en otra página o contenido. Es decir, permite mover (no copiar) las actividades o textos a diferentes páginas.

Ayuda: nos muestra para cada tipo de Instrumento de diseño una pequeña ayuda pedagógica de para qué sirve cada elemento, ideas de cómo utilizarlo y algún consejo práctico.

E. Exportar contenidos

Una vez hemos finalizado de editar y organizar los contenidos de un proyecto debemos guardarlos a través de las opciones de guardar y guardar como (para guardar una copia con otro nombre) que podemos encontrar en el menú de herramientas archivo. De todas formas es conveniente ir guardando los cambios mientras se edita un contenido para evitar perder información por alguna desconexión del ordenador.

Es importante guardar un proyecto antes de exportarlo. Cuando guardamos un proyecto el archivo que generamos (extensión .elp) es un archivo modificable que nos permite volver a abrirlo con el programa y editarlo de nuevo. Si exportamos directamente a formatos como IMS o SCORM, los archivos que se generan no se pueden editar. Una vez hemos guardado el proyecto, podemos exportarlo. Para esto disponemos de varias opciones que nos permiten extraerlo en diferentes formatos. En función de la finalidad que tenga nuestro proyecto y el lugar donde será publicado podemos elegir un formato u otro.

Las opciones serían:

- **Common cartridge:** es un formato de tipo IMS nuevo, para exportar proyectos e importarlos en plataformas LMS, sin tener que preocuparse si al cambiar de plata-forma podremos llevarnos nuestros proyectos a la nueva.

- **SCORM 1.2:** es un formato que se puede utilizar para guardar el proyecto e importarlos a plataformas LMS (dotLRN, sakay, dokeos, moodle).

  Paquete de contenidos IMS: este y el anterior son formatos compatibles con la plataforma Moodle y por tanto recomendables para exportar. Una de las características principales de este formato es que se utiliza únicamente para la presentación de los contenidos sin opciones de seguimiento de los estudiantes. Es decir, los contenidos subidos con este formato a la plataforma Moodle se presentarán como recursos y actividades de autoevaluación, pues el sistema no registrará las puntuaciones de los estudiantes. Esta exportación genera un único archivo en formato zip que será el que habrá que incluir en el curso.

  – **Sitio web:** esta opción contiene a su vez dos más Carpeta autocomprimida: Mediante esta opción podremos exportar nuestro proyecto en un conjunto de páginas web interrelacionas formando un sitio web el cual podrá ser incorporado a un servidor de páginas web para su posterior utilización. Archivo comprimido zip: esta opción permite exportar el contenido como un sitio web pero además mediante un único fichero zip el cual contendrá todos los ficheros html y demás recursos que forman dicho sitio web.

  – Página sola: mediante esta opción lo que obtendremos es todo el contenido en una única página web.

- **Archivo de texto:** mediante esta opción obtendremos el contenido del proyecto en un fichero de texto *.txt, es decir, sin formato.

  Notas iPod: mediante esta opción podremos exportar nuestro contenido de aprendizaje para ser usado en un dispositivo iPod (actualmente solo podremos utilizar caracteres ASCII para realizar los materiales).

  Insertar paquete: nos permite incluir en el proyecto actual que estemos editando, otro proyecto en archivo con extensión .elp. De esta forma podremos unir ambos proyectos y organizar la información una vez insertado el nuevo paquete.

  Extraer paquete: nos permite extraer una parte de nuestro proyecto y guardarlo como otro diferente. Para extraer alguna de las páginas que hayamos creado debemos seleccionarla y a continuación pulsar sobre la opción "extraer paquete" dentro del apartado "combinar", de esta forma se extraerán el grupo de páginas dependientes de la que hayamos seleccionado.

F. Creación de unidades didácticas

Ahora como ya se conoce las principales herramientas se creará la primera unidad didáctica para la mayoría de los participantes.

Se formulará una unidad didáctica estándar para mayor compresión de los participantes y aprovechamiento del tiempo. Esta una unidad didáctica abarcará una actividad sobre el Teorema de Thales. La primera parte abarcará la forma en que se dividirá la unidad didáctica, los principios de eXelearning y la creación de Vokis, imágenes en Inkscape y cómo exportar aplicaciones de GeoGebra para que funcionen en eXelearning.

Para la segunda parte se pondrán en funcionamiento todos los elementos construidos para la creación de la unidad didáctica.

Pasos de construcción

1. Ejecutaremos el programa que se encuentra en el escritorio de la computadora.
2. Ir a la sección principal y ubicaremos estilos, en este caso el participante escogerá su estilo según él lo desee.
3. Ya en el programa nos ubicaremos en estructura y veremos que solo nos brinda una pestaña, en este caso agregaremos las necesarias para la creación de la unidad didáctica. En este caso la pestaña denominada por defecto "Inicio" la renombraremos como "Teorema de Thales".
4. Ahora agregaremos en una nueva pestaña el objetivo de la unidad didáctica.
5. Ahora se crean tres pestañas para modulo principal:
   - Historia que se divide en:
     - Thales de Mileto
     - Teorema
     - Actividades
   - Teoremas:
     - Actividad introductoria
     - Teoría y ejemplos: semejanza de triángulos
   - Actividades de evaluación
   - Evaluación
6. Ahora ya terminada la unidad didáctica se procederá a exportar de la siguiente manera:
   (a) Archivo
   (b) Exportar
   (c) Sitio web
   (d) Carpeta auto contenida
7. Ahora procederemos a buscar el index en la carpeta donde se exporto la unidad didáctica.
8. Para que el estudiante pueda utilizar la unidad didáctica debe poseer la carpeta auto contenida.

Referencias

[1] Cubero, S.(2008). Elaboración de contenidos con exelearning. Extraido de: http://www.uv.es/scubero/recursos/gestioncontenidos/eXelearning.pdf

[2] eXe Authoring Project (30/06/2014). Página consultada en: file:///C:/Program%20Files%20(x86)/exe/docs/manual/Online_manual.html

[3] Historia de Thales (2014). Extraído de: http://www.dad.uncu.edu.ar/upload/teorema-de-thales.pdf.

[4] Manual eXeLearning 7.2. (30/06/2014). Extraído de: http://exelearning.net/manual-exelearning-7-hacemos-facil-lo-sencillo/

[5] Manual de Exelearning: Herramienta de autor para creación de contenidos. Extraído de: http://www.innova.uniovi.es/c/document_library/get_file?uuid=667e915d-d3e4-44fb-aa5d-ea65d4d76690&groupId=250540

[6] Meneses Rodriguez R (1997). Matemática Enseñanza-aprendizaje 9. Ediciones FARBER , tercera edición. San Jose Costa Rica.

[7] Navegando en un mar de números (2014). Extraído de: http://navegandoentrenumeros.blogspot.com/2013/05/medir-la-altura-de-las-piramides.html.

[8] Teorema de thales (2014). Extraído de: http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/0inicio/ThThales.htm.

Espacios de descubrimiento de geometría fractal utilizando el software matemático Geogebra

CHAVES, EFREN[I] GARDELA, GRETTEL

Costa Rica

Resumen

Este taller consiste en desarrollar espacios de aprendizaje de la geometría fractal por medio del software matemático GeoGebra. Además, se pretende seguir una metodología constructivista en la que los participantes lograrán, a través de sus propias elaboraciones en GeoGebra, descubrir el concepto y algunas propiedades de la geometría fractal. Como eje adicional, se dan recomendaciones de cómo desarrollar algunos temas del programa de matemáticas de secundaria utilizando construcciones fractales.

Palabras clave: espacios de aprendizaje, geogebra, geometría fractal.

Objetivo General

Desarrollar espacios de descubrimiento de geometría fractal a través del software matemático GeoGebra.

Objetivos específicos

1. Realizar construcciones de geometría fractal por medio del software Geogebra.
2. Construir a partir de las figuras anteriores el concepto de geometría fractal.
3. Reconocer el avance histórico y aplicaciones de la geometría fractal.

Recursos y materiales

- Laboratorio equipado con computadoras.
- Sistema Operativo Widndows XP o superior.
- Software GeoGebra instalado.
- Proyector multimedia.
- Hoja de construcciones impresas.
- Cuestionario impreso.

[I]UNED, Costa Rica.

A. Introducción

La geometría Euclidiana ha sido tomada como regla universal para interpretar el mundo que nos rodea; sin embargo, si se observa ese "mundo que nos rodea", árboles, bosques, el cuerpo humano, montañas, y costas, todo lo que la naturaleza misma ha creado sin intervención del ser humano, entonces la geometría que describe el mundo no es de curvas suaves. Asimismo, la geometría Euclidiana no es la más óptima para interpretar el entorno.

Las inquietudes de matemáticos recientemente han dado origen a una nueva geometría que permite el estudio de infinidad de fenómenos en la naturaleza, y se le conoce como geometría de fractales. Esta geometría fractal modela fenómenos como fraccionamientos, repeticiones, iteraciones, crecimientos, ramificaciones, y muchos más.

Ante la existencia de una geometría distinta a la Euclidiana, y con aplicaciones en la vida cotidiana, surgen las interrogantes de ¿Por qué no introducir la geometría fractal en secundaria? ¿Cómo desarrollar espacios de descubrimiento de geometría fractal para alumnos de secundaria?

La geometría fractal ofrece una vasta gama de conocimientos y aplicaciones, por ello es de suma importancia que en el siglo XXI, ante infinitos avances en ciencia y tecnología, se empiece a introducir esta geometría. Y aún más, ante un currículo de Matemáticas reformado por el Ministerio de Educación Pública (MEP) de Costa Rica, es necesaria la incorporación de la geometría fractal en secundaria.

B. Marco teórico

La naturaleza ofrece formas geométricas distintas de círculos, triángulos y cuadrados, más bien son formas irregulares, formas que a simple vista distan de lo que se conoce como geometría.

Una particularidad que comparten algunas de estas formas de la naturaleza, es que una de las partes tiene similitud con el todo. Esto quiere decir que, por ejemplo, al tomar un helecho, y luego comparar una de sus ramas con la planta, se nota la similitud, e incluso si tomamos una de las ramas más pequeñas que forman las ramas grandes, en todas se encuentra similitud.

Estas características se identifican en bosques completos, en formaciones rocosas, en costas, en el cuerpo humano, etc. Por lo tanto, se puede decir que un fractal es una formación que después de realizar acercamientos iterados, mantiene la misma forma que el objeto original. También, existen los fractales creados por programas de computadora, y a estos, Redondo y Haro (2004) al referirse afirman que "Un fractal es lo que se crea después de un proceso de iteración infinita, de repetir infinitamente los mismos procedimientos sobre los resultados obtenidos en la fase anterior." (p. 20)

Las estructuras matemáticas con características fractales no son tan recientes como se puede pensar. Diferentes matemáticos a través de la historia habían encontrado lo que ellos denominaban "monstruos"; eran estructuras patológicas en un mundo visto a través de Euclides y de Newton.

Weierstrass (1815-1897) descubrió la primera curva continua que no es diferenciable. Esta curva es considerada como un fractal. Por otro lado, Cantor (1845-1918), estableció una sucesión conocida como el conjunto de Cantor, el cual se produce al tomar un intervalo, dividirlo en tres segmentos iguales, y remover la sección del medio; luego, se repite el proceso con los dos segmentos restantes, se dividen en tres partes y se remueve la sección del medio. Al realizar este procedimiento infinitamente, se podría pensar que en algún momento no queda "nada"; sin embargo, el conjunto es infinito no contable. (Falconer, 2003, p. 18).

Otro de los monstruos encontrados fue la curva de Peano, por el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), la particularidad de dicha curva es que pasa por todos los puntos del plano, y esto la convierte en otro ejemplo temprano de fractal. (Ortega, 2011, p.6)

El matemático Polaco Waclaw Sierpinski (1882-1969) introduce otros objetos, el triángulo de Sierpinski, la alfombra de Sierpinski y la curva de Sierpinski. El triángulo de Sierpinski se construye al tomar un triángulo equilátero y remover repetidamente triángulos equiláteros invertidos. (Falconer, 2003, p.132)

Además, el Copo de nieve de Koch es contado entre estos objetos fractales, aunque fue descubierto antes de ser catalogado como tal. Fue introducido por Niels Fabian Helge von Koch (1815-1897) en un artículo titulado Acerca de una curva continua que no posee tangentes y obtenida por los métodos de la geometría elemental en 1904. (Ortega, 2011, p. 6) Este fractal consiste en tomar un segmento, remover el tercio del medio y cambiar lo por una formación triangular equilátera; luego se realiza el proceso infinitamente sobre los segmentos resultantes.

La curva de Weierstrass, el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, y la curva o copo de nieve de Koch constituyen algunos de los primeros hallazgos de estructuras fractales en la matemática; sin embargo, fue Benoit Mandelbrot quien le atribuye el término fractal, proveniente del latín fraccionado o quebrado, y que resalta la característica particular de estas estructuras.

Mandelbrot se interesó en esos "monstruos", estructuras que eran raras para la época, y que no seguían un patrón conocido. Sus estudios de estas estructuras tomaron fuerza cuando este matemático empieza a trabajar para IBM en 1961, una empresa dedicada a la investigación en la naciente ciencia de la informática y las telecomunicaciones.

En un artículo de IBM sobre la geometría fractal, se menciona que en 1980 Mandelbrot utilizó la computadora como herramienta que le permitiera facilitar el proceso de iterar funciones. Tomando la función $z_{n+1} = z_n^2 + c$, usó el resultado como la siguiente entrada, y así sucesivamente, luego graficó los resultados. A través de este proceso, y con la ayuda del procesador, Mandelbrot desarrolló lo que se conoce como el conjunto de Mandelbrot.

La geometría fractal ideada por Mandelbrot tomó fuerza hasta alrededor de 1982, cuando este matemático publicó el libro La geometría Fractal de la Naturaleza. En este libro, Madelbrot lista algunas de las ocurrencias de fractales en objetos de la naturaleza. (Fractal Geometry, (s.f), p. 3)

La geometría fractal, aunque descubierta recientemente, ha existido ya por algún tiempo en las creaciones de matemáticos, y además, se puede afirmar que la naturaleza lo inventó primero.

Además de la irregularidad en la geometría fractal, en comparación con la suavidad en la geometría clásica, estas dos se diferencian en la dimensión de sus objetos. Se sabe que una línea tiene dimensión 1, así una figura plana tiene dimensión 2 (área), y una figura en el espacio tiene dimensión 3 (volumen); sin embargo, ¿en cuál grupo se ubican los fractales?

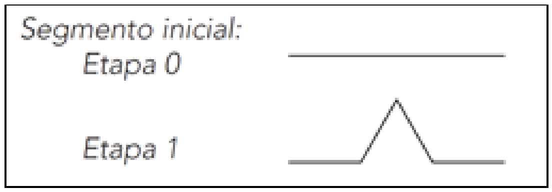
Si bien la definición de dimensión es un concepto complejo, se intentará dar una referencia razonable, que permita comprender dicho concepto. Uno de los métodos para determinar la dimensión de un objeto es cubrirlo con objetos más pequeños de la dimensión en que se está tratando. Por ejemplo, al trabajar con un cuadrado (dimensión 2) de lado L, este se puede cubrir con N cajas de unidades cuadradas u^2. Así la capacidad del cuadrado es $M = Nu^2$, en este caso particular, o lo que es lo mismo $L^2 = Nu^2$, y así $N = (L/u)^2$.

Estas igualdades se pueden generalizar de forma que $M = Nu^D$, donde D corresponde a la dimensión del objeto. El ejemplo del cuadrado es un caso particular en el cual se conoce la dimensión del objeto; sin embargo, cuando la dimensión del objeto es desconocida, esta se puede obtener fácilmente por medio de los otros datos. (Gouyet, 1996, p.5)

Si se parte de la expresión $N = (L/u)^D$, el valor de la dimensión D, viene dado por:

$$\ln N = \ln\left(\frac{L}{u}\right) \Longrightarrow \ln N = D\ln\left(\frac{L}{u}\right) \Longrightarrow D = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{L}{u}\right)}$$

Partiendo de esta expresión se puede determinar la dimensión de objetos fractales. Al analizar un objeto fractal, por ejemplo el Copo de Nieve de Koch, se tiene que al tomar un segmento de longitud $L = 3$, y después de sustituir el tercio del medio, y colocar dos segmentos opuestos con un ángulo de inclinación de $60°$, se obtiene un total de $N = 4$ segmentos iguales:



Dado que este proceso es iterativo, fácilmente se puede determinar la dimensión fractal del copo de nieve, que en este caso corresponde a

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26186...$$

C. Aplicaciones

Si le peguntan ¿qué relación tiene Star Wars con la geometría fractal? Y responde que no existe relación, considere su respuesta. Una de las aplicaciones más interesantes de los fractales es su utilización en el diseño digital.

A mediados de los 90, cuando se estaba editando una de las películas de Star Wars, se emplearon los fractales para el diseño de paisajes como el de la estrella de la muerte, o efectos de lava descendiendo. Este corresponde a uno de los primeros usos de la geometría fractal.

Uno de los grandes dilemas de la geografía ha sido el determinar la longitud de una costa por ejemplo. Entre más grande sea la unidad de medida, más pequeña va a ser la longitud encontrada. Y si se comparan longitudes que se han medido con diferentes unidades, los resultados difieren significativamente. Por lo tanto, los fractales vienen a resolver este dilema, y es uno de los primeros temas que expone Mandelbrot, cuando escribe ¿cuánto mide la costa de Gran Bretaña?

Los fractales también han sido utilizados para la creación de antenas que permiten una mejor recepción de señales. Estas han permitido que las telecomunicaciones hayan mejorado. En el diseño digital y en la publicidad, los fractales han permitido que se puedan crear incluso montaña, y esto le da un aspecto más atractivo. Los fractales han dado un nuevo sentido, y de cierta forma han permitido que el mundo gire más rápido, o al menos han permitido que las tecnologías logren grandes avances. Estos ejemplos que se han mencionado anteriormente han sido tomados de El universo es un fractal.

D. Metodología

El taller seguirá una metodología constructivista y la utilización de recursos tecnológicos para el aprendizaje. En este caso se utilizará el software libre Geogebra.

Los participantes realizarán dos construcciones de geometría fractal, el triángulo de Sierpinski y el cono de nieve de Koch. A partir de estas figuras se construirá en conjunto el concepto de geometría fractal, y algunas de sus propiedades.

Debido a la amplia utilidad del software Geogebra, se introducirá como segundo eje la creación de herramientas nuevas dentro del software. Esto facilitará la elaboración de construcciones fractales las cuales requieren repeticiones e iteraciones. Una vez hechas las construcciones se realizará una discusión entre los participantes, respecto al tema presentado y la utilización que se le dio al software Geogebra.

Además, se darán algunas recomendaciones de temas del programa de Matemáticas de secundaria que se puede desarrollar por medio de construcciones fractales.

E. Conclusiones

El uso del software permite observar y facilita la comprensión de una geometría que a pesar de no estar en el plan de estudios de segundaria, sí se puede utilizar anclada a los temas propuestos por la autoridad educativa de Costa Rica (MEP).

La elaboración del proyecto permite que los docentes tengan la oportunidad de salirse de la rutina y realizar una clase desde una perspectiva más dinámica y tecnológica. Esto le permite al docente estar a un mismo nivel tecnológico con sus estudiantes. Esta propuesta desarrolla el pensamiento geométrico en relación con el entorno, cómo evoluciona el estudiante en su proporción con el medio en el que se desenvuelve. Es necesario que el docente esté en constante renovación tanto de conocimientos como del uso de la tecnología. Para ofrecerles a sus estudiantes lecciones que estén más ligadas a su entorno y como puede aplicar esos conocimientos en su vida cotidiana.

El desarrollo del pensamiento se da cuando el estudiante tiene mayor oportunidad de observar, deducir y analizar la situación que se le presenta, lo que le permite enfrentar situaciones imprevistas de una mejor manera.

Referencias

[1] El universo es un fractal. (n.d.). Retrieved from http://www.youtube.com/watch?v=UUvyPmOYv4o

[2] Falconer, K. (2003). Fractal Gemetry; Mathematical foundations and aplications. England: Wiley.

[3] Fractal Geometry. (s.f.). Recuperado el 26 de Abril de 2014, de IBM: http://www-03.ibm.com/ibm/history/ibm100/us/en/icons/fractal/ Gouyet, J.-F. (1996). Physics and fractal structures. Ecole Polytechnique.

[4] Ortega, E. (2011). Análisis fractal. CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN.

[5] Redondo, A., & Haro, M. (2004). Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria I. Albacete: SUMA.

[6] Redondo, A., & Haro, M. (2004). Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria II. Albacete: SUMA.

[7] Santillana. (s.f.). Fractales, potencias, álgebra. Obtenido de http://www.santillana.com.uy/pdfs/libroPDF1800.pdf

F. Ejemplos tempranos de objetos fractales

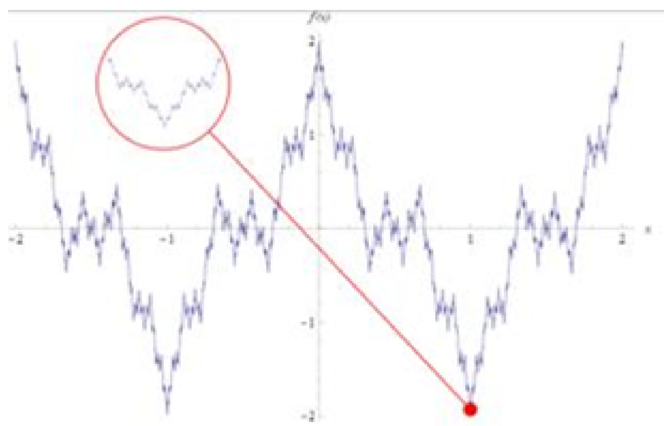


Figure 21: Curva de Weierstrass

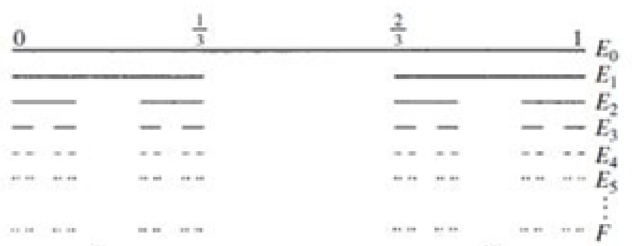


Figure 22: Conjunto de Cantor.

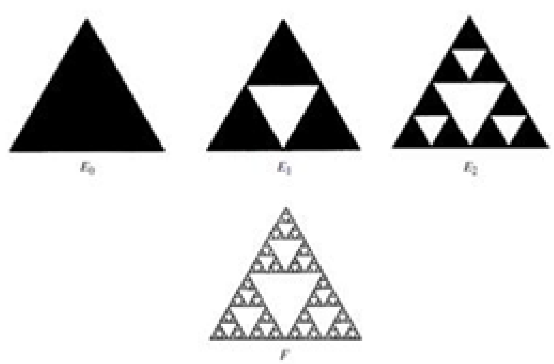


Figure 23: Triángulo de Sierpinski.

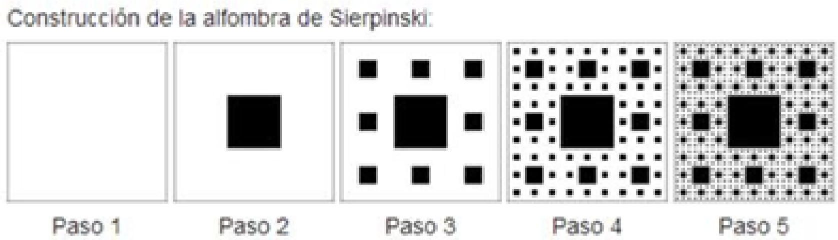


Figure 24: Alfombra de Sierpinski.

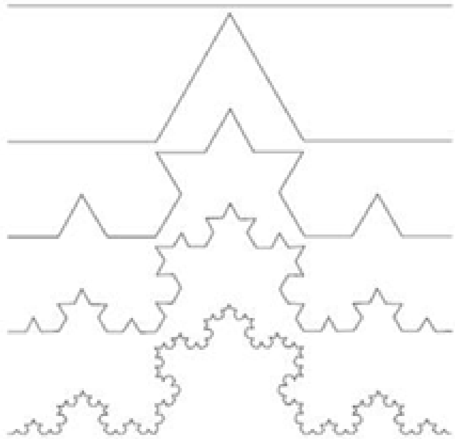


Figure 25: Curva de Koch.

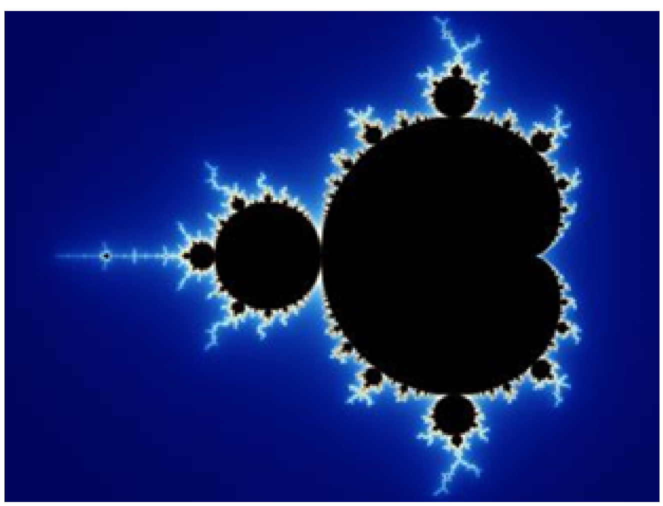


Figure 26: Conjunto de Mandelbrot.

G. Descripción de construcciones

Construcción #1

Parte 1:
Dividir un segmento en tres partes iguales, remover el término del medio, y construir un triángulo equilátero sobre el tercio del medio.

1. Abrir el software GeoGebra
2. (Remover ejes) Menú principal seleccionamos Vista » Ejes
3. (Hacer visible la cuadricula) Menú principal seleccionamos Vista » Ejes » Cuadrícula

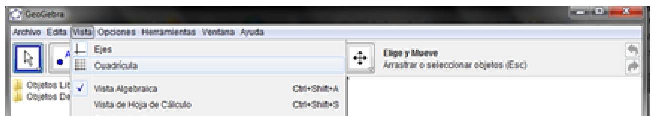


Figure 27: Cuadrícula en GeoGebra.

4. Con la herramienta Nuevo Punto se colocan dos puntos A y B.

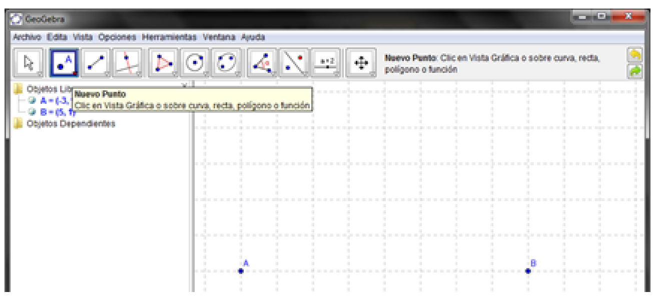


Figure 28: Puntos A y B.

5. Con la herramienta Segmento entre dos puntos, trazamos un segmento entre A y B.

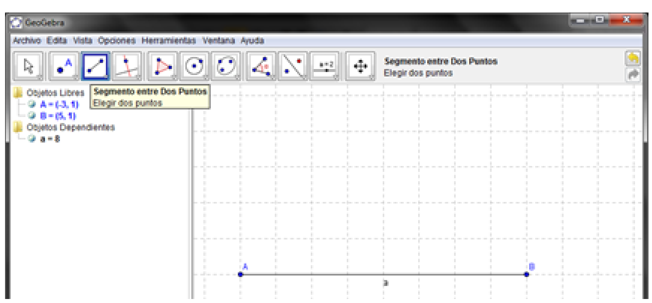


Figure 29: Puntos A y B.

6. Con la herramienta Recta Perpendicular, seleccionamos el segmento AB y el Punto A.

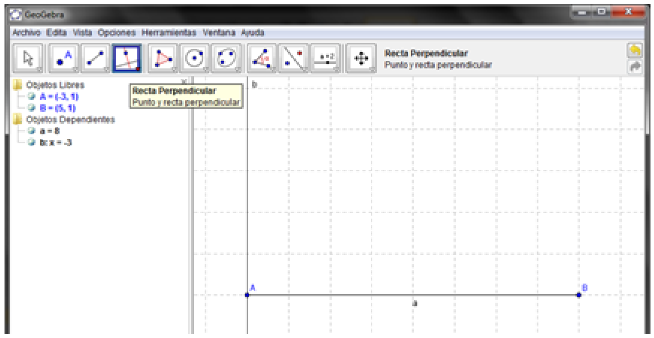


Figure 30: Recta perpendicular.

7. Con la herramienta Circunferencia dado su centro y radio, dibuje un círculo de centro en A y de radio 2.

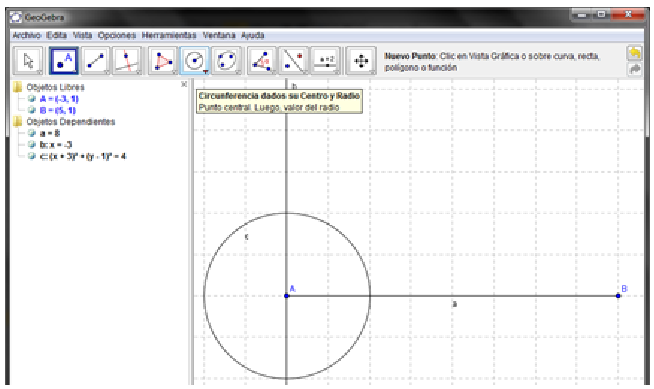


Figure 31: Circunferencia dado su centro y radio.

8. Luego, utilizando la herramienta Intersección de dos objetos, seleccione la circunferencia y la recta Perpendicular a AB para determinar su punto de intersección.

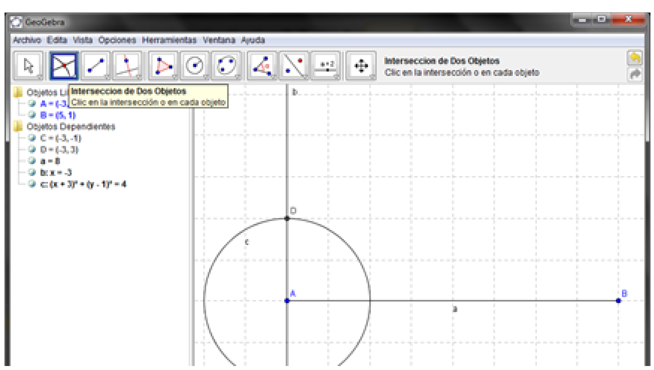


Figure 32: Intersección de objetos.

9. Construya dos circunferencias más, y determine su punto de intersección con la recta perpendicular a AB. Para ello repita los pasos 6 y 7. Obtendrá algo similar como se ilustra en la imagen.

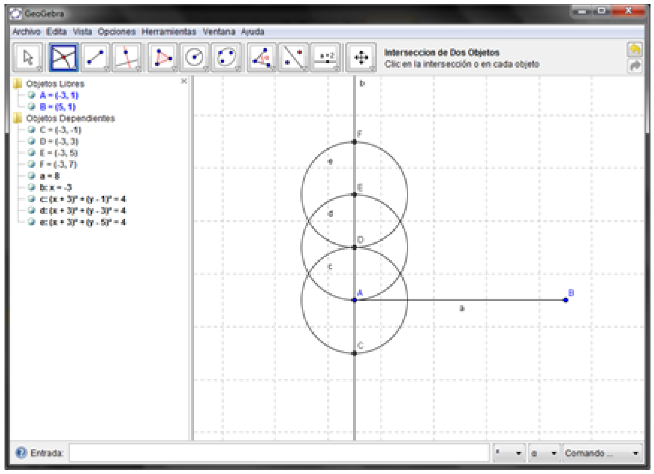


Figure 33: Circunferencias.

10. Una vez que se han determinado los tres puntos en la recta perpendicular a AB, se traza una recta desde el último punto hasta B.

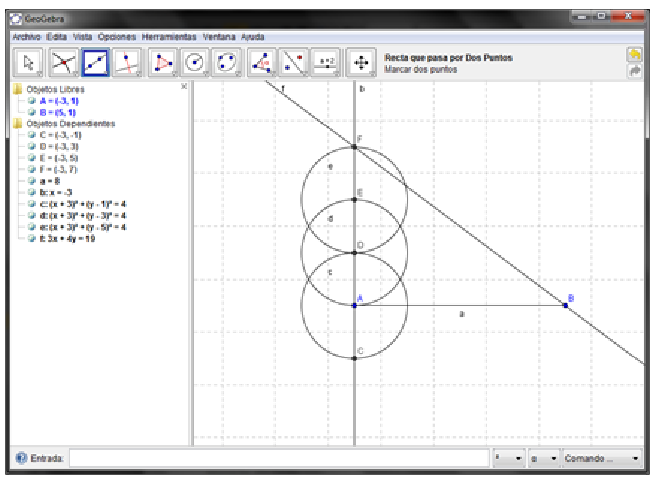


Figure 34: Recta desde el último punto hasta B.

11. Posteriormente, utilizando la herramienta Recta Paralela, seleccione la recta que se acaba de trazar en el punto anterior, y uno de los puntos en la recta perpendicular a AB. (Repetir el proceso con ambos puntos) Se obtendrá algo como lo que se ilustra en la figura 35.

12. Utilizando la herramienta Intersección de dos objetos, determine los puntos de intersección de las rectas anteriores con el segmento AB.

13. De esta forma se han encontrado los puntos H e I, los cuales dividen el segmento AB en tres segmentos congruentes. Luego, se ocultan los objetos a excepción de los puntos H y I, como se muestra en la imagen 36.

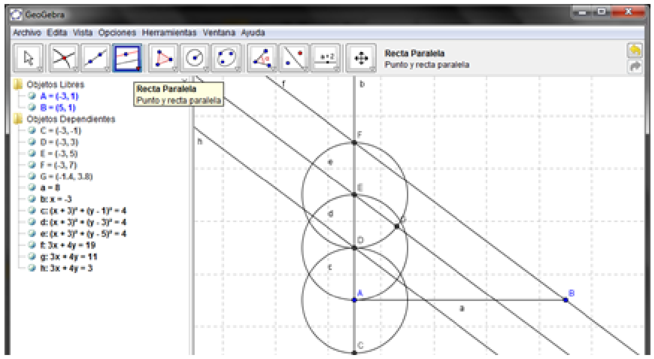


Figure 35: Recta desde el último punto hasta B.

Figure 36: Puntos H, I.

14. Trazar los segmentos AH, y IB:
15. Utilizando la herramienta Polígono Regular trazaremos un triángulo equilátero sobre HI:

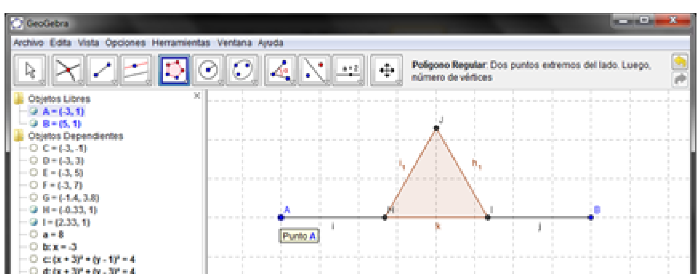


Figure 37: Puntos H, I.

16. Utilizando la herramienta Segmento entre Dos Puntos, cubrir los lados superiores del triángulo, y ocultar el polígono:

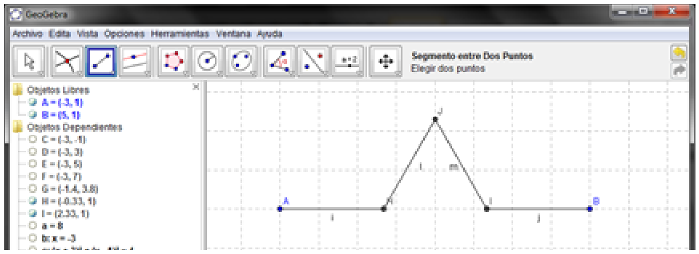


Figure 38: Segmento entre Dos Puntos.

Parte 2:

Crear herramienta para realizar estos pasos repetidas veces.

1. En el menú herramientas, seleccionar Creación de Herramienta Nueva.

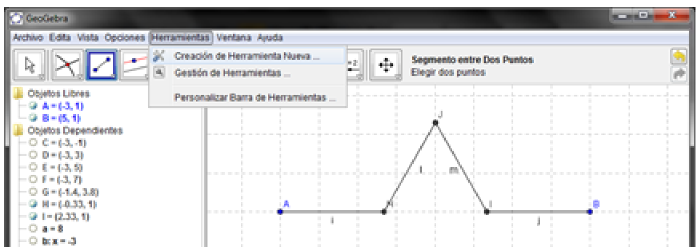


Figure 39: Nueva herramienta.

2. En la ventana emergente se seleccionará los objetos de salida (En este caso, los segmentos i, j, l, y m; y los puntos H, J, I)

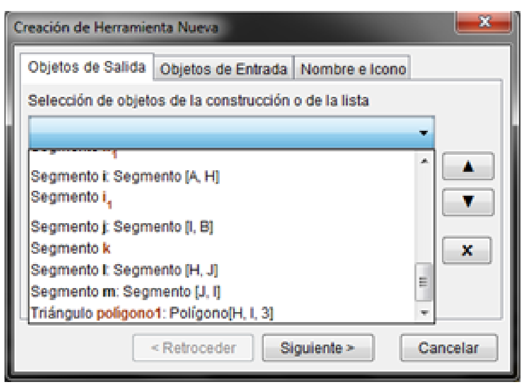


Figure 40: Objetos de salida.

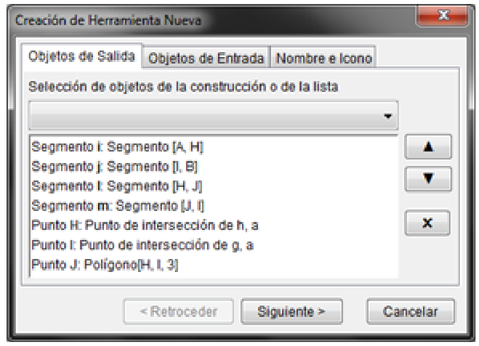


Figure 41: Objetos de salida.

3. Al dar clic en Siguiente, los objetos de entrada por defecto son A y B.
4. La última parte consiste en dar un nombre y descripción a la nueva herramienta.

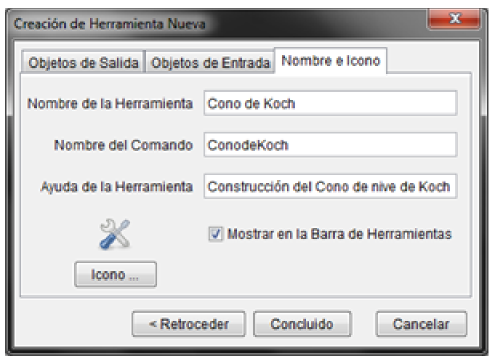


Figure 42: Creación de Nueva Herramienta.

5. Al finalizar, se da clic en el botón de Concluido. La nueva herramienta aparecerá en la barra de objetos.
6. Para que la nueva herramienta esté disponible, se debe salvar en el Menú Principal, Gestión de Herramientas, y Guardar Como.

Construcción #2

Se elaborará el triángulo de Sierpinski, en el cual podrán observar cómo se fragmenta en triángulos semejantes al inicial aunque cada vez son más pequeños y que eso no va a alterar esa semejanza.

1. Abrir el programa GeoGebra.
2. Dar clic en la vista gráfica para seleccionar cuadrícula y eliminar ejes. Ver figura 43.
3. Seleccionar la herramienta Polígono Regular.
4. Colocar el punto A y el punto B, en la ventana emergente colocar el número 3 y dar OK. Ver figura 44.
5. Dar clic derecho sobre el polígono, ir a Propiedades para cambiar color y opacidad. Ver figura 45.

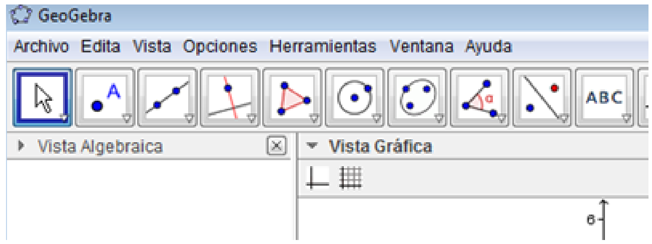


Figure 43: Creación de Nueva Herramienta.

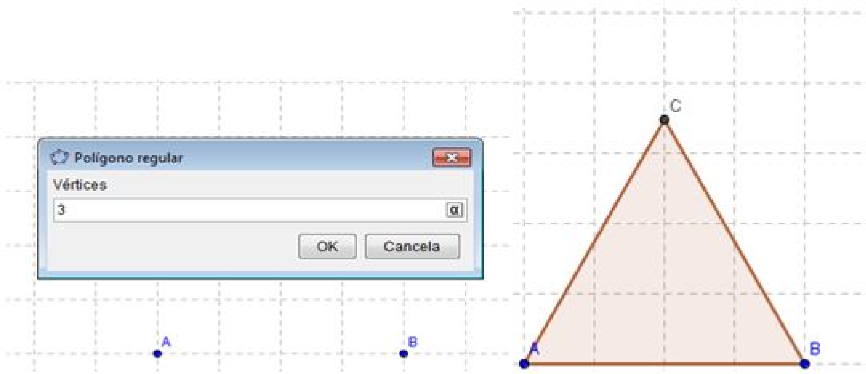


Figure 44: Herramienta Polígono.

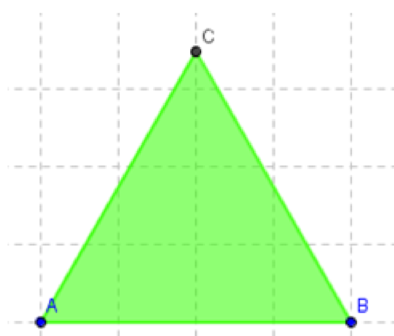


Figure 45: Modificar la propiedad de Opacidad.

6. Ir a la sección de Herramientas y dar clic sobre la segunda casilla y elegir punto medio.
7. Dar clic sobre los vértices en el siguiente orden: AC, CB, y AB. Aparecerán los puntos medios de los segmentos. Ver figura 46.
8. Ir a la sección de Herramientas y en la quinta casilla elegir la herramienta trazar polígono.
9. Los puntos medios con la herramienta elegida en el paso anterior.
10. Se forma un polígono con 4 triángulos internos semejantes. Ver figura 47.
11. Dar clic derecho sobre la letra minúscula que aparece y elegir Etiqueta Visible para esconder la letra que nombra al segmento. Ver figura 48.

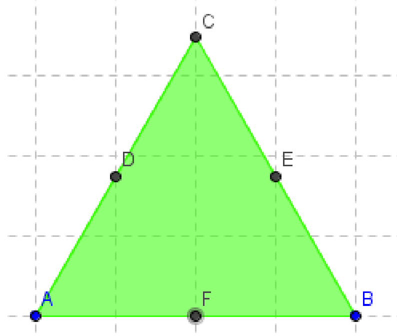


Figure 46: Modificar la propiedad de Opacidad.

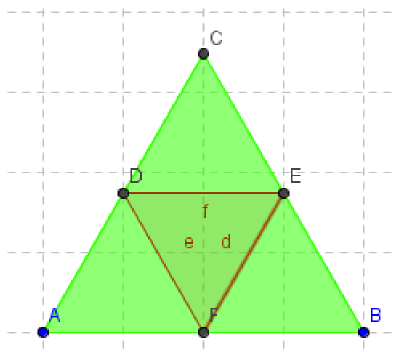


Figure 47: Modificar la propiedad de Opacidad.

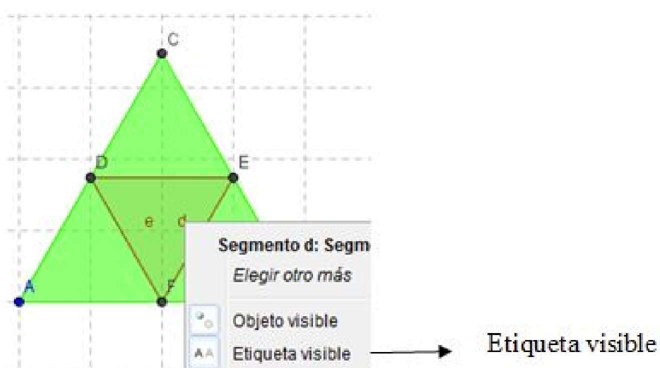


Figure 48: Etiqueta Visible.

12. Ir a Vista Algebraica y dar clic derecho sobre el polígono 2 para cambiar el color. Ver figura 49.

13. Aplicar nuevamente la herramienta de punto medio, unirlos mediante la herramienta polígono, esconder los nombres de los segmentos que aparecen y cambiar (en otras palabras repetir del paso 5 al 11). Ver figura 51.

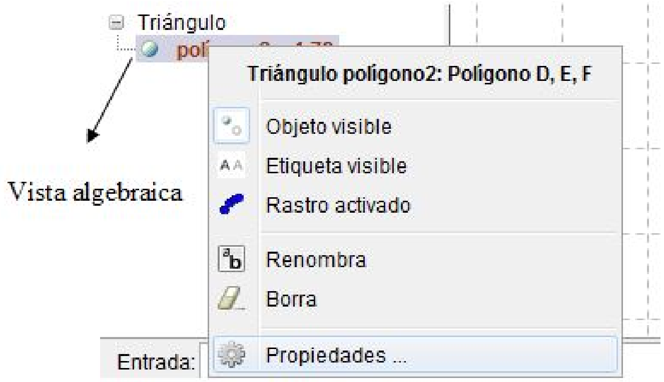


Figure 49: Propiedades de Objeto.

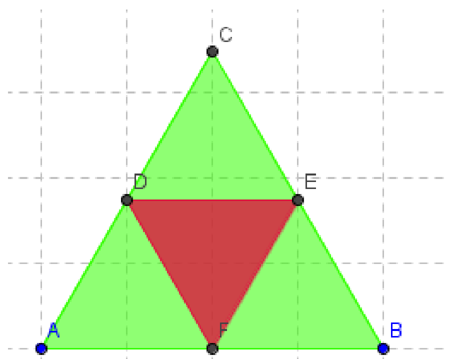


Figure 50: Modificar color.

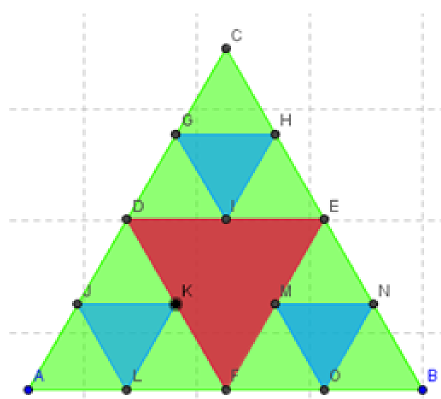


Figure 51: Creación de triángulos

14. En la Vista Algebraica dar clic izquierdo sobre los puntos, para ocultar y dejar visibles el punto A,B y C.

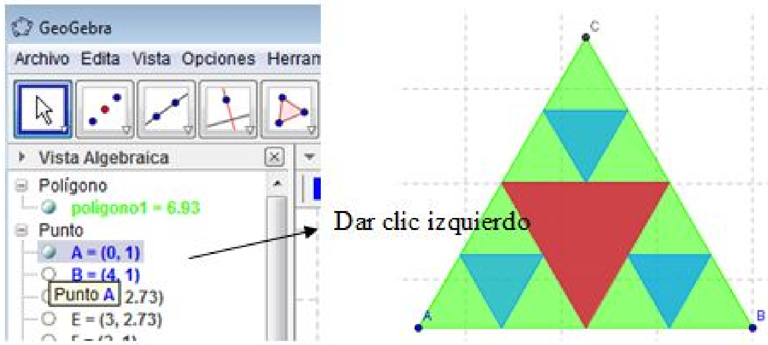


Figure 52: Creación de triángulos

15. Podemos seguir repitiendo del paso 5 al 11, obseve lo que se aprecia con el siguiente nivel.

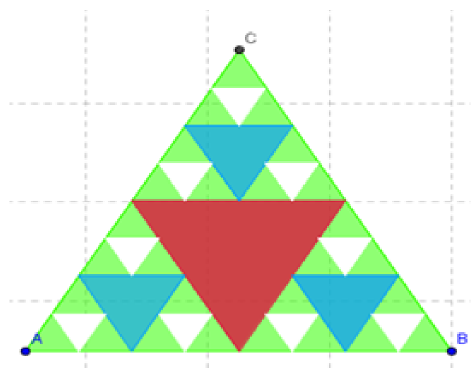


Figure 53: Creación de triángulos

Estilos de aprendizaje y enseñanza de álgebra para estudiantes de noveno año del Liceo de San Rafael de Alajuela en el 2013

CHAVES, EFREN[I]

Costa Rica

Resumen

En la clase de matemáticas es una necesidad identificar las diferencias individuales de cada estudiante, para luego tomarlo en cuenta a la hora de planear y enseñar. Por lo tanto, el docente necesita identificar los estilos de aprendizaje de los estudiantes, y así poder ofrecer estrategias metodológicas que faciliten su aprendizaje. En particular, álgebra tiende a ser muy abstracta, y de hecho es uno de los primeros enfrentamientos que el estudiante tiene con esa parte abstracta de la matemática. Sin embargo, esto no significa que los profesores deban enseñarla de la misma forma. Sino, que se busque formas de enseñar el álgebra en función de los estilos de aprendizaje de sus estudiantes, y se utilicen estrategias didácticas que favorezcan los cuatro estilos de aprendizaje activo, reflexivo, pragmático, y teórico.

Palabras clave: Estilos de aprendizaje, álgebra, resolución de problemas.

Objetivo

Analizar estrategias metodológicas eficaces para enseñar los contenidos de álgebra de acuerdo a los estilos de aprendizaje presentes en los estudiantes de noveno año.

Objetivos específicos

1. Identificar estilos de aprendizaje presentes en los estudiantes de noveno año.
2. Definir estrategias metodológicas eficaces para enseñar los contenidos de álgebra.
3. Relacionar estrategias metodológicas para enseñar los contenidos de algebra, y los estilos de aprendizaje presentes en los estudiantes.

A. Introducción

Las nuevas tendencias de enseñanza de la matemática se centran en el estudiante, y considerando que el profesor de matemáticas, la pizarra, y los libros de texto ya no constituyen el centro de la enseñanza, surge la necesidad de investigar y hacerse la pregunta ¿cómo aprende el estudiante?

[I]UNED, Costa Rica. efren.chaves@efchaves.org

Las investigaciones sobre los estilos de aprendizaje se enmarcan dentro de un nuevo paradigma centrado en el estudiante, por lo tanto los resultados que se obtengan de esta investigación harán un aporte al conocimiento siguiendo esa línea de relación entre estilos de aprendizaje y la enseñanza de la matemática.

La investigación pone en evidencia la necesidad de considerar las diferencias individuales de los estudiantes dentro de la planeación de las estrategias de aprendizaje.

Se toma como premisa que existe deficiencias en atención individual a los estudiantes de un grupo. Si se considera que en una clase de matemáticas hay en promedio 30 estudiantes, y que las metodologías tradicionales enseñan a todo el grupo por igual, sin tomar en cuenta sus diferencias individuales de aprendizaje, se concluye que es necesario realizar un cambio en la forma de preparar las estrategias metodológicas, de tal forma que se centren en el estudiante, y sus necesidades individuales.

B. Estilos de aprendizaje y la enseñanza del álgebra

La práctica pedagógica es un proceso continuo en el que intervienen el estudiante y el profesor, y en medio de estos, las situaciones de aprendizaje. Por lo tanto, se analizará este proceso desde dos dimensiones, la enseñanza, y el aprendizaje, y su relación con esas situaciones.

El proceso de enseñanza conlleva planear las situaciones que le permitirán al estudiante lograr un aprendizaje. Al respecto, Serrano y Troche (2003), afirman que "la enseñanza debe estar encaminada a promover la capacidad de aprendizaje del estudiante, perfeccionando las estrategias que promuevan la adquisición de cuerpos de conocimientos relevantes y que sean retenidos a largo plazo." (p. 67)

El proceso de aprendizaje es llevado a cabo por el estudiante, y consiste en la realización de actividades que le permitan modificar sus estructuras cognitivas por medio del descubrimiento, de la manipulación y la interrelación de nuevo conocimiento con el ya existente. (Avolio, 1975, p. 37)

Se considera aquí que los estudiantes son constructores de su conocimiento, por medio de situaciones planeadas por el profesor, y no solamente receptores. Entre los estudiantes existen diferencias individuales, y esto implica que ellos van a aprender de formas diferentes. Los estudiantes en una clase tienen formas diferentes de interiorizar o asimilar los nuevos conocimientos; por lo tanto, cuando el profesor considera esas diferencias individuales, los estudiantes no se ven forzados a aprender bajo las condiciones que el profesor imponga.

Esas formas diferentes de interiorizar o asimilar los conocimientos de los estudiantes, constituyen sus estilos de aprendizaje. Los cuales, Nevot (2004), citando a Alonso, Gallego y Honey (1995) define como "los rasgos cognitivos, afectivos y fisiológicos, que sirven como indicadores relativamente estables, de cómo los discentes perciben, interactúan y responden a sus ambientes de aprendizaje." (p. 2)

Nevot (2004), utiliza la clasificación de estilos de aprendizaje de acuerdo a Kolb, estos son: activo, reflexivo, teórico, y pragmático. De acuerdo a la caracterización realizada por Honey y Mumfurd (1986) citada por Nevot (2004), el estilo activo se caracteriza porque son personas de mente abierta, nada escépticos, sin prejuicios, entusiastas por tareas nuevas, llenos de actividad, se interesan por nuevos desafíos.

El estilo reflexivo lo confirman personas que consideran experiencias y les gusta observarlas desde diferentes perspectivas, son prudentes, disfrutan observando y analizando antes de llegar a una conclusión, escuchan a los demás. El estilo teórico está formado por personas quienes enfocan los "problemas de forma vertical escalonada y por etapas lógicas", perfeccionistas, integran los hechos en teorías coherentes, profundos en su sistema de pensamiento, les gusta analizar y sintetizar, buscan racionalidad y objetividad. Encasillado en el estilo pragmático están las personas que les gusta una aplicación práctica de las ideas y la experimentación, actúan rápidamente y con seguridad, tienden a ser impacientes, anuentes a tomar decisiones y a resolver problemas. (p. 3)

La identificación del estilo de aprendizaje de un individuo se lleva a cabo por medio de un cuestionario conocido como Test CHAEA (Cuestionario Honey Alonso de Estilos de Aprendizaje). La confiabilidad este cuestionario para el diagnóstico de estilos de aprendizaje ha sido comprobada por Castillo y Bracamonte en otras investigaciones.

Un individuo no presenta características de un único estilo de aprendizaje, sino que aunque presenta características de los cuatro estilos, predominan las características de uno de los estilos. (Castillo y Bracamonte, 2011, p.11)

Los estudiantes en una clase de secundaria tienen variados estilos de aprendizaje. Habrá estudiantes quienes tengan una predominancia alta en el estilo teórico, y habrá otros con predomino en estilos activo o pragmático. Esto quiere decir, que a algunos estudiantes se les dificulta el aprendizaje a través de la enseñanza tradicional de clases expositivas y teóricas, y más bien se ven favorecidos con estrategias activas, o que fomenten la aplicación práctica de los conocimientos.

El profesor, al considerar las diferencias individuales en la forma de aprender de cada individuo, y como diseñador de situaciones de aprendizaje requiere elaborar estrategias didácticas en función de los estilos de aprendizaje de sus estudiantes.

La enseñanza del álgebra en secundaria representa un reto para los profesores, debido a que es uno de los primeros enfrentamientos que tienen los estudiantes con esa parte abstracta de la matemática. (Ruiz, Alfaro, y Gamboa (s.f.), p. 3) Al menos en la forma como ha estado estructurado el currículo en Matemáticas hasta el 2012 en Costa Rica.

Al enseñar el álgebra carente de sentido, y como disciplina abstracta y teórica se da un efecto que favorece el aprendizaje a estudiantes con un estilo teórico y reflexivo, como lo comprueba Castillo y Bracamonte. (2011, p. 10) En contraste "El mejoramiento en el rendimiento académico se explica a partir de la implementación de una metodología participativa en la que se diversifican estilos de enseñanza en atención a los diversos estilos de aprendizaje diagnosticados en los grupos experimentales." (p. 11)

C. Marco metodológico

Esta investigación es considerada exploratoria dado que se está incursionando en un tema poco investigado. Las investigaciones sobre estilos de aprendizaje que se han encontrado, han sido desarrolladas en contextos ajenos, y con poblaciones diferentes. Por lo tanto, se pretende explorar nuevos senderos y aportar conocimiento sobre los hallazgos.

A su vez, existe cierto grado alcance descriptivo por cuanto se han tomado las recomendaciones de otros autores en materia de estilos de aprendizaje, y se ha realizado la definición y caracterización de variables.

D. Resultados

La siguiente tabla resume la asociación de diferentes recursos con los cuatro estilos de aprendizaje: activo, reflexivo, teórico, y pragmático, de acuerdo a las características que identifica Nevot (2004).

Recomendación de estrategias metodológicas de acuerdo al estilo de aprendizaje.

Estilo de Aprendizaje	Estrategias Didácticas
Activo	✓ Mosaicos ✓ Exposiciones ✓ Trabajo en grupo ✓ Resolución de problemas ✓ Tecnologías de la información
Reflexivo	✓ Mapa semántico ✓ Mapa conceptual ✓ Mapas mentales ✓ Cuadro comparativo ✓ Resolución de problemas
Pragmático	✓ Mosaicos ✓ Exposiciones ✓ Resolución de problemas ✓ Trabajos de investigación ✓ Tecnologías de información
Teórico	✓ Ensayo ✓ Síntesis ✓ Ejercicios tradicionales ✓ Resolución de problemas ✓ Demostraciones matemáticas

Fuente: creación propia.

Estrategias metodológicas de acuerdo al estilo de aprendizaje.

Estilo de Aprendizaje	Estrategias Didácticas	Porcentaje
Activo	✓ Mosaicos ✓ Exposiciones ✓ Trabajo en grupo ✓ Resolución de problemas ✓ Tecnologías de la información	
Reflexivo	✓ Mapa semántico ✓ Mapa conceptual ✓ Mapas mentales ✓ Cuadro comparativo ✓ Resolución de problemas	
Pragmático	✓ Mosaicos ✓ Exposiciones ✓ Resolución de problemas ✓ Trabajos de investigación ✓ Tecnologías de información	
Teórico	✓ Ensayo ✓ Síntesis ✓ Ejercicios tradicionales ✓ Resolución de problemas ✓ Demostraciones matemáticas	

Fuente: creación propia.

Tabla de contenidos de Algebra y Estrategias en función de los estilos de aprendizaje.

Contenidos	Estrategias
División de binomio o trinomio por monomio, en una o dos variables.	
División de binomio o trinomio por binomio en una variable.	
Combinación de operaciones con polinomios: sumas, restas, multiplicación y división.	
Factorización completa de polinomios mediante: factor común, diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto.	
Combinación de factor común y productos notables.	
Función cuadrática.	
Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.	

Fuente: creación propia.

E. Conclusiones

Se puede potenciar el aprendizaje de estudiantes con un estilo de aprendizaje activo, por medio de recursos como: resolución de problemas, tecnologías de la información, exposiciones, la técnica de mosaicos . Estos recursos permiten la participación activa de los estudiantes, enfrentarse a situaciones nuevas y retadoras. Especialmente el uso de tecnologías de la información, va a fomentar el aprendizaje a través de recursos con los que el estudiante está familiarizado.

Los estudiante con un estilo de aprendizaje reflexivo se verán beneficiados al utilizar recursos como resolución de problemas, la elaboración de mapas conceptuales, mapas semánticos, y mentales, además, elaborar cuadros comparativos. Estos recursos permitirán que el estudiante realice una introspección y que analice cuidadosamente lo aprendido.

Los estudiantes con estilo pragmático, se ven beneficiados al utilizar recursos que fomenten la puesta en práctica de un conocimiento, que permitan que el estudiante salga de una zona de inactividad y que empiece a hacer, a construir, a manipular. Por lo tanto, se recomienda la utilización de la técnica de mosaicos para desarrollar contenidos de algebra, así como el uso de resolución de problemas. También, pueden realizar exposiciones sobre los temas que se están desarrollando, o salir a la pizarra y realizar un ejercicio. Adicionalmente, se puede hacer uso de las tecnologías de la información. Resolver ejercicios tradicionales por medio de la aplicación o puesta en práctica de conocimientos adquiridos.

Los estudiantes con un estilo teórico predominante se incentivan con cuestionamientos, resolución de problemas, ejercicios de demostración, la elaboración de síntesis y ensayos, fomentando la creación propia.

En la enseñanza de la matemática existe una variedad de recursos que permiten el aprendizaje de estudiantes con diversos estilos de aprendizaje. Así, por ejemplo, la resolución de problemas potencia el aprendizaje en los cuatro estilos de aprendizaje, activo, reflexivo, pragmático, y teórico; sin embargo, cada estilo de aprendizaje aborda la resolución de problemas desde un enfoque diferente. Los estudiantes con estilo de aprendizaje activo encuentran los problemas retadores y activadores. Mientras que para estudiantes con un estilo de aprendizaje reflexivo, se favorece el aprendizaje durante el cuarto paso, en el cual tienen la oportunidad de reflexionar sobre el trabajo realizado y evaluarlo. Para estudiantes con un estilo pragmático, será de provecho la puesta en práctica de conocimientos. Mientras que para los estudiantes teóricos encontrarán los problemas como un motivo para el cual elaborar sus propios razonamientos y conjeturas.

Se recomienda la utilización de resolución de problemas, ya que es uno de los recursos que potencia todos los estilos de aprendizaje a la vez. Además, se puede complementar con otros recursos listados.

Adicionalmente, se sugiere combinar los recursos anteriores con trabajos en grupo. De esta forma, los estudiantes aprenden de las experiencias de sus compañeros.

Se recomienda mantener un balance en las estrategias utilizadas, con forme transcurre el periodo de aprendizaje, con el fin de mantener el mismo nivel de aprendizaje en todos los estudiantes.

Debe existir coherencia entre los recursos que se utilicen, los objetivos y contenidos que se persiguen, y el contexto en el que se desarrolle, con el fin de que el aprendizaje sea efectivo.

Referencias

[1] Avolio, S. (1975). La tarea docente. Buenos Aires: Marymar.

[2] Castillo, M., & Bracamonte, E. (2011). Estudio de la relación entre el estilo de aprendizaje de estudiantes de ingeniería y su rendimiento académico en matemáticas. Recife, Brasil: CIAEM. Obtenido de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2311/504

[3] Nevot, A. (2004). Enseñanza de las Matemáticas basada en los estilos de aprendizaje. Departamento de Matemáticas Aplicada. E. U. de Arquitectura Técnica de la Universidad Politécnica de Madrid.

[4] Ruiz, A., Alfaro, C., & Gamboa, R. (s.f.). Aprendizaje de las matemáticas: conceptos, procedimientos, lecciones y resolución de problemas. San José: Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas.

[5] Serrano, J., & Troche, P. (2003). Teorías psicológicas de la educación. Universidad Autónoma del Estado de Mexico.

Parametrización y redacción de items para la educación diversificada

COTO, JOSÉ MANUEL[I] DELGADO, JOSÉ ANDRÉS

Costa Rica

Resumen

La Educación Matemática, en los últimos años, se ha visto amenazada por la apertura de nuevas formas de evaluación, como por ejemplo las pruebas PISA; donde se evidenció que el país, está fallando en aspectos de suma importancia. Una respuesta propuesta por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, fue el cambio en los programas de estudio, donde se apostó al cambio en la metodología, pasando de ser un programa basado en los contenidos y objetivos, a ser un programa que promueva las habilidades y competencias matemáticas. No obstante en este programa no se detalla el componente evaluativo, por lo que este taller propone una estrategia para aprender a paramerizar y redactar items, que busquen generar esas mismas habilidades y competencias que se disponen en el progama.

Palabras clave: Parametrización, redacción, items, educación.

A. Desarrollo

El taller está dividido entres momentos claves: Exposición de la importancia y pertinencia de este tema,la explicación del proceso que se debe seguir al parametrizar y una última parte donde se redactarán y parametrizarán items enfocados en la educación diversificada.

• PrimeraParte

El programa de estudio, en el área de matemática, vigente desde el año 2012, fue una propuesta que apostaba por la innovación en la metodología, pasando de un modelo, que en papel se decía constructivista y en la práctica predominaba el conductismo, a uno con una línea más constructivista, en todos los aspectos.

El programa de estudio, en el área de matemática, vigente desde el año 2012, fue una propuesta que apostaba por la innovación en la metodología, pasando de un modelo, que en papel se decía constructivista y en la práctica predominaba el conductismo, a uno con una línea más constructivista, en todos los aspectos.
Esta propuesta ha sido desconcertante para muchos docentes y autoridades en el ámbito educativo. Han habido opiniones en contra y a favor de la misma, que llevaron a las autoridades a tomar medidas, tales como la apertura de centros de capacitación docente y la implementación de mejoras a las observaciones realizadas por entes

[I]TEC, Costa Rica.

externos al Ministerio de Educación Pública.
El objetivo general que evidencia el programa es el de fortalecer las capacidades cognitivas para abordar retos de la sociedad moderna. Lo que nos muestra que el país está mirando al desarrollo de seres humanos con capacidad de razonamiento lógico matemático y con capacidad de construir su propio conocimiento, con énfasis en aprender a aprender, aprender creando, y desarrollando habilidades específicas, generales que conduzcan a la competencia matemática.

La forma en la que se plantea el desarrollo de la lección, en este nuevo programa de matemática, se detalla en cuatro momentos claves los cuales se amplian a continuación. (MEP,2012,pp 46)

1. **Propuesta del Problema**: el docente en su función de guía, propone a la clase un problema que genere, lo que Vigotsky llamaba una desequilibrio cognitivo. De manera tal que los estudiantes demuestren que herramientas son necesarias para resolverlo y evidencie la necesidad de aprender nuevos conceptos.
2. **Trabajo independiente del estudiante**: en este momento los estudiantes aplicarán todos aquellos contenidos que se encuentren a dispocisión de manera que aprendan a discernir entre cuáles conceptos pueden utilizar. También es durante este periódo donde pueden surgir dudas sobre si son únicos esos elementos y si falta algo nuevo por aprender.
3. **Discusión**: terminado ya el trabajo del estudiante, se entra en un momento de foro, donde los estudiantes exponen, no solo el resultado final del ejercicio, sino el proceso que utilizaron para llegar a él. Este momento es de real importancia, puesto que se retroalimenta el grupo con opiniones divergentes. Luego el docente, en su función moderadora, expone al grupo, no la solución del problema, sino los contenidos que se utilizan para alcanzar el objetivo.
4. **Clausura**: el docente cierra la lección rellenando todos los espacios que, a su criterio, quedaron inconclusos a lo largo de la clase.

Todo esto conlleva a la generación de procesos, los cuales son el resultado final de la educación. Es decir, que un estudiante al egresarse del sistema, debe ser capaz de:(MEP,2012,pp 24)

Razonar y Argumentar: Capacidad de generar actividades mentales que operan transversalmente y que desencadenan formas típicas de pensamiento matemático.

Plantear y Resolver: Lograr el planteamiento de problemas y el establecimiento y diseño de estrategias

Conectar y Comunicar: Capacidad de expresar y comunicar las ideas, de manera oral, visual o escrita.

La evaluación tradicional, conocida como la aplicación de un examen teórico, para determinar si un estudiante aprendió o no, no se ajusta a lo planteado en los programas de estudio, ya que se desea desarrollar habilidades, las cuales no se pueden determinar, de la mejor forma, con una prueba teórica. De esta manera surge la necesidad de plantear nuevas estrategias para evaluar el aprendizaje de los estudiantes.

Dentro de los procesos definidos por el MEP, se encuentra el de Razonar y Argumentar. El cual debería ser considerado un pilar en la formulación de una propuesta para implementar un sistema de evaluación acorde a la metodología de los nuevos programas. Este proceso podría generar diversas habilidades y competencias matemáticas, propias del objetivo del programa.

El parametrizar items asegura a los educandos, el fortalecimiento de la razón y el ajuste cognitivo para una buena argumentación.

Es importante hacer énfasis, en que la evaluación, **no es un resultado**, sino que debe generar en los estudiantes habilidades como: exploración de un problema, diseño de estrategias, desarrollo mismo de una idea, autoreflexión, análisis y la generación de conclusiones.

• Redacción de items

La redacción es una excelente herramienta para el aprendizaje en todo currículum académico, marcando la diferencia entre un significado y otro.

Según White (1989), "El uso generalizado de las pruebas de selección múltiple, trivializa la lectura y la redacción desde los primeros grados, hasta la enseñanza universitaria"

Es por esta razón por la que los docentes deben ser cautelosos,ya que se podría desfasar el objetivo central del item.

• Parametrización de items

En el ámbito de las matemáticas, los parámetros consisten en variables que permiten reconocer, dentro de un conjunto de elementos, a cada unidad por medio de su correspondiente valor numérico. El beneficio de crear un item con valores variables (parámetros), bien redactados y que además la parte matemática del item esté bien definida y sea comprensible para el lector, contribuirá a generar un proceso de argumentación y razonamiento, que serán útiles, no solamente en la matemática misma, sino en diferentes contextos sobre la toma de desiciones en la vida cotidiana.

• Ventajas y Desventajas

Ventajas

- Con un solo item se pueden generar una infinita cantidad de items con la misma dificultad, pero expresados de manera diferente.
- Se disminuye la posibilidad de fraude, ya que no solo se copian las respuestas, sino también procedimientos.vita a un 100 porciento la posibilidad de copiar por parte de los estudiantes.
- Cualquier persona sabiendo la solución y las respuestas podrá ser capaz de utilizarlos.
- Se pueden generar item que involucren el razonamiento lógico matemático.
- Realización de un ejercicio reflexivo, por parte del docente, sobre los conceptos involucrados. lo que favorece a un fortalecimiento del criterio matemático.
- De una sola prueba se pueden generar n cantidad de pruebas distintas con igual dificultad, igual distribución de puntos por tema e igual orden para todos los estudiantes.
- La parametrización puede ser utilizada para cualquier tipo de item.

Desventajas

- La primera vez que se redactan los items, el tiempo que se debe dedicar a construir las diferentes variaciones, es mayor.
- Lentitud en la impresión ya que son exámenes distintos.
- Se requiere de tiempo y práctica para desarrollar la experticia en la elaboración de ese tipo de items.

• Segunda Parte

El proceso de parametrización, se divide en cuatro fases, las cuales determinan la pertinecia de los items y su valor en una prueba. Estas fases son: definir la prioridad, considerar su importancia y determinar los valores relativos y óptimos.

- Prioridad: Indica la importancia que tiene el item, sobre todo la pertinencia del mismo en el proceso de enseñanza aprendizaje. Cada item se puede clasificar en muy importante, importante, de importancia media, poco importante o prescindible. Esta última categoría es de especial importancia pues historicamente, según diversos estudios sobre los exámenes de secundaría en Costa Rica, los docentes tienden a formular items, con cuestionamientos básicos, que prodrían ser removidos para darle énfasis a otros con mayor importancia.

  "El proceso de análisis mostró la existencia de ítems cuyo contenido motiva al cuestionamiento de la pertinencia de su inclusión en pruebas escritas cuyos resultados son base para decidir sobre la promoción del estudiante al siguiente nivel escolar."(Meza, Agüero 2014)

  El ordenmiento anterior es vital, ya que existen contenidos que son importantes para llegar a conceptos más elaborados, sin embargo no son de importancia a la hora de efectuar la evaluacíon.

- Importancia relativa: Indica la importancia del item en relación al resto de los items, de una misma prueba.

  Esto está determinado por lo que, en Costa Rica, se denomina **Tabla de Especificaciones.** Este es una herramienta que equilibra los contenidos que se plasmaron en las clases, con respecto a los demás contenidos. Esto ayuda a que los items de un tema en particular, no se recarguen en una misma prueba, sino que se equilibren la cantidad de items de cada contenido, dependiendo del número de horas que se le dedicó.

- Valor mínimo: Es aquella habilidad que se considera como básica a la hora de enfrentarse al item.

- Valor óptimo: Es aquel tipo de item que permite determinar, aquella habilidad que, en condiciones óptimas y favorables, el estudiante podría generar.

Para parametrizar un item, se deben tener en cuenta los siguientes aspectos:

1. Tener claros los conceptos o habilidades que se desean evaluar en el item a parametrizar. Esto con el fin de evitar que se evaluen contenidos fuera de lo seleccionado en la etapa de Prioridad.
2. Dominio de los conceptos matemáticos y las operaciones que se van a realizar en el desarrollo del item. Debido a que se recurrirá a la abstracción matemática, para el proceso de parametrización.
3. Los parámetros elegidos, deben cumplir con las condiciones que determinan un ejercio, no pueden tomarse a la ligera, ni nombrarlos a conveniencia, sino que debe tener un análisis exhaustivo de las propiedades, para no caer en ambigüedades.
4. Dar una redacción clara y consisa del item o los items a parametrizar, lo que facilita la comprensión a los estudiantes.

• Tercera Parte

Para aclarar lo antes mencionado se presentarán los siguintes ejemplos; los cuales se parametrizarán con el fin de analizar su funcionabilidad en la educación diversificada.

• Ejemplos

Item sin Parametrizar

Juan sale de su hogar a las 10:00 a.m, si 5 minutos después de haber salido de su casa se encuentra a 7 metros, y 10 minutos después de haber salido de su casa está a 16 metros. Suponiendo la velocidad constante: ¿A qué distancia se encotraba Juan a los 15 miniutos de haber salido de su casa?. ¿Cuánto tiempo tardará Juan en estar a 100 metros de su hogar?, ¿Es posible determinar una fórmula que prediga la distancia de Juan a su casa según la cantidad de minutos transcurridos?(Justifique su respuesta).

Item Parametrizado

Juan sale de su hogar a las 10:00 a.m, si b minutos después de haber salido de su casa se encuentra a a metros, y c minutos después de haber salido de su casa está a d metros. Suponiendo la velocidad constante: ¿A qué distancia se encotraba Juan a los e minutos de haber salido de su casa?. ¿Cuánto tiempo tardará Juan en estar a f metros de su hogar?, ¿Es posible determinar una fórmula que prediga la distancia de Juan a su casa según la cantidad de minutos transcurridos?(Justifique su respuesta).

Explicación

Primero debemos elegir ciertas restricciones para que nuestro parámetro no pueda contener ambigüedades con la redacción del item. Así es necesario definir que $b < c < e$ y $a < d < f$. Esto se define porque se esta tratando de que el problema se resuelva utilizando la ecuación de una recta que sea creciente. Así con dicha restricción se puede seguir desarrollando el parámetro.

Se puede notar que con estas restricciones podemos trabajar los pares oredenados (b, a) y (c, d), con $b \wedge c$ absisas y $a \wedge d$ valores en las ordenadas. Cuándo calculamos la pendiente de la recta que contiene los puntos (b, a) y (c, d) obtenemos que su valor es: $\dfrac{d-a}{c-b}$, luego cuando utilizamos el par oredenado (c, d) obtenemos que la ecuación de la recta que denota la distancia a la que se encuentra Juan de casa es $y = \dfrac{d-a}{c-b}x + d - \dfrac{(d-a)c}{c-b}$.

Teniendo esta expresión para la distancia, la primera pregunta resulta fácil de responder, la segunda pregunta es simplemente despejar el valor de x, en la ecuación $f = \dfrac{d-a}{c-b}x + d - \dfrac{(d-a)c}{c-b}$. La última pregunta se reponde manera afirmativa y la justificación es el razonamiento para encontrar la ecuación de la recta que denota la distancia según el tiempo transcurrido.

El ejercicio del ejemplo anterior, además de incluirse como parte de un item de desarrollo, podría modificarse para ser incluida como ítem de selección única de la siguiente manera:

Lea detenidamente la siguiente situación

Juan sale de su hogar a las 10:00 a.m, si b minutos después de haber salido de su casa se encuentra a a metros, y c minutos después de haber salido de su casa está a d metros de su casa.¿A qué distancia se encotraba Juan a los e miniutos de haber salido de su casa?.

Con base en la situación anterior, la ecuación de la recta que predice la distancia a la que se encuentra Juan de su hogar según el tiempo trancurrido es:

A. $y = \dfrac{d-a}{c-b}x + d - \dfrac{(d-a)c}{c-b}$ RESPUESTA CORRECTA

B. $y = \dfrac{c-b}{d-a}x + d - \dfrac{(c-b)c}{d-a}$

C. $y = \dfrac{d-a}{c-b}x + c - \dfrac{(d-a)d}{c-b}$

D. $y = \dfrac{d-a}{b-c}x + d - \dfrac{(d-a)c}{c-b}$

B. Conclusiones

La parametrización de itemes es una herramienta que permite generar, a partir de un enunciado, una variedad de itemes similares modificando algunos de sus datos a través de parámetros.

En el Centro de Recursos Virtuales del ITCR se ha desarrollado una importante experiencia en el uso de esta herramienta con la elaboració de exámenes diagnóstico, para el curso Matemática General. Lo que potencializa la generación de items y además, se podría determinar, que el estudiante que aprebe el examen, posee los conocimientos necesarios para avanzar al siguiente curso.
Se puede notar, que redactar el item, resulta más lento y a su vez, requiere de una elaboración más detallada y con un dominio de los contenidos más profundo. Sin embargo las facilidades, tales como la redacción de gran cantidad de items del mismo tema y con la misma dificultad.

Es necesario, recordar que los parámetros, no son para dificultar la matemática y presentarla a los estudiantes como algo lejano a la realidad; sino que pueda utilizarse para promover el razonamiento y la argumentación, ya que se pueden presentar los items de diferentes maneras como por ejemplo, con algunas constantes y variables, que permitan al estudiante fortalecer su abstracción matemática. Esto resulta ser un objetivo primordial en la estructura de los nuevos programas.

Una vez finalizado el proceso de redacción y parametrización, se crea, por así decirlo, un banco de items, del mismo tema y con la misma dificultad. Por lo que el tiempo que se tarda en redactar un item con estas condiciones se compensa con la facilidad de confeccionar otros con las mismas características.

Básicamente se forma un item general, con la capacidad de generar infinitas combinaciones.

Referencias

[1] MEP. 2012. Programas de Estudio en Matemática, San José Costa Rica.

[2] Meza, G. Agüero, E. (2014). Evaluación de los aprendizajes en la educación media: características técnicas de las pruebas escritas en matemática. En: Revista Digital Matemática, Educación e Internet. Vol. 14. No. 2. Marzo- Agosto, 2014.

[3] White E. 1989. Teaching and assessing writing. Jossey-Bass Publishers. San Francisco.

Construcción de cónicas por medio de Papiroflexia

CRUZ, GERARDO[I]　　GUERRA, OSCAR

Honduras

Resumen

Este documento es un resumen del taller denominado "construcción de cónicas por medio de papiroflexia" el cual es una actividad que tiene como objetivo introducir a los docentes del área de matemáticas al uso de la papiroflexia y ejemplificar su utilidad en los salones de clases como un recurso didáctico sencillo y práctico. Además es una exhortación a investigar y experimentar con metodologías innovadoras en el momento de planificar actividades relacionadas a la introducción de un concepto nuevo o la definición de una regla o procedimiento matemático, esto con el afán de lograr en los dicentes, más que memorización de un algoritmo, desarrollar un concepto o procedimiento matemático coherente, con significado y en relación con sus conocimientos previos.

Palabras clave: Secciones Cónicas, papiroflexia, didáctica de matemáticas.

A. Las secciones cónicas

Las secciones cónicas o simplemente cónicas son conceptos matemáticos que como docentes conocemos desde nuestra instrucción secundaria, pero el nacimiento y desarrollo de los mismos ha sido un tanto complejo, desde sus inicios cerca del siglo V antes de Cristo, los acercamientos hechos por Aristeo y Euclides en sus tratados referentes al tema, pero sin duda el principal artífice de estos conceptos ahora elementales es Apolonio de Perga, quien fuese un matemático y astrónomo que dedicó su vida al estudio, enseñanza y redacción de tratados matemáticos.

Entre los avances hechos por Apolonio en ésta área destacan el dar un nombre específico a cada una de las secciones cónicas, demostrar que pueden ser producidas al cortar un cono doble con un plano solo haciendo variar el ángulo con el cual se interceptan, demostrar que el cono que genera las secciones cónicas no necesita ser recto y también probar que las propiedades de las secciones cónicas producidas por conos rectos son iguales a las propiedades de las producidas por conos oblicuos. (Martínez, 1999)

Referente al término sección cónica, también ha recibido diferentes acepciones las cuales difieren según la época y la rama de matemática que lo defina. Munem considera que se denominan cónicas debido a que están determinadas por la intersección de planos con conos completos de dos hojas. (Rodríguez, 1980)

Por su parte el Diccionario de la Lengua Española en su duodécima segunda edición define el término sección cónica como "cualquiera de las curvas que resultan de cortar la superficie de un cono circular por un plano; pueden ser círculos, elipses, hipérbolas o parábolas."

[I]UPNFM, Honduras.

Estimando lo anterior y para efectos de este documento consideraremos que el término secciones cónicas hace referencia a las curvas de intersección entre un cono doble y un plano; si dicho plano no pasa por el vértice, las secciones cónicas se clasifican en: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.

Definido ya el término principal de este documento y habiendo remembrado un poco de la historia del mismo podemos realizar un proceso homólogo con el otro componente conceptual de esta actividad.

B. La papiroflexia

La papiroflexia, mejor conocida como origami, es el arte de origen japonés que consistente en el plegado de papel sin usar tijeras ni pegamento para obtener figuras de formas variadas. (Gómez, 2007)

El arte de doblar papel se originó en China alrededor del siglo I o II d. C. y llegó a Japón en el siglo VI aproximadamente, y se integró en la tradición japonesa.

Los educadores impusieron que los estudiantes en sus creaciones mostraran originalidad y creatividad y fue así como surgió el revolucionario del Origami en el siglo XX: Akira Yoshizawa, el genio del origami, quien realizó más de 50.000 trabajos, fue quien desarrolló las nuevas formas de sobrevivir a los modelos tradicionales restableciendo el origami como forma de arte creativa, poniendo énfasis en la sensibilidad de la forma y exactitud en el plano a trabajar. (Gómez, 2007)

Otros aportes importantes han ocurrido, debido a la incorporación de las matemáticas y la computación en el diseño de figuras complejas. Entre los aportes a la geometría destacan los teoremas y axiomas del origami. Y la introducción de programas computacionales de optimización del uso del papel.

El mismo Laffosse piensa que nos encontramos en la edad del oro del origami, pues ha habido muchos avances en pocos años. Hay una gran variedad de autores vivos que han compartido sus conocimientos a través de libros e Internet.

El origami también tiene una vertiente científica, dependiendo de las preferencias de cada plegador, o de su sistema de creación. Los pliegues no son más que operaciones de simetría, a veces bastante complejas, y pueden ser ideadas y estudiadas metodológicamente en términos geométricos. El carácter matemático que pueda tener el plegado de papel no está reñido con el lado artístico, aunque tampoco tiene por qué coincidir. (Gómez, 2007)

El origami es una gran ayuda en la educación, trayendo a quien lo ejercita grandes beneficios y grandes cualidades, no sólo a los estudiantes que lo realicen, sino también le será bueno a cualquier persona; algunas de ellas son:

- Desarrollar la destreza, exactitud y precisión manual, requiriendo atención y concentración en la elaboración de figuras en papel que se necesite.
- Crear espacios de motivación personal para desarrollar la creatividad y medir el grado de coordinación entre lo real y lo abstracto.
- Incitar al alumno a que sea capaz de crear sus propios modelos.
- Brindar momentos de esparcimiento y distracción.
- Fortalecimiento de la autoestima a través de la elaboración de sus propias creaciones.

C. La papiroflexia en la instrucción matemática

En las últimas décadas; debido a múltiples factores como ser la revolución del conocimiento científico, la globalización, los avances tecnológicos, el auge por la metodología y didáctica, y principalmente el bajo rendimiento de los estudiantes en el área de matemáticas; como docentes nos planteamos nuevas maneras de desarrollar en los estudiantes la compresión de los conceptos y procesos matemáticos en busca de llevarlos un paso adelante de la memorización y la aplicación de algoritmos.

Es ahora que la famosa frase del político, científico e inventor estadounidense Benjamin Franklin "Dime y lo olvido, enséñame y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo" cobra cada día más vigencia, ya que considerando los problemas de comprensión que presentan los dicentes en todos los niveles de la instrucción matemática formal ha surgido una nueva manera de enfocar las clases de dicha área. Bajo este nuevo enfoque se pretende que el estudiante aprenda matemática haciendo matemáticas. (Torres, s.f.)

Parte de este planteamiento incluye que el estudiante manipule objetos concretos y logre mediante esto el descubrimiento y la comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos deseados, es por ello que no es raro encontrar una gran variedad de materiales y recursos como tangram, geoplanos, puzzles, varillas, troqueles, etc. utilizados con fines didácticos dentro de los salones de clases. Es así que en las últimas décadas ha surgido el creciente uso de un recurso muy usual en nuestro ambiente, fácil y sencillo de usar, pero no por ello menos atractivo y útil: el papel.

La papiroflexia o arte de doblar papel ha sido una de las herramientas más recientemente utilizadas por sus grandes cualidades como ser: su simplicidad de materiales, su practicidad de trabajo, la gran gama de tópicos curriculares en los cuales puede ser de utilidad, entre otras.

Sumadas a estas cualidades propias podemos agregar la ayuda del internet y la programación para la difusión y desarrollo de este emocionante y útil recurso didáctico.

Después de analizar la historia y definición de las secciones cónicas y de introducir la papiroflexia y su uso en como recurso didáctico se describen las actividades a desarrollar durante el taller en sí mismo.

D. Descripción de actividades

Considerando que el objetivo de este taller, como actividad docente, es evidenciar la utilidad de la papiroflexia para desarrollar los tópicos matemáticos de manera entretenida y, más importante aún, desarrollarlos haciendo énfasis en la comprensión clara de los conceptos y procedimientos matemáticos es que se pretende conocer y reflexionar sobre este recurso didáctico, los pros y contras que conlleva.

Este taller, como actividad sugerida con estudiantes, está estructurado basándose en el modelo propuesto por Van Hiele, el cual consiste en enmarcar y describir el aprendizaje matemático en cinco niveles los cuales son: la visualización o reconocimiento, el análisis, la ordenación o clasificación, la deducción formal y el rigor matemático.

Debido a que el objetivo especifico del taller es lograr que los estudiantes deduzcan los conceptos de las secciones cónicas utilizando la papiroflexia se espera llevar al discente al nivel tres o cuatro de la escala definida por Van Hiele, en el cual serán capaces de identificar el concepto matemático y determinar algunas de sus características, esto no significa que esta técnica no pueda llevarnos más allá de este nivel, es el alcance y los objetivos de la actividad que lo determinan de esta manera.

Para lograr estos objetivos, los generales y los específicos del taller, se desarrollará inicialmente una introducción histórica y conceptual al estudio de las secciones cónicas con el fin de ilustrar y recordar como nacen estos espacios geométricos y como se ha dado, a grandes rasgos, su construcción a través de la historia.

De igual manera que con las secciones cónicas desarrollaremos un espacio para introducir la papiroflexia y como ésta ha logrado, a groso modo, desarrollarse hasta adquirir el auge del cual goza hoy en día.

Como punto central y cumbre de la introducción al taller desarrollaremos un breve bosquejo del uso de la papiroflexia en los salones de clases y principalmente como ésta ha venido consolidándose como un recurso didáctico en general y específicamente en el área de matemáticas. Para comenzar con las actividades específicas del taller se impartirán las guías elaboradas, existe una guía para cada sección cónica, estas servirán de referencia durante el proceso de construcción de las secciones cónicas haciendo uso de la papiroflexia.

Cada guía posee una estructura interna acorde con los objetivos, momentos del taller y el modelo utilizado en el mismo; y siguen de manera general el siguiente orden: construcción y etiqueta de los dobleces, líneas y puntos necesarios, construcción de la curva deseada, reconocimiento de los elementos de cada sección cónica, construcción de puntos y segmentos auxiliares que faciliten la identificación de las propiedades características cada sección cónica y finalmente la construcción del concepto.

Durante el proceso se dirigirá el grupo mediante diapositivas que muestren los pasos más importantes de la construcción a realizar, esto con el afán de unificar el trabajo que se esté realizando.

Al finalizar cada actividad, la construcción de cada cónica, tendremos un tiempo como docentes para reflexionar a cerca del trabajo realizado, las ventajas, desventajas, virtudes, aspectos a mejorar y a considerar durante el desarrollo de esta actividad con estudiantes reales, esto para cumplir con el objetivo general del taller desarrollado.

E. Consideraciones finales

Esta actividad es una invitación a los docentes para considerar, en el momento de plantear actividades en relación a la introducción de conceptos y procedimientos matemáticos, el hacer uso de recursos didácticos ingeniosos con el fin primordial de construir en los discentes conceptos con significado real y procesos coherentes más que fórmulas y algoritmos vacíos.

También es una propuesta a investigar y experimentar metodologías innovadoras, hacer uso de recursos variados al momento de desarrollar sus clases, esto despertará el interés y la motivación de los estudiantes en la asignatura, principalmente en el área de matemáticas en la cual esta motivación e interés es realmente escaso.

Finalmente, es importante recordar el uso de la tecnología, la didáctica, el material concreto, las guías escritas y demás recursos que nos permitan desempeñar nuestra labor de la mejor manera posible y cumplir a cabalidad nuestro objetivo profesional el cual es formar integralmente personas capaces.

Referencias

[1] Gómez, E. (s.f.). Introducción al Origami. Recuperado el 29 de junio del 2014, de: http://www1.uprh.edu/amc/res_acad_2/Origami.pdf

[2] Rodríguez, L. (1980). Precalculus: Introducción funcional. (Munem, M. y Yizze, J. Trads.) Barcelona: Editorial Reverté. (Trabajo original publicado en 1974).

[3] Martínez, M. (1999). Historia de la matemática. (Boyer, C. Trad.) Madrid: Alianza Editorial. (Trabajo original publicado en 1969).

[4] Torres, M. (s.f.). Papiroflexia y matemáticas. Recuperado el 25 de junio del 2014, de: www.rinconmaestro.es/matematicas/geometria/geometria19.pdf.

GeoGebra medio semiótico: El caso del lugar geométrico

GOROCICA, ROSA[I]

México

Resumen

La presente investigación tiene como finalidad establecer las condiciones mediante las cuales el ambiente de un software dinámico posibilitaría la exploración y construcción de ideas matemáticas que arriben a la idea de lugar geométrico. Este trabajo considera el software como un artefacto que afecta al estudiante de tal forma que reorganiza sus ideas para realizar una actividad. Inclusive se asume que las actividades con lápiz y papel podría acompañar de manera idónea a éste, propiciando la reflexión de los estudiantes entre la actividad, sus pensamientos y el saber matemático. Así, en este trabajo se asume que el software geogebra es un medio semiótico que tendría posibilidad de ser usado por los estudiantes para la construcción de una idea del lugar geométrico.

Palabras clave: GeoGebra, lugar geométrico, artefacto y medio semiótico.

A. Fundamentación teórica

En la actualidad el discurso matemático escolar se tiene su lógica como una acumulación y secuenciación de contenidos matemáticos, en donde se privilegia la algoritmia y la memoria. Siendo así, que los saberes matemáticos puesto en el mejor de los casos carezcan de significado. Específico en la Geometría Analítica se privilegia el uso de las representaciones algebraicas sobre el análisis del lugar geométrico, por ejemplo, se estudian el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola dando prioridad a su expresión analítica para determinar sus elementos, aunque señal y definan cada uno de sus elementos estos se deja de lado en el momento de plantear problemas. Más aun, la representación gráfica solo llega a ser un medio ilustrativo para definir los lugares geométricos pero no se exploran sus elementos.

Así, se evidencia la falta de un medio que permita explorar al lugar geométrico no exclusivamente como su representación algebraica centrando la atención en determinar sus elementos, sino más bien, como un conjunto de puntos que cumplen una condición determinada. Es decir, centrar la atención en las condiciones de este conjunto de este conjunto de puntos que pueden ser representados de forma gráfica, analítica, numérica.

Además, en el presente trabajo se parte de la Teoría Cultura de Objetivación (TCO) donde se dice que el pensamiento se caracteriza por su naturaleza semióticamente mediatizada y se concibe como una reflexión mediatizada de acuerdo a la actividad de los individuos, actividad que media entre saber y conocimiento (Mojica, 2013). Así, esta actividad que se expresará como un objetivo para el estudiante en un medio semiótico que posibilitará la construcción de pensamiento matemático entorno al lugar geométrico.

Además, la teoría cultural de la objetivación aboga por una concepción no mentalista del pensamiento y por una idea de aprendizaje tematizado como adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por

[I]CINVESTAV , México

modos epistémico-culturales históricamente formados (Radford, 2006). Es así que, se considera que la actividad que involucra el pensamiento de lugar geométrico es la exploración de condiciones que cumple un conjunto de puntos de una curva pudiendo ser representada por una expresión analítica.

Por otra parte, se considera a los medios semióticos de objetivación como los objetos, herramientas, recursos lingüísticos y signos que las personas intencionalmente usan en la construcción social de significados con el fin de lograr una forma estable de conciencia, hacer evidente sus intenciones, y llevar a cabo un despliegue de acciones para alcanzar el objetivo de sus actividades (Radford, 2003, 2010 citado en Mojica, 2013).

Inclusive, la semiótica cultural plantea el problema de la cognición como reflexión de la práctica social, Es en esta etapa que la dimensión semiótica adquiere toda su importancia: signos y artefactos cobran vigencia como mediatizadores de la actividad y elementos claves de los procesos de reflexión (Radford, 2004). Puesto que, como lo menciona Radford (2006):

> el ser humano es afectado profundamente por el artefacto: al contacto con éste, el ser humano reestructura sus movimientos (Baudrillard, 1968) y forma capacidades motrices e intelectuales nuevas, como la anticipación, la memoria y la percepción (Vygotsky y Luria, 1994).

De ahí, que en la presente investigación se conciba que la computadora y el uso de papel y lápiz sean artefactos que puedan ser conjugados de tal suerte que permitan la exploración, refutación, reflexión de ideas matemáticas. Por ende, se piensa que el software dinámico Geogebra pueda ser un medio semiótico en el sentido de Radford que posibilite la construcción de ideas matemáticas entorno al lugar geoemétrico.

Además, asumimos la idea de actividad como la plantea Leontiev: es un proceso social cuyo propósito es alcanzar un objetivo impregnado de entrada con significados culturales y conceptuales (Citado en Radford, 2008). Por lo cual, se determinará una actividad que involucre el estudio del lugar geométrico a través de las condiciones matemáticas que cumple, con un objetivo que tenga significado cultural, es decir, este relacionado con una práctica social.

Así, se pretende la elaboración e implementación de un diseño de aula que integre las ideas expuestas anteriormente. De tal forma, que el saber matemático lugar geométrico este inmerso en la actividad usando al software geogebra como medio semiótico donde sea integrado el uso de lápiz y papel, en una interacción que permita un ir y venir entre ellos de manera que se pongan en juego ideas matemáticas, se haga reflexiones, conjeturas, se validen ideas, etc.

De la exploración de este diseño se pretende responde a las preguntas: ¿El GeoGebra es un medio semiótico idóneo para el estudio del lugar geoemétrico?, de ser así, ¿Qué condiciones debe tener un diseño que use geogebra?, ¿Qué ideas matemáticas relacionadas con el lugar geoemétrico se discuten en un diseño que toma como medio semiótico al software geogebra?

Referencias

[1] Mojica, J. (2013). Medios semióticos de objetivación en estudiantes de sexto grado cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo. Memoria del I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe. Colombia: Ramirez, A. y Morales, Y.

[2] Radford, L (2004). Semiótica Cultural y Cognición. Recuperado el 28 de mayo de 2014 de www.luisradford.ca/pub/53_Tuxtla3.pdf.

[3] Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático. 103-129

[4] Radford, L. (2008). Semiótica cultural y cognición. In R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Eds.). Investigaciones sobre Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano. (pp. 669-689). México: Diaz de Santos

[5] Radford, L. (2013). Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. Journal of Research in Mathematics Education, 2 (1), 7-44

Nivel de desarrollo de las competencias matemáticas alcanzadas en los alumnos del segundo año en la carrera de matemáticas de la UPNFM en la modalidad presencial[I]

GREEN, IVY LOU[II] LÓPEZ, LEDHER CHAMBASIS, ROSA

Honduras

Resumen

La presente ponencia muestra los avances de la investigación desarrollada con el propósito de conocer el nivel de desarrollo que presentan los estudiantes de la carrera del Profesorado en Matemáticas con respecto a las competencias matemáticas. Con tal intención se ha diseñado un modelo de evaluación de competencias matemáticas, que ha servido de base para el diseño de la prueba y el análisis de los niveles de competencia alcanzados por los estudiantes según el desempeño mostrado en el desarrollo de la prueba. Son participantes del estudio, los estudiantes de segundo año de la carrera, que cursaban clases en el tercer periodo del año 2013 en la modalidad presencial, en la sede de Tegucigalpa. Como ya se mencionó, esta investigación busca aportar conocimiento acerca del nivel de desarrollo que han logrado los estudiantes de la carrera del profesorado en matemáticas con respecto a las competencias matemáticas propuestas en el perfil de egreso además, identificar procesos y experiencias que han contribuido a fortalecer tales competencias.

Palabras clave: Competencias matematicas, nivel de desarrollo, operacionalizacion de competencias.

A. Introducción

La Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, en el año 2008, para todas las carreras que ofrece pone en vigencia una propuesta curricular basada en desarrollar competencias. En ese marco y del Mejoramiento de la Calidad de la Educación Superior se considera de interés conocer en qué medida se ha ido concretando tal reforma en la carrera del Profesorado en Matemática.

Se toma como centro de interés el análisis de la concreción de la reforma curricular vigente desde el 2008, la innovación temática en un escenario educativo destacado, y la importancia de aportar conocimientos nuevos para la mejora del plan de estudios.

En este documento se comparte las bases conceptuales, el diseño de la prueba y sus caracterizaciones.

[I] K15, 11:30-12:00 m.d., B1-06

[II] UPNFM, Honduras.

B. Las competencias en la formación de los estudiantes de la Carrera del Profesorado en Matemáticas en la UPNFM

La función esencial de la UPNFM es formar estudiantes con el más alto perfil para enfrentar los retos de la docencia, de acuerdo con ello, en el perfil de egreso del profesorado en matemáticas, se establece que:

> El egresado de la Carrera de Profesorado en Matemáticas poseerá las competencias que le permitirán el reconocimiento de la sociedad como el profesional de la enseñanza de la matemática caracterizado por el compromiso de brindar una educación de calidad, desempeñándose de manera eficiente en las tareas para las cuales se le ha formado (UPNFM,2008,pág.4).

Para cumplir tal cometido e inspirados en Beneitone, Esquetine, Gonzáles, Marty, Siufy y Wagenaar(eds. (2007) y siguiendo lineamientos propios del diseño curricular enfocado en competencias se ha definido un perfil de egreso basado en 19 competencias, entre ellas, dentro de las competencias específicas disciplinares, se mencionan las siguientes:

1. **Dominar la matemática básica del nivel:** Capacidad de manipular los objetos y procesos de la matemática básica (dominio de la matemática que se enseña en el Sistema educativo Nacional) como herramienta para la solución de problemas, así como la fundamentación teórica de dichos procesos. Además incluye el conocimiento y desarrollo lógico de fundamentos de matemática superior que le permitan continuar con el estudio avanzado de la disciplina.

2. **Poseer habilidades de pensamiento matemático:** Capacidad para reconstruir el desarrollo lógico de las teorías matemáticas que implique: identificar, generalizar y comunicar ideas matemáticas, aplicándolas con juicio crítico en la resolución de problemas.

Cabe reconocer que a pesar que existe una tendencia a nivel mundial en el tema de la competencias como ejes estructurantes del currículo y de la evaluación de los resultados educativos, "la formación basada en competencias es una perspectiva todavía muy nueva en diversos países", (Tobón, 2008, pág.15) y se registra una lenta transición para utilizar las competencias como enfoque educativo-curricular.

En el caso de la UPNFM, desde la implementación del nuevo currículo, se hacen esfuerzos para institucionalizar el modelo, sin embargo, todavía las experiencias son prácticas heurísticas de algunos docentes; no se ha evaluado si la práctica generalizada, es coherente con el modelo de docencia hacia la gestión de competencias. Por supuesto, se es consciente que un cambio curricular de tal magnitud implica, como lo señala Barrales (2012, pág.32), no sólo un cambio en la metodología de trabajo sino también en la forma en que el docente percibe la realidad. En el ámbito de las matemáticas, normalmente se planifica pensando en los estándares de contenido y no en los de procesos que incluyen procesos cognitivos elevados y pensamiento matemático. Tal como se ve en el planteamiento anterior, la propuesta curricular no discrimina suficientemente entre lo que el NCTM distingue como estándares de contenido y estándares de proceso.

Otro aspecto importante que plantea grandes desafíos a la implementación de un enfoque basado en competencias es la evaluación de competencias. De acuerdo con Tobón (2010, p.119), "la evaluación de las competencias constituye un nuevo paradigma en el marco de la evaluación". Barrales (2012, pág. 9) citando a Blanco expone que:

> [...] un análisis superficial de las experiencias universitarias pone en evidencia que son pocas las instituciones que llevan a cabo evaluaciones formales de las habilidades alcanzadas por los alumnos de una manera individualizada, separadas del resto de evaluaciones dentro de las disciplinas y basadas en pruebas de desempeño. (Blanco, 2009, pág. 32)

Siguiendo esta línea de pensamiento, cabe señalar que una competencia sólo es observable en la acción, en el momento que ocurre el desempeño de la persona que posee dicha competencia. Esto hace que su evaluación se haga a través de mecanismos que permitan observar si el estudiante ha desarrollado determinada competencia.

Así, los mecanismos para evaluar competencias deben ser planeados y diseñados con anterioridad, de acuerdo con lo que se desea evaluar, de manera que asignen significado y permitan medir las evidencias de desempeño en cada una de las competencias evaluadas; es decir, una vez logrados todos los indicadores establecidos para una competencia específica, se infiere si dicha competencia ha sido alcanzada.

En el caso de Honduras, no se encuentran propuestas de operacionalizaciòn del concepto de competencias matemáticas, solo la conceptualización de los estándares que presenta el Currículo Nacional Básico (CNB), el cual se asemeja a los "estándares de contenido" propuestos por el NCTM.

C. Las competencias matemáticas

Siguiendo los conceptos elaborados por el equipo de expertos de PISA, la competencia matemática se concibe como:

> La capacidad que tiene un individuo de identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar e implicarse en las matemáticas de una manera que satisfaga sus necesidades vitales como un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (PISA 2006, p.13).

También proponen que la competencia matemática, es la capacidad de analizar, razonar, argumentar, modelar, representar, usar recursos de apoyo y comunicar según se plantean y resuelven los problemas que surgen del desarrollo personal y la plena integración en la sociedad de la comunicación. Así las competencias elegidas por el Proyecto PISA son:

1. Pensar y razonar
2. Argumentar
3. Comunicar
4. Modelar
5. Plantear y resolver problemas
6. Representar
7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones
8. Uso de herramientas y recursos

Se consideran cuatro variables o dimensiones muy relacionadas, que caracterizan el ámbito de desarrollo de las competencias: los contenidos, los contextos, las situaciones y los niveles de complejidad. Estos son elementos determinantes al momento de caracterizar el nivel de logro de las competencias, son aplicados para resolver los problemas de la vida cotidiana, afrontar exigencias de diferente nivel y tipo, así como fomentar el aprendizaje a lo largo de la vida.

D. Preguntas de investigación

En atención a los propósitos de la investigación, se presenta la pregunta general de investigación:

¿Cuál es el nivel de desarrollo de las competencias matemáticas en los estudiantes de II año de la carrera de matemáticas de la UNPFM?

De ella se desprenden:

1. ¿Cuáles son las competencias matemáticas que promueve el Plan de Estudios de la carrera del Profesorado de Matemática, 2008?
2. ¿En qué nivel alcanzan los estudiantes de matemáticas el desarrollo de las competencias matemáticas propuestas en el plan de la carrera de matemáticas?
3. ¿Se está trabajando, en los diferentes espacios pedagógicos, de manera intencional en el fortalecimiento de tales competencias?
4. ¿Cuáles son las estrategias docentes que mejor han incidido en el desarrollo de competencias matemáticas?

E. Operacionalización de competencias

El modelo de operacionalización de competencias es una adaptación de la propuesta de RICO (2006), Tobón (2010) y Solar (2011), y se presenta en el artículo de Green, Chambasis, López, Valladares, Díaz, Martínez y Molina(2014) acerca de una

"Aproximación a la operacionalización de competencias matemáticas: Una estrategia necesaria para la práctica curricular"

Se señala que dicha operacionalización es la base para el instrumento construido con el fin de determinar el nivel de desarrollo las competencias matemáticas en 11 estudiantes del segundo año de la carrera.

Por la viabilidad de la investigación se tuvo la necesidad de delimitar el ámbito y alcance de la misma, se decidió trabajar con cuatro competencias relacionadas con las ocho que PISA pone en mención y que están declaradas en el plan de estudio de la carrera de matemática: Plantear y resolver problemas, Razonamiento y argumentación, Representación y comunicación. Para cada una de ellas se ofrece el siguiente planteamiento de operacionalización.

Tabla No.1 OPERACIONALIZACION POR COMPETENCIAS

NIVEL DE COMPLEJIDAD	INDICADOR DE LOGRO
PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS	
A. Reproducción	1. Soluciona reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados utilizando enfoques y procedimientos estándar.
B. Conexión	1. Soluciona problemas aplicando procesos matemáticos mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también más independientes que implica establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación.
C. Reflexión	1. Expone y formula problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicación estándar pero también de procedimientos mas originales que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación. También conlleva reflexionar sobre las estrategias y las soluciones.
RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACION	
A. Reproducción	1. Conoce, sigue, entiende y justifica un razonamiento matemático familiar.
B. Conexión	1. Conoce, sigue, entiende y justifica un razonamiento matemático poco familiar conectando distintas áreas de la matemática.
C. Reflexión	1. Mantiene una actitud activa y reflexiva para argumentar y evaluar encadenamientos matemáticos usando la heurística y la intuición, generalizando la solución.
REPRESENTACION	
A. Reproducción	1. Descodifica, codifica e interpreta una representación matemática familiar y pasa de un registro de representación a otro si la situación lo requiere.
B. Conexión	1. Descodifica, codifica e interpreta representaciones poco familiares de objetos entre distintas áreas matemáticas diferenciando entre distintas formas de representación.
C. Reflexión	1. Descodifica, codifica e interpreta formas de representaciones de objetos matemáticos no familiares, selecciona y cambia representaciones de manera creativa.
COMUNICACION	
A. Reproducción	1. Comprende y expresa oralmente y por escrito cuestiones matemáticas sencillas de objetos familiares mencionando cálculos y resultados desarrollados en la solución del problema previamente conocido.
B. Conexión	1. Comprende y expresa oralmente y por escrito cuestiones matemáticas sencillas de objetos familiares explicando cálculos resultados, estableciendo relaciones entre distintas áreas matemáticas desarrolladas en la solución del problema
C. Reflexión	1. Comprende y expresa oralmente y por escrito cuestiones matemáticas explicando cálculos, resultados desarrollados en la solución de problemas que implican relaciones complejas entre ellas relaciones lógicas.

F. El instrumento

Consta de doce (12) ítems, 10 de respuesta abierta y 2 de selección, los cuales requieren el uso de demandas o habilidades cognitivas para su resolución, llámese también niveles de complejidad. Los ítems se construyeron tomando en cuenta las variables o dimensiones relacionadas al ámbito de evaluar competencias matemáticas (contenido, contexto, situación y nivel de complejidad) de la siguiente forma:

- Contenido: Algebra, Geometría y Cálculo
- Contexto de aplicación: Laboral y científico
- Tarea o situación: Magnitudes, Derivada, Vectores en R2, Expresiones Algebraicas y más.
- Nivel de complejidad: Se presentan Reproducción, conexión, y reflexión.

A continuación se detalla las características del instrumento preparado y las cuatro competencias incluidas en el estudio.

Tabla No.2 Resumen de Ítems y su contenido.

Numero de Ítem	Contenido	Tarea o situación Problema	Contexto
1	Geometría	Estimación de magnitudes.	Científico
2	Geometría	Estimación de magnitudes.	Científico
3	Cálculo	Aplicaciones de la derivada	Científico
4	Álgebra	Traducción de enunciados a expresiones algebraicas.	Científico
5	Geometría	Aplicación del Teorema de Pitágoras	Científico
6	Álgebra	Aplicación de vectores en R^2	Laboral
7	Geometría	Ángulo alternos internos entre rectas paralelas	Científico
8	Geometría	Representación de objetos en el plano y la relación entre ellos	Científico
9	Geometría	Representación de objetos en el espacio y la relación entre ellos	Laboral
10	Álgebra	Aplicación de ecuaciones lineales en una variable	Científico
11	Álgebra	Representación gráfica de una Función Lineal	Laboral
12	Álgebra	Lectura e interpretación del comportamiento de una función lineal	Laboral

Cabe señalar que las cuatro competencias elegidas son evaluadas en todos los problemas planteados, por lo tanto, el nivel de complejidad varía según ítem y competencia. Se presenta un ítem para ejemplificar la rúbrica de evaluación para cada competencia. Ver tabla No 3.

G. Resultados preliminares

G.1 Análisis de casos

A continuación se presentan evidencias de un procedimiento de resolución realizado por dos estudiantes para el problema anterior.

Tabla No.3 Formato de Caracterización de Ítems (Ejemplo ítem no. 4)

CARACTERISTICAS DEL ITEM	
No. De Ítem	4
Contenido	Álgebra
Tema	Traducción de enunciados a expresiones algebraicas
Ítem	Longitudes de triangulo rectángulo.

La longitud del lado más corto de un triángulo rectángulo es 8 pulgadas. Las longitudes de los otros dos lados están representadas por números enteros impares consecutivos. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones se puede usar para encontrar las longitudes de los otros lados del triángulo? Represente gráficamente y explique su respuesta.

(1) $8^2 + (x+1) = x^2$

(2) $x^2 + 8^2 = (x+1)^2$

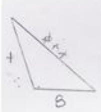
(3) $8^2 + (x+2)^2 = x^2$

(4) $x^2 + 8^2 = (x+2)^2$

Competencia	Nivel de complejidad	Indicador
1. Plantear y resolver de Problemas	Conexión	1. Soluciona problemas aplicando procesos matemáticos mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también mas independientes que implica establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación.
2. Razonamiento y Argumentación	Conexión	1. Conoce, sigue, entiende y justifica un razonamiento matemático poco familiar conectando distintas áreas de la matemática..
3. Representación.	Reproducción	1. Descodifica, codifica e interpreta una representación matemática familiar y pasa de un registro de representación a otro si la situación lo requiere
4. Comunicación	Reproducción	1. Comprende y expresa oralmente y por escrito cuestiones matemáticas sencillas de objetos familiares mencionando cálculos y resultados desarrollados en la solución del problema previamente conocido..

Resolución planteada por el estudiante # 1

Ecuación:
$x^2+8^2=(x+2)^2$



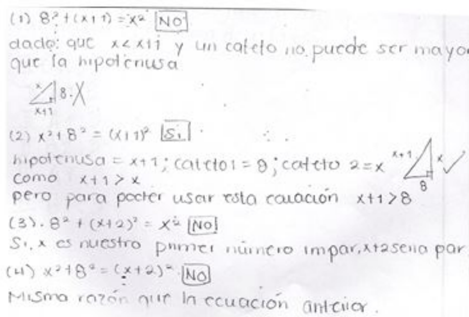
x seria la siguiente longitud despues de la mas corta que es 8 el cual seria un cateto del Triangulo
x+2 seria la hipotenusa ya que la hipotenusa es el lado de mayor longitud en un triangulo y seria x+2 ya que las dos longitud son números impares consecutivos Tenemos x que es impar y el consecutivo seria x+2,

Análisis:
La resolución presentada por el estudiante permite observar que:
-Comprende el problema
- Expresa por escrito sus ideas sobre objetos matemáticos familiares
- Descodifica una representación oral de una condición
- Codifica a un lenguaje algebraico la condición señalada
-El procedimiento matemático que utiliza es válido.
-Soluciona el problema dando una respuesta correcta.
-Vincula álgebra con geometria
-Analiza y crea un argumento para plantear una solución.
-Argumenta y justifica con propiedades y teoremas de álgebra y geometria.
- Realiza el cambio de una representación a otra de manera completa y correcta.

G.2 Resumen de resultados

Se presentan los resultados preliminares del ítem No 4, para exponer brevemente el nivel de logro alcanzado por los estudiantes.

Resolución planteada por el estudiante # 2



(1) $8^2 + (x+1) = x^2$ $\boxed{NO}$
dado que $x < x+1$ y un cateto no puede ser mayor que la hipotenusa

(2) $x^2 + 8^2 = (x+1)^2$ $\boxed{Si}$
hipotenusa $= x+1$; cateto 1 $= 8$; cateto 2 $= x$
como $x+1 > x$
pero para poder usar esta ecuación $x+1 > 8$

(3) $8^2 + (x+2)^2 = x^2$ $\boxed{No}$
Si, x es nuestro primer número impar, x+2 sería par

(4) $x^2 + 8^2 = (x+2)^2$ $\boxed{No}$
Misma razón que la ecuación anterior.

Análisis:
La resolución presentada por el estudiante permite observar que:
-Expresa por escrito sus ideas sobre objetos matemáticos conocidos
- Comprende el problema
-Las conexiones entre los diferentes contenidos matemáticos que necesita son deficientes.
- Descodifica una representación oral de una condición
- Codifica a un lenguaje algebraico la condición señalada
-El procedimiento matemático que utiliza es inválido.
-No soluciona el problema dando una respuesta incorrecta.
-Vincula álgebra con geometria
-Analiza y crea un argumento para plantear una solución.
-Argumenta y justifica con propiedades y teoremas de álgebra y geometria.
- Realiza el cambio de una representación a otra de manera completa y correcta.

Competencia	Logro
Plantear y resolver problemas	9 de 11 de los estudiantes identifican los datos en el problema y el procedimiento matemático que utilizan para resolver el problema es pertinente y adecuado por lo tanto la respuesta es correcta.
Razonamiento y Argumentación	4 de 11logran establecer vínculos en su proceso de razonamiento para conectar diversos conceptos matemáticos con partes de la información dada para llegar a una solución.
	5 de 11 argumentan y justifican con propiedades y teoremas su respuesta de manera completa y correcta
Representación	4 de 11 descodifican una representación conocida, la interpretan de manera correcta y logran codificarla de acuerdo a sus experiencias.
	10 de 11 para encontrar la solución realizan el cambio de una representación a otra de manera completa y correcta
Comunicación	9 de 11 expresan su resultado final de acorde a la pregunta que se les planteó
	10 de 11 utilizan correctamente propiedades en procedimientos rutinarios y algoritmos habituales para explicar sus ideas matemáticas.

H. El camino por recorrer

La operacionalización de competencias nos ha permitido elaborar una prueba que permite identificar el nivel de logro de los estudiantes. Actualmente nos enfrentamos al proceso de análisis de las pruebas, de la aplicación de un cuestionario para estudiantes que nos permita identificar acciones metodológicas que ayudan según los estudiantes, al desarrollo de competencias matemáticas, y de consultar a docentes de los distintos espacios pedagógicos investigados sobre las gestiones metodológicas que utilizan y que consideran que fomentan el desarrollo de las competencias matemáticas.

Comentarios finales

- El modelo presentado llama la atención acerca de elementos curriculares y didácticos necesarios para el fortalecimiento de las competencias matemáticas.
- Comprender que el desarrollo y evaluación de competencias matemáticas requiere de procesos heurísticas sistemáticos que permitan alcanzar los niveles de logro considerados.

- Los resultados presentados son un aporte que muestra una tecnología evaluativa coherente con la teoría presentada y muestra el interés por conocer resultados de una reforma curricular en proceso.
- Enseñar matemáticas es más que enseñar contenidos.
- Las competencias por su definición demandan movilización e integración de los saberes (saber conocer, saber hacer y saber ser), la persona es competente cuando puede movilizar e integrar los saberes para resolver un problema.

Referencias

[1] Barrales, V. L. (2012). El enfoque educativo basado en competencias, un reto que enfrentala Universidad Veracruzana. Educación, XXI(41), 23-39.

[2] Green, López, Chambasis, Valladares, Díaz, Martínez y Molina (2014). Aproximación a la operacionalización de competencias matemáticas: Una estrategia necesaria para la práctica curricular. UPNFM

[3] PISA. (2006). Marco de la Evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. Recuperado(s.f) en http://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf

[4] Solar, H. (2011). Propuesta metodológica de trabajo docente para promover competencias matemáticas en el aula, basadas en un Modelo de Competencia Matemática (MCM). Obtenido de centroestudios.mineduc.cl: www.fonide.cl

[5] Tobón, S. (2008). La formación basada en competencias en la educación superior: El enfoque complejo. Mexico. : Universidad Autonoma de Guadalajara.

[6] Tobón, S. (2010). Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias. México: Pearson Education.

[7] Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. (2008). Plan de Estudio de la Carrera de Matemáticas en el Grado de Licenciatura. Departamento de Matemàticas. Tegucigalpa.

Propuesta para la enseñanza de secciones cónicas mediante el uso de la plataforma exelearning y el software GeoGebra

HERNÁNDEZ, CARMEN[I] ROJAS, NAZARELLE

Costa Rica

Resumen

El avance de las tecnologías educativas trae consigo la integración de nuevos software (o la actualización otros) que facilitan al docente la enseñanza de los contenidos a sus estudiantes. Las secciones cónicas son uno de los temas que, sin ayuda de visualizaciones, su asimilación se vuelve más complicada. Es por eso que este trabajo tiene como finalidad, presentar a los profesores de secundaria una propuesta alternativa de enseñanza de secciones cónicas, utilizando los programas educativos GeoGebra y eXeLearning. Se trata de la creación de una unidad didáctica centrada en el estudio de las cuatro secciones cónicas: circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. En este trabajo escrito se fundamenta el uso de los dos programas educativos en la enseñanza y se describe de forma muy general, el contenido de la unidad didáctica presentada.

Palabras clave: Cónicas, enseñanza,exelearning, GeoGebra.

¿Por qué usar eXeLearning y el software GeoGebra?

La tecnología ha tenido gran impacto sobre la Educación y aun más en la Educación Matemática. La tecnología ha beneficiado mucho esta área pues se han creado distintos software para facilitar la explicación, el entendimiento y aprendizaje de ciertos temas.

El uso de GeoGebra y eXeLearning supone, primero, una gran ventaja por ser software de libre acceso, por lo que el factor económico no es un impedimento para su uso. Según la Red Costarricense de Software Libre, el hecho de ser software libre, "ofrece a las personas la posibilidad de utilizar, estudiar, modificar, copiar y redistribuir el software". Esto confirma que todos tienen acceso a GeoGebra y eXeLearning y adaptarlos a sus necesidades.

Hablando específicamente de cada programa, GeoGebra es un software diseñado para la educación matemática en todos sus niveles, disponible en múltiples plataformas (Linux, Windows, Mac, etc.). "Reúne dinámicamente aritmética, geometría, álgebra y cálculo e incluso recursos de probabilidad y estadística, en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente." (Sitio Oficial GeoGebra). Además, el programa cuenta con la ventaja de ver las representaciones de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas (gráficamente, algebraicamente). Para la creación de esta propuesta, se utilizó GeoGebra en el diseño de las aplicaciones interactivas y para las guías con las que el usuario potenciará el uso del software.

Por otra parte, eXeLearning es un programa de código abierto que permite al docente crear contenidos educativos sin necesidad de ser experto en el manejo de lenguajes de programación web. "Se trata de una aplicación

[I]TEC, Costa Rica.

multiplataforma que nos permite la utilización de árboles de contenido, elementos multimedia, actividades interactivas de autoevaluación, etc." (Monge, 2014). En el desarrollo de la unidad didáctica que se presenta, el fácil uso de eXeLearning permitió ensamblar las aplicaciones creadas en GeoGebra, con el resto de actividades diseñadas para el aprendizaje de los estudiantes.

¿Cómo han sido utilizados la plataforma eXeLearning y el software GeoGebra en la creación de la unidad didáctica?

La unidad didáctica creada en eXeLearning se ha dividido por módulos y a su vez los módulos en secciones, esto con el fin de lograr que quien use la unidad didáctica tenga un fácil manejo y le sea más llamativa e interactiva.

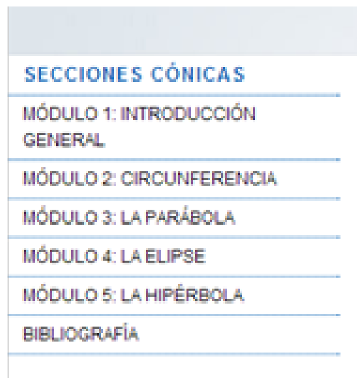


Figure 54: Visualización de la división de la unidad didáctica en el eXeLearning.

El módulo 1 es un módulo introductorio, este está dividido en:

1. **Introducción:** Se presenta una breve introducción general sobre lo que se verá en la unidad didáctica.
2. **Objetivos generales:** Se exponen los objetivos que se pretenden alcanzar al finalizar el estudio de la unidad didáctica.
3. **Historia de las Secciones Cónicas:** Aquí se presenta un poco el origen de las Secciones Cónicas, ya que para el que use la unidad le será de gran interés conocer de dónde surge el tema que estará por aprender.
4. **Conocimientos Generales Previos:** En esta sección se exponen los conocimientos previos que, enlazándolos con los nuevos conocimientos sobre secciones cónicas, se logre un aprendizaje significativo.

En el módulo 2 se tiene todo lo referente a la sección cónica llamada circunferencia. Aquí de igual forma se ha dividido el módulo en secciones. En estas se encontrarán animaciones y ciertas herramientas que ayudarán a dar más creatividad a la unidad didáctica.

Por ejemplo, en la sección "Lo que Aprenderás" aparece una animación la cual hemos utilizado con el fin que no sea necesario leer todos los apartados pues a veces se vuelve tedioso. Esta herramienta conocida como voki aparece en varias ocasiones para facilitar, agilizar y entretener al usuario. Ver figura 57.

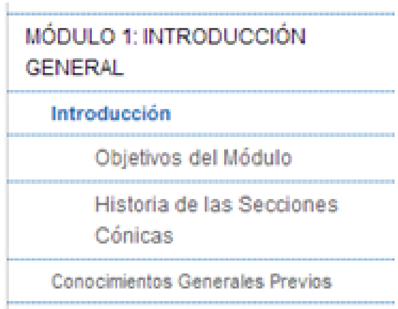


Figure 55: Visualización de las secciones del módulo1 .

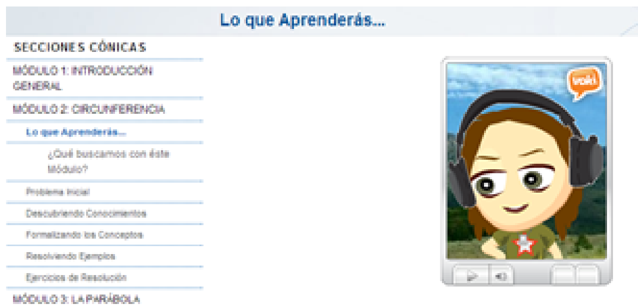


Figure 56: Herramienta complementaria Voki.

De igual forma aparece una sección con los objetivos a alcanzar en dicho módulo. La siguiente sección es la del Problema Inicial, aquí se plantea un problema con el cual se pretende lograr que el usuario de la unidad didáctica descubra por sí solo ciertas características de la Circunferencia, esto con la ayuda del software GeoGebra. Se plantea el problema y se crea una animación que simule lo planteado, así se pretende que descubran ciertas características de esta cónica, como por ejemplo: que la distancia de cualquier punto al centro es siempre la misma.

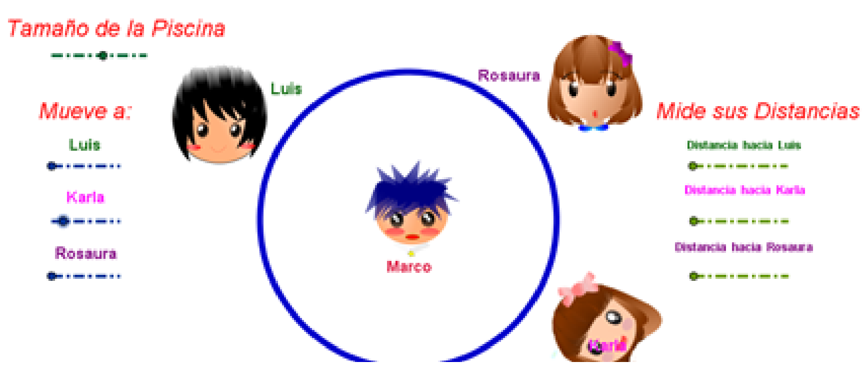


Figure 57: Visualización de animación hecha en GeoGebra.

En la sección "Descubriendo Conocimientos" se utilizó nuevamente el software GeoGebra. Este software fue utilizado con el objetivo de que el usuario pueda interactuar con la aplicación y descubrir ciertas características de las partes de la circunferencia como de su diámetro, radio, cuerda, etcétera.

En la siguiente sección, llamada Formalizando Conceptos, se despliegan 3 divisiones estas son: La Circunfer-

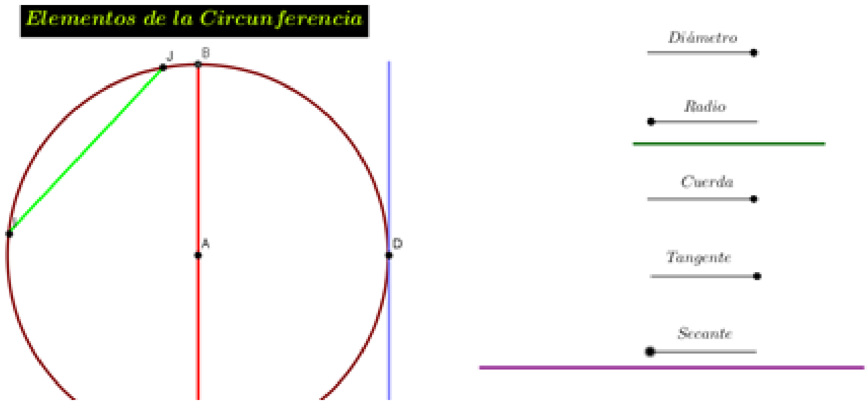


Figure 58: Visualización de la animación partes de la Circunferencia.

encia y sus Elementos, Deducción de la Ecuación de la Circunferencia y luego Ecuación Reducida y General de la Circunferencia. En el apartado Deducción de la Ecuación de la Circunferencia, con la ayuda del software GeoGebra, se hace una guía para que el usuario pueda deducir la Ecuación y esto con la ayuda de la aplicación interactiva que se creó.

Seguidamente se encuentra la sección de ejemplos resueltos sobre todo lo que se mencionó en el módulo. Por último y con la ayuda de las herramientas que trae la plataforma eXeLearning se creó la sección llamada Evaluación, donde el usuario puede verificar si ha comprendido y ha alcanzado los objetivos que se plantearon para dicho módulo.

El Módulo 3 está centrado en el estudio de la Parábola. La estructura de este módulo y de los que siguen es igual a la del módulo anterior, por esta razón se describirá directamente el contenido cada una de las secciones.

Para la contextualización del problema inicial, se tomó como base el juego "Angry Birds". Al usuario se le presenta una aplicación en la que pueda visualizar el posible recorrido de los lanzamientos de los pájaros (que son parabólicos) mediante la manipulación de tres deslizadores, que definen el movimiento horizontal, vertical, la abertura de la parábola y la dirección de dicha abertura (hacia arriba o abajo).

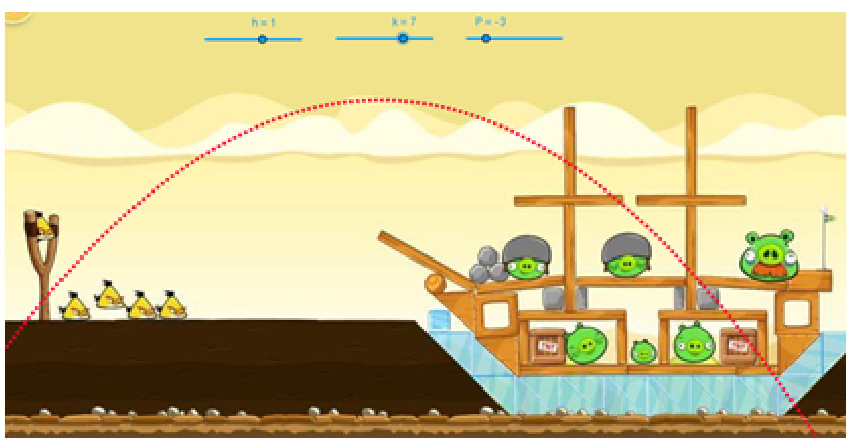


Figure 59: Visualización de la animación hecha en GeoGebra.

En "Descubriendo Conocimientos" aparece una simulación muy parecida a la del problema inicial. Pero ésta vez aparecen los nombres de los componentes de la Parábola, y la actividad tiene como propósito el estudio de las propiedades de la Parábola, aún sin tener conocimientos teóricos sobre ella. La teoría respectiva está desarrollada en la sección "Formalizando Conceptos".

En algunas partes de la unidad didáctica se consideró necesario agregar actividades que complementan el aprendizaje del estudiante, en el caso de la sección "Resolución de Ejemplos", aparece lo siguiente:

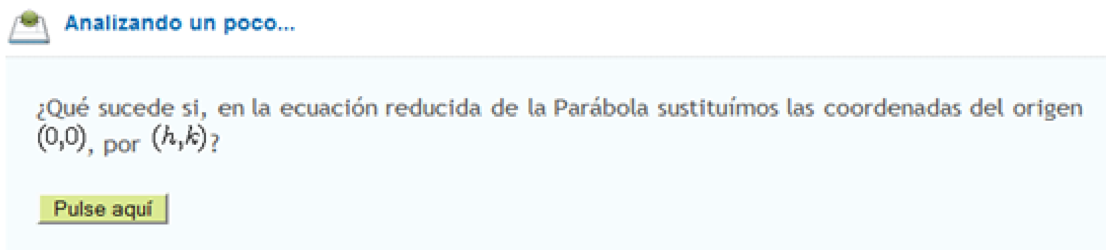


Figure 60: Actividad complementaria.

También, se desarrollan ejemplos diferentes para mayor comprensión, y para finalizar el módulo se cuenta con la Evaluación, en la que el estudiante podrá practicar y reforzar los conocimientos adquiridos.

En el módulo 4 se trata todo lo referente a la cónica Elipse. En la sección Problema Inicial, se usó el software GeoGebra para la creación de una aplicación interactiva. En esta aplicación se descubren ciertas características que ayudan al usuario a introducirse en el tema de una forma llamativa.

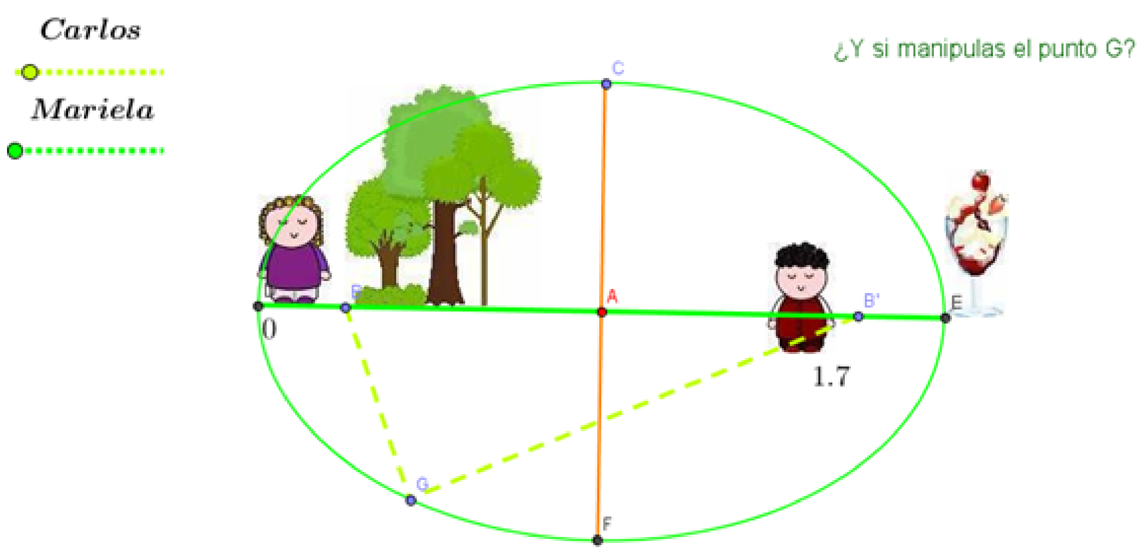


Figure 61: Visualización de la animación del problema inicial.

En la sección "Formalizando Conceptos" se tiene un apartado para la definición de los elementos de la Elipse; aquí se hace uso nuevamente del software GeoGebra para que sea más interesante el estudio de dichos elementos. Ver figura 62.

Y de igual forma está la sección de Ejemplos Resueltos y la sección Evaluación, donde el usuario puede practicar y reforzar los conocimientos adquiridos en dicho módulo.

Finalmente, el módulo 5 este se enfoca en el estudio de la Hipérbola, iniciando con un problema que describe el antiguo sistema de navegación marítima LORAN, que se basaba en el principio de la Hipérbola para ubicar

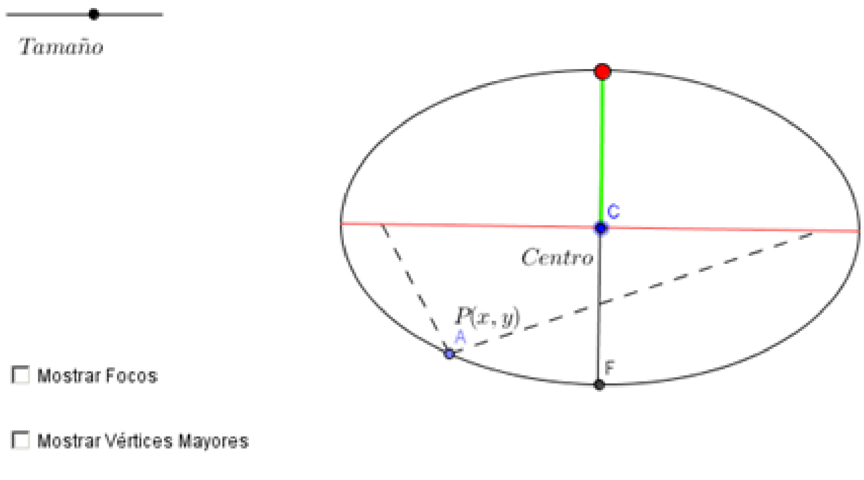


Figure 62: Visualización de la animación para el estudio de las partes de la Elipse.

los barcos por medio de señales emitidas por radio. Se pretende que el estudiante descubra dicho principio con ayuda del problema.

Se definen los componentes de la parábola y las formas en que puede presentarse su ecuación (reducida y general), para mejor asimilación hay una aplicación con los componentes y los dos casos en que puede darse una hipérbola (horizontal y vertical):

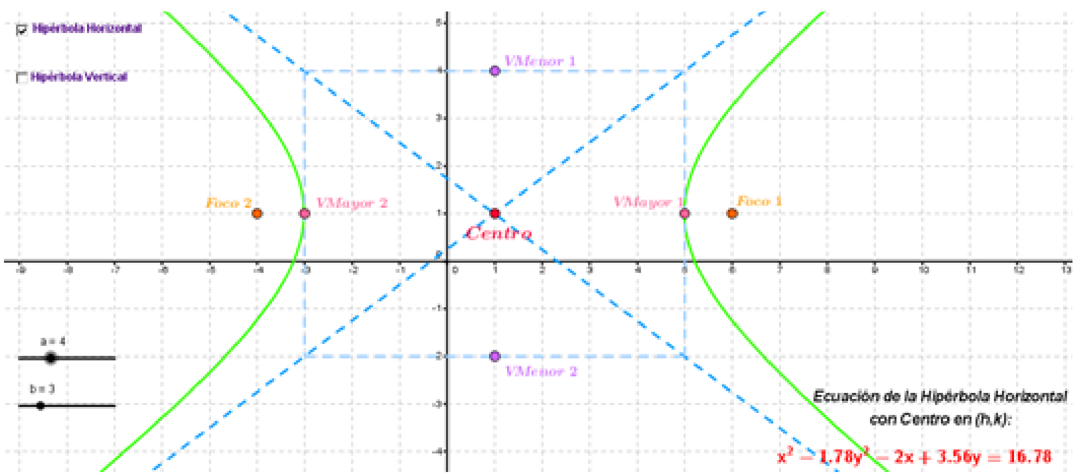
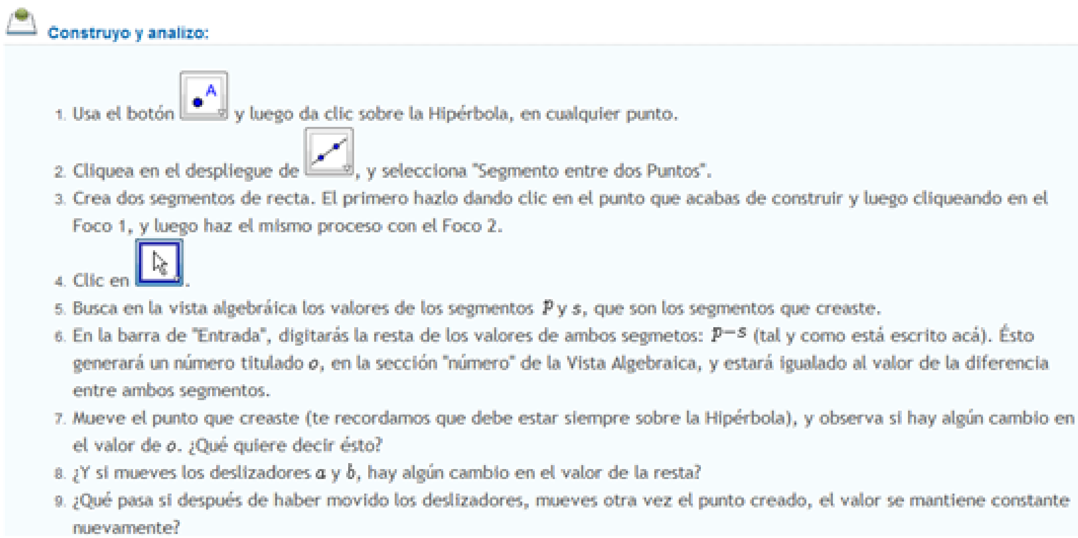


Figure 63: Aplicación interactiva con elementos de la hipérbola.

Posteriormente aparece la Resolución de Ejemplos, que ayuda al estudiante a guiarse en la solución de ejercicios. Finalmente, la sección "Evaluación" cuenta con algunos ejercicios para práctica, y un apartado titulado "Construyo y analizo" para practicar GeoGebra y reforzar el principio de la hipérbola en los conocimientos del estudiante.

La unidad didáctica se basa en la plataforma eXeLearning y el software GeoGebra, pues son programas de fácil


Construyo y analizo:

1. Usa el botón y luego da clic sobre la Hipérbola, en cualquier punto.
2. Cliquea en el despliegue de , y selecciona "Segmento entre dos Puntos".
3. Crea dos segmentos de recta. El primero hazlo dando clic en el punto que acabas de construir y luego cliqueando en el Foco 1, y luego haz el mismo proceso con el Foco 2.
4. Clic en .
5. Busca en la vista algebráica los valores de los segmentos p y s, que son los segmentos que creaste.
6. En la barra de "Entrada", digitarás la resta de los valores de ambos segmetos: $p-s$ (tal y como está escrito acá). Ésto generará un número titulado o, en la sección "número" de la Vista Algebraica, y estará igualado al valor de la diferencia entre ambos segmentos.
7. Mueve el punto que creaste (te recordamos que debe estar siempre sobre la Hipérbola), y observa si hay algún cambio en el valor de o. ¿Qué quiere decir ésto?
8. ¿Y si mueves los deslizadores a y b, hay algún cambio en el valor de la resta?
9. ¿Qué pasa si después de haber movido los deslizadores, mueves otra vez el punto creado, el valor se mantiene constante nuevamente?

Figure 64: Apartado "Construyo y Analizo".

manejo. Esta es solamente una propuesta de lo que pueden los profesores hacer con software como estos si se aprovechan las ventajas que poseen. Las Secciones Cónicas son solo un contenido de los muchos que se pueden enseñar con ayuda de estas herramientas. Si se tienen este tipo de materiales al alcance y se es perseverante en el desarrollo de habilidades para su manejo, utilizarlos en clase es una forma más creativa, llamativa, interesante y diferente para lograr un aprendizaje más significativo.

En esta unidad se crearon guías, animaciones, aplicaciones interactivas, cuestionarios, evaluaciones de selección única, etcétera. Existen muchas formas de utilizar estos programas y la mayor ventaja es que se adaptan a cualquier contenido, todo con un poco de creatividad.

Referencias

[1] Aguilera Liborio, R. (2009). Matemática Segundo Año de Bachillerato. San Salvador, El Salvador: Talleres Gráficos UCA.

[2] http://www.ditutor.com/geometria/circunferencia.html Recuperado el día 04-11-2013.

[3] https://repositorio.educa.jccm.es/portal/odes/matematicas/17cincunferencia_circulo/ Recuperado el día 04-11-2013.

[4] http://www.disfrutalasmatematicas.com/definiciones/curva-cerrada.html

[5] http://www.dmae.upct.es/ pepemar/conicas/general/historia.htm Recuperado el día 11-11-2013.

[6] http://www.aprendematematicas.org.mx/notas/geomanalitica.html Recuperado el día 04-11-2013.

[7] http://www.vitutor.com/geo/coni/h_1.html Recuperado el día 21-11-2013

[8] http://es.wikipedia.org/wiki/Secciones_c%C3%B3nicas Recuperado el día 23-11-2013 Circunferencia www.ditutor.com

[9] ¿Qué es GeoGebra? Consultado en julio de 2014, extraído de http://www.geogebra.org/cms/es/info/13-what-is-geogebra

[10] Monge, A. (2014). ¿Qué es eXeLearning? Consultado en julio de 2014, extraído de http://exelearning.net/html_manual/exe_es/qu_es_exelearning.html

[11] Red Costarricense de Software Libre. ¿Cuáles son los beneficios del software libre? Consultado en julio de 2014, extraído de http://www.softwarelibrecr.org/faq/beneficios_del_software_libre

El aprendizaje de la matemática basado en la resolución de problemas: el estudio de clases japonés.

MENA, JOHANNA[I]

Costa Rica

Ponencia

El estudio de clases Jyugyo Kenkyu corresponde a una posibilidad de crecimiento profesional docente, que desde hace más de un siglo se utiliza en el sistema educativo japonés en el contexto de la resolución de problemas como estrategia didáctica. El siguiente artículo pretende mostrar la experiencia de replicar esta metodología de trabajo en un colegio costarricense, en el marco del nuevo programa de estudios para primaria y secundaria que el Ministerio de Educación Pública (MEP) ha implementado a partir del curso lectivo 2013.

Palabras clave: Resolución de problemas, enseñanza- aprendizaje matemática, estudio de clases japonés.

A. Presentación

La problemática de la enseñanza y del aprendizaje de la Matemática en Costa Rica es un asunto complejo, en el que intervienen muchos factores. Diversas investigaciones véase Gaete, M y Jiménez, W, 2011; Meza, L.; Agüero, E. y Calderón, M; 2012; Meza, L; Suárez, Z. y García, P. 2010 han mostrado que se presentan problemas de infraestructura, formación de los y las docentes, calidad de los programas de estudio y con las creencias de los estudiantes, padres de familia y los mismos docentes respecto de la disciplina, entre otros factores.

Durante años el sistema educativo costarricense ha centrado la enseñanza de las Matemática en el aprendizaje de una serie de métodos o procesos para resolver operaciones o ejercicios, se ha dado énfasis a la solución mecánica de prácticas, los profesores en su mayoría imparten lecciones magistrales que resultan en exceso aburridas. Lo anterior, ha dado como resultado un bajo rendimiento académico y la apatía de la mayoría de los estudiantes hacia la matemática.

La problemática anterior, llevó al Ministerio de Educación Pública MEP a proponer nuevos programas de estudio de matemática para la educación primaria y secundaria, los que fueron aprobados por el Consejo de Educación Superior en marzo de 2012. Dichos programas fueron implementados en una primera fase durante el curso lectivo 2013. Los programas plantean, no solo la introducción de contenidos nuevos (como ciertos tópicos de estadística y probabilidad tanto en primaria como secundaria), sino una estrategia metodológica asentada en la resolución de problemas. En efecto, en la fundamentación teórica de estos nuevos programas se afirma:

[I]UNED, Costa Rica. menajohanna22@gmail.com

> En este currículo se enfatizará el trabajo con problemas asociados a los entornos reales, físicos, sociales y culturales, o que puedan ser imaginados de esa manera. Se asume que usar este tipo de problemas es una poderosa fuente para la construcción de aprendizajes en las Matemáticas (sic). Al colocarse en contextos reales, el planteo y resolución de problemas conlleva directamente a la identificación, uso y construcción de modelos matemáticos. (MEP, 2012, p. 10)

Durante el último año el MEP ha buscado la forma para capacitar a su personal tanto maestros de primaria como de secundaria para poder asumir los retos que implica el cambio que se proponen en los nuevos programas. En este contexto se considera el estudio de clases japonés, una valiosa herramienta que permite a cada uno de los docentes involucrados capacitarse de una forma dinámica e innovadora dentro de nuestro medio.

B. Resolución de problemas con estrategia didáctica

La resolución de problemas como estrategia didáctica no es nueva. Desde hace años se ha pensado en el uso de los problemas para propiciar el aprendizaje matemático y actualmente con el gran avance en la tecnología, esta idea toma una nueva connotación debido a las grandes posibilidades que las TIC's ofrecen.

Dado que resolver problemas es un elemento vital en el aprendizaje y enseñanza de la matemática, existe la necesidad de que se tenga una idea clara de lo que se entiende por problema. Definiremos un problema como una situación dificultosa para la que debe darse una solución que no es evidente para el estudiante que se encuentra ante ella. Para que la situación sea considerada como problema, el alumno no debe conocer con anterioridad los procedimientos o métodos que permitan la obtención de la solución de manera inmediata. Por lo tanto, consideraremos como la resolución de un problema el proceso que inicia con el conocimiento del problema y que analiza con la solución del mismo.

La resolución de problemas matemáticos siempre ha sido el corazón de la actividad matemática, su evolución histórica muestra la estrecha relación que ha tenido esta actividad con la matemática. Se puede decir que la resolución de problemas se desarrolla desde la antigua Grecia hasta 1945 en dos etapas, antes y después de Polya, por ejemplo el filósofo griego Sócrates, en Diálogos de Platón, dirigió a un esclavo por medio de preguntas que este hallara la solución de un problema: la construcción de un cuadrado de área doble a la de un cuadrado dado, mostrando durante el proceso de solución un conjunto de estrategias, técnicas y contenido matemático.

Más adelante René Descartes, señalaba lo que el llamó modelos del pensamiento productivo o consejos para aquellos que quisiesen resolver problemas con facilidad, estos consejos aún en la actualidad resultan beneficiosos, Leonard Euler también se preocupó al exponer muchos de sus resultados incluyendo reflexiones sobre las técnicas que utilizó, para trabajar con problemas e incluso entrenaba a sus discípulos en técnicas de resolución de problemas.

La propuesta de resolución de problemas de Polya, a partir de su libro "Cómo plantear y resolver problemas" (1945) consta de cuatro fases, que se consideran esenciales dentro de la metodología de resolución de problemas. Para Polya la actividad de resolución de problemas involucra cuatro momentos: comprender el problema en el sentido de poder establecer cuál es la meta, los datos y condiciones iniciales, luego idear un plan de acción que permita combinar las condiciones iniciales, un tercer momento comprende llevar a cabo el plan ideado en el paso anterior y por último lo que Polya llama "mirar atrás" lo que consiste en comprobar el resultado obtenido. Según Polya la habilidad para resolver problemas no solo se adquiere resolviendo muchos problemas ni conociendo las distintas fases de resolución, sino tomando soltura y familiaridad con una gama de técnicas de resolución que él llama heurísticas.

Las ideas de Polya están presentes de una u otra forma en los modelos posteriores sobre resolución de problemas. Otros autores han enriquecido la propuesta con nuevos elementos. Por ejemplo, el modelo de Allan Schoenfeld que aparece en el libro Mathematical Problem Solving (1985), presenta el interés de retomar algunas ideas de Polya, profundizando en el análisis de la heurística. Schoenfeld considera cuatro dimensiones en el proceso de resolución de problemas.

La primera dimensión lo conforma lo que el sujeto conoce y la forma de aplicar experiencias y conocimientos ante situaciones de problemas. Una segunda dimensión que abarca el conjunto de estrategias generales que pueden resultar incapaces para acceder a la solución de un problema, similar a las heurísticas para Polya.

La tercera dimensión tiene que ver con la conciencia mental de las estrategias necesarias para resolver un problema, a fin de planear, monitorear, regular o controlar el proceso mental de sí mismo. Y por último el sistema de creencias que está conformado por las ideas, concepciones o patrones que se tienen en relación con la Matemática y la naturaleza de esta disciplina.

Otro modelo del cual se puede hablar es el de Mason, Burton y Stacey que aparece publicado en la obra "Pensar Matemáticamente" (1989) basada en tres momentos: el abordaje que implica comprender el problema y concebir un plan, el ataque que consiste en llevar a cabo el plan y la revisión que implica la reflexión en torno al proceso seguido y la revisión del plan.

Miguel de Guzmán propone la resolución de problemas como un trabajo de investigación, plantea la necesidad de tratar en clases no solamente problemas cerrados, sino además los denominados abiertos. Para Guzmán el proceso de resolver problema requiere cuatro pasos, en un inicio la familiarización, dentro de lo que cabe destacar lo que él llama hacer una película, contar el problema con nuestras propias palabras, luego las estrategias que contemplan la forma de abordar el problema, llevar a cabo la estrategia pensada y por último la revisión y consecuencias.

Es interesante notar que no importa cuál modelo de resolución de problemas se analice, todas consideran varios elementos indispensables que debe tener una situación de aprendizaje basada en la resolución de problemas. Entre ellos se puede mencionar el elemento motivacional, el estudiante ha de experimentar un desafío, una contradicción que lo impulse hacia la búsqueda de la solución, es aquí donde la tecnología puede ser un elemento extra que favorezca impulsar esa motivación. A la hora de plantear situaciones didácticas el docente debe tomar en cuenta que un problema es una situación o dificultad prevista o espontánea, con algunos elementos desconocidos para el estudiante, pero capaz de provocar la realización de acciones sucesivas para solucionarlo y no desmotivarlo.

Otro de los elementos comunes en todos los modelos sobre resolución de problemas, es considerar la resolución de problemas como una habilidad y como tal se caracteriza y estructura, todo ello con base a determinadas acciones, que son las que permiten acceder a las estrategias para resolver los problemas.

C. Cambios en el papel del profesor y los alumnos

La metodología incluye en gran medida en la actitud que puedan presentar los estudiantes, por lo tanto, "si el docente se preocupa por presentar el contenido en forma atractiva, será posible que sus alumnos muestren una actitud más positiva independientemente de su habilidad hacia la materia" (Calvo, 2008, p 12). La experiencia demuestra que el desarrollo de actividades didácticas donde se identifiquen y resuelvan problemas contribuye a potenciar el desarrollo de habilidades en los estudiantes.

Entre los cambios de papeles en el salón de clase se pueden mencionar que el proceso de aprendizaje se centra en el alumno, este tiene una responsabilidad importante en su formación, el profesor tiene un rol de facilitador, de generador de espacios de trabajo, de ser un modelo de pensamiento.

Una de las principales características del aprendizaje basado en problemas está en fomentar en el estudiante la actitud positiva hacia el aprendizaje. En el método se respeta la autonomía del estudiante, quien aprende sobre los contenidos y la propia experiencia de trabajo en la dinámica del método. Los alumnos tienen además la posibilidad de observar en la práctica aplicaciones de lo que se encuentran aprendiendo en torno al problema. El profesor puede ver a sus alumnos como sujetos que pueden aprender por cuenta propia junto con sus compañeros, potenciando el uso de foros o redes sociales que permiten compartir información y mejorar el desarrollo socio-afectivo del estudiante.

Por lo anterior podría hablarse de características deseables en los alumnos que participan en el aprendizaje basado en problemas. Las características deben irse desarrollando y potenciando durante el proceso; varias de la que se puede mencionar son la disposición para trabajar en grupo, la tolerancia para enfrentarse a situaciones ambiguas, el desarrollo de imaginación con ayuda de software desarrollado para tal fin, la mejora de las habilidades para la solución de problemas y las habilidades de pensamiento crítico, reflexivo e imaginativo. En este enfoque al ser el estudiante actor principal del proceso educativo su responsabilidad con respecto a su aprendizaje es mayor. Ya el profesor no le proporciona todo lo que necesita sino que se deberá preocupar por la búsqueda de la información que consideren necesaria para entender y resolver el problema, lo cual les obligara a poner en práctica habilidades de análisis y síntesis.

No solamente el estudiante debe contar con ciertas características dentro del modelo de resolución de problemas; sino que el profesor también. Recordemos que en este contexto el profesor es un tutor que debe tener conocimiento de la temática de la materia y conocer a fondo los contenidos del programa, pero además deberá conocer todas las ventajas y herramientas que ofrecen las Tecnologías de la Información y la comunicación TIC para poder crear experiencias de aprendizaje valiosas. Asimismo, deberá conocer diferentes estrategias y métodos para evaluar el aprendizaje de los alumnos y coordinar las actividades de retroalimentación de los alumnos a lo largo del período de trabajo del grupo.

D. Formación de los profesores y el estudio de clases japonés

Se supone que el profesor de matemáticas debe saber Matemática. Sin embargo, los estudios sobre el conocimiento del profesor han revelado bajos niveles de comprensión matemática y el desconocimiento sobre el uso de las TIC´s. Indudablemente, la función docente enfrenta otro gran desafío con la implementación en las aulas de las nuevas tecnologías. La mayoría realizó sus estudios de grado cuando todavía no estaban incorporadas las TIC's en los colegios o en sus planes de estudio. El tipo de conocimiento matemático que deben tener los profesores y como se debe combinar este conocimiento con su conocimiento pedagógico es motivo de gran debate.

En el ámbito de la resolución de problemas, los profesores deben ser capaces de brindarle al alumno actividades que le permitan desarrollar habilidades para visualizar, describir y analizar situaciones en términos matemáticos; para justificar, probar conjeturas y usar símbolos en el razonamiento; para darle flexibilidad a su conocimiento todo esto a través de herramientas tecnológicas. Para lograr todo lo anterior, el docente debe de poseer una buena formación, matemática, pedagógica y tecnológica sólida.

En este contexto, se requiere que el profesor no solo exponga técnicas y algoritmos, sino que promueva un conocimiento más amplio y profundo, por lo que él tiene que empezar haciéndolo. El caso contrario produce docentes con habilidades y conocimientos para, quizá, transmitir los contenidos que le son proporcionados mediante libros o los programas de estudios, pero sin poder ir más allá en el conocimiento, sin conocer las razones de la existencia de tal o cual saber, con una capacidad limitada para contextualizar el conocimiento y poder utilizar adecuadamente las potencialidades que ofrece la tecnología a la hora de planear actividades didácticas.

El estudio de clases japonés ofrece una herramienta interesante para favorecer el mejoramiento profesional de maestros y profesores de Matemática.

> El Estudio de Clases no lleva a ninguna manera particular de enseñanza, sino que sirve como vehículo para que los profesores consigan en colaboración un progreso en la enseñanza y el aprendizaje a partir de una mejor comprensión del aprendizaje del estudiante, del pensamiento y de las sub comprensiones de éste, observándose unos con otros en clases. (Isoda, M. y Olfos, R., 2009, p.23)

El Estudio de Clases se originó en Japón a fines del siglo XIX. En la década de 1980, se dio a conocer el Estudio de Clases en los Estados Unidos en el área de la Educación Matemática, a través de un estudio comparativo sobre enseñanza de la resolución de problemas. En Latinoamérica ya se ha estado trabajando en México y Chile. El Estudio de Clases puede entenderse como una modalidad de desarrollo profesional docente, conducida por los propios profesores de una o varias escuelas o liceos, que hace más de 130 años forma parte de las prácticas de los docentes en las escuelas japonesas para el mejoramiento de la enseñanza de la matemática (White y Lim, 2008).

La idea del Estudio de Clases es simple: un reducido grupo de docentes planifica una clase, uno o dos docentes implementan la clase con sus alumnos, la clase es observada y analizada en público. En el proceso de la preparación y la reflexión tras la implementación de la clase, el docente vivencia una oportunidad de desarrollo profesional desafiante que le incita y le da oportunidades para su desarrollo profesional docente.

El impacto del Estudio de Clases es atenible desde distintas perspectivas:

- Conceptos de la disciplina y de la enseñanza de los mismos.
- Aspectos pedagógicos para la enseñanza. - Capacidad para observar producciones de alumnos en clases
- Conexión de la práctica diaria con objetivos de largo plazo
- En los profesores de la comunidad escolar:
- Motivación para mejorar el trabajo docente.
- Relaciones entre colegas en la lógica de la colaboración.
- Proyección del trabajo de Estudio de Clases a la escuela en su totalidad.
- Sentido de evaluación y rendición de cuenta como práctica compartida.
  (Isoda, M. y Olfos, R., 2009, p.20)

E. Fase del estudios de clase japonés

Preparación de la clase

El planeamiento de la lección es la herramienta primordial del estudio de clases, el cual estará dividido en cuatro columnas. En la primera se incluyen las cinco fases en que se dividirá la lección:

- Situación donde se contextualiza el problema para que los estudiantes comprendan el contexto alrededor de la actividad.
- Presentación del formato del problema, aquí se presentan ejemplos introductorios.

- Se presenta la situación problema que se pretende que el estudiante efectué independientemente del docente.
- Presentación y discusión de soluciones.
- Conclusión de la lección.

En una segunda columna se presentan las posibles reacciones que los estudiantes tendrán en la realización de las actividades descritas en la primera columna, como por ejemplo las respuestas esperadas por parte de los estudiantes al problema propuesto. En la tercera columna del planeamiento, se anota como el docente debe responder a los cuestionamientos de los estudiantes y además se realiza una lista de todos aquellos puntos importantes que el profesor debe de tomar en cuenta durante el desarrollo de la lección. En la última columna se mencionan las estrategias de evaluación que se realizarán no al final de la lección, sino durante las cinco fases descritas anteriormente.

Realización de la clase

Una vez terminada la primera etapa, la cual puede tardar varias semanas, un miembro del grupo que diseñó la lección es escogido para poner en práctica el planeamiento que ha sido diseñado. Los otros miembros del grupo de trabajo asisten a observar el trabajo del compañero sin intervenir. También es permitido que otros docentes asistan durante el desarrollo de la lección, pero será necesario que primero se le facilite el planeamiento para que esté enterado del trabajo que se pretende realizar.

Análisis de la clase

Una vez efectuada la lección, los docentes participantes se reúnen para analizar los siguientes aspectos relacionados con las dificultades de los alumnos en la clase; el papel asumido por el profesor durante la gestión, las interacciones entre el profesor y los alumnos, la pertinencia de los materiales, etc. Si el grupo considera necesario se pueden efectuar cambios si se detectaron dificultades que inicialmente o durante la clase no se tomaron en cuenta.

El proceso continúa cíclicamente hasta obtener un material que pueda ser divulgado. La idea de elaborar tan detalladamente el planeamiento de una lección, es que le proporciona a los docentes involucrados un mayor entendimiento de lo que están haciendo. Además, la técnica permite observar desde una perspectiva crítica la labor docente. El tiempo que demanda a los profesores, en promedio, la implementación completa de un ciclo de Estudio de Clases es de 10 a 15 horas en alrededor de 3 o 4 semanas de trabajo.

Para observar un primer acercamiento práctico de la metodología se efectuó una pequeña experiencia en un colegio rural, para valorar la pertinencia del estudio de clases japonés en el contexto del sistema educativo costarricense.

F. Metodología

La experiencia se desarrolló en una institución secundaria rural, en el Liceo Enrique Guier Sáenz de Cachí, en Paraíso de Cartago, en el nivel de octavo año durante el mes de abril del 2013 en el marco de la implementación del plan de transición de los nuevos programas de estudio. Participaron en el diseño y montaje de las actividades didácticas tres profesores de Matemática que trabajan en dicha institución. La intervención didáctica fue diseñada en conjunto por los tres docentes participantes, luego uno de los profesores la puso en práctica mientras los otros dos tomaban apuntes; en una segunda fase se revisaron los apuntes y después de un periodo de reflexión de la experiencia, se realizaron los ajustes del caso y luego el otro docente volvió a poner en practica la secuencia didáctica mejorada.

G. Análisis y Discusión

Diseño de la secuencia de clase

El enunciado del problema es crucial para lograr una clase en la que el alumno participe, se sienta bien haciéndolo y aprenda. En este contexto los materiales utilizados juegan un papel primordial, pues son el soporte que permite una adecuada presentación de la situación problema. La preparación de la secuencia didáctica supuso la preparación de los materiales que se utilizaron durante las sesiones de trabajo. Los materiales utilizados incluyeron manipulativos, una guía de trabajo, una presentación en Prezi y software de geometría dinámica Geogebra.

Gestión de la secuencia de clase

Se pudo apreciar que es necesario anticipar la distribución temporal de la clase, para que las actividades conduzcan al aprendizaje esperado en el tiempo disponible. Después de 60 minutos de trabajo los estudiantes se muestran normalmente cansados por lo que es recomendable dedicar al final de la clase un momento para una actividad más lúdica, con espacios de descanso. Es importante no solo vigilar el avance grupal sino también el avance individual de cada estudiante, esto con el fin de que la actividad no se alargue demasiado.

Se observó que cuando los estudiantes son retados y lidian por buscar solución al problema planteado, sus mentes se abren y alcanzan una buena disposición para enfrentar la situación problema planteada que en este caso correspondió al problema de las pantalla de televisión.

Se pudo apreciar que los profesores tienden a explicar cómo ellos resuelven el problema, con las herramientas cognitivas que disponen. Sin embargo, fue claro durante el desarrollo de la experiencia que es mejor dejar a los estudiantes que expliquen a sus pares, con el lenguaje y los conceptos que disponen y les son comunes. Si los alumnos observan varias formas de enfrentar el problema por sus pares, tendrán mayor posibilidad de entender y de relacionar lo nuevo con los conocimientos ya adquiridos y esto les permitirá adquirir nuevas herramientas cognitivas.

La metodología de resolución de problemas crea un ambiente de zozobra y preocupación en los estudiantes, que el docente debe enfrentar con estrategias que les devuelvan la seguridad, sobre todo en las primeras sesiones de trabajo. Esta preocupación e intranquilidad se manifiestan en los estudiantes, porque encuentran vacíos en los significados y los procedimientos de las tareas previamente aprendidas. Sin embargo, se observó que una vez que los estudiantes han enfrentado con éxito una situación problema, ellos se sienten mejor y olvidan estos tipos de sensaciones. Otro aspecto a tomar en cuenta es que durante el trabajo estudiantil independiente si el profesor constata una respuesta o afirmación errónea del alumno, este la debe de corregir, pero sin descalificar al alumno ni a su idea, pues se corre el riesgo de que el estudiante vuelva a sentir la sensación de intranquilidad que puede desembocar inclusive en que el estudiante no asista más a las lecciones de matemática.

Evaluación en la secuencia de clase

El docente debe identificar los aprendizajes ya alcanzados por los estudiantes en las clases anteriores, que serán importantes para la siguiente sesión. Además, se debe evaluar en qué medida el grupo alcanza los objetivos propuestos y si se está en condiciones para avanzar al nuevo tema. La evaluación también debe de abarcar la valoración sobre si las actividades planificadas crean oportunidades para que los estudiantes experimenten y disfruten pensar matemáticamente o más bien llevan al estudiante a realizar procedimientos largos y mecánicos. En este contexto, la evaluación ofrece la retroalimentación necesaria para mejorar las secuencias didácticas.

H. Resultados

El desarrollo de la experiencia permitió apreciar varios fenómenos que tienen que ver con aspectos muy arraigados en el sistema educativo costarricense los cuales se resumen a continuación:

- El comportamiento de los estudiantes en la resolución de problemas es influenciada por su conocimiento cognitivo y sus creencias hacia la materia. El sistema de creencias matemático es importante puesto que influye en la forma en cómo se abordan los problemas matemáticos. Se observó durante el desarrollo de la secuencia de clase que los estudiantes en general desconocían que hay generalmente más de una forma para solucionar un problema o que dos o más métodos para solucionar un problema pueden conducir a la misma solución correcta, y que puede existir más de una manera para presentar un problema o su solución.

- En la primera clase, los estudiantes se esforzaron en pensar en lo que tenían que hacer, la mayoría de ellos no tenía las herramientas para pensar coherentemente y las matemáticas parecían tener poco sentido para ellos, al menos en la forma en que se les pidió que hicieran juicios sobre lo que enfrentan. No obstante, es importante resaltar que para la segunda sesión el desenvolvimiento de los estudiantes mejoró significativamente, a pesar de que debían trabajar en la actividad de refuerzo sin la guía directa del docente.

- El avance de las sesiones se extendió mucho más de lo que se había planificado, lo anterior generó preocupación dado que el avance según lo establecido no era lo adecuado. Lo anterior, es un gran obstáculo sobre todo tomando en cuenta que nuestro sistema educativo el docente de matemática es calificado por cumplir con el programa de estudios, sobre todo en los niveles superiores en donde la prioridad es la prueba nacional de bachillerato.

- El esfuerzo por lograr una mejor comprensión de una definición clara del pensamiento matemático y cómo lograrlo tanto en profesores, como en los estudiantes, suministro una meta concreta sobre todo en la etapa de diseño de la secuencia didáctica.

- Fue muy difícil en medio de toda la carga de trabajo de los tres docentes participantes encontrar un momento adecuado para la reflexión y planificación de cada una de las sesiones de la secuencia de clase. Lograr tener un documento final con todas las observaciones y acotaciones del caso después de observar la primera clase púbica fue todo un reto.

- La estructura administrativa de los colegios costarricenses es un obstáculo para la implementación de este tipo de experiencias en nuestro sistema educativo. Una vez que se terminó el diseño de la secuencia, el simple hecho de organizar la clase pública provocó problemas administrativos, dado que no todos los docentes tenían el mismo horario o tenían que atender a sus grupos a esa misma hora, por lo que fue necesaria la colaboración del director de la institución.

I. Conclusión

La Matemática ha sido tradicionalmente un dolor de cabeza para educadores, padres y estudiantes. Un alto porcentaje de estudiantes sienten temor y falta de gusto cuando se enfrentan a ejercicios matemáticos. Muchas de las actuales prácticas de los profesores resultan insuficientes para estimular debidamente la creatividad y capacidades en los alumnos los que se transforman en meros receptores y por ende incapaces de crear sus propios aprendizajes. Esta problemática nos demuestra la urgencia de replantear la acción del profesor frente a sus alumnos, para lo cual se requieren nuevas estrategias entre las que tenemos la resolución de problemas.

El contexto actual ha puesto de manifiesto la responsabilidad que tenemos los docentes al introducir los cambios en el proceso de enseñar y aprender a resolver problemas en las clases de Matemática. "Las necesidades y exigencias del aula pasan a través de la creatividad constante del profesor" (Mazario, 2005, p. 20) Por lo expuesto anteriormente, el método de estudio de clases japonés puede ser una herramienta útil, que favorezca el desarrollo de destrezas profesionales necesarias en los docentes de Matemática en el marco de la implementación de los nuevos programas y ante la imperiosa necesidad de capacitación docente. Sin embargo, no se debe de perder de vista que se deben de analizar detenidamente qué aspectos del estudio de clases japonés se pueden replicar en nuestro sistema educativo y que modificaciones son necesarias para que este se adapte adecuadamente.

Referencias

[1] Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El Trabajo de Allan Schoenfeld. Recuperado de: http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/view/5

[2] Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas, 32(1), pp. 123-138. Recuperado de: http://web.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=7&sid=e83a2cc4-ce2a-4f 5d-995b-4a9f75aac28a

[3] Gaete, M. y Jiménez, W. (2011). Carencias en la formación inicial y continua de los docentes y bajo rendimiento escolar en matemática en Costa Rica. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. 9. Recuperado de: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/view/684/683

[4] Isoda, M. y Olfos, R. (2009). El Enfoque de Resolución de Problemas: en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

[5] Kilpatrick, J.; Gómez, P. y Rico, L (1998). Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/679/

[6] Mena, A. (2009). El estudio de clases japonés en perspectiva. Colección Digital Eudoxus, (18). Recuperado de: http://www.optimaeducacion.cl/intranet/temp/039552996.pdf

[7] Meza, L.; Agüero, E. y Calderón, M. (2012). La teoría en la práctica educativa: Una perspectiva desde la experiencia de docentes graduados/as de la carrera Enseñanza de la Matemática asistida por computadora". Revista digital matemática, educación e internet, 13(1). Recuperado de: http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V13_N1_2012/RevistaDigital_Meza_V13_n1_2012/RevistaDigital_Meza_V13_n1_2012.pdf

[8] Meza, L.; Suarez, Z. y García, P. (2010) Actitud de maestras y maestros hacia el trabajo cooperativo en el aprendizaje de la matemática. Recuperado de: http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=194114419011

[9] Polya, G. (1990). Como plantear y resolver problemas. México: Trillas.

[10] Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., Astiz, M., Alvarez, E., Vilanova, S. y Valdez, G. (2009).

[11] La educación matemáticas, el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. Colección Digital Eudoxus, 1(3). Recuperado de: http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF

[12] Ruiz, A.; Chavarría, J. y Mora, F. (2011). Tendencias y retos de la educación matemática en Costa Rica. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. 9.

[13] Ruíz, A; Alfaro, C y Gamboa, R. (2006). Conceptos, procedimientos y resolución de problemas en la lección de matemáticas. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. 1(1). Recuperado de: http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php cifem article/download/6968/6654

[14] Sierra, M (2002). Pensamientos de Miguel de Guzmán en Educación matemática. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/59/Articulo09.pdf

Implementación de la metodología de instrucción por pares en un curso de cálculo

MILLER, NORMA[I]

Panamá

Ponencia

Este trabajo documenta la utilización por primera vez en la Universidad Tecnológica de Panamá, de la metodología de instrucción por pares para afianzar el aprendizaje conceptual del cálculo. Durante las sesiones los alumnos analizaron y discutieron preguntas conceptuales, y capturaron sus respuestas mediante un sistema de votación inalámbrico (clickers). Los resultados de las encuestas aplicadas a los estudiantes al iniciar y finalizar el curso sugieren que la discusión entre pares ayuda a aclarar sus dudas y corregir ideas previas erradas. La metodología resultó sumamente motivadora para los estudiantes, y los animó a participar más en clase y a hacer más uso de su libro de texto, incluso para leer teoría. Como beneficio adicional, dos tercios de los estudiantes reportó que aumentó su interés por las matemáticas a raíz de haber tomado este curso.

Palabras clave: Cálculo, clickers, entendimiento conceptual, instrucción por pares.

A. Introducción

En la Universidad Tecnológica de Panamá, como en muchas otras, un alto porcentaje de estudiantes desaprueban año tras año la asignatura de Cálculo. Aunque son múltiples los factores, la falta de entendimiento de los conceptos fundamentales, incluso por aquellos estudiantes que obtienen notas de A y B, ha motivado la exploración del impacto de diferentes recursos y estrategias pedagógicas. Una de ellas, y sobre la cual versa este trabajo, es la instrucción por pares (peer instruction, en inglés).

○ Antecedentes de la instrucción por pares

En el campo de la física, el desarrollo y aplicación del "Inventario de Conceptos de Fuerza" (ICF) (Hestenes, Wells, & Swackhamer, 1992), una prueba que mide el entendimiento de los conceptos básicos sobre fuerza y movimiento que poseen los estudiantes, vino a poner de manifiesto el hecho de que, bajo un esquema convencional de enseñanza - donde el docente es protagonista, y los estudiantes una audiencia básicamente pasiva ? se observan pocos cambios en el entendimiento conceptual del estudiante al pasar por los cursos, incluso en aquellos estudiantes que sacan notas altas (Halloun & Hestenes, 1985). El conjunto de ideas previas, muchas de ellas erróneas, con las que llegan los alumnos, se mantienen a pesar de la instrucción.

El beneficio que un estudiante obtiene de un curso se puede medir con la ganancia, una cantidad sin unidades que mide la mejora lograda respecto a la mejora posible, que se calcula mediante la fórmula $G = \frac{Prom{\cdot}Pos - Prom{\cdot}Pre}{100\% - Prom{\cdot}Pre}$.

[I]UTP, Panamá.

En física, los estudios han mostrado que la ganancia promedio con metodologías de enseñanza convencionales es de 0.25, independientemente del estilo particular de enseñanza del docente (Hake, 1998). Este resultado se atribuye en gran parte al énfasis puesto en enseñar estrategias de resolución de problemas, en detrimento de una comprensión sólida de los conceptos subyacentes. Esta forma de enseñar basada en procedimientos huérfanos de sustento conceptual, redunda además, en una atención dispersa y pocas oportunidades para pensar de forma crítica sobre los argumentos presentados. En cambio, el uso de estrategias de involucramiento interactivo, donde el estudiante tiene un mayor protagonismo en las clases, ha resultado en ganancias de entre 0.41-0.60 (Mazur, 1997). Una de las estrategias de involucramiento interactivo más exitosas ha sido la instrucción por pares que se describe a continuación.

○ Instrucción por pares, ¿qué es?

Esta metodología toma su nombre de la interacción entre estudiantes (pares) que se genera en torno a preguntas conceptuales de opción múltiple, diseñadas para enfocar la atención sobre conceptos fundamentales de la disciplina. Al hacer esto, se propicia la reflexión cuidadosa y detallada sobre los argumentos presentados por el docente, y se proveen oportunidades para que el estudiante evalúe la comprensión que ha logrado de los conceptos estudiados, fomentando a su vez actitudes científicas como formular preguntas, y sopesar la validez de los argumentos propios y de otros (Mazur, 1997).

○ Los clickers

Los estudiantes pueden capturar sus respuestas a través de dispositivos transmisores ("clickers"), los cuales envían sus respuestas a un receptor USB en la computadora del docente. El software asociado recopila, procesa, y despliega las respuestas de los estudiantes. Evidentemente, el uso de sistemas de votación electrónicos, por sí solo y desprovista del ingrediente de discusión entre pares, no acarrea ningún beneficio a nivel de aprendizaje (Judson & Sawada, 2002). Sin embargo, en combinación con el debate entre pares, ofrecen importantes ventajas, como: desplegar el resultado de la votación de manera rápida y exacta; proveer al docente realimentación inmediata sobre el grado de comprensión del grupo; propiciar la participación de todos los estudiantes, al permitirles expresar su elección desde el anonimato; y generar una base de datos para la reflexión e indagación sobre la labor docente.

○ Factores que inciden en el impacto de la instrucción por pares

Se ha comprobado que las prácticas evaluativas del docente inciden en el comportamiento de los estudiantes durante las sesiones de instrucción por pares (James, 2006). En situaciones de alto riesgo para el estudiante ("high-stakes"), por ejemplo, cuando el docente penaliza respuestas incorrectas, los estudiantes con mayor conocimiento del tema tienden a dominar la discusión, de modo que es menos probable que la votación refleje la diversidad de ideas presentes en el grupo (James, Barbieri, & García, 2008). Por otra parte, diferentes "culturas de aula", impuestas consciente o inconscientemente por los docentes, se reflejan en la percepción que tiene el estudiante acerca de la instrucción por pares y acerca de las prácticas intelectuales que el docente valora y fomenta (Turpen & Finkelstein, 2010).

○ Instrucción por pares en cálculo

El aprendizaje del cálculo adolece de problemas similares a los que aquejan al aprendizaje de la física. Esta situación, aunada al éxito logrado en la física con la instrucción por pares, ha llevado a docentes de matemáticas a experimentar también con esta metodología. Sin embargo, la literatura sobre IPP en matemáticas es relativamente escasa. Miller, Santana-Vega, & Terrell, 2006) estudiaron la discusión entre pares de lo que llaman "buenas preguntas", encontrando que el beneficio del debate se correlaciona con la profundidad de razonamiento exigida por las preguntas. Reportan, así mismo, mayores beneficios para personas de minorías sub-representadas en el grupo, y mejor desempeño en exámenes convencionales. En otro estudio (Lucas, 2009) se encontró que a través de la instrucción por pares los estudiantes participan más en clase y comprenden mejor el material.

○ Objetivo del presente estudio

El objetivo general de este estudio fue el de contribuir a mejorar el aprendizaje de los conceptos de cálculo de los estudiantes. A nivel más específico interesaba: obtener experiencia de primera mano ("know-how") sobre la implementación de la instrucción por pares en la enseñanza del cálculo; evaluar la percepción de los estudiantes sobre el uso de esta metodología; y compartir los conocimientos y habilidades adquiridas en el proceso con colegas de matemáticas y otras disciplinas.

B. Metodología

El estudio se realizó con estudiantes de primer año de ingeniería en el contexto de un curso de Cálculo II. Se trabajó con dos grupos, de 27 y 34 estudiantes, respectivamente. En ausencia de un instrumento análogo al ICF-existe un Inventario de Conceptos de Cálculo (Epstein, 2007), pero aún se encuentra en fase de validación-el estudio no tuvo la típica estructura de pre-prueba / intervención / pos-prueba. En su lugar se aplicó primer día de clases una encuesta anónima, en la que se pedía a los estudiantes información acerca de su nivel de interés, participación, concentración, y tiempo de dedicación en su anterior curso de matemáticas (Cálculo I), así como sus expectativas para el uso de la tecnología en la clase de Cálculo II. Una versión ampliada de este cuestionario se aplicó nuevamente al final del curso. Se analizaron adicionalmente los datos recopilados por sistema de votación.

Se planearon un total de 5 actividades de IPP de 2-hrs clase (90 minutos), y de 5 a 7 preguntas cada una. La implementación de las sesiones de IPP se apegó en gran medida al esquema de Mazur (1997), a saber:

- **Planteamiento:** Docente plante la pregunta conceptual, y se asegura de que se comprende.
- **Análisis:** Estudiantes analizan la pregunta individualmente y en silencio (2 - 3 min).
- **1ª votación:** Estudiantes capturan respuesta con clickers. Se despliegan resultados.
- **Discusión:** Estudiantes identifican a compañero cuya respuesta difiere de la propia; cada uno intenta convencer al otro de que su elección es la correcta (3-4 min).
- **2ª votación:** Estudiantes capturan su respuesta por segunda vez. Se despliegan resultados.
- **Justificación:** Docente invita a los estudiantes a explicar las opciones elegidas.
- **Explicación:** Docente interviene para aclarar dudas o malos entendidos conceptuales revelados por proceso.

Es importante señalar que se requiere que entre un tercio y la mitad del grupo haya elegido la respuesta correcta para que la metodología funcione adecuadamente. Si la pregunta resulta demasiado difícil para el grupo, lo más recomendable es proceder directamente a clarificar los errores conceptuales que mantienen los alumnos.

Quizá el aspecto más retador para el docente al implementar la instrucción por pares sea la formulación de "buenas preguntas" conceptuales. Una buena pregunta conceptual se caracteriza por 1) enfocarse en un solo concepto a la vez, 2) tener alternativas adecuadas de respuesta, y 3) no responderse mediante la aplicación de una fórmula. Existen algunas recopilaciones de preguntas que pueden ser útiles como un punto de partida (ver Good Questions Project). Para este estudio, fue necesario desarrollar preguntas adicionales.

A fin de que el estudiante tome en serio el aspecto conceptual, el docente debe incluir en sus evaluaciones preguntas conceptuales, ya que los exámenes determinan en gran medida qué y cómo se estudia, y por ende, qué y cómo se aprende. Contrario a lo que se podría pensar, las preguntas conceptuales no son más sencillas, y un buen desempeño en preguntas conceptuales, tiende a estar asociado a un buen desempeño en preguntas convencionales, pero no a la inversa (Mazur, 1997).

C. Resultados

Los datos que se presentan a continuación se obtuvieron durante el segundo semestre del año 2011. Con el grupo 1 se completaron las 5 sesiones de IPP planificadas; con el grupo 2 sólo se pudieron realizar 4. En la tabla 1 se resume el desempeño en estas sesiones. En total se plantearon 37 preguntas, de las cuales 24 se formularon al grupo 1 y 13 al grupo 2. En la mayor parte de estas preguntas se completaron todos los pasos descritos en la sección anterior, pero en algunos casos no se llegó a la discusión de pares porque el nivel resultó demasiado elevado o demasiado bajo. En el grupo 1 hubo tres preguntas que no pasaron a la etapa de discusión, y en el grupo 2, seis.

Tabla 1. Desempeño en sesiones de IPP en los dos grupos participantes

GRUPO	Actividades de IPP	Total de preguntas	Preguntas llevadas a 2ª votación	Aumento de respuestas correctas	Estudiantes con aumento de respuestas correctas
Grupo 1	5	24	21	81%	36% (27%)
Grupo 2	4	13	7	71%	12% (21%)
Combinado	**9**	**37**	**28**	**79%**	**30% (27%)**

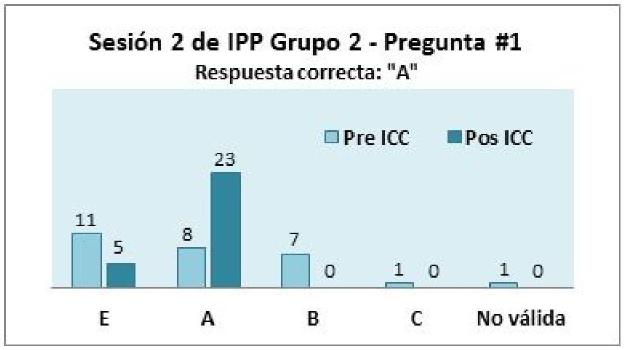
Para el combinado de los dos grupos, el 79% de las preguntas sometidas a segunda votación registró un aumento en el número de respuestas correctas. Más aún, el promedio de estudiantes que mejoró (ponderado por el número de estudiantes en cada grupo), fue de 30%, con una DE del 27%. El alto valor de la DE en ambos grupos revela la variación en el desempeño de los estudiantes entre una pregunta y otra, lo cual es un reflejo directo del nivel de dificultad de las preguntas. Igualmente, las diferencias en porcentaje de estudiantes que mejoraron, significativamente mayor para el grupo 1 que para el grupo 2, probablemente guarda relación con las características de los estudiantes de cada grupo, ya que el grupo 1 estudia una carrera con mayor exigencia matemática, que suele atraer a estudiantes con más facilidad y mejor formación en esta disciplina.

La figura 1 muestra el cambio positivo en el entendimiento de los estudiantes producto de la discusión entre pares en uno de los grupos. Nótese que previo a la discusión la respuesta correcta ("A") no fue la más votada; solo 8 de 28 eligieron esta opción.

○ Consideraciones y actitudes de los estudiantes antes y después del curso

En esta sección se presentan los resultados de los cuestionarios aplicados a los estudiantes, donde expresaron sus expectativas (antes) y percepciones (después) del curso. Cabe recordar que las respuestas iniciales se basan

Figura 1. Ejemplo de resultados de votación antes y después del período de convencimiento entre pares.



en su experiencia previa en el curso de Cálculo I. Con respecto al posible beneficio de usar tecnología para "hacer la clase más interesante y divertida", aumentó de 70% a 80%; para "motivar al estudiante a participar más", aumentó de 28% a 45%; y para "ayudar a aprender mejor" bajó de 65% a 53%. Los que no esperaban ningún beneficio del uso de la tecnología se mantuvo en 4%.

En cuanto a las actividades de instrucción por pares con clickers, éstos tuvieron un alto grado de aceptación entre los estudiantes: el 90% recomendaría a los docentes utilizar esta metodología para enseñar. Algunos de las razones esbozadas por alumnos son:

- Hace bien didáctica la clase, y cambia la rutina de todos los días [de] estar solo mirando al tablero y escuchar, con eso tenemos la oportunidad de que el docente sepa con mayor certeza las dudas y debilidades que tenemos.
- De esta manera se resuelven las preguntas que a veces el estudiante no se atreve a preguntar.
- Hace que las clases sean más entretenidas, menos monótonas y por supuesto el momento en el que discutimos las respuestas entre nosotros ayuda a tener un mayor dominio del tema debido que para defender o escoger la respuesta correcta se debe poder argumentar, y para saber argumentar hay que tener conocimientos del tema.
- Faltaron más sesiones de IPP Como cabría esperar, hubo también comentarios menos entusiastas como los siguientes:
- No me gustó mucho ya que a veces me enredaba más; prefiero la explicación del profesor sin hacer uso de eso.
- Yo no la elegí porque a pesar de que son sesiones que me aclaran muchas dudas no me gusta estar hablando con las personas y sentirme que me equivoco, motivo por el cual no me paro y no converso con otra persona; pero si me ha ayudado a entender...

Dos preguntas importantes, por tratarse de elementos que otorgan autonomía al estudiante y le transfieren la responsabilidad sobre propio proceso de aprendizaje, versaban acerca de su inclinación a hacer preguntas en clase, la una, y el uso del libro de texto, la otra.

Las respuestas a la primera pregunta al final del curso contrastan de manera significativa con lo expresado al inicio. El porcentaje de estudiantes que "preguntan mucho" aumentó en de 2% a 20%; los que "preguntan de vez en cuando" disminuyó de 74% a 57%; y los que "nunca preguntan" bajó un poco de 24% a 20%. Es razonable suponer que la mayor parte del aumento en el porcentaje de los que preguntan mucho se corresponde con la disminución de los que preguntan sólo ocasionalmente.

En cuanto al libro de texto, su uso para "practicar problemas" subió de 76% a 96%; para "leer la teoría" aumentó de 43% a 75%; y para "estudiar ejemplos resueltos" se mantuvo básicamente igual (74% versus 75%). Los que no lo utilizaron disminuyó de 4% a 0%. Cabe suponer que el incremento de 32% para estudiar teoría estaría vinculado al énfasis que se hizo en lo conceptual durante las sesiones de IPP, y que se reforzó incluyendo preguntas conceptuales en los exámenes parciales. Respecto al efecto que tuvo el curso en el interés del alumno por las matemáticas, un 63% de los estudiantes indicaron que su interés por la materia aumentó a raíz de haber tomado este curso, y más de la mitad manifestaron que éste era su curso preferido.

D. Discusión

Los resultados descritos en la sección anterior, corroboran en gran medida lo reportado por Mazur (1997), específicamente en cuanto al aumento del porcentaje de respuestas correctas en la segunda votación, luego de que los estudiantes compararan respuestas y argumentos. La principal diferencia es que Mazur encuentra que este porcentaje aumenta en todas las preguntas planteadas, mientras que en este estudio el aumento se dio en un 79%. En el 21% restante (6 de 28 preguntas) el porcentaje de respuestas correctas de hecho disminuyó. Sin embargo, en 3 casos la disminución fue del 5% o menos, lo que equivale a 1 o 2 personas sumándose a la respuesta incorrecta en un grupo de más de 20 estudiantes.

Una crítica que se le podría formular a la estrategia de instrucción por pares es que los estudiantes realmente no cambian sus concepciones erradas, sino que simplemente optan por elegir la misma respuesta que aquellos pares considerados más entendidos en la materia. Al respecto la literatura (Ej., James, 2006; James et al., 2008) indica que las prácticas evaluativas del docente tienen un gran impacto sobre el discurso entre estudiantes y la manera en que votan. Las prácticas evaluativas de bajo riesgo o para el estudiante ("low-stakes"), favorecen mayor disensión en la discusión y mayor independencia en la votación. El docente debe procurar, por tanto, crear las condiciones para que la instrucción por pares sea una actividad de colaboración, y no de competencia; una actividad en la que predomine el esfuerzo por "hacer sentido", en vez de solo buscar la respuesta correcta. En este estudio, se le informó a los estudiantes desde el inicio (y se reiteró a lo largo del semestre) que la evaluación en las sesiones de IPP dependía únicamente de participar en la actividad, y no de elegir la respuesta correcta.

Hubiese sido deseable contar con una herramienta como el ICF de física, que aportase evidencia concreta sobre la efectividad del método. Se espera que en un futuro esté validado el Inventario de Conceptos de Cálculo (Epstein, 2007) para poder subsanar este aspecto del estudio. Aun así, las respuestas a las preguntas, y especialmente los comentarios vertidos, dan fe de la seriedad con que se tomaron las discusiones durante la implementación de la estrategia.

El hecho de que las expectativas sobre aprender mejor usando recursos tecnológicos estuviesen algo infladas inicialmente (el porcentaje bajó de 65% a 53%), puede deberse a la tendencia a pensar que el mero hecho de usar tecnología en una clase redunda automáticamente en un mayor aprendizaje, sin atención a cómo y para qué se utiliza esa tecnología-algo que Papert ha denominado "tecnocentrismo". Una vez confrontado con determinada tecnología, sobre todo si se trata de "herramientas para pensar", el estudiante se ve obligado a realizar un esfuerzo importante; esto es particularmente cierto cuando debe desaprender ideas previas erróneas. En tal caso, puede tener la impresión de no haber aprendido tanto-a pesar de haber estado más interesado, divertido, y participativo en la clase-cuando en realidad ha sido lo contrario: éstas son justamente las condiciones bajo las cuales el aprendizaje puede volverse realmente significativo para el estudiante.

Desde el punto de vista del docente, trabajar con clickers tuvo importantes beneficios: 1) favoreció la participación de todos los estudiantes; 2) permitió al docente tener retroalimentación inmediata sobre la efectividad de la enseñanza; 3) reveló errores de concepto y permitió corregirlos oportunamente; 4) contribuyó a un ambiente de cuestionamiento crítico y respetuoso a la diversidad de ideas planteadas; y 5) estimuló la búsqueda de argumentos válidos para la sustentación de las ideas.

E. Conclusiones

Este trabajo documenta la primera implementación de la metodología de instrucción por pares para aprender cálculo en la Universidad Tecnológica de Panamá. Nuestros resultados indican que los alumnos perciben las discusiones contextualizadas entre pares, en un entorno de bajo riesgo, como beneficiosas para su comprensión de los conceptos teóricos del cálculo. Para constatar el impacto de manera rigurosa, en futuras iteraciones del trabajo se aplicaría el Inventario de Conceptos de Cálculo, o una prueba similar, al inicio y al final del curso. Por lo pronto, lo que no cabe duda es que la metodología resultó sumamente motivadora para los estudiantes, quienes ven en la misma la posibilidad de aprender más, aclarar sus dudas, y divertirse en el camino.

Referencias

[1] Epstein, J. (2007). Development and validation of the calculus concept inventory. Proc. 9th Int. Conf. on Math. Ed. in a Global Community, vol. 9, Charlotte, NC, pp. 165-170.

[2] Good Questions Project, Cornell University. Retrieved from: http://www.math.cornell.edu/ GoodQuestions/materials.html

[3] Hake, R. R. (1998). Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand student survey of mechanics test data for introductory physics courses. Am. J. Phys., 66(1), pp. 64-74.

[4] Halloun, I. A. & Hestenes, D. (1985). The initial knowledge state of college physics students. Am. J. Phys., 53(11), pp. 1043-1048.

[5] Hestenes, D. Wells, M. & Swackhamer, G. (1992). Force Concept Inventory. The Physics Teacher, vol. 30, pp. 141-158.

[6] James, M. C. (2006). The effect of grading incentive on student discourse in peer instruction. Am. J. Phys., 74(8), pp. 689-691.

[7] James, M. C., Barbieri, F. & and Garcia, P. (2008). What are they talking about? Lessons learned from a study of peer instruction. Astron. Educ. Rev., 7(1), p. 37.

[8] Judson, E. & Sawada, D. (2002). Learning from past and present: Electronic response systems in college lecture halls. J. Comput. Math. Sci. Teach., vol. 21, pp. 167-181.

[9] Lucas, A. (2009). Using peer instruction and I-clickers to enhance student participation in calculus. Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, vol. 19, issue 3, pp. 219-231.

[10] Mazur, E. (1997). Peer instruction: A user´s manual. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

[11] Miller, R. L., Santana-Vega, E. & Terrell, M. S. (2006). Can good questions and peer discussion improve calculus instruction. Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, vol. 16, number 3, pp. 193-203.

[12] Turpen, C. & Finkelstein, N. D. (2010). The construction of different classroom norms during peer instruction: Students perceive differences. Phys. Rev. ST Physics Ed. Research, vol. 6, number 2, 020123.

Magia para enseñar matemáticas

MONGE, CARLOS[I]

Costa Rica

Resumen

Este taller tiene como objetivo ofrecer a los docentes herramientas lúdicas para que sean incluidas en sus lecciones de matemáticas. Se mostrará como la magia se apoya de las matemáticas para crear ilusiones, permitiendo motivar a los estudiantes, por medio de la creación de actitudes positivas entorno a la temática de estudio. Los participantes podrán observar la puesta en escena del truco, aprender el concepto matemático que lo fundamenta y ponerlo en práctica. Los trucos matemáticos se basaran en tres áreas específicas: números, cartas y dados.

Palabras clave: Magia, matemáticas, enseñanza, ilusiones.

A. Introducción

Las matemáticas, durante la historia, han sido tildadas como tenebrosas, siniestras y difíciles. Tales cualidades la harían digna de ser el personaje antagónico de un cuento de terror, papel que muchas veces recae sobre el docente de matemáticas. Lo cierto es que las matemáticas, son hoy por hoy, el lenguaje con el que está escrito nuestro diario vivir. El Ministerio de Educación Pública costarricense en busca de recalcar la importancia de esta área, implementa los nuevos programas de estudio en educación matemática, los cuales buscan acercar a las matemáticas mediante la resolución de problemas.

Lo anterior conlleva a que el estudiante sea competitivo, creativo, estratégico teniendo una mayor actividad lógica-matemática. Pero no solamente el cambio recae en el alumno, el docente debe buscar problemas y recursos que le permitan hacer ver al estudiante que la matemática es un elemento indispensable del mundo actual y que puede ser maravillosa, atractiva y entretenida.

B. Magia para enseñar matemáticas

Utilizar la magia para enseñar matemáticas se convierte en una herramienta fabulosa para motivar a los alumnos, haciéndoles ver una de las tantas aplicaciones de la materia en elementos típicos de nuestra realidad. Este recurso responde a varias finalidades explicitas en los nuevos programas del Ministerio de Educación Pública como los siguientes:

- La potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas.

[I]TEC, Costa Rica.

- ○ Perseverancia.
- ○ Confianza en la utilidad de las Matemáticas.
- ○ Participación activa y colaborativa.

- Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas.
- La utilización de espacios lúdicos fortaleciendo entornos basados en la colaboración, involucrando la participación y el disfrute de las matemáticas.

Según la Real Academia Española, magia se define como la ciencia o arte que enseña a hacer cosas extraordinarias y admirables, por tanto Muñoz (s.f) define mate-magia como la ciencia que utiliza las matemáticas para realizar cosas maravillosas. Si analizamos un poco, nos daremos cuenta de que los espectáculos de magia intentan hacer posible lo imposible, sin embargo la matemagia son simples matemáticas disfrazadas permitiendo hacer imposible lo posible.

Por otro lado, Hernández indica que "la magia, como otras tantas cosas, tiene un gran potencial pedagógico y es una herramienta de acceso al currículo y a las competencias básicas de una manera vehicular" (2013, p. 40) Efectivamente el docente debe de ser el encargado de transmitir los contenidos por una vía didáctica y brindarle un rostro contextualizado de las matemáticas.

Para utilizar la magia como ese vehículo didáctico se propone los siguientes pasos, para su ejecución en la lección de matemáticas:

1. El docente presenta el truco de magia como si fuera un verdadero mago.
2. Conoce la reacción del estudiante.
3. Solicita a los estudiantes repetir el truco, cambiando las condiciones iníciales del mismo para intentar intuí una explicación.
4. El docente releva el secreto del truco y si es posible, brinda su fundamentación matemática.

Las ilusiones matemáticas brindan dos características de importancia para la enseñanza de la materia. La primera es que para la ejecución de un truco, tanto el mago como el participante, requieren hacer matemáticas (realizar operaciones básicas, por ejemplo), otra es que, para conocer la fundamentación del truco y el porqué funciona, se requiere de conocimientos matemáticos para poder dar una explicación. Así el estudiante después de aprender el truco puede repetirlo a sus amigos o familiares, extendiendo sus conocimientos y capacidades más allá del salón de clases.

En concordancia con Martín (2011), algunas ventajas de hacer matemáticas y magia en clase son:

- Las matemáticas lúdicas fascinan a muchas personas y atraen la atención del estudiantado.
- Se sale de la rutina habitual.
- Fomenta un espíritu crítico e imaginativo ya que para encontrar la solución se requiere un proceso de discusión y de planteamiento de ideas originales.
- Produce un proceso de discriminación de soluciones que forma parte de las habilidades matemáticas a desarrollar entre nuestros alumnos.
- Podemos plantear propiedades matemáticos como enigmas a resolver y que los alumnos traten de encontrar el secreto por sí mismos. Esto daría pie a profundizar en las leyes o propiedades matemáticas.

- Los trucos de magia matemática se fundamentan en aplicaciones muy simples: cálculos aritméticos sencillos, combinatoria y probabilidad básicas y en general en herramientas al alcance de alumnos de últimos cursos de primaria o secundaria.

C. El taller

El taller está dirigido a cualquier persona amante de las matemáticas, que desee aprender cómo la magia se basa de esta ciencia para llevar a cabo su faena. También está orientado a aquellas personas que deseen aprender trucos de magia matemáticos que puedan incorporar a sus lecciones y así motivar a sus estudiantes. Los participantes podrán observar la puesta en escena del truco, aprender el concepto matemático que lo fundamenta y ponerlo en práctica. También habrá una sesión en la cual algunos de los asistentes al taller, deberán aprender un truco matemático y presentarlo a las demás personas.

D. Trucos e ilusiones

Algunos de los trucos que se presentarán en el taller son los siguientes:

1. Adivinación en el diccionario

1.1 Materiales: Un diccionario, papel,un sobre.

1.2 Habilidades a desarrollar: Resolver problemas y operaciones con sumas y restas de números naturales menores que 1000.

1.3 Efecto: Escriba una palabra en una hoja, guárdela en un sobre y entréguesela a una persona. Solicite a un voluntario hacer una serie de operaciones matemáticas que al final le otorgaran un número de página y un número de palabra. Al finalizar con las indicaciones, el voluntario busca la palabra descrita, en el diccionario, y se da cuenta que es la misma que estaba anotada en el sobre.

1.4 Explicación: La serie de pasos que le debe indicar al participante, es la siguiente:

Primero: Escriba un número de tres cifras distintas que no contenga al número cero. (Por ejemplo 345)

Segundo: Escriba el mismo número pero con las cifras colocadas en orden inverso. (En el caso de nuestro ejemplo seria el número 543)

Tercero: Realice la resta de los dos números anteriores, el mayor menos el menor (543-345 = 198)

Cuarto: Volver a escribir debajo el mismo número obtenido de la resta, pero con las cifras colocadas en orden inverso. (891)

Quinto: Sumar estos dos números. (198+891=1089)

Sexto: Las primeras tres cifras del número obtenido indicarán el número de página (pág. 108) y la última cifra (9) corresponde al número de palabra en el diccionario.

2. Adivinación calculada

2.1 Materiales: Papel y lápiz.

2.2 Habilidades a desarrollar: Resolver problemas y operaciones donde se requiera el uso de la combinación de operaciones suma, resta, multiplicación y división de números naturales.

2.3 Efecto: Elija a un voluntario. Comuníquele que adivinará la edad que tiene y el número de monedas que trae consigo. Tras someterlo a una serie de cálculos, el voluntario le manifestará un número de 4 cifras. Analice el número y logrará adivinar la edad y la cantidad de monedas.

2.4 Explicación: Debe solicitar realizar los siguientes procedimientos aritméticos:

Primero: Escriba en un papel su edad

Segundo: Multiplíquela por 2

Tercero: Al resultado anterior súmele 5.

Cuarto: Al resultado anterior multiplíquelo por 50.

Quinto: Al resultado anterior réstele 365.

Sexto: Al resultado anterior súmele el número de monedas

Séptimo: El número obtenido tendrá cuatro cifras. Cuando el participante se lo comunique, deberá sumarle 115. El resultado será otro número de cuatro cifras, las dos primeras corresponden a la edad y las dos últimas al número de monedas.

2.5 Ejemplo: Supongamos que el voluntario tiene 22 años y lleva 2 monedas.

Edad	22
Multiplicar por 2 (22x2)	44
Sumar 5 (44+5)	49
Multiplicar por 50 (49x50)	2450
Restar 365 (2450-365)	2085
Sumar el número de monedas (2085+2)	2087

El número que el participante le indicará es 2087 al cual deberá sumarle 115, obteniendo 2202. Las primeras dos cifras efectivamente corresponden a la edad (22) y las dos últimas cifras a la cantidad de monedas (02). Nota: este truco es muy versátil pues se puede variar el efecto, cambiando el número de monedas por el número de casa, la edad de algún familiar o el número de calzado.

3. Los cuatro ases

3.1 Materiales: Una baraja de naipes.

3.2 Habilidades: Establecer si un número es divisible por 9 aplicando las reglas de divisibilidad.

3.3 Efecto: El mago le indica a un voluntario, una serie de instrucciones que permitirán extraer cuatro cartas de la baraja. Al final, las cuatro cartas corresponden a los ases de cada uno de los palos.

3.4 Explicación:

Primero: Antes de iniciar la presentación, coloque los ases en la novena, decima, undécima y duodécima posición a partir de lo alto del mazo. Solicite lo siguiente al voluntario.

Segundo: Mencione un número mayor que 10 pero menor que 20.

Tercero: Retire de una en una, la cantidad de cartas correspondiente al número indicado anteriormente, de la parte superior de mazo. Coloque las cartas que retiró en una pila sobre la mesa.

Cuarto: Sume los dígitos del número mencionado por el voluntario.

Quinto: Retire, de la pila sobre la mesa, el número de cartas que dio como resultado la suma del paso anterior. Coloque estas cartas sobre el mazo original.

Sexto: La carta superior de la pila, retírela y apártela de los grupos de cartas. El resto de cartas de la pila colóquelas sobre el mazo original.

Séptimo: Repita tres veces más los pasos del a al e.

Octavo: Finalmente usted, habrá apartado cuatro cartas. Voltéelas, son los cuatro ases.

3.5 ¿Cómo funciona?

Si se elige una carta entre el 10 y el 20 y se restan sus cifras, el resultado siempre será 9. La justificación matemática de este truco es la divisibilidad entre nueve. Si elegimos un número de cartas entre 10 y 19 y se le resta la suma de sus cifras, siempre nos quedará 9, por lo que quiere decir, que al realizar el mago las actividades descritas, siempre nos quedarán en el montón auxiliar nueve cartas, luego en cada caso siempre se separa la novena carta. Basta por tanto preparar previamente la baraja de forma que los cuatro ases sean las cartas 9, 10, 11 y 12 comenzando desde la parte superior.

4. El mago de los dados

4.1 Materiales: Dos dados.

4.2 Habilidades a desarrollar: Resolver problemas y operaciones donde se requiera el uso de la combinación de operaciones suma, resta, multiplicación y división de números naturales.

4.3 Efecto: Solicite a un participante lanzar los dados. Tras someterlo a realizar una serie de operaciones aritméticas, el voluntario obtiene un número de dos cifras, mágicamente usted logra adivinar los números de las caras superiores de los dados.

4.4 Explicación:

Primero: Solicite al voluntario los siguientes pasos.

Segundo: Multiplicar por dos el número de puntos obtenido por uno de los dos dados.

Tercero: Sumar cinco unidades al producto

Cuarto: Multiplicar por cinco el resultado anterior.

Quinto: Sumar al resultado anterior el número de puntos obtenidos por el segundo dado.

Sexto: El participante le dará un número de dos cifras, a este último deberá restarle 25.Obtendrá nuevamente un número de dos cifras, cada uno de esas cifras indican los números obtenidos por los dados.

4.5 Ejemplo: Supongamos que el participante lanza los dados obteniendo en un dado el número 1 y en el otro el número 4. El voluntario deberá hacer lo siguiente, como se ilustra en la tabla adjunta.

El número 39 es el dato que el participante le otorgará. Sustraiga 25 y obtendrá 14. En efecto las cifras que componen al 14 son las caras de los dados 1 y 4

Número de obtenido en uno de los dos dados	1
Multiplicar por 2 (1x2)	2
Sumar 5 (2+5)	7
Multiplicar por 5 (7x5)	35
Sumar el número de puntos obtenido por el segundo dado (35+4)	39
Restar 25(39-25)	14

Referencias

[1] Alegría, P. y Ruiz J. (2002). La matemágia desvelada: Sigma, n°21, 145-174

[2] Bolt, B. (2001). La magia de las matemáticas:SUMA, n°36, 5-15

[3] Hernández, A. (2009). Matemagia: El gran Alexander. Alicante, España: Universidad de Alicante.

[4] Martín, M. (2011). Matemagia: cuando la magia y las matemáticas se unen. Consultado en: http://aprendiendomatematicas.com/bachillerato/matemagia-cuando-la-magia-y-las-matematicas-se-unen/

[5] Muñoz, J. (2010). Taller de magia y matemática. En actas del C.P.R. Oviedo.

[6] Ruiz, A. (2012). Programas de estudio de matemáticas. San José, Costa Rica: Ministerio de Educación Pública.

[7] Simmons, P. (2011). Los mejores trucos de magia. Barcelona, Madrid: Ediciones Robinbook.

[8] Vinuesa, C. (2011). MatemáGicas, Números, n°76, 31-46

Propuesta didáctica para la enseñanza del teorema de Thales

MORA, LUIS FERNANDO[I] BARRANTES, JEFFRY CAMACHO, CATALINA
MONGE, JOHANNA MORA, ANDREA VÍQUEZ, HERNÁN

Costa Rica

Resumen

La propuesta didáctica sobre la enseñanza del Teorema de Thales se fundamentó en las teorías del pensamiento complejo, la didáctica francesa y la evaluación por competencias, utilizando las TIC. Por lo que para su desarrollo y aplicación se utilizaron algunos recursos tecnológicos como el software Geogebra, y la red social Facebook, entre otros, con los estudiantes, generando una motivación particular con las actividades programadas con los alumnos, además estos recursos didácticos fueron realizados pensando en el contexto social de los mismo, obteniendo así resultados muy satisfactorios en el análisis final.

Palabras clave: Matemáticas, didáctica, competencias, pensamiento complejo, tic.

A. Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de la geometría se ha visto beneficiada considerablemente gracias a las aportaciones que han brindado las tecnologías de información y comunicación (TIC) en la educación, pues se han desarrollado softwares que facilitan la modelación de objetos geométricos en los salones de clase, beneficiando tanto a los y las docentes como a las y los estudiantes, pues se les brinda una herramienta más eficiente que la pizarra y el marcador o la tiza, para representar elementos geométricos que pueden ser manipulables para lograr diferentes puntos de vista que caracterizan a los objetos en tercera dimensión (3D), algo que antes de su creación era difícil de obtener.

Gracias a que las herramientas tecnológicas avanzan rápidamente, los profesionales en educación matemática han realizado esfuerzos para acoplar esas utilidades a los procesos de enseñanza y aprendizaje con el propósito de lograr transmitir los conceptos matemáticos de una mejor manera, en particular los geométricos, como son los proyectos de geometría dinámica, que sean desarrollado utilizando las TIC para facilitar el entendimiento conceptual de la materia, entre ellos se encuentran:

Intergeo Interoperable Interactive Geometry for Europe, que según Gmjünd (2007) busca facilitar las tres principales barreras que obstaculizan en estos momentos el uso generalizado del material didáctico de geometría interactiva: materiales más adecuados, falta de compatibilidad y la ausencia de información de material relacionado.

Así mismo se encuentra el proyecto de Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe, como menciona Belcredi (2003) el trabajo es presentado como una propuesta didáctica (clase de profundización) sobre

[I]TEC, Costa Rica.

la enseñanza del Teorema de Tales específicamente, orientada a maestros con el propósito que conocieran más sobre los pormenores del problema y así lograr que los docentes enseñaran mejor el tema.

Otros trabajos que siguen la misma línea son: la página web: Enseñanza de la Geometría con las TIC en la Educación Secundaria Obligatoria elaborado por Peña (2010), y las tesis de maestría: Teorema de Tales: Un Abordaje en el Proceso de su Enseñanza y el Aprendizaje por Andraus (2000), y Geometría Interactiva desarrollado por Gmjünd (2007).

Sin embargo los trabajos anteriores no cumplen a cabalidad con lo deseado, pues algunos de ellos, no son aplicados en el aula, por lo que se quedan en la teoría, y en el mejor de los casos algunos son llevados al salón de clase, pero no logran recopilar ningún resultado documentado, y por ende ninguna conclusión que conlleve al mejoramiento continuo de la educación matemática en el campo de la geometría.

Es por lo anterior que surgió la necesidad elaborar una propuesta didáctica en matemáticas para la enseñanza de un tema en particular de la geometría, como lo es el Teorema de Tales, la cual fue aplicada y documentada a estudiantes regulares de octavo año. La propuesta tuvo el propósito de contribuir al desarrollo de la enseñanza y aprendizaje en la educación matemática en el campo de la geometría, pues hasta el momento no se contaba con ninguna propuesta didáctica que así lo hiciera, como se mencionó en el párrafo anterior. La misma estaba compuesta por diferentes factores que tuvieron el propósito de lograr una mejor transmisión y entendimiento de la teoría, entre ellos estaban: las TIC, la didáctica francesa, el pensamiento complejo y la evaluación por competencias, las cuales se detallarán más adelante.

Además los resultados obtenidos fueron analizados para construir las conclusiones que establecieron la pertinencia y el impacto que tuvo la propuesta en el desempeño académico y motivacional de los estudiantes, así como la posibilidad de mejorar la propuesta continuamente en futuras intervenciones por parte de otros profesores que deseen llevar la dicha propuesta nuevamente a la práctica.

A continuación se presentarán las teorías educativas que sustentaron el desarrollo de la propuesta didáctica del Teorema de Thales.

B. Teorías Educativas

Las teorías que sustentan el trabajo de la propuesta didáctica del Teorema de Tales son las siguientes: La Didáctica Francesa, que a su vez se divide en otras cuatro, la Teoría de la Transposición Didáctica por Chevallard (1997), la Teoría de las Situaciones Didácticas por Verdejo (2009), la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990) y la Ingeniería Didáctica. La teoría de las competencias profesionales de los autores Tobón (2008) y Verdejo y Freixas (2009). La teoría del pensamiento complejo de los autores Morin (1995), Margery (2010), Verdejo y Freixas (2009), Tobón (2008), y las TCS. Las cuales se desarrollaran a continuación.

◦ Didáctica Francesa

El francés Yves Chevallard, establece que la didáctica de las matemáticas es una ciencia autónoma que estudia el sistema didáctico, es decir la interacción entre el docente, los estudiantes y el saber matemático.

Así mismo, Chevallard (1997) cita que varios sistemas conforma un sistema de enseñanza, y de esta forma él rompe con la relación inyectiva entre estudiante y profesor. Así cuando se desee estudiar el sistema de enseñanza se debe de realizar desde tres enfoques, el del saber (epistemológico) estudiado por la transposición didáctica según Chevallard citado por Núñez (2007), el alumno (cognitivo) analizado por la teoría de los Campos Conceptuales de Vernaud (1990) y el profesor (pedagógico) investigado por las teorías de Situaciones didácticas de Brousseau (2008).

○ Teoría de la Transposición Didáctica

Michel Verret es el creador del concepto de Transposición Didáctica el cual la define como "la transmisión de aquellos que saben a aquellos que no saben. De aquellos que han aprendido a aquellos que aprenden" Gómez (2005, p. 84). Sin embargo más tarde Chevallard va a retomar este concepto de Gómez (2005), definiéndolo como un trabajo social de enseñanza y aprendizaje que se compone con la identificación y la designación de los "contenidos de saber" cómo contenidos "a enseñar" Chevallard (1997).

Es por esto que Chevallard citado por Gómez (2005), desarrolla tres nuevos conceptos: El saber sabio, el saber a enseñar y el saber enseñado y los entre lasa de la siguiente forma:

> (...) un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que un objeto de saber a enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica (p. 87)

Así que se puede entender que el saber sabio, es un concepto puro de matemáticas, que no permite ambigüedades. El saber enseñar es el proceso en el cual el saber sabio sufre alguna transformación (saber a enseñar) para ser enseñado.

De acuerdo con Chevallard (1997) debe de existir un regulador que vele para que cada face en la transposición se desarrolle adecuadamente. La primera face entre el saber sabio al saber a enseñar se llama noosfera, la cual esta integrado por los diferentes elementos sociales y ambientales existentes en el entorno en el momento que se desarrollan los contenidos o programas de estudio. Mientras que la segunda face, que se encuentra entre el saber a enseñar al saber enseñado, es el profesor quien se encarga de velar por la adecuada aplicación.

Así que el trabajo de la noosfera es desarrollar una mescla adecuada del sistema de enseñanza con la sociedad o su entorno. Y la del profesor es preparar y dar sus clases dejando de lado la enseñanza vertical y conociendo según Chevallard (1997), las categorías de los saberes: matemáticos, paramatemáticos y protomatemáticos. La primera constituye los tópicos matemáticos a evaluar, la segunda son saberes auxiliares, es decir son los tópicos aprendidos pero no enseñados.

Un ejemplo de lo anterior es cuando el profesor tiene como fin el estudio de factorizar polinomios. La noción matemática, es propiemente la idea de factor y la iterpretación que se le da a la respuesta obtenida, por otro lado la noción de paramatemáticos serían los diferentes procesos que se realizan para llegar a la respuesta.

Y la tercera de estas nociones Chevallard (1997) constituye las destrezas alcanzadas por los estudiantes para lograr los resultados deseados.

○ Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD)

Según Chavarría (2006), el concepto de "situación didáctica" se establece como el proceso que elabora el profesor para transmitir el conocimiento al estudiante, quien lo interioriza haciéndolo suyo, y así se menciona que se ha logrado el aprendizaje. No estante Brousseau (1986) propone una nueva TSD a partir de los principios de Piaget de acomodación y adaptación. Pues el autor establece que:

> El estudiante aprende adaptándose a sí mismo al medio que genera contradicciones, dificultades y desequilibrio, tal como lo hace la sociedad humana. Este conocimiento, el resultado de la adaptación del estudiante, se manifiesta por nuevas respuestas que proveen evidencias de aprendizaje.(p. 30)

Por lo que el estudiante adquiere su propio conocimiento si se enfrenta a una situación problema donde su solución esté ligada a elementos que ellos mismos poseen y que no sea posible determinar la respuesta sin los mismos. Y el trabajo del docente debe de ser según Brousseau (1986) elegir los problemas o situaciones que provoquen en el estudiante las adaptaciones requeridas, mediante la interacción y búsqueda de soluciones.

Y es así como nace el concepto de Situación didáctica:

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos y objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución. Brousseau, citado por (Núñez, 2007, p. 11).

Así mismo Chavarría (2006) abrevia este concepto mencionándolo como la interacción del profesor, el medio y el estudiante. Y dentro este campo se define el concepto a-didáctico, el cual establece que el profesor plantea al estudiante una situación real, donde intervienen sus conocimientos previos, se construyen hipótesis, verificaciones, conjeturas, entre otras. Por lo que el estudiante toma el rol del profesor en una "micro-comunidad científica" Chavarría (2006, p. 2), por lo que el profesor pasa a un segundo plano momentáneamente para que sea el estudiante él quien logre obtener resultados por sí mismo, y luego el docente tiene que intervenir para formalizarlos, otorgándoles el nivel de conceptos matemáticos.

Para que una situación didáctica se lleve a cabo adecuadamente debe de establecer un contrato didáctico, el cual Brousseau (1986) lo define como las leyes que rigen las interacciones entre el estudiante, el docente y el medio didáctico e implica una distribución de responsabilidades entre los dos primeros.

A continuación se mencionarán los principales errores en los contratos didácticos por Brousseau (1986):

- Efecto Topaze: el conocimiento meta pierde su significado pues el maestro proporciona la respuesta al estudiante a través de pistas.
- Efecto Jourdain: el docente recibe respuestas no acertadas por parte del alumno, pero se le reconoce que no todo está incorrecto, siendo esto falso.
- Deslizamiento metacognitivo: la situación a?didáctica y los instrumentos desarrollados con el fin de generar cierto conocimiento se convierten ellos mismos en el objeto de estudio.
- Uso abusivo de analogías: ante el fracaso del alumno frente a una situación, el profesor propone otras análogas a la anterior en repetidas veces, terminando por darle la respuesta.

Para Brousseau (1986), una manera de no caer en errores es ponerlos en evidencia por medio de variedad de situaciones a-didácticas y promover la interacción del estudiante con ese contexto.

○ Teoría de Campos Conceptuales

Vergnaud (1990) se interesó por lo estructural en el área de las matemáticas específicamente por las estructuras aditivas y multiplicativas, para estudiar las dificultades de los estudiantes en esas áreas, obteniendo como resultado que los problemas de los estudiantes no eran los mismos en un campo conceptual que en otro.

Por lo que toma la hipótesis que el conocimiento está organizado en campos conceptuales cuyo dominio, por parte del sujeto, ocurre a lo largo de un periodo extenso de tiempo Moreira (2002). Un campo conceptual, según el autor se define como:

> (...) un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición.

Por lo tanto se establece que el dominio de un campo conceptual necesita de un largo plazo de tiempo y requiere que su estudio sea constante para que el estudiante continúe dominándolo. Por lo que se trata de una teoría psicológica del proceso de conceptualización de lo real que permite localizar y estudiar continuidades y rupturas entres sus conocimientos.

Así que un campo conceptual está compuesto según Vergnaud (1990) por los siguientes elementos:

1. Concepto: Da la relevancia de la conceptualización y de los esquemas correspondientes.
2. Situaciones: Se relaciona con procesos cognitivos y las respuestas del sujeto están ligadas de las situaciones a las cuales son confrontadas.
3. Esquemas: Organización invariante de la conducta para una clase de situaciones.
4. Invariantes Operativos: Los esquemas responden a una situación particular pero a su vez pueden ser utilizados a una clase más amplia, por lo que la clave de la generalización del esquema está en el reconocimiento de invariantes.
5. Significados y significantes: Evocan en el sujeto lo que constituye el sentido de una situación o significante.

Para finalizar Vergnaud (1990) señala que la eficacia del simbolismo de diagramas con cuadros, círculos, flechas y llaves para la transformación de las categorías del pensamiento en los objetos del pensamiento matemático. Así establece que clave para teorizar en el aprendizaje de las matemáticas está en considerar la acción del sujeto en situación y la organización de su conducta, de aquí la importancia del concepto de esquema.

○ Ingeniería Didáctica

Según Artigue (1995) el nombre de Ingeniería Didáctica proviene del momento en que el didáctico se comienza a comparar con un ingeniero, pues pone en práctica sus conocimientos en la materia de interés y los somete al control científico, por medio de la experimentación.

Las investigaciones de la ingeniería didáctica se desarrollan en dos niveles; el nivel micro-ingeniería, centradas en un tema en particular desarrollado en el ámbito local. Y la macro-ingeniería, que abarca diversas investigaciones tipo local y establecen conclusiones globales, referentes al proceso educativo.

De acuerdo con Artigue (1995) el proceso de experimentación consta de las siguientes cuatro fases:

1. Análisis Preliminar: se realiza un análisis de los aspectos teóricos y conocimientos didácticos concernientes al tema por investigar.
2. Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas: establece las variables de comando, que no pertenecen a las restricciones iniciales pero que se consideran pertinentes al problema por estudiar.
3. Experimentación: se desarrolla la experiencia didáctica planteada en la ingeniería, en una cierta población.
4. Análisis a priori y Evaluación: se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación y se construye la validación o no de las hipótesis formuladas por el investigador.

C. Competencias profesionales

Las competencias se vienen desarrollando según Tobón (2008) en la educación y en la sociedad, desde distintos enfoques, como por ejemplo el conductismo, fundamentalismo, el constructivismo y el sistémico-complejo, el cual busca que la educación sea integral y centralizada.

Asimismo, Tobón (2008) define las competencias desde el enfoque del pensamiento complejo como:

> Procesos complejos de desempeño con idoneidad en determinados contextos, integrando diferentes saberes (saber ser, saber hacer, saber conocer y saber convivir), para realizar actividades y/o resolver problemas con sentido de reto, motivación, flexibilidad, creatividad, comprensión y emprendimiento, dentro de una perspectiva de procesamiento metacognitivo, mejoramiento continuo y compromiso ético, con la meta de contribuir al desarrollo personal, la construcción y amansamiento del tejido social, la búsqueda continua del desarrollo económico empresarial sostenible, y el cuidado y protección del ambiente y de las especies vivas. (p. 5).

De la definición anterior se pueden resaltar algunos aspectos fundamentales para el enfoque sistemático-complejo: procesos, complejidad, desempeño, idoneidad, metacognición y ética. Ya que estos también se destacan en la mayoría de definiciones que otros autores aportan por ejemplo Gallego (2009) citado por Latif y Guanipa en (2009), Margery (2010), además se consideran fundamentales en la práctica educativa.

Además para Gallego (2009) citado por Latif y Guanipa (2009) las competencias deben de incluir tres saberes esenciales: El Saber ser, relacionado con las actitudes y comportamientos del individuo. El Saber conocer ligado a los contenidos teóricos. Y el Saber hacer, a fin de los procedimientos que se requieren para realizar las tareas que demanda la competencia particular.

Por otro lado Tobón (2008) clasifica las competencias en genéricas y específicas. Las primeras se refieren a aquellas que son requisito para actuar con éxito en cualquier profesión, tales como la capacidad para trabajar bajo presión o en equipo. Y las específicas son las propias de una profesión en particular y en conjunto la distinguen de otras.

Para efectos de la aplicación de la propuesta didáctica del Teorema de Tales se establecieron 3 niveles para evaluar el logro de las competencias por parte del alumnado modificando así las mencionadas por Margery (2010), las cuales son el nivel básico, donde se espera que el estudiante alcance las nociones intuitivas de los conceptos con una actitud positiva, el nivel intermedio donde los estudiantes logran los objetivos con ayuda del profesor y el nivel estratégico, donde el estudiantes alcanza los objetivos sin ayuda del docente justificando adecuadamente los procesos.

○ Pensamiento Complejo

De acuerdo con Morin (1995) la complejidad se define como: "el tejido de eventos, acciones, interacciones, retroacciones, determinaciones, azares, que constituyen nuestro mundo fenoménico" (p. 32)

Además Margery (2010) establece que todo lo que es complejo se caracteriza por cuatro componentes fundamentales: La volatilidad; la cual hace referencia a la tasa de cambio del entorno. La incertidumbre; que se refiere a la incapacidad de saber lo que sucederá en el futuro. La complicación; la cual señala que los fenómenos no siguen la línea de causa y efecto, sino más de situaciones del azar por lo que son estudiados probabilísticamente. Y la ambigüedad; donde se menciona la posibilidad de existir varias interpretaciones para un mismo evento.

En particular, al analizar el proceso educativo deben de tenerse en cuenta los aspectos mencionados, pues se trata de un fenómeno de alta complejidad, donde intervienen una gran cantidad de variables y sistemas.

○ Uso de TIC en la Educación Matemática

Las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) según Salazar (2003) se definen como:

> Elementos dinamizadores de la sociedad general, en particular del quehacer educativo, por organizaciones cuyas políticas son determinantes en los países desarrollados y subdesarrollados (...)

El desarrollo de las TIC ha alcanzado el sistema educativo, y como lo establece Salazar (2003), es un elemento que vuelve a la sociedad más activa. Por lo que la transformación en la educación se está dando ya se ha cambiado el lápiz y papel por la computadora, el proyector multimedia, las pantallas interactivas y Internet.

Así que se establecen a continuación una serie de elementos favorables que motivan a los docentes para que utilicen las herramientas de las TIC, citas por los autores como Arguedas (2006), García et al., citado por Arguedas (2006) y Salinas (2004): propuestas didácticas interactivas, adaptación a los ritmos, intereses y necesidades de cada estudiante, evaluación continua, contenidos dinamizadores, aprovechamiento del tiempo y motivación.

Pero también existen limitantes en el uso de las TIC según los establece García et al., citado por Arguedas (2006), la cuales son: Atractivo y abuso de la herramienta, Perdida de habilidades básicas. Por lo que el docente debe de escoger adecuadamente sus herramientas de trabajo, así como los contenidos y ejemplos a desarrollar en clase por media de las TIC.

Sin embargo Díaz y Mason citado por Salinas (2004) mencionan que sin importar sus limitaciones siempre se debe de realizar este cambio de paradigma tradicional, pues nos encontramos en la "sociedad del conocimiento", donde las personas deben adaptarse a los nuevos conocimientos, patrones culturales y avances tecnológicos.

D. Propuesta Didáctica: Enseñanza del Teorema de Thales

A continuación se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza del Teorema de Tales aplicada a estudiantes de octavo año basada en las competencias profesionales desde el enfoque del pensamiento complejo y el uso de TIC.

La propuesta fue llevada a cabo en el colegio privado Centro Educativo Jorge Debravo ubicado en Turrialba, se aplicó entre el 22 de agosto al 9 de setiembre del 2010, en el siguiente horario; los lunes de 7 a 8:15 am, los martes de 2:10 a 3:30 pm y los jueves de 12:40 a 1:20 y de 2:10 a 3:30 pm, con una duración de 15 lecciones de 45 minutos cada una y las actividades se desarrollaron tanto fuera como dentro del aula.

El grupo estaba conformado por quince estudiantes con edades entre los 13 y 15 años, de los cuales a tres se les aplicaba una adecuación curricular no significativa, dos eran trasladados del Colegio Cloromiro Picado T., y dos eran repitentes, los restantes eran estudiantes regulares que no presentaban particularidades. Además se contada con un grupo control para comprar los resultados obtenidos.

La competencia que se pretendió desarrollar fue la siguiente:

El estudiante aplica el Teorema de Tales y sus derivados en la solución de ejercicios y de problemas extraídos de su cultura cotidiana y sistematizada con base en razonamientos matemáticos.

Durante el desarrollo de la propuesta se realizaron ejemplos contextualizados por medio del software Geogebra, utilizando para ello una computadora, proyector, teléfonos celulares, cinta métrica, los cuales trataban de acercar a los estudiantes a situaciones problemas que se podrían presentarse en sus actividades cotidianas, además se construyeron ejemplos con el mismo recurso con el fin de corroborar procedimientos y resultados de ejercicios construidos durante las clases.

Las actividades propuestas a los estudiantes fueron dinámicas donde se requería la participación activa de los mismos.

Además se utilizó la red social Facebook para publicar documentos en línea como los temas de examen, prácticas y videos, para que los estudiantes realizaran preguntas por los mensajes o el chat en directos con el profesor o sus compañeros.

La evaluación consistió en diferentes estrategias como la observación directa del docente sobre los procesos desarrollados por los estudiantes, registrándolos en hojas diseñadas para este fin. Además se contó con prácticas donde se anotaban los pasos seguidos para la resolución de problemas y una evaluación final que incluía todos los criterios estudiados. Las evaluaciones formaron parte de la nota de aprovechamiento del curso.

E. Análisis de resultados

Los niveles de logro establecidos para cada criterio de la competencia definida para el estudio del Teorema de Tales fueron observados mediante las evaluaciones establecidas en la descripción de la propuesta. Luego de aplicar dichos instrumentos, se procedió a calificarlas, asignando individualmente el nivel de logro alcanzado por los estudiantes en el criterio a medir en cada evaluación. Una vez obtenidos los datos se tabularon mediante una hoja de cálculo. Con los distintos resultados se estableció primero el promedio correspondiente a cada criterio y luego a la competencia.

A continuación se presentarán los criterios y resultados obtenidos para cada competencia en las evaluaciones aplicadas, y luego se mostrarán los logros obtenidos de forma general en la competencia.

Los seis criterios específicos que se evaluaron en la propuesta didáctica del Teorema de Tales fueron los siguientes:

1. Analiza la información que se le presenta en las situaciones problema brindadas.
2. Esquematiza la información dada en los problemas presentados.
3. Resuelve problemas geométricos y algebraicos por medio de herramientas matemáticas.
4. Aplica el Teorema de Thales y sus derivados para resolver problemas de su entorno.
5. Propone diferentes estrategias para resolver un mismo problema.
6. Analiza los resultados obtenidos antes de dar su respuesta final.

En relación a los criterios anteriores se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias absolutas para los niveles uno, dos y tres: 2; 8; 4, respectivamente. Porcentualmente se tiene que el 57; 14% de los estudiantes alcanzaron el nivel dos, el 28; 57% para el nivel tres y 14; 29% respecto al nivel uno. En la figura adjunta se muestra el nivel de logro de la competencia para el grupo experimental.

Como se mencionó anteriormente se conto con un grupo control, el cual también era parte de un centro educativo privado, que coincidía en cantidad de estudiantes y lecciones semanales. En la tabla se muestra el nivel de logro de la competencia de ambos grupos, se obtuvieron logros muy similares, para el grupo experimental se tiene

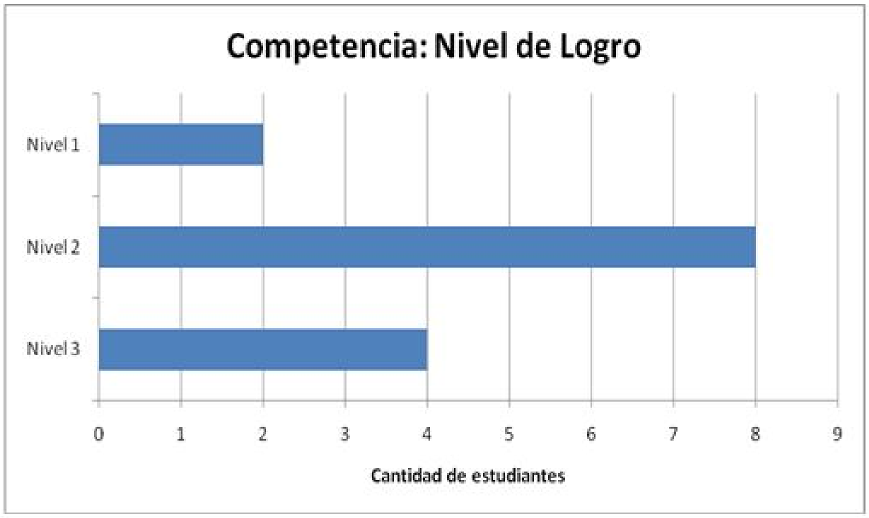


Figure 65: Nivel de logro de la competencia, Grupo Experimental.

como 14%, 57% y 29% las frecuencias para los niveles uno, dos y tres, respectivamente; análogamente en el grupo control se observaron los porcentajes 18%, 55% y 27%. En la tabla 4.1 se presentan los resultados obtenidos por ambos grupos en la competencia.

Grupo	Nivel de Logro de la Competencia
Experimental	2,13
Control	2,22

Figure 66: Tabla de comparación entre el Grupo Experimental y Grupo Control.

F. Conclusiones

En los trabajos de investigación educativa es necesario realizar un registro de experiencias y así como una validación pertinente, pues para gran parte de ellas, no existen documentos que evidencien una evaluación adecuada que complemente las propuestas.

La incorporación del uso de TIC y del enfoque por competencias conlleva una enseñanza integral, por lo cual demanda más trabajo por parte del docente, así como un mayor compromiso y responsabilidad para el alumno, quien asumen un rol activo en su propio aprendizaje.

Por otra parte es importante realizar una valoración previa de los recursos tecnológicos disponibles en cada institución y su funcionamiento, así como coordinar con la administración del centro educativo en el que se desea implementar las TIC.

A pesar de emplear más tiempo en la preparación de las lecciones, durante éstas se facilita y dinamiza el trabajo, invirtiendo ese recurso en comprender y realizar otras actividades como la profundización de contenidos.

Además, se logró determinar que utilizando TIC las lecciones resultan más atractivas para los estudiantes, por lo que esta propuesta para la Enseñanza para el Teorema de Tales el incremento en la motivación fue significativo, marcando un antes y un después en la dinámica del grupo.

Referencias

[1] Andraus, N. C. (2000) Teorema de Thales: Uma abordagem do proceso ensino-aprendizagem. Tesis de Maestría en Educación Matemática, Universidad Católica de São Paulo, São Paulo. Recuperado de: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/nancy_cury_haruna.pdf.

[2] Arguedas, J. (2010) Propuesta para la enseñanza de los máximos y mínimos. Tesis de de Maestría Académica en Matemática con énfasis en Matemática Educativa, Universidad de Costa Rica, San José.

[3] Artigue, M. (1995) "Ingeniería didáctica en educación matemática", in: Artigue, M. Douady, R., Moreno, L., Gómez, P (Eds). Una empresa docente. Grupo Editorial Iberoamérica, México: 33-59.

[4] Barrantes, H. (2006) "Los Obstáculos Epistemológicos", Cuadernos de investigación y formación en educación matemática 1(2). Recuperado de: http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/download/11/16.

[5] Belcredi, L. (2003) "Proyecto: Tecnología y educación a distancia en América Latina y el Caribe". Recuperado de: http://mosaicos.50webs.com/materiales/tacuarembo/claseProfundizacionWeb.pdf.

[6] Brousseau, G. (1986) "Fundaments and methods of didactique", in: G. Brousseau, N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V.Warfield (Eds.) Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publishers: 21-76.

[7] Chavarría, J. (2006) "Teoría de las Situaciones Didácticas", Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 1(2): 1-10. Recuperado de: http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/download/10/15.

[8] Chevallard, Y. (1997) La Transposición Didáctica: del Saber Sabio al Saber Enseñado. AIQUE, Buenos Aires.

[9] De Faria, E. (2006) "Ingeniería Didáctica", Cuadernos de investigación y formación en educación matemática 1(2). Recuperado de: http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/download/12/17.

[10] Gmjünd, S. (2007) "Geometría interactiva intercambiable para Europa". Recuperado de: http://personales.unican.es/fioravam/Intergeo/Intergeo_0.htm.

[11] Gómez, M. (2005) "La transposición didáctica: Historia de un concepto". Revista Latinoamericana de Estudios Educativos 1(2):83-115.

[12] Latif M.; Mey A.; Guanipa, M. (2009) "Perfil académico-profesional del egresado de Bioanálisis bajo el enfoque de competencias desde el pensamiento complejo" Revista Akademikós, Recuperado de: http://www.unica.edu.ve/ojs/index.php/akademikos/article/viewFile/5/160 .

[13] Linares, M. J. (2007) Geometría Interactiva. Tesis de Maestría en Ciencias (Matemática), Universidad Autónoma de México, Ciudad de México. Recuperado de: http://132.248.17.238/geometria/j_ensayo/j_ensayo.pdf.

[14] Margery, E. (2010) Complejidad, Transdisciplinariedad y Competencias: Cinco Viñetas Pedagógicas. URUK Editores, San José, Costa Rica.

[15] Moreira, M. (2002) “La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. La enseñanza de las ciencias y la investigación en el área", Investigaciones en la Enseñanza de las Ciencias, 7(1): 7-29. Recuperado de: http://www.if.ufrgs.br/ moreira/vergnaudespanhol.pdf.

[16] Morín, E. (1995) Introducción al pensamiento complejo. Barcelona: Gedisa.

[17] Núñez Vanegas, F. (2007) La Enseñanza y el Aprendizaje de la Estadística en Secundaria: Situación Actual, Aproximación Metodológica. Tesis Maestría en Matemática Educativa, Universitaria de Costa Rica, San José.

[18] Peña, A. (2010) “Enseñanza de la geometría con TIC en la educación secundaria obligatoria". Recuperado de: http://espacio.uned.es/fez/eserv.php?pid=tesisuned:EducacionApena&dsID=Documento1.pdf.

[19] Salinas, J. (2004) “Innovación docente y uso de TIC en la enseñanza universitaria", Recuperado de: http://www.uoc.edu/rusc/dt/esp/salinas1104.pdf.

[20] Salazar, L. (2003) “TIC´s Software libre y educación matemática". Recuperado de: www.colombiadigital.net/newcd/index.php?option.pdf.

[21] Verdejo, P.; Freixas, R. (2009) “Educación para el pensamiento complejo y competencias: diseño de tareas y experiencias de aprendizaje", Proyecto INNOVA - CESAL. Recuperado de: http://www.innovacesal.org/innova_system/archivos/privada/biblioteca/5/archivos/4_tareas_aprendizaje.pdf.

[22] Vergnaud, G. (1990) “La Teoría de los Campos Conceptuales", en: Recherches en Didáctique des Mathématiques 10(2): 133-170.

Formación de educadores de matemática: áreas de conocimiento y temáticas a considerar en el diseño en los planes de estudio

MORALES, YURI[I] FONSECA, JENNIFER GARCÍA, MARCELA.

Costa Rica

Resumen

El objetivo de esta ponencia es compartir con la comunidad varios hallazgos encontrados en el proceso de investigación y rediseño del currículo de formación de docentes de matemática en la Universidad Nacional (UNA) en el marco del proyecto Enfoque por Competencias: Una propuesta para el currículo de formación de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática en la UNA. Uno de los elementos fundamentales dentro de este proceso ha sido la reflexión sobre los contenidos matemáticos que debe poseer el currículo del futuro educador de matemáticas; además, la metodología de enseñanza y aprendizaje que debe ser propuesta en los centros de formación.

Palabras clave: Formación de educadores, matemática, enseñanza de la matemática, diseño curricular.

A. Introducción

La forma en que se concibe la educación impacta la formación de futuros ciudadanos y, en conjunto, de la sociedad. Asimismo, la educación matemática es esencial en la época actual.

Países como Costa Rica tienen grandes oportunidades para adoptar medidas en búsqueda del mejoramiento de las capacidades inherentes a una buena formación en educación matemática. Razonar, crear, estructurar e innovar parecen ser elementos que pueden ser nutridos desde una educación más activa y centrada en el estudiantado.

No obstante, para que este tipo de educación esté presente en las etapas de la formación general básica y diversificada, es indispensable que se cuente con un grupo de profesionales de un alto nivel tanto en su formación inicial como en los procesos de capacitación y desarrollo profesional. Pero parece que lo desarrollado hasta ahora no impacta a la educación de la forma en que se espera: "Los métodos tradicionales de instrucción han sido criticados por sus inadecuadas formas de preparar a los estudiantes para el presente ambiente de cambio e innovación" (Tan, Chye, Teo, 2009, p. 15).

La carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática en la Universidad Nacional de Costa Rica ha tenido, durante las últimas décadas, la significativa tarea de profesionalizar este tipo de docente. Desde esta carrera, la Escuela de Matemática y la División de Educología ha traducido muchos de sus esfuerzos por nutrir a Costa Rica de personal docente con esta condición.

[I]UNA, Costa Rica.

Gracias a procesos de autoevaluación y acreditación ante El Sistema Nacional de Acreditación de la Educación Superior (Sinaes) que ha venido desarrollando la carrera desde el 2005 se lograron determinar, en esta institución, muchas fortalezas y ciertas debilidades en la educación de los futuros docentes.

Dentro de los principales hallazgos del Informe de autoevaluación de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática (Comisión de Acreditación, 2009) sobresale la necesidad de una actualización del programa de formación de la carrera, el cual se estructura de manera tradicional. Evaluadores externos sugieren una reformulación hacia modelos educativos más actualizados; en particular, un modelo curricular por competencias.

Tras una serie de análisis por parte de la Comisión Curricular de esta carrera, se toma la decisión de modificar el currículo para guiarlo a un currículo orientado hacia las competencias. Esto fue precedido por apoyo institucional en los acuerdos sobre la modificación de los programas (UNA, 2012a; UNA, 2012b). Después de varias etapas de estructuración administrativa dentro de esta Comisión Curricular, se decide instaurar el proyecto Enfoque por competencias: Una propuesta para el currículo de formación de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional (Código 0329-10), con el fin de recomendar un posible programa de estudio orientado hacia un modelo por competencias.

De esta manera, el proyecto Enfoque por competencias ha procurado concretar este programa de estudios a través de la definición de las necesidades actuales en la formación de docentes y la continua socialización con grupos de interés: profesores de matemática universitarios (activos y pensionados), profesores activos de matemática de secundaria, estudiantes de la carrera (activos y egresados), grupos de especialistas de matemática y su didáctica (nacionales e internacionales) y asesores nacionales de matemática.

Paralelamente a esta redefinición del programa de estudios para la formación de docentes en la UNA, se presenta la aprobación de nuevos programas de estudio en primaria y secundaria por el Consejo Superior de Educación en mayo de 2012. Esto no solo impacta en la educación preuniversitaria, sino que encamina a todas las carreras del país a repensar el tipo de profesional que actualmente prepara. Ya esta propuesta involucra varias acciones en correspondencia con el tipo de profesional que esta reforma educativa demanda.

Como indica Ruiz (2013), ya existe evidencia de que la Universidad de Costa Rica (UCR), el Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) y la Universidad Estatal a Distancia (UNED) han iniciado esfuerzos para sintonizar sus programas de formación docente a través de sus institutos, proyectos de investigación y extensión; incluso documenta esfuerzos en universidades privadas. Evidentemente, también la UNA, a través de esta propuesta, se preocupa por incorporar los elementos necesarios para la formación pertinente de estos docentes.

El objetivo de esta ponencia es compartir con la comunidad varios hallazgos determinados en el proceso de investigación y rediseño del currículo de formación de docentes de matemática en la Universidad Nacional (UNA) en el marco del proyecto Enfoque por competencias: Una propuesta para el currículo de formación de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática en la UNA. Uno de los elementos fundamentales dentro de este proceso ha sido la reflexión sobre temáticas que debe poseer el currículo del futuro educador de matemáticas, cuál debe ser la metodología de enseñanza y aprendizaje que debe ser propuesto en los centros de formación.

B. Marco Teórico

○ La educación matemática como profesión

Cuando se explora las necesidades de los actuales y futuros programas de estudio para formar educadores de matemáticas, es necesario comprender que una de las grandes debilidades de esta formación, al menos en Costa Rica, es que aún no se percibe la educación matemática como una disciplina distinta a la matemática ni a la educación general.

Esta problemática se resume en el Segundo Informe del Estado de la Educación (2008, p. 157), donde expresa que la formación de profesores de matemáticas de secundaria presenta debilidades importantes:

- Los programas que ofrecen tanto las universidades estatales como las privadas poseen debilidades importantes, que les impiden formar los profesionales que requiere el país en el actual escenario histórico.
- Los programas no asumen apropiadamente la naturaleza específica de la Educación Matemática como disciplina científica y profesional, diferente de la Educación y de las Matemáticas.
- Existe una separación inadecuada entre las Matemáticas y la Pedagogía y un espacio muy limitado de competencias y conocimientos en pedagogía específica de las Matemáticas.

Una importante misión en el desarrollo de la educación matemática en el país será darle a esta disciplina un mayor carácter de profesionalización. Aún se vive la problemática de valorar a un profesor de matemática por su conocimiento en la matemática y no en su didáctica. Aunque saber matemática es fundamental, lo es también saber cómo desarrollarla en la actividad docente.

Ante la situación actual de muchos de nuestros países, donde la educación en las ciencias y la tecnología es un propósito fundamental, es un privilegio tener la tarea de formar a los docentes que asumirán la labor en secundaria. Pero esta tarea se ve opacada (como en Costa Rica) por la ausencia de un perfil del docente de matemática en el Ministerio de Educación Pública (MEP). Esto no solo repercute en la formación docente, sino en la calidad con que los futuros docentes son formados en las universidades. Como lo indican Morales, Fonseca y García (2013):

> Ante el MEP (mayor empleador), los títulos de todas universidades (públicas y privadas) son equivalentes, independientemente de la calidad de la formación recibida, del enfoque curricular de formación, la cantidad de contenidos matemáticos o pedagógicos, créditos o la cantidad de tiempo invertido en la formación inicial que cada una ofrece. (p. 10)

◦ El modelo pedagógico

El modelo pedagógico de la UNA establece pautas para el desarrollo integral de los individuos que conforman la Institución, cumpliendo con los fines de la educación, y respetando la visión y misión de la sociedad. Este modelo rige el quehacer en la formación de profesionales; en este caso, la formación de formadores en matemática. En este modelo, no solo se contempla el desarrollo de estrategias pedagógicas, sino que también abre paso a las políticas y lineamientos necesarios para la consecución de los objetivos de la carrera. Así, esta propuesta para el currículo existe en concordancia con los principios del Modelo pedagógico de la UNA (2007, p. 13) de la siguiente manera:

i. Respeto a la diversidad en todas sus expresiones.

ii. Respeto y compromiso con la igualdad de oportunidades y con la construcción de una sociedad más justa y equitativa.

iii. Formación de profesionales solidarios y comprometidos con el bienestar social.

iv. Flexibilidad para conceptuar el aprendizaje como proceso sociocultural, histórico, dinámico y transformable, posible y que puede construirse de muchas maneras.

v. Interacción en los procesos formativos donde los conocimientos sean discutidos y enriquecidos permanentemente.

vi. Formación de un espíritu investigador en los futuros profesionales.

vii. Creatividad que permita la innovación, así como la utilización de medios, estrategias y recursos de enseñanza en los procesos de mediación pedagógica.

viii. Disposición para determinar los principios lógicos subyacentes en cada disciplina, que permitan una formación profesional de calidad.

ix. Evaluación como proceso integral, concertado, permanente, contextualizado y propositivo.

x. Mejoramiento continuo en la formación integral de los estudiantes y los procesos de gestión académica-administrativa y paraacadémica.

xi. Visión prospectiva que permite la planificación estratégica para el logro de objetivos a mediano y largo plazo.

Estas orientaciones procuran la sistematización de distintas teorías y enfoques, respetando la diversidad de aprendizajes. Además, el modelo de la UNA no supone ni insinúa un enfoque particular, sino que sugiere traducir, en esta carrera, el desarrollo de una comprensión sobre la complejidad de la disciplina y la necesidad de una visión integral de la educación matemática con otros conocimientos; pero considera igualmente importante la integración de los individuos a la sociedad y al entorno.

El modelo pedagógico nutre la visión de formadores de profesionales humanistas y comprometidos con las problemáticas presentes en las comunidades, así como un compromiso continuo, no solo en la búsqueda de soluciones a problemas, sino ligados con el mejoramiento de la calidad de vida. Este modelo pedagógico se cimienta en la visión de ser humano integral, fortaleciendo el papel de la investigación, la extensión, y por supuesto, el rol activo de los profesores universitarios, estudiantes y la comunidad. Esta búsqueda de un proceso coherente y consciente en la formación de educadores es la que motiva los conocimientos, destrezas y valores que se han planteado como necesarios para el futuro profesor de matemática.

○ Educación matemática y competencias que deben poseer los docentes de matemática

Una vez consolidada una percepción de la educación matemática como disciplina y los lineamientos de la institución, es indispensable asumir una postura sobre esta formación. Esto no solo radica en la cantidad y calidad de los contenidos matemáticos o de educación; pues, consecuentemente con lo expresado en los párrafos anteriores, no es posible pretender la formación de un educador de este tipo, asumiendo un perfil matemático y un perfil pedagógico, de forma separada.

Junto a esto, es necesario pensar adecuadamente el perfil idóneo de este educador. Es claro que este perfil no es transferible entre carreras y no se supone la existencia de un único válido. Mucho depende de la naturaleza de la formación esperada.

Por ejemplo, Morales, García y Fonseca (2014), en una investigación realizada dentro del proyecto Enfoque por competencias han logrado construir un perfil de ingreso y egreso en la carrera de la UNA. Esta investigación involucró varios actores y distintas fuentes en diversas sesiones y grupos focales (ver figura 67).

Cuando se definen estos indicadores surge directamente la necesidad de clarificar y especificar su operacionalización. En el caso de la Escuela de Matemática se ha establecido que se debe hacer mediante un currículo orientado por competencias.

Perfil de ingreso	Perfil de egreso
1. Poseer conocimientos sólidos, correspondientes al nivel de secundaria, en las áreas de: álgebra, geometría, funciones y trigonometría, así como en cálculo y aritmética.	1. Conocer y saber matemáticas.
2. Poner en práctica las habilidades de pensamiento para interpretar, comprender y resolver problemas.	2. Tener conocimiento sólido en la didáctica de las matemáticas; saber cómo se aprenden y cómo se pueden enseñar.
3. Ser responsable, flexible al cambio, disciplinado y ético en su quehacer como estudiante.	3. Poseer habilidades en investigación educativa.
4. Ser una persona con deseos de superación, perseverante, persistente.	4. Tener la capacidad de crear e implementar distintas estrategias de enseñanza y aprendizaje, relacionadas con el contexto, con la resolución de problemas y con el uso de recursos tecnológicos.
5. Poseer habilidades para comunicarse en forma oral y escrita que le permitan adaptarse a diferentes métodos y técnicas de enseñanza.	5. Poseer habilidades socio-laborales asociadas con el proceso educativo y la relación con pares, estudiantes y padres de familia.
6. Poseer vocación para el estudio de la matemática y su enseñanza.	6. Tener la capacidad de enfrentar adecuaciones del currículo.
7. Ser capaz de trabajar en equipo.	7. Conocer la legislación educativa nacional.
8. Ser paciente, tolerante y con capacidad de escucha.	
9. Estar dispuesto a investigar y capacitarse continuamente	
10. Valorar y atender la diversidad en todas sus manifestaciones.	

Figure 67: Propuesta para el perfil de ingreso y egreso de la carrera de la UNA.

Parte de estas competencias ya han sido precisadas durante el proceso de redefinición y están accesibles en Morales, García y Fonseca (2014) (ver anexo 1). Pero como se ha sugerido, estas responden a una situación y entorno educativo particular. Otros investigadores (Gualdron, Gutiérrez, Giménez, (2011); Larios, Font y Nieto (2012); Rubio y Font (2012); Rubio, Font, Malaspina, Vanegas y Giménez (2012)) también han elaborado su definición de competencias en los educadores de matemáticas. Esta temática es sumamente amplia y trasciende el objetivo de esta comunicación (más información puede ser abordada a través los autores mencionados en este referente teórico).

C. Metodología

El enfoque utilizado en esta investigación fue cualitativo con impacto en la población de estudio; pues, finalmente, los resultados serán traducidos en una propuesta para la modificación de los programas de formación de docentes de matemática en la UNA.

Esta etapa de la investigación inició en agosto de 2013 y fue llevada a cabo en la Escuela de Matemática y la División de Educología de la Universidad Nacional. Se realizó a través de 6 talleres con grupos focales (uno en setiembre de 2013, uno en octubre de 2013, dos en noviembre del 2013, uno en febrero de 2014 y otro en mayo de 2014). El proceso completo se viene desarrollando desde el 2010.

En total, participaron 30 académicos de la Escuela de Matemáticas y 10 académicos de la División de Educología. Los perfiles de estos especialistas están orientados a matemática educativa, matemática aplicada, didáctica de la matemática, tecnología educativa; así como diseño curricular, pedagogía e investigación. Se reunió a los participantes en grupos focales, orientados inicialmente por componentes de trabajo en las áreas de: matemática formal; matemática aplicada y tecnología, y pedagogía, historia e investigación. Cada taller con los grupos focales duró aproximadamente cuatro horas y contó con dos etapas: trabajo grupal y socialización de resultados.

En esta parte de la investigación se buscó determinar qué temáticas deben estar relacionadas con la formación de un docente de matemática. Además, se solicitó que a través de las siguientes preguntas generadoras, se determinará:

1. ¿Qué áreas de conocimiento deben existir dentro de la carrera para desempeñar una formación inicial acorde con los perfiles académicos (de ingreso y de egreso)?
2. ¿Cuáles son las áreas de conocimientos asociadas a cada componente de trabajo?
3. ¿Qué temáticas y competencias están asociados a estas áreas de conocimiento?

D. Análisis de resultados

Aunque la historia costarricense muestra que la formación docente ha variado mucho en contenido (en comparación a los sesentas), sí se tiene claro, dentro de la comunidad de formadores de formadores, que una sólida formación en matemática es uno de los requerimientos indispensables para el docente; sin embargo, que esta carece de sentido si su didáctica es débil. En la siguiente figura se resume la información que se desprendió de las etapas en los grupos focales:

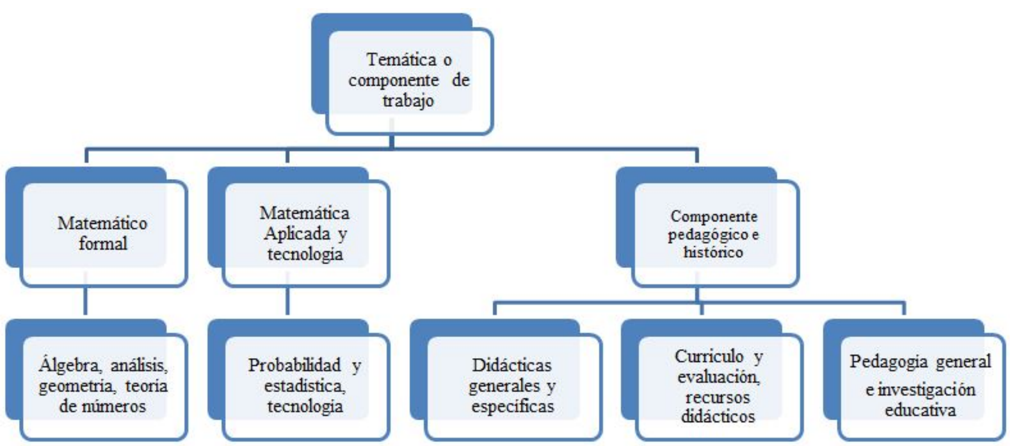


Figure 68: Componentes de trabajo, áreas de conocimiento y temáticas relacionadas con la formación de futuros docentes.

En el caso de las competencias relacionadas con la carrera, se logró determinar las áreas y temáticas precisas para garantizar la coherencia con los perfiles de la carrera. En la tabla 2 se muestra la relación que existe entre las competencias descritas (anexo 1) y cada área disciplinar.

Cabe señalar que toda esta información es el producto de las propuestas de los grupos focales, considerando que cada uno realizó una y luego la socializó con los demás.

Componente	Área	Competencias generales	Competencias específicas		
			Matemáticas	*Didáctico matemáticas*	*Pedagógicas*
Matemática formal	Álgebra	G1	M1, M2, M3, M4, M5	D1	P1, P2, P3, P4, P5, P6
	Análisis	G9	M1, M2, M4, M5	D2	P1, P3, P5
	Geometría	G9	M1, M2, M3, M4, M5	D1,D2	P1, P2, P3, P4, P5, ¿P6?
	Teoría de números	G9	M1, M2, M4, M5	D1	P1, P2, P3, P5
Matemática aplicada y tecnología	Probabilidad y Estadística,	G2, G4	M1, M2, M3, M4, M5	D2, D3	P1, P2, P3, P4
	Tecnología	G2	M4	D1, D4, D5	P3, P7
Componente pedagógico e histórico	Pedagogía general	G1, G2, G10, G11			P1, P5, P7
	Curricular y evaluación, didácticas generales y específicas, recursos didácticos (tecnología, historia y resolución de problemas)	G1, G3, G4, G5, G6, G9	M4	D3,D4,D6	P2,P3,P4, P5, P6, P7

Figure 69: Propuesta para el perfil de ingreso y egreso de la carrera de la UNA.

Dentro de la propuesta, es destacable que aunque los grupos establecieron distintas relaciones, dos de las competencias que tienen mayor posibilidad de ser atendidas con los contenidos definidos son: (G1) Desarrollar habilidades sociales y culturales para participar en los contextos educativos y (G9) Desarrollar habilidades de trabajo en equipo, colaborativo y cooperativo para la construcción del conocimiento disciplinar, transdisciplinar e interdisciplinar.

E. Conclusiones

Es evidente que la definición de un programa de estudio conlleva muchas etapas e implica invertir múltiples esfuerzos para configurar el programa adecuado; son muchas los factores y actores involucrados. Pero también se está ante una invaluable oportunidad de cambio de un modelo tradicional hacia uno más flexible, que supere muchas de las debilidades ya detectadas. No se puede proyectar un plan rígido, pues es claro ya que este programa debe poder sintonizarse con necesidades emergentes y tener un tiempo de vida razonable. Se poseen, al menos en la UNA, vías poderosas para el cambio. Si se parte de una construcción social, como en este caso, es posible alcanzar una versión factible para la formación de docentes. En estos cambios evidentemente se procuran efectos positivos en la formación docente, pero se debe prever también debilidades que obliguen a tener un modelo flexible que permita una restructuración, como se indicó anteriormente.

Tratar de definir estas temáticas no es solo un excelente ejercicio académico; en esta carrera es necesario tomar decisiones y se prevén problemas de muchos tipos. Desde la plataforma administrativa de la UNA hasta la adaptación del personal académico al nuevo programa son situaciones que se deben atender. Se está en un ambiente de riesgo donde se abre una oportunidad para mejorar. Este avance deseado no se logra con la redacción solamente de un nuevo programa. Muchos factores deberán ser analizados para que esto realmente llegue hasta la labor de los académicos.

Una situación particular que se desprende de esta parte de la investigación es que, incluso determinando los perfiles y las competencias que deben tener los futuros educadores de matemática y, posteriormente, definiendo los contenidos de la carrera, se marca una leve brecha entre contenido matemático y el contenido de educación. Parte de las debilidades manifiestas aún en la carrera consiste en la falta de especialistas en didácticas específicas; pues estos, posteriormente, serán los responsables de determinar las pautas concretas para que estos programas generen cambios en las prácticas actuales.

Finalmente, se desprende del análisis de la información sobre las competencias, que se deberá poner especial atención a la forma en que se traduzcan las temáticas educativas en cursos específicos, pues en la tabla 2 se evidencia que existe una gran cantidad de contenidos relacionados demasiado generales y no se concretan los créditos de la carrera en cursos de didáctica específica, de los cuales actualmente carece.

Referencias

[1] Comisión de Acreditación. (2009). Informe de autoevaluación de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional (Informe No. 01). Heredia, Costa Rica: Escuela de Matemática de la Universidad Nacional.

[2] Gualdron, E, Gutiérrez, A, Giménez, J. (2011). Caracterización de elementos del desarrollo profesional del profesor de matemáticas de secundaria. La semejanza como objeto de enseñanza y de aprendizaje. ASOCOLME. Colombia.

[3] Larios,V., Font, V. y Nieto, J.A. (2012). Las competencias docentes del profesor y el vínculo con la investigación educativa. Comunicación presentada en XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa. Ciudad de México, México.

[4] Morales, Y., Fonseca, J. y García, M. (2013). Reestructuración del currículo de formación de docentes de matemática en la Universidad Nacional (UNA) en el marco del proyecto Enfoque por competencias: Primeras etapas. En J. Segura. IV Encuentro Enseñanza de la Matemática de la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica (UNED). Celebrado en Hotel Crowne Plaza Corobicí, San José. Costa Rica.

[5] Morales, Y., García, M. y Fonseca, J. (2014). Perfil académico-profesional del docente de matemáticas bajo el enfoque por competencias. Manuscrito presentado para su publicación.

[6] Rubio, N. y Font, V. (2012). Competencia profesional de profesores de secundaria en la evaluación de las competencias matemáticas de los alumnos. Trabajo presentado en Vigésimo Sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 26). Belo Horizonte, Brasil.

[7] Rubio, N., Font, V., Malaspina, U. Vanegas, Y. M. y Giménez, J. (2012) Competence in didactic analysis in the pre-service training of secondary school mathematics teachers in Spain. Comunicación presentada en ICME, 12. Seoul, Korea. 18-15 julio

[8] Ruiz, A. (Julio, 2013). La reforma de la educación matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8 (especial). Centro de Investigaciones Matemáticas. Descargado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/11125/10602

[9] Tan, O. S., Chye, S. y Teo, C. T. (2009). Problem based learning and creativity: A review of the literature. In Tan, O.S. Problem Based Learning and Creativity [Aprendizaje basado en problemas y creatividad]. Engage Learning, Singapore, pp.15-38.

[10] Universidad Nacional (2007). UNA GACETA Modelo pedagógico. Descargado de http://www.una.ac.cr//index.php?option=com_remository& Itemid=0& func=startdown&id=141

[11] Universidad Nacional (Octubre, 2012a). Lineamientos para la flexibilidad curricular en la Universidad Nacional y lineamientos para el diseño curricular de las carreras de enseñanza de ... (Aprobado por el Consejo Universitario en sesión celebrada el 13 de noviembre de 2003, Acta Nº 2521, Modificado por el Consejo Universitario en Acta Nº 3268 del 11 de octubre de 2012).

[12] Universidad Nacional (Octubre, 2012b). Políticas y lineamientos curriculares (Aprobado por el Consejo Universitario en sesión celebrada el 27 de febrero de 2003, Acta Nº 2453, Modificado por el Consejo Universitario en Acta Nº 3268 del 31 de octubre de 2012).

Anexo 1
Competencias genéricas y específicas en la propuesta para programa de formación en la Universidad Nacional (Morales, García y Fonseca, 2014)

Competencias genéricas

G.1 Desarrollar habilidades sociales y culturales para participar en los contextos educativos.

G.2 Desarrollar habilidades en el uso de tecnologías de la información y comunicación (TIC) para el fortalecimiento de los procesos cognitivos en diversos contextos educativos.

G3. Desarrollar habilidades en investigación disciplinaria, interdisciplinaria y multidisciplinaria para la transformación de realidades educativas.

G4. Aprender sobre saberes pedagógicos y disciplinarios para la actualización profesional de forma permanente.

G5. Fortalecer los hábitos de responsabilidad y compromiso en el ejercicio de su profesión.

G6. Ejercer su profesión con ética en diferentes entornos.

G7. Desarrollar la competencia comunicativa en su propio idioma para el óptimo ejercicio profesional.

G8. Desarrollar habilidades básicas de comunicación escrita y oral en un segundo idioma para el enriquecimiento de su práctica profesional.

G9. Desarrollar habilidades de trabajo en equipo, colaborativo y cooperativo para la construcción del conocimiento disciplinar, transdisciplinar e interdisciplinar.

G10. Desarrollar habilidades interpersonales en el círculo profesional para el enriquecimiento de su práctica pedagógica.

G11. Reconocer la diversidad y la multiculturalidad para convivir en paz y con respeto en todo contexto.

Competencias específicas

○ Competencias matemáticas

M1. Comprender los conceptos básicos de la matemática superior desde una perspectiva universitaria para su formación como docente de matemática.

M2. Ser capaz de formular problemas en lenguaje matemático durante su actividad como estudiante para fortalecer sus estructuras de pensamiento.

M3. Entender los conceptos fundamentales de la matemática a través de su evolución socio-histórica para la comprensión de la disciplina y su enseñanza en diferentes contextos.

M4. Construir e interpretar modelos matemáticos a partir de situaciones reales para reconocer la importancia de la matemática en la vida cotidiana.

M5. Aplicar los conocimientos sobre resolución de problemas en contextos multidisciplinares para mayor comprensión de su importancia en otras áreas científicas y sociales.

○ Competencias didáctico-matemáticas

D.1 Mediar pedagógicamente el contenido matemático para el mejoramiento de los procesos de aprendizaje en diferentes ambientes educativos.

D.2 Incorporar, en la mediación pedagógica, los contenidos matemáticos, su origen y desarrollo histórico, así como su presencia en situaciones cotidianas y aquellas otras que procedan de ámbitos multidisciplinares (física, biología, economía, otros).

D.3 Analizar las diversas corrientes de pensamiento en la educación matemática que proporcionan elementos teóricos y metodológicos para ser incorporados en las prácticas docentes.

D.4 Incorporar diferentes estrategias de enseñanza y aprendizaje con el fin de fortalecer la mediación pedagógica de los contenidos matemáticos para valorar su uso en la cotidianidad.

D.5 Integrar diversidad de recursos didácticos para la enseñanza y aprendizaje de la matemática de forma apropiada y crítica para la creación de ambientes de aprendizaje óptimos.

D.6 Aplicar estrategias para la resolución de problemas que desarrollen el pensamiento lógico, de manera que les posibilite una labor profesional crítica y reflexiva.

○ Competencias pedagógicas

P1. Analizar las teorías que fundamentan la didáctica general y específica para la integración del saber pedagógico y disciplinar en el accionar educativo.

P2. Diseñar, seleccionar y aplicar estrategias de enseñanza y aprendizaje que promuevan la autorregulación, la metacognición y la creatividad en diferentes espacios educativos para la comprensión óptima del contenido disciplinar.

P3. Diseñar, seleccionar y aplicar recursos didácticos que potencien un aprendizaje estratégico para el logro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la asignatura.

P4. Realizar análisis críticos de los enfoques de evaluación para asumir un posicionamiento ante los procesos de evaluación de los aprendizajes.

P5. Aplicar diversas estrategias de evaluación que promuevan una evaluación auténtica de los aprendizajes en los diferentes espacios educativos.

P6. Analizar necesidades de aprendizaje y capacidades cognitivas del estudiantado con el fin de mejorar la mediación pedagógica para el logro de los objetivos de aprendizaje.

P7. Integrar apropiadamente tecnologías en la mediación pedagógica para potenciar los estilos y ritmos de aprendizaje del estudiantado.

Conformación de un método para el diseño de una situación de aprendizaje. Usos de conocimientos matemáticos en cálculo

PÉREZ, IRENE[I]

México

Resumen

El presente escrito muestra los primeros cimientos de un trabajo de investigación en el que se busca discutir elementos que permitan el diseño de situaciones de aprendizaje para estudiantes de Ingeniería Química en el área de Cálculo. La discusión inicial se pretende enmarcar en el estudio de tres categorías del conocimiento del Cálculo: Categoría de la Simultaneidad de las Derivadas, Categoría del Comportamiento Tendencial de las Funciones y los Usos del Conocimiento en una Comunidad de Ingenieros Químicos.

Palabras clave: Sociopistemología, usos, situación, cálculo.

A. Introducción

En este escrito se reportan los primeros avances de investigación en el que se pretenden problematizar tres categorías del conocimiento del Cálculo, con la finalidad de propiciar la discusión en torno a un método que nos describa cómo diseñar situaciones de aprendizaje en el área del Cálculo para la formación de ingenieros químicos.

Se presenta información que hasta el momento enmarca la investigación, tal es el caso de evidenciar y reconocer una problemática fundamental: el discurso matemático escolar (dME); evidenciar que se requieren de marcos de referencia que den cuenta de los usos del conocimiento matemático que han sido soslayados de la Matemática escolar.

Se propone indagar cómo a través del estudio de las categorías del conocimiento matemáticos será posible discutir aspectos que nos describan cómo diseñar situaciones de aprendizaje.

La investigación, por la naturaleza del estudio, está enmarcada en la Teoría Socioepistemológica, en la que se asume el saber como una construcción social del conocimiento (Cantoral, 2013). A lo largo del escrito se hacen referencia a algunos aspectos teóricos que son el sustento de la investigación.

B. Problemática fundamental: El dME

Investigaciones en Matemática Educativa y desde una perspectiva de la Socioepistemología han evidenciado cómo la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas tiene como base una organización centrada en los obje-

[I]CINVESTAV, México

tos matemáticos. Este tipo de conclusiones se evidencia aspectos como la forma de presentar los contenidos matemáticos en los programas de curso, en el énfasis al momento de enseñar un concepto matemático así como en los libros de texto. Si bien, se vislumbra una secuencia lógica preestablecida de contenidos, por ejemplo ante el contenido de Derivada de una Función anteceden conceptos como Función o Límite.

Problematizar esta organización lógica de contenidos nos da una explicación acerca del porqué un estudiante no puede otorgar un significado más allá de la definición misma del objeto.

En palabras de Socioepistemólogos se dice que la funcionalidad de los contenidos ha sido soslayada para su enseñanza, es decir, el sistema educativo, desafortunadamente, ha favorecido el nivel utilitario del conocimiento matemático, contrastado con que existen profesores que demandas respuestas ante cuestiones como ¿qué? y ¿cómo enseñar? Ahí la discrepancia entre lo que se demanda y lo que se concede es un factor necesario para atender.

Un ejemplo de lo práctica diaria de un profesor es cuando se dispone a enseñar cierto conocimiento matemático. Los medios a su alcance, en la mayoría de las veces son los libros de texto y notas de curso que quizá haya generado a lo largo de su experiencia, difícilmente, éste ha de cuestionarse acerca de lo que está enseñando e incluso acerca de las prácticas o usos de ese conocimiento matemático. Por otra parte, el estudiante, en algunas ocasiones tampoco cuestiona el conocimiento y concluye que éste debe ser aprendido para concluir estudios de universidad a pesar de no encontrarles una funcionalidad. Así, en el sistema no se aprecia una Matemática funcional en la que el conocimiento sea incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad. Todo ello en oposición al conocimiento utilitario (Cordero y Flores, 2007).

Dichos fenómenos son provocados por el dME y su estudio posibilita ampliar y dar un panorama más amplio de la problemática del estudio.

C. Encuadres de la investigación

Esta investigación está orientada hacia el estudio de los usos del conocimiento matemático, es decir, hacia la búsqueda de significados que otorga el ciudadano (estudiante) a un objeto. Responder a cuestionamientos ¿cómo usa y construye conocimiento el ciudadano en diferentes escenarios? Permite conformar marcos de referencia en la que se evidencia una matemática funcional y no utilitaria.

Dichos marcos permean categorías, que de acuerdo a Balam (2012), son el argumento que organiza patrones involucrando las condiciones y los criterios que favorecen la constitución de ciertos conocimientos matemáticos, permitiendo enlazar la epistemología de prácticas que dieron origen a un conocimiento o bien la epistemología que permite construir un marco de referencia donde un grupo humano pueda construir su conocimiento matemático.

Así, es de interés los siguientes cuestionamientos ¿Cómo se resignifican los usos del conocimiento matemáticos en la práctica institucional de un estudiante de Ingeniería Química? ¿Cómo se caracterizan los usos de un estudiante que inicia su ingeniería y uno que finaliza sus estudios?

Dichos cuestionamientos generales se pretenden podrán aportar información a través de un instrumento: el diseño de situación de aprendizaje. Dicho diseño deberá estar sustentado bajo un marco de referencia cuyo énfasis esté en los usos del conocimiento en el área de Cálculo y la comunidad específica de la Ingeniería Química.

De esta manera tiene sentido preguntarse previamente:

¿Cómo se traducen los usos del conocimiento matemático identificados en una comunidad específica (el caso de la Ingeniería Química) y los usos del conocimiento asociados al área del Cálculo para conformar un diseño de situación de aprendizaje para estudiantes de ingeniería?

D. Hacia una discusión para el diseño

Para los inicios de la investigación se busca la problematización y discusión de un método que nos describa cómo diseñar una situación de aprendizaje. Para ello se están considerando tres elementos que dan cuenta de una epistemología del Cálculo. La idea es conformar estas categorías:

- Categoría de la Simultaneidad de las Derivadas
- Categoría del Comportamiento Tendencial de las Funciones
- Usos del Conocimiento en una Comunidad de Ingenieros Químicos

La elección de estas categorías recae en el hecho de ser líneas de investigación que dan cuenta del estudio de aspectos funcionales de saberes matemáticos. Por ejemplo en Morales y Cordero (sf) se evidencia la categoría de la simultaneidad de las derivadas. Se considera la Serie de Taylor para resignificarlo. En la investigación se entiende como resignificación a la construcción del conocimiento que se da en la organización del grupo humano y a través de una situación de modelación del movimiento. Se evidencia cómo la predicción es el argumento rector en la situación mientras lo que se pone en juego es la graficación- modelación para resignificar la serie de Taylor, ésta se ve evidenciada con la analiticidad de las funciones al momento de efectuar una comparación de dos estados de una cantidad que varía continuamente.

Lo anterior se traduce en la situación de modelación del movimiento al momento de predecir la posición de un móvil a partir de un estado inicial, un estado final y las variaciones entre los estados. Nótese la ausencia de un marco típicamente escolar, al no presentar una función específica y un punto dado para solicitar la serie de Taylor.

En esta investigación se concluye que la serie de Taylor es en sí el modelo de predicción, es decir, la resignificación consiste en que dicha serie precisa la simultaneidad de las derivadas, cuya función es la predicción.

Nótese también como dicha investigación contribuye a la idea de concebir al Cálculo no como el estudio de la dereivación e integración, sino, sobre el estudio de fenómenos de variación, donde la operación fundamental es la resta que modela la comparación de dos estados.

De esta manera se piensa ir problematizando cada categoría e ir conformando un método para el diseño de la situación de aprendizaje.

Referencias

[1] Balam, C. (2012). Una problematización de la matemática del docente: la categoría modelación-graficación en situaciones de aprendizaje. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV- IPN. México, DF.

[2] Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. México: Gedisa.

[3] Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10(1), 7-38.

[4] Morales, A. & Cordero, F. (s.f.). La graficación-modelación y la serie de Taylor. Una socioepistemología del cálculo. Artículo aceptado en la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, en proceso de publicación.

La funcionalidad de la oralidad numérica Ñuu Savi

PÉREZ, ROSARIO[I]

México

Resumen

En lo general, reconocemos una desconexión entre una obra matemática escolar y la matemática funcional, por otra parte, vivimos en una sociedad diversa, entendiendo a la diversidad como aquello que permite la heterogeneidad y multiplicidad, opuesta a la uniformidad y bajo sus propias particularidades de naturaleza y condición. La conjugación de estos dos fenómenos nos permite reconocer que la problemática en sí se encuentra en la no existencia de socialización y el diálogo entre el sistema educativo (aula) y el cotidiano, en los procesos de funcionamiento, desarrollo y cambio. En el presente trabajo presentamos los argumentos de investigación sobre la oralidad numérica bajo la naturaleza matemática Ñuu Savi. se pretende conocer, analizar y teorizar los conocimientos que el pueblo originario Ñuu Savi construye, organiza, desarrolla, transmite, aplica y reorganiza en su vida cotidiana. Una investigación que se centre en la estructura y funcionalidad de dicho conocimiento, en los motivos o las razones que los hacen actuar como lo hacen. Una investigación sobre los conocimientos y saberes matemáticos desde sus formas naturales y donde considere la visión histórica, social y cultural.

Palabras clave: Conocimiento matemático, oralidad y funcionalidad.

A. Descripción

La palabra Ñuu significa pueblo y Savi quiere decir lluvia, en su traducción literal quiere decir "el pueblo de la lluvia" los propios se denominan a sí mismos de esta forma; sin embargo, es más conocido y estudiado como mixtecos. La palabra mixteca proviene de la lengua náhuatl Mixtli o Mixtlán que significa nube y es la raíz de la cuál se deriva el nombre de la mixteca "el país de las nubes" (López, 1995). El pueblo de la lluvia se compone de muchas comunidades que comparten una historia, un territorio y ciertos elementos culturales, geográficamente se encuentran ubicados en el estado de Guerrero, Puebla y Oaxaca dentro de la república mexicana.

Una de las primeras preguntas hechas al inicio de la investigación fue ¿qué es ser Ñuu Savi? ¿qué lo hace ser? Esto provocó fijar la atención a una estructura de organización social como elemento inicial básico, la relación de convivencia cotidiana permitió entender que la esencia reside en la expresión y reconocimiento con la comunidad. Todos los integrantes de la comunidad Ñuu savi, en igualdad de condiciones y sin restricciones de oportunidades, en la medida en que participan van formando o no de la comunidad.

Estas referencias condujo la necesidad de identificar escenarios en donde se manifestara el uso de los saberes matemáticos. En el proceso, cada nueva pregunta, análisis y reflexión se situaba en ¿cómo genera conocimiento matemático? ¿cuál y cómo es la funcionalidad del conocimiento matemático? Hasta ahora se identifican cuatro, los cuales son: en situaciones de trabajo, en las fiestas, en el ejercicio del poder y finalmente en el territorio, sin

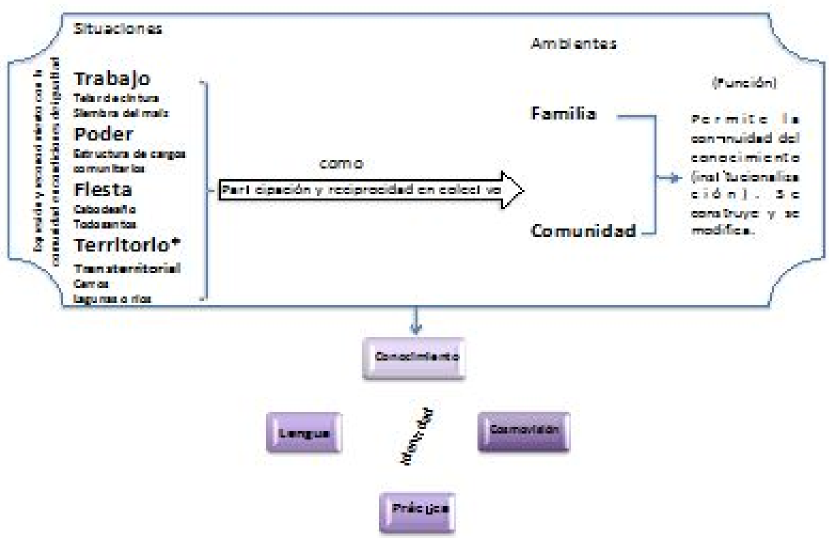
[I]CINVESTAV, México.

descuidar que en estas situaciones específicas los integrantes se expresan participando en reciprocidad colectiva y la comunidad los reconoce como elementos suyos.

Bajo la expresión y reconocimiento permanente con la comunidad, la formación y el desarrollo identitario de cada ser Ñuu savi se funda en distintas dimensiones de ambiente. Se desenvuelve creando y recreando en un nivel personal, familiar, comunitario y social, estos ambientes desempeñan la función de institucionalización; sin embargo, dentro de la comunidad Ñuu savi se visualiza principalmente en la familia y la comunidad. En otras palabras, en los procesos de involucramiento y reconocimiento, el ser Ñuu savi se construye principalmente en un ambiente de familia y comunidad bajo situaciones de trabajo, fiesta, poder y territorio y es en estos elementos donde se construye, se recrea, se modifica y se resignifica el conocimiento bajo patrones y ciclos continuos en el proceso.

Hablar del conocimiento que se rige bajo un proceso de elementos en unidad dialéctica con identidad, nos referimos al conocimiento inmanente a la práctica y que se trasmite por un lenguaje (oralidad) orientados bajo una cosmovisión. El proceso cíclico en unidad dialéctica de estos cuatro elementos da cabida a la construcción y reorganización de la identidad Ñuu Savi (Véase cuadro 1).

Cuadro 1. Estructura de organización social Ñuu Savi (Pérez, 2012).



Situar la importancia en una realidad actual, ha generado la construcción de una plataforma donde puede partir toda investigación dirigida a los saberes matemáticos Ñuu savi. La esencia se encuentra en la vivencia cotidiana dado que posibilita reunir elementos fundamentales para entender la complejidad del conocimiento matemático y una epistemología de naturaleza propia del pueblo originario Ñuu savi.

Un elemento que caracteriza al pueblo de la lluvia, así como la mayoría de los pueblos originarios en México, es su carácter oral y se desenvuelve en el corazón mismo del medio en que la engendra, su principal fundamento es que no está desarraigada de su contexto natural. Consideramos que el lenguaje se encuentra en la vida cotidiana de los seres humanos como una construcción socio-cultural, lo cual, no simplemente son los modos de expresión sino también los modos de acción y los procesos de pensamiento, de la intención. Es un componente de la cultura más visible presente en el espacio y en el tiempo, por lo tanto, se configura y responde a una lógica diferente: la de la oralidad, de ahí que el cuerpo sea un conocimiento no escrito.

Bajo este planteamiento, la vida cotidiana del pueblo de la lluvia hacen uso de una oralidad numérica con estructura de base vigesimal, en donde su significado se le atribuye a los veinte dedos que poseemos los seres humanos como parte integral de nuestra naturaleza y su función con las acciones. Es una forma de razonamiento con argumento contextual naturalista. A continuación mostramos la estructura de base vigesimal Ñuu Savi con la observación de que, a pesar que existen otras variantes lingüísticas en el mismo idioma, la estructura vigesimal sigue siendo la misma.

Cuadro 2. Estructura de la oralidad numérica Ñuu Savi (Pérez, 2005)

LOS NUMERALES INDOARÁBIGOS	LA ORALIDAD NUMÉRICA EN LENGUA ÑUU SAVI (MIXTECA)	INTERPRETACIÓN ARITMÉTICA EN LENGUA ÑUU SAVI (MIXTECA)	TRADUCCIÓN AL CASTELLANO
1	In	1	Uno
2	Uvi	2	Dos
3	Uni	3	Tres
4	Kumi	4	Cuatro
5	U'un	5	Cinco
6	Iñu	6	Seis
7	Uxa	7	Siete
8	Una	8	Ocho
9	Iin	9	Nueve
10	Uxi	10	Diez
11	Uxi in	10 + 1	Once
12	Uxi uvi	10 + 2	Doce
13	Uxi uni	10 + 3	Trece
14	Uxi kumi	10 + 4	Catorce
15	Xa'un	15	Quince
16	Xa'un in	15 + 1	Dieciséis
17	Xa'un uvi	15 + 2	Diecisiete
18	Xa'un uni	15 + 3	Dieciocho
19	Xa'un kumi	15 + 4	Diecinueve
20	Oko	20	Veinte

En términos de un razonamiento lógico desde la perspectiva de las matemáticas, identificamos reglas y principios.

- La estructura demuestra que se compone de nombres propios y nombres combinados que se apoyan del diez y del quince, lo cual indica que...
- El diez y el quince son bases auxiliares de la oralidad numérica Ñuu savi.
- Principio aditivo: Un número menor suma si está a la derecha de un número mayor. Ejemplo. 19 se dice xa'un kumi (15 + 4).
- Principio Multiplicativo: Un número menor multiplica si está a la izquierda del número mayor. Este principio es aplicable a partir del cuarenta en adelante. Ejemplo. 40 se dice uvi xiko 2(20)=40.

Cuadro 3. Base Vigesimal (Pérez, 2012)

20^1 (20 x 1 = 20) Oko	
20^2 (20 x 20 = 400) Tumi	(Pérez 2005) y
Tuvi	(De Alvarado, 1593)
20^3 (20 x 20 x 20 = 8, 000) Yaka (Pérez 2005) y	
Te'ne (De Alvarado 1593)	
20^4 (20 x 20 x 20 x 20 = 160, 000) ?	

Estos principios y reglas muestran un lenguaje matemático; sin embargo, para nosotros la importancia se encuentra en las formas naturales de construcción, desarrollo, transmisión y reconstrucción, como se muestra a continuación.

El periodo de vida de una planta de café en su producción normal, es de diez a quince años, entre más años de antigüedad tenga una planta, produce menos y sus granos son más pequeños. Entonces los campesinos utilizan la técnica de la recepa, que quiere decir, hacer un corte inclinado-completo en el tronco de la planta, tomando de base el suelo y medir 40 centímetros de altura. El cafetalero distribuye el periodo de trabajo en dos tiempos, el tiempo de seca y el tiempo de lluvia, para poder realizar la recepa ubica los meses cercanos al tiempo de lluvia y el ciclo lunar de reproducción en el mes.

La recepa se realiza por la mañana para cumplir el ciclo del día en dos tiempos. En el momento de la recepa, el campesino toma en cuenta la dirección en que se encuentra el sol, entonces procede al corte inclinado-completo del tronco, mostrando la cara (del corte) hacia el sol, esto sirve para que los rayos del sol seque el corte en el tiempo adecuado, por un lado, para no permitir que se pudra el corte y facilitar el nacimiento de retoños, por otro, la intensidad de los rayos del sol de un día será suficiente para no provocar la muerte de la planta de café.

Esta práctica de la recepa muestra el conocimiento matemático referida a la oralidad numérica cosmogónico, en donde las herramientas utilizadas por los campesinos son la observación, relación e interpretación. Los rayos del sol realizan una función hacia el corte de la planta, la funcionalidad de la relación en estos dos elementos se concreta en el nacimiento de retoños en un periodo determinado de tiempo. Esta práctica de los cafetaleros muestra la relación dialógica de los espacios del cosmos y tierra en relación con la reproducción, que no hace uso de una estructura abstracta de base vigesimal, sino por el contrario, el conocimiento matemático puesto en práctica en el trabajo cotidiano, es inmanente a una cosmovisión y trasmitida por un lenguaje, conforma una oralidad numérica de base vigesimal.

La racionalidad no reside únicamente en pensar o actuar de acuerdo con un conjunto de reglas de razonamiento, sino también examinar si la aplicación de una regla es adecuada o no dentro del contexto de una práctica específica, y que, por otro lado, diferentes patrones del razonamiento requiere que los diferentes criterios de corrección de sus aplicaciones se especifiquen mediante una serie de factores contextuales específicos que configuran diferentes tipos de contexto.

Hasta ahora las investigaciones realizadas a esta comunidad de conocimiento a generado entender, que todo conocimiento se rige bajo un proceso de elementos en unidad dialéctica con identidad y no solamente se res-

Cuadro 4. Poda de la planta de café (Pérez, 2012).

tringe a los aspectos estructurales de la naturaleza o lo que se refieren a objetos o componentes y su clasificación, también hace referencia a dimensiones dinámicas (de patrones y procesos), relacionales (ligado a las relaciones entre los elementos o los eventos naturales) y de usos de los recursos naturales que el mismo Ñuu savi genera en su vida cotidiana y que comparte con su colectivo.

Entendemos así, que se trata de un discurso matemático escolar homogéneo frente a una sociedad heterogénea; pero por otra parte, destacamos la importancia de la pluralidad epistemológica que caracteriza la función social del conocimiento matemático, dado que nuestra realidad es diversa, entendiendo a la diversidad como aquello que permite la heterogeneidad y multiplicidad, opuesta a la uniformidad y bajo sus propias particularidades de naturaleza y condición. Por ende, las razones de inequilibrio se basa de la desconexión entre el discurso matemático escolar y la matemática funcional. Este argumento nos permite reconocer que la problemática en sí se encuentra en la no existencia de socialización y el diálogo entre el sistema educativo (aula) y el cotidiano, en los procesos de funcionamiento, desarrollo y cambio.

A lo largo del contenido de este trabajo hemos subrayado que buscamos mirar qué practican, qué se construye, cómo se construye, cómo se transmite, cómo se mantiene, cómo ese conocimiento se resignifica y finalmente como ese conocimiento puede contribuir y fortalecer al conocimiento que en escenarios educativos no toma en cuenta. Es decir, amalgamar, robustecer, hacer que conocimientos establecidos en un sistema educativo sirva para complementar y a su vez teorizar el conocimiento matemático del pueblo originario Ñuu savi.

No sé niega rechazar todo aquello ajeno a la identidad ancestral y ubicarse o establecerse a lo propio solamente, esa postura no pretendemos proyectar, más bien planteamos que el conocimiento digno de ser reproducido y rescatado, debe aprender a convivir con el resto de la sociedad y a su vez hacer de un conocimiento más amplio que le permita a los seres humanos vivir en forma horizontal, de pares, sin hacer referencia a una mayor o inferior.

La centración no es asumir la postura de decir que mi cultura, mi conocimiento, mi forma de practicar son las únicas y la mejor, y rechazar todo aquello ajeno. Mas bien es entender al otro, hacer que ese conocimiento merece ser reproducido, practicado, que sirva y funcione a los demás, es decir, hacer que los conocimientos convivan y que realmente sean funcionales a la sociedad, que el conocimiento que se obtiene como resultado sea un grano mas de arena al resto de los conocimientos.

Referencias

[1] López, A. (1995). La Cosmovisión Mesoamericana. En Lombardo, Sonia y Naldak. Enrique (eds.) Temas mesoamericanos. INAH-Conaculta, México, pp. 471-507

[2] Pérez, R. (2005). El sistema de numeración Ñuu Savi: su inserción en el proceso de enseñanza aprendizaje con los alumnos del segundo ciclo en la escuela primaria bilingüe Cuauhtémoc. Tesis de licenciatura no publicada, Escuela Normal Bilingüe e Intercultural de Oaxaca. Oaxaca, México.

[3] Pérez, R. (2012). Usos de la oralidad numérica Ñuu Savi. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Edición de textos científicos en LaTeX

RODRÍGUEZ, KENDALL EDUARDO[I] DELGADO, JOSÉ ANDRÉS

Costa Rica

Taller

En este taller los participantes trabajarán con actividades guiadas donde podrán apreciar la calidad tipográfica del sistema TeXen la edición de textos científicos tales como artículos, libros, reportes, etc. Además, LaTeXes un lenguaje de programación multifuncional que permite crear publicaciones de alta calidad y agradable apariencia; en diferentes disciplinas como matemática, física, electrónica, computación, etc.

Palabras clave: LaTeX, matemática, procesadores de textos, TeX studio.

A. Introducción

El uso de LaTeX se destaca por la calidad tipográfica en las publicaciones de libros, artículos y otros documentos científicos creados mediante el sistema TeX. Debido a la variedad e interesantes ambientes que nos facilita en los diseños estéticos de los documentos realizados al gusto de los usuarios, haciendo que sea este mismo un lenguaje de programación de suma relevancia en las ediciones de diferentes disciplicinas como: matemáticas, físicas, ingenierías. (De Castro R., 2003; Valiente G., 1997).

Los editores de LaTeX están muy ligado con la redacción de notaciones y fórmulas matemáticas, por lo que, dichos programas son de interés para los profesionales en el área de la matemáticas, de ahí, la importancia de aprovechar las utilidades que presentan los paquetes del sistema TeX. En el caso de este taller, se presentan las herramientas básicas de LaTeX por medio del editor TexStudio 2.7.0 en la edición de textos científicos. (Rodríguez K.; Ulate F., 2013)

Por lo general, los editores más utilizados por los usuarios son: Winshell, TexMaker, TeXStudio, Kile. Para este caso, se decidió utilizar TeXStudio por las facilidades que presentan en sus herramientas integradas en su interfaz gráficas, por ejemplo: visor de PDF integrado, resaltado de sintaxis, asistentes para imágenes, tablas, fórmulas matemáticas y visualización de los errores de compilación y advertencias de LaTeX. (TeXStudio, 2011).

B. Ambiente TeX

TeX es un sistema de composición tipográfica de textos de alta calidad y elegancia, con funciones avanzadas de automatización. TeX es un lenguaje de programación que permite la secuencia lógica de documentos de manera que el formato se genere de forma automática. (CervanTeX, 2002).

[I]TEC, Costa Rica.

Dicho ambiente fue creado por el estadounidense Donald Knuth (Científico de la Computación) en el año 1978, por la petición de American Mathematical Society; con el fin de poder componer texto y fórmulas matemáticas con la calidad de los sistemas de fotocomposición de esas épocas, sin la dificultad que esos sistemas requerían.

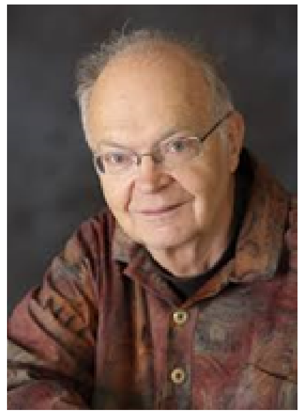


Figure 70: Donald Knuth.

Además, TeX es un ambiente que resalta la excelente calidad de los algoritmos del sistema, así como, el manejo del texto y fórmulas matemáticas, permitiendo la facilidad de la edición de documentos según las exigencias tipográficas del usuario. (Marín M, 1999).

El ambiente TeX es un estándar para la presentación de trabajos en diversas publicaciones científicas de carácter internacional, debido a la gran capacidad de este mismo. No obstante, está claro que se tiene un gran esfuerzo para el uso de TeX, dado que el usuario debe tener experiencia en las técnicas de programación que se debe usar en la creación de documentos.

C. Formato LaTeX

LaTeX es un programa que permite usar muchas de las características del ambiente TeX, de tal forma que muestre un balance entre las posibilidades ofrecidas por los programas y las diversas facilidades para usarlas. El desarrollo de este programa se debe al estadounidense Leslie Lamport (Matemático y Científico de la Computación).

El formato LaTeX es el conjunto de macros en TeX más utilizado y además disponible para una gran cantidad de plataformas, cabe destacar que este formato no es un procesador de textos, más bien, es un lenguaje que permite preparar de manera automática un documento con apariencia estándar y de alta calidad. (Borbón A.; Mora W, 2013).

Además, el esfuerzo de programadores ? colaboradores, permite al usuario el acceso de muchas facilidades para aumentar las aplicaciones según las necesidades de las personas. (Marín M, 1999). Por último, se menciona que existen otros formatos menos utilizados para la composición tipográfica como: Plain y ConTeXt, donde estos sistemas tienen sus propios macros especiales, algunas de sus utilidades son similares a LaTeX. (CervanTeX, 2002).

D. Distribuciones Tex

Para hacer uso del sistema TeX en el computador, lo primero que se debe hacer es crear una distribución, donde es una cierta plataforma con una serie de programas y utilidades complementarias que permite usar TeX y sus programas derivadas de ella. (CervanTeX, 2002)

Una distribución TeX contiene el núcleo vital del programa, paquetes y extensiones que integra lo necesario para el funcionamiento de TeX por medio de extensiones como: XeLaTeX, ConTeXt, LuaTeX, pdfLaTeX. (Borbón A.; Mora W:, 2013)

Cada distribución incluye unos complementos distintos y por tanto hay más o menos completos, según las necesidades del usuario debe ser más básica y reducida, o bien, más avanzada y extensa.

Las distribuciones más importantes que podemos encontrar son:

- Unix: TeXLive
- Windows: MikTeX y TeXLive
- MacOS X: MacTeX

En el taller se usó la distribución MiKTeX (Versión Completa) de Windows, por eso, en caso de querer usar esta distribución. La instalación de MiKTeX se puede ir al sitio web http://miktex.org/2.9/setup donde se pueden instalar la versión Básica o Completa de MiKTeX 2.9. Para descargar la versión completa se descarga "MiKTeX 2.9.4503 Net Installer".

Recordar que al descargar el ejecutable se establece una conexión a Internet, donde primero se descarga y luego se instala MiKTeX completo. En caso, de necesitar ayuda para la instalación de MiKTeX se puede ir al sitio web http://docs.miktex.org/2.9/manual/installing.html, para más información sobre los pasos de la instalación.

Figure 71: Logo MiKTeX.

E. Editor TexStudio

TeXStudio es un editor de trabajo integrado para la creación de documentos LaTeX, donde permite que la escritura LaTeX sea de manera fácil y cómoda para el usuario. Este programa es de código abierto y está disponible para los principales sistemas operativos como: Windows, Unix / Linux, Mac OS, BDS. (TexStudio, 2011) Este programa fue creado por los autores Benito van der Zander, Jan Sundermeyer, Daniel Braun, Tim Hoffman, donde en el año 2011 se creó el nombre de TexStudio, pues cabe recalcar, que este programa es una mejoración del programa TexMaker (editor de LaTeX).

Para obtener este software se puede ir directamente al sitio web http://texstudio.sourceforge.net/ y descargar TeXStudio 2.7.0 (Windows Installer). Para más información puede consultar el siguiente manual del sitio web http://texstudio.sourceforge.net/manual/current/usermanual_en.html, para tener más conocimientos sobre las facilidades de las herramientas de este accesible programa.

Figure 72: Logo TexStudio.

F. Programas Adicionales (Windows)

Por lo general en la edición de textos científicos, es común trabajar con imágenes, gráficos y diseño editorial. Por lo que se pueden utilizar programas gratuitos que le brindan herramientas necesarias para la edición de imágenes como: Inkscape, Gimp. Estos programas requieren de la instalación previa de Ghostcript, Gsview y Pstoedit. En caso de descargar e instalar los softwares anteriores pueden acceder a los siguientes sitios web:

- Ghostcript: http://www.ghostscript.com/download/gsdnld.html
- Gsview: http://pages.cs.wisc.edu/ ghost/gsview/get50.htm
- Pstoedit: http://sourceforge.net/projects/pstoedit/
- Inkscape: http://inkscape.org/en/download/?lang=es
- Gimp: http://www.gimp.org/downloads/

G. Conclusión

La variedad de los paquetes y extensiones que ofrece LaTeX es de gran beneficio en la creación de documentos científicos según con las indicaciones del texto que el usuario desee realizar. Además, en las mejoras de los macros de LaTeX, permite el uso de extensiones que facilitan la inserción de imágenes, diagramas matemáticas, textos de lenguajes de programación. Estas herramientas se pueden utilizar en diferentes plataformas como Windows, Linux, Mac, permitiendo el intercambio de documentos tex en diversos computadores, sin tener que preocuparse por la incompatibilidad de los sistemas operativos de las computadoras.

Tenemos editores gratuitos de LaTeX que facilitan de manera significativa la elaboración de textos, sin tener que recurrir a muchos conocimientos en el área de la programación. Por lo que más que nunca, tenemos todas las herramientas necesarias para aprender a usar estos programas que vienen a garantizar un escrito de buena apariencia y de alta calidad, cumpliendo con las expectativas de la comunidad científica.

Además por medio de editores como TeXStudio, existen una simplicidad para estructurar documentos mediante capítulos con secciones, notas, bibliografía, índices, lo que conlleva a una fácil elaboración de documentos académicos y su importancia en la recepción de artículos de revistas hechos en LaTeX.

H. Plan y Metodología

○ Primera Sección (Duración: 100 minutos)

- Exposición de generalidades de LaTeX: requerimientos, utilización, y ventajas y desventajas. Duración: 15 minutos.
- Exposición sobre las facilidades del editor TexStudio para el uso de las herramientas de LaTeX. Duración: 5 minutos.
- Primeros usos de las herramientas del editor TexStudio por parte de los participantes del taller. Duración: 10 minutos.
- Presentación de las actividades planteadas para la primera sección. Duración: 10 minutos.
- Realización de las actividades correspondientes. Duración: 60 minutos.

○ Segunda Sección (Duración: 100 minutos)

- Repaso sobre los conocimientos previos de la primera sección. Duración: 25 minutos.
- Presentación de las actividades planteadas para la segunda sección: Duración: 10 minutos.
- Actividades planteadas para la segunda sección. Duración: 60 minutos.
- Cierre del taller. Duración: 15 minutos.

Referencias

[1] Borbón A., Mora W. (2013). Edición de Textos Científicos LaTeX: Composición, Diseño Editorial, Gráficos, Inkscape, TikZ y Presentaciones Beamer (2a ed.). Revista Digital Matemática, Educación e Internet. Escuela de Matemática, Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica.

[2] CervanTeX. (2002). ¿Qué es TeX?. Madrid, España. Consultado el 06 de Julio del 2014 en el sitio web http://www.cervantex.es/queestex

[3] De Castro R. (2003). El Universo LaTeX (2a ed.). Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

[4] Marín M. (1999). LaTeX: procesador de textos de matemática. Memorias del I Congreso Internacional Sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (CIEMAC), Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica.

[5] Rodríguez K.; Ulate F. (2013, Diciembre). Creación e Inserción de Gráficos en LaTeX mediante QTikZ 0.10.1. Memorias del VIII Congreso Internacional Sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (CIEMAC). Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica.

[6] TeXStudio. (2011). TeXStudio. En B. Van Der (ed.). Consultado el 08 de Julio del 2014 en el sitio web http://texstudio.sourceforge.net/

[7] Valiente G. (1997). Composición de textos científicos con LaTeX. Barcelona, España: Edicions de la Universitat Politécnica de Catalunya.

Solución de ecuaciones diferenciales de orden tres

ROSALES, JOSÉ[I]

Costa Rica

Resumen

En este artículo se presenta una forma sencilla de encontrar el espacio solución de una ecuación diferencial lineal de tercer orden homogénea, con coeficientes variables, siempre y cuando se conozcan dos de sus soluciones las cuales deben ser linealmente independientes.

Palabras clave:

A. Introducción

El presente trabajo se dará a conocer en el Segundo Encuentro Centroamericano de Matemática Educativa, y su intención es señalarle a los jóvenes que aún en la matemática elemental es posible encontrar nuevos teoremas que nos permitan tener una comprensión más clara de resultados que son conocidos.

Nuestro trabajo tiene sus inicios en las clases del curso de ecuaciones diferenciales que el autor ha enseñado desde el siglo pasado en la Universidad de Costa Rica. Surgió mientras el autor preparaba uno de los exámenes parciales del curso Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería del primer semestre del año 2013.

En un curso tradicional de ecuaciones diferenciales se enseña a describir el conjunto solución de una ecuación diferencial lineal de orden dos con coeficientes variables o no, y homogénea. Se le indica al estudiante que en el caso de coeficientes variables se necesita conocer a priori una solución no trivial. Luego, por medio de una conocida fórmula se debe, pero no siempre es posible, resolver un par de integrales para hallar una segunda solución la cual es linealmente independiente con la primera ya conocida.

Ahora bien, qué se necesita para describir el conjunto solución de una ecuación homogénea de tercer orden con coeficientes variables?

Ahora bien, qué se necesita para describir el conjunto solución de una ecuación homogénea de tercer orden con coeficientes variables?

La ecuación diferencial lineal homogénea de tercer orden con coeficientes variables tiene la siguiente forma:

$$y'''(x) + a_1(x)y''(x) + a_2(x)y'(x) + a_3(x)y(x) = 0, \tag{1}$$

donde $a_1(x), a_2(x), a_3(x)$ son funciones continuas en un mismo intervalo I.

La siguiente proposición es conocida, y aplica la llamada técnica de reducción de orden.

[I]TEC, Costa Rica.

Proposition 1 *Supongamos que $y_1(x)$ es una solución de la ecuación*

$$y'''(x) + a_1(x)y''(x) + a_2(x)y'(x) + a_3(x)y(x) = 0,$$

entonces al poner $y(x) = u(x)y_1(x)$ en la ecuación anterior obtenemos

$$u''' + \left(\frac{3y_1'(x)}{y_1(x)} + a_1(x)\right)u'' + \left(\frac{3y_1''(x)}{y_1(x)} + 2a_1(x)\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_2(x)\right)u'(x) = 0$$

A su vez al poner $v = u'$,y sin escribir la dependencia de la variable x, obtenemos la siguiente ecuación de segundo orden:

$$v'' + \left(\frac{3y_1'}{y_1} + a_1\right)v' + \left(\frac{3y_1''}{y_1} + \frac{2a_1y_1'}{y_1} + a_2\right)v \;=\; 0. \tag{2}$$

El lema anterior establece que si se conoce una solución de la ecuación de tercer orden, entonces con el cambio establecido previamente, obtenemos una nueva ecuación de orden dos, la cual es en cierta forma fácil de resolverla. Si es posible resolver dicha ecuación de orden dos entonces es inmediato encontrar el espacio solución de la ecuación de orden tres.

En efecto, si $\phi_2(x)$ y $\phi_3(x)$ son soluciones de la ecuación (2) entonces se tiene que $u' = \phi_2(x)$ y $u' = \phi_3(x)$, de donde $u_2(x) = \int \phi_2(x)\,dx$ y $u_3(x) = \int \phi_3(x)\,dx$. Por lo tanto, $y_2 = y_1(x)\int \phi_2(x)\,dx$, y $y_3 = y_1(x)\int \phi_3(x)\,dx$ son soluciones de la ecuación de tercer orden.

Lo anterior se verá con más detalle en la siguiente sección, por el momento vamos a realizar algunas observaciones relacionadas con ecuaciones de orden dos.

Hay algunos casos inmediatos donde es posible describir el espacio solución de una ecuación de orden dos. Tales casos se expresan en los lemas siguientes:

Lemma 1 *Considere la ecuación de segundo orden*

$$r(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Si $r(x) + p(x) + q(x) = 0$, entonces el espacio solución de dicha ecuación está generado por las funciones

$$y_1(x) = e^x, \quad y \quad y_2(x) = e^x \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{e^{2x}} dx.$$

La prueba de este resultado es inmediata ya que si sustituimos $y(x) = e^x$ en dicha ecuación obtenemos que $r(x)e^x + p(x)e^x + q(x)e^x = 0$. Se sigue que entonces $r(x) + p(x) + q(x) = 0$ para que $y(x) = e^x$ sea solución. Luego para obtener la segunda solución linealmente indepediente con $y(x) = e^x$ se usa reducción de orden.

Los dos siguientes resultados se basan en un análisis elemental como el que acabamos de presentar.

Lemma 2 *Considere la ecuación de segundo orden*

$$r(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Si $r(x) - p(x) + q(x) = 0$, entonces el espacio solución de dicha ecuación está generado por las funciones

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y \quad y_2(x) = e^{-x} \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{e^{-2x}} dx.$$

Lemma 3 *Considere la ecuación de segundo orden*

$$r(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Si $p(x) + xq(x) = 0$*, entonces el espacio solución de dicha ecuación está generado por las funciones*

$$y_1(x) = x, \qquad y \qquad y_2(x) = x \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{x^2} dx.$$

Las demostraciones de los lemas anteriores son simples cálculos, y se dejan como un ejercicio simple al lector.

B. Resultado principal.

De lo dicho anteriormente, queda claro que para intentar resolver una ecuación de orden tres necesito una primer solución no trivial, para luego utilizar reducción de orden y obtener una ecuación de orden dos. Sin embargo, esta última puede ser difíl de resolver ya que necesitamos conocer al menos una solución para ella.

Hemos encontrado una formade resolver la ecuación de orden tres lineal homogénea con coeficientes variables, para ello necesitamos conocer de antemano dos soluciones que sean linealmente independientes.

El principal resultado de este trabajo se expone en el siguiente teorema:

Theorem 1 *Sean* y_1 *y* y_2 *dos soluciones linealmente independientes de la ecuación*

$$y'''(x) + a_1(x)y''(x) + a_2(x)y'(x) + a_3(x)y(x) = 0.$$

Entonces $v(x) = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$ *es solución de la ecuación*

$$v'' + \left(\frac{3y_1'}{y_1} + a_1\right) v' + \left(\frac{3y_1''}{y_1} + \frac{2a_1y_1'}{y_1} + a_2\right) v \;=\; 0. \tag{3}$$

La prueba de este teorema es un cálculo extenso, pero el resultado por sí mismo es valioso.

Observe primero que

$$v(x) = \frac{y_2'y_1 - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{y_2'}{y_1} - \frac{y_2y_1'}{y_1^2} \tag{4}$$

La prueba de este teorema es un cálculo extenso, pero el resultado por sí mismo es valioso.

Observe primero que

$$v(x) = \frac{y_2'y_1 - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{y_2'}{y_1} - \frac{y_2y_1'}{y_1^2} \tag{5}$$

Hagamos el siguiente producto, el cual es el tercer sumando de la ecuación (3). En este producto se van a generar los seis términos siguientes:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{3y_1''}{y_1} + \frac{2a_1y_1'}{y_1} + a_2\right)\left(\frac{y_2'}{y_1} - \frac{y_2y_1'}{y_1^2}\right) \\
&= \frac{3y_1''y_2'}{y_1^2} - \frac{3y_2y_1'y_1''}{y_1^3} + \frac{2a_1y_1'y_2'}{y_1^2} - \frac{2a_1y_2(y_1')^2}{y_1^3} + \frac{a_2y_2'}{y_1} - \frac{a_2y_2y_1'}{y_1^2}.
\end{aligned}$$

Al derivar la ecuación (5) se obtiene lo siguiente:

$$v' = \frac{y_2''y_1 - y_2'y_1'}{y_1^2} - \frac{(y_2'y_1' + y_2y_1'')y_1^2 - 2y_1y_2(y_1')^2}{y_1^4}$$

Al simplificar términos y expresar en fracciones se obtiene

$$v' = \frac{y_2''}{y_1} - \frac{2y_1'y_2'}{y_1^2} - \frac{y_2y_1''}{y_1^2} + \frac{2y_2(y_1')^2}{y_1^3} \tag{6}$$

Hagamos el siguiente producto el cual generará ocho términos

$$\begin{aligned} \left(\frac{3y_1'}{y_1} + a_1\right)\left(\frac{y_2''}{y_1} - \frac{2y_1'y_2'}{y_1^2} - \frac{y_2y_1''}{y_1^2} + \frac{2y_2(y_1')^2}{y_1^3}\right) &= \\ \frac{3y_1'y_2''}{y_1^2} - \frac{6(y_1')^2y_2'}{y_1^3} + \frac{6y_2(y_1')^3}{y_1^4} - \frac{3y_2y_1'y_1''}{y_1^3} + \frac{a_1y_2''}{y_1} - \frac{2a_1y_1'y_2'}{y_1^2} & \\ -\frac{a_1y_2y_1''}{y_1^2} + \frac{2a_1y_2(y_1')^2}{y_1^3} & . \end{aligned}$$

Ahora viene un cálculo más extenso. Vamos a derivar la expresión (6) y obtendremos once términos, los cuales se van a reducir a sólo siete. En efecto, procedemos a derivar cada uno de los términos, para su mejor manejo, de la ecuación (6):

$$\left(\frac{y_2''}{y_1}\right)' = \frac{y_2'''}{y_1} - \frac{y_2''y_1'}{y_1^2}.$$

$$\left(-\frac{2y_1'y_2'}{y_1^2}\right)' = -\frac{2y_1''y_2'}{y_1^2} - \frac{2y_1'y_2''}{y_1^2} + \frac{4(y_1')^2y_2'}{y_1^3}$$

$$\left(-\frac{y_2y_1''}{y_1^2}\right)' = -\frac{y_2'y_1''}{y_1^2} - \frac{y_2y_1'''}{y_1^2} + \frac{2y_2y_1'y_1''}{y_1^3}$$

$$\left(\frac{2y_2(y_1')^2}{y_1^3}\right)' = \frac{2y_2'(y_1')^2}{y_1^3} + \frac{4y_2y_1'y_1''}{y_1^3} - \frac{6y_2(y_1')^3}{y_1^4}$$

Por lo tanto, al sumar las cuatro expresiones anteriores nos queda lo siguiente:

$$S.Helgasonv'' = \frac{y_2'''}{y_1} - \frac{3y_2''y_1'}{y_1^2} - \frac{3y_1''y_2'}{y_1^2} + \frac{6(y_1')^2y_2'}{y_1^3} - \frac{y_2y_1'''}{y_1^2} + \frac{6y_2y_1'y_1''}{y_1^3} - \frac{6y_2(y_1')^3}{y_1^4}$$

Vamos a escribir cada uno de los tres sumandos de la ecuación (3) en las siguientes tres filas:

$$\frac{y_2'''}{y_1} - \frac{3y_2''y_1'}{y_1^2} - \frac{3y_1''y_2'}{y_1^2} + \frac{6(y_1')^2y_2'}{y_1^3} - \frac{y_2y_1'''}{y_1^2} + \frac{6y_2y_1'y_1''}{y_1^3} - \frac{6y_2(y_1')^3}{y_1^4} +$$

$$\frac{3y_1'y_2''}{y_1^2} - \frac{6(y_1')^2y_2'}{y_1^3} + \frac{6y_2(y_1')^3}{y_1^4} - \frac{3y_2y_1'y_1''}{y_1^3} + \frac{a_1y_2''}{y_1} - \frac{2a_1y_1'y_2'}{y_1^2} - \frac{a_1y_2y_1''}{y_1^2} + \frac{2a_1y_2(y_1')^2}{y_1^3}$$

$S.Helgason$

$$+\frac{3y_1''y_2'}{y_1^2} - \frac{3y_2y_1'y_1''}{y_1^3} + \frac{2a_1y_1'y_2'}{y_1^2} - \frac{2a_1y_2(y_1')^2}{y_1^3} + \frac{a_2y_2'}{y_1} - \frac{a_2y_2y_1'}{y_1^2}$$

De la expresión anterior vamos a simplificar términos. Observe que efectivimante varios términos se eliminan, sólo sobreviven los siguientes:

De la expresión anterior vamos a simplificar términos. Observe que efectivimante varios términos se eliminan, sólo sobreviven los siguientes:

$$\frac{a_2 y_2'}{y_1} - \frac{a_2 y_2 y_1'}{y_1^2} + \frac{a_1 y_2''}{y_1} - \frac{a_1 y_2 y_1''}{y_1^2} + \frac{y_2'''}{y_1} - \frac{y_2 y_1'''}{y_1^2}.$$

Estos seis términos los partiremos en dos grupos:

$$\frac{a_2 y_2'}{y_1} + \frac{a_1 y_2''}{y_1} + \frac{y_2'''}{y_1},$$

y

$$-\frac{a_2 y_2 y_1'}{y_1^2} - \frac{a_1 y_2 y_1''}{y_1^2} - \frac{y_2 y_1'''}{y_1^2}.$$

Ahora bien, usando por primera vez que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal de tercer orden, se tiene que

$$y_1'''(x) + a_1(x) y_1''(x) + a_2(x) y_1'(x) + a_3(x) y_1(x) = 0.$$

Se observa que

$$-\frac{a_2 y_2 y_1'}{y_1^2} - \frac{a_1 y_2 y_1''}{y_1^2} - \frac{y_2 y_1'''}{y_1^2} = -\frac{y_2}{y_1^2}\left(y_1''' + a_1 y_1'' + a_2 y_1'\right)' = \frac{a_3 y_2}{y_1}$$

.

En forma totalmente análoga se obtiene que

$$\frac{a_2 y_2'}{y_1} + \frac{a_1 y_2''}{y_1} + \frac{y_2'''}{y_1} = \frac{a_3 y_2}{y_1}.$$

Es claro que la suma de estas dos expresiones es cero y que por lo tanto hemos probado nuestro teorema. Vamos a resolver un ejemplo para ver cómo funciona nuestro teorema.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial de tercer orden:

Es claro que la suma de estas dos expresiones es cero y que por lo tanto hemos probado nuestro teorema.

Vamos a resolver un ejemplo para ver cómo funciona nuestro teorema.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial de tercer orden:

$$\left(x^2 - 2x + 2\right) y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Lo primero es que debemos encontrar dos soluciones que sean linealmente independientes. Una primera es $y_1(x) = x$, lo cual se verifica con un simple cálculo. La segunda se consigue al notar que la suma de los coeficientes de esta ecuación es cero, y por lo tanto $y_2(x) = e^x$ es solución. Ahora bien, como las funciones x y e^x son soluciones linealmente independientes podemos aplicar el teorema.

Según el teorema 1, la función $v(x) = (xe^{-x})' = (1-x)e^{-x}$ será solución de la ecuación de segundo orden siguiente:

$$v'' + \left(3 - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2}\right) v' + \left(3 - \frac{2x^2}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2x}{x^2 - 2x + 2}\right) v = 0$$

Observemos que se tiene lo siguiente:

$$3 - \frac{x^2}{x^2-2x+2} = 3 - 1 + \frac{2x-2}{x^2-2x+2} = 2 + \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$$

Antes de utilizar la fórmula de Abel para hallar la segunda solución se tiene que :

$$e^{-\int 3-\frac{x^2}{x^2-2x+2}\,dx} = e^{-\int 2+\frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx} = \frac{e^{-2x}}{x^2-2x+2}.$$

Ahora bien, la segunda solución para esta última ecuación de orden dos es según la fórmula de Abel la siguiente:

$$v_2 = (1-x)e^{-x}\int \frac{\frac{e^{-2x}}{x^2-2x+2}}{(1-x)^2e^{-2x}}\,dx = \int \frac{1}{(x^2-2x+2)(1-x)^2}.$$

Esta última integral la vamos a calcular por fracciones parciales:

$$\frac{1}{(x^2-2x+2)(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{x^2-2x+2}$$

Ahora bien

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \frac{1}{1-x},$$

y por otra parte

$$\int \frac{1}{(x^2-2x+2)}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx = \arctan(x-1).$$

En resumen, la segunda solución es dada por

$$v_2(x) = (1-x)e^{-x}\left(\frac{1}{1-x} - \arctan(x-1)\right) = e^{-x}(-(1-x)\arctan(x-1)).$$

De esto se concluye, integrando, una vez más, que sí se pudo encontrar tres soluciones linealmente independientes.

Referencias

[1] Nagle, R. Kent, Edward B. Saff y A. D. Snider, Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera, Pearson Educación, México, 2001.

[2] Simmons, George F., Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas, McGraw-Hill, Madrid, 1997.

[3] Simmons, George F., Steve G. Krantz, Ecuaciones Diferenciales: Teoría, técnica y práctica, McGraw-Hill, México, 2007.

[4] D. Somasundaram, *Ordinary Differential Equations*, CRC Press, Florida, 2001

[5] Earl Rainville, and Phillip Bedient, *Elementary Differential Equations*, Seventh Edition, MacMillan, New York, 1991

¿Y si no se cumple,. . . , qué pasa? Reforzando conceptos matemáticos en futuros profesores de matemática para secundaria

SALAZAR, LORENA[I]

Costa Rica

Resumen

En este documento se presentan los resultados de una experiencia de aula en un curso de análisis real dirigido a futuros profesores de matemática de secundaria, donde se aplicó una secuencia de tareas diseñadas con el fin de que los estudiantes reforzaran conceptos matemáticos y a su vez, reflexionaran sobre la matemática y su futura labor profesional. En dichas tareas de les solicitó a los estudiantes, que realizaran omisiones o modificaciones en las hipótesis de teoremas y de algunos ejercicios, mediante una actividad dirigida a potenciar procesos mentales que llevaran a la comprensión de enunciados de teoremas y otros resultados. Se trata de una actividad de aula, en la que se les pide a los estudiantes ignorar alguna de las hipótesis y deducir o crear algún contraejemplo para la tesis del mismo. Y si no se cumple esta hipótesis.... qué pasa? Y si cambio esta otra,..... qué se puede concluir? Se lograron resultados positivos en los conocimientos matemáticos relacionados con la temática de continuidad en intervalos cerrados, y sobre su competencia de reflexión sobre las matemáticas.

Palabras clave: Funciones continuas, creación de problemas, diseño de tareas, educación matemática.

A. Introducción

La actividad reportada en este artículo, ¿Y si no ....., que pasa? , está basada en la estrategia de creación de problemas. Inicialmente fue propuesta por Brown y Walter (1990), con el nombre de "What if not?", con el fin de desarrollar estrategias para crear problemas en estudiantes talentosos de primaria. A partir de ahí, ha sido usada ampliamente como una estrategia didáctica en otros contextos matemáticos, en su mayoría en niveles de primaria y secundaria. Se propone aquí su uso como una fuente innovadora a usar en la formación inicial de profesores de matemática para secundaria, con una intención doble: lograr la asimilación de conceptos matemáticos, y a su vez que sea una estrategia a considerar en su futura labor docente.

La creación de problemas, no es algo nuevo, ya desde tiempos de Polya (1981), se mencionaba las fortalezas de inducir a el planteamiento de problemas en los estudiantes, como un medio poderoso para la resolución de los mismos, por un lado, y para formular otros problemas después de su solución, por otro lado. Malaspina (2013), señala que la invención de problemas, ayuda a la comprensión de los conceptos matemáticos y contribuye a realizar generalizaciones e iniciarse en la investigación y en el hacer matemáticas. Esto concierne a estudiantes que requieren una formación sólida en matemáticas, como lo son los futuros profesores de matemática para secundaria. Silver (1994) por su parte, reporta unos resultados, en los que trata de evaluar la creatividad y

[I]UCR-UNA, Costa Rica.

originalidad de los problemas planteados en un grupo de estudiantes, tomando en cuenta el número de problemas generalizados, el número de diferentes categorías de los nuevos problemas y la novedad de la solución propuesta. Es claro que al aplicar esta metodología de enseñanza en futuros profesores de matemática, se tiene un factor positivo a favor, y es la preparación matemática que ya tienen estos estudiantes, así como la habilidad y actitud hacia la matemática que traen inherente. Ellerton (1986) después de varios estudios, concluye que entre más habilidades matemáticas se tengan, mayor creatividad y originalidad se presentan en los problemas creados; este es el caso de estudiantes como los involucrados en esta experiencia. Sin embargo, Singer y Voica (2013) reportan una investigación con profesores sobre creación de problemas en la que consideraron tres aspectos: claridad, coherencia y originalidad, mostrando una carencia importante en esta competencia que deben tener los futuros docentes. Es por esto, que estas estrategias deben iniciarse en el aula, en la formación inicial de estos estudiantes. Aúnque se tengan estudiantes con ventajas en su formación matemática, esta metodología no le resta nada a la estrategia, al contrario, la tesis de esta investigación es que se puede utilizar estas ventajas, para lograr de forma más asertiva la asimilación de los conceptos matemáticos, y a la vez realizar una reflexión sobre la matemática y su enseñanza, de modo que en su futura labor docente puedan aplicar esta misma estrategia en sus propios estudiantes. De esta forma se puede lograr en una dualidad, la comprensión de los conceptos matemáticos a nivel de matemática superior, con toda la formalidad del caso, obteniendose el objetivo primordial de la enseñanza, que es lograr que el estudiante asimile el concepto matemático a profundidad; y por otro lado modelar una estrategia de enseñanza.

Las experiencias realizadas con los futuros profesores de matemática, usando esta estrategia, tomó más tiempo del que se ocupa con una enseñanza tradicional (donde el docente expone definición, teorema, prueba, en forma magistral y expositiva, con prácticamente nula intervención del estudiante, y con cero responsabilidad en su aprendizaje), pero se ha obtuvieron mayores resultados en cuanto a rendimiento académico y asimilación de los conceptos, como se describe a continuación. Al respecto, Espinoza, Lupiañez y Segovia (2014), señalan que la invención de problemas es una ventana para observar la comprensión matemática, ya que puede ser una herramienta para evaluar el aprendizaje de conocimientos matemáticos de los estudiantes y también mejora su disposición y actitudes hacia las matemáticas.

En los últimos tiempos, ha habido un auge en investigaciones tendientes a determinar las competencias que debe tener un profesor de matemática. Los formadores de docentes para educación media tenemos una gran responsabilidad en esta tarea. Al respecto, Rico (2004) señala que "la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria es un tema a debate, que interesa a los profesores de matemáticas en ejercicio y a sus asociaciones, a los matemáticos profesionales, a los formadores de profesores, a los investigadores en Didáctica de la Matemática y a los responsables de la gestión universitaria". Al respecto, Rubio (2012) indica que para realizar la evaluación de la competencia matemática de sus alumnos, el futuro profesor debe tener, además de competencia matemática, competencia en el análisis de la actividad matemática. En este sentido, los cursos de matemática formal en los planes de estudio para formar profesores de matemática, deben revisarse. La exposición tradicional en donde se presenta la teoría en forma axiomática rigurosa, no es la mejor forma de presentarla, dado que los futuros profesores, repiten estos patrones o modelos de enseñanza en sus clases con los adolescentes de secundaria. Estemos de acuerdo o no, todo profesional que interviene en la formación inicial de estos profesionales, es un modelo de enseñanza. De ahí la importancia de realizar estudios de este tipo, de modo que se logre una dualidad, entre el lograr consolidar conocimientos matemáticos y a la vez modelar un tipo de enseñanza innovadora.

La estructura del artículo es la siguiente, después de esta introducción, se formula el objetivo de la investigación, a continuación se explica la metodología que se ha seguido para pasar, a continuación, a la descripción de la experiencia realizada. El artículo termina con unas consideraciones finales.

○ Objetivo

Valorar el efecto del uso de la actividad: ¿Y si no ....., que pasa?, como una estrategia didáctica en la formación inicial de profesores de matemática para secundaria, en la comprensión de teoremas de continuidad en intervalos cerrados y en su capacidad de reflexión matemática.

B. Metodología

Esta actividad se aplicó a estudiantes del curso de análisis de la Universidad Nacional de Heredia en el I ciclo del 2014. Este es un curso tradicional de análisis real, en donde se desarrolla los temas de sucesiones, límites, continuidad y derivabilidad, desde una óptica de matemática formal tradicional, caracterizada en general por ninguna relación con la matemática escolar y por una carencia de reflexiones didácticas sobre la actividad matemática. Es un curso que es parte de la carrera de Enseñanza de la Matemática, que forma profesores de matemática para educación media. En ella participaron 8 estudiantes de nivel de licenciatura, que corresponde al V año de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica.

Para la recolección de datos, se llevó un registro detallado en un diario donde se fue anotando todo lo ocurrido en el aula. Se recolectaron evidencias escritas por los grupos de trabajo y se les solicitó una valoración de la actividad realizada. Una semana después, se realizó una prueba específica escrita individual para evaluar la comprensión de los conceptos matemáticos. Se reportan aquí solo algunas de los problemas creados por los estudiantes. Se hace la aclaración de que este reporte no pretende ser una lección del tema de continuidad en intervalos cerrados, sino que lo que se pretende es evaluar la estrategia didáctica y su incidencia en la comprensión matemática de los teoremas. Algunos de ellos son ejemplos muy sencillos, inclusive podrían catalogarse de triviales, a los ojos de un matemático, pero para un estudiante que por primera vez conoce la materia, su creación es muy importante en su comprensión.

C. Desarrollo de la experiencia

El diseño de tareas propuestas, se usó el libro de texto, Bartle y Sherbert (2010), como parte de la tarea de comprensión de enunciados de teoremas. Además se les solicitó traer una laptop, en donde se bajó un graficador libre, en este caso winplot, paara que visualizaran las funciones creadas. La actividad incluye definiciones, teoremas y ejercicios del libro texto, referidos a los teoremas clásicos de continuidad en intervalos cerrados. El tipo de tareas incluidas en la actividad se detallan a continuación.

Tipología de tareas

- Comprensión de definiciones
- Omisión de las hipótesis de teoremas
- Variaciones en las hipótesis
- Creación de contraejemplos
- Creación de problemas

El contexto de trabajo es intra-matemático, con trabajo en grupos de 2 personas, dado que la cantidad de estudiantes lo permitía. La docente tuvo la oportunidad de sentarse con cada grupo, integrarse al grupo como una mediadora y evaluar su trabajo. Se inició con el siguiente teorema.

Teorema de acotabilidad

Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I. Entonces f está acotada en I.

Lo primero que se les solicitó hacer fue revisar cada uno de los conceptos mencionados en el teorema. Se les pidió además que expresaran cada concepto usando sus propias palabras. Los estudiantes tienden a memorizar definiciones y conceptos, pero en realidad no todos comprenden a profundidad su significado. En este caso, la mayoría repitió, de forma correcta la definición de acotabilidad de una función.

Definición. Una función f se dice que está acotada alrededor de $x = c$ si $\exists M > 0$ y un $\delta > 0$ tal que $|f(x)| \leq M, \forall x \in]c - \delta, c + \delta[$.

Sin embargo, algunos estudiantes mostraron que aún no comprendían el concepto "localmente", ni el porqué de la existencia de delta. Como docente nunca se debe asumir algún concepto matemático como comprendido, no se puede trivializar nada, en realidad, es siempre mejor repasar conceptos antes de enunciar un teorema.

Inmediatamente se les solicitó ignorar cada una de las hipótesis del teorema. ¿Y qué pasa si ...no...? Todos los grupos lograron ir negando cada hipótesis.

Lo primero que concluyeron, fue que si no se cumple alguna de las hipótesis, entonces no se cumple la tesis. ¿Seguros? Ellos mismos crearon algunos contraejemplos.

- Si $f :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 1$. ¿Es acotada? Claro que si lo es, de hecho $M = 2$ es una cota. Así que se tiene una función que no cumple una de las hipótesis, pero sí se cumple la tesis.
- Si $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función parte entera $f(x) = [|x|]$ es discontinua pero acotada, como puede verse en la figura adjunta.

Figure 73: Gráfica de $f(x) = [|x|]$

- $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$ es un ejemplo de una función discontinua no acotada.

  Importante es señalar que ellos mismos empezaron a hacerse otras preguntas a raíz del ejemplo de

  $$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}.$$

  La discontinuidad ocurre porque en hay una asíntota vertical, ¿y qué pasa si quitamos del intervalo? ¿Será ahora acotada? En este tipo de actividad, el papel del docente debe ser devolverles la pregunta, que sean ellos mismos que se contesten, de modo que se les pidió que la graficaran.

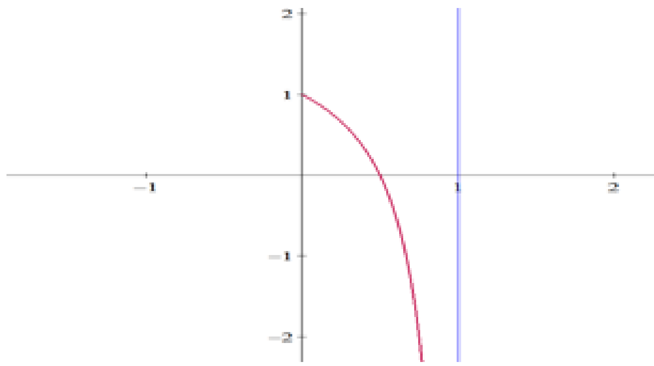


Figure 74: Gráfica de $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

- $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x+1$, si $x\neq 1$, $f(1)=0$. Este es un ejemplo de una función discontinua, no se cumplen las hipótesis pero si se cumple la tesis.

- $f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\tan x$. La función no es acotada.

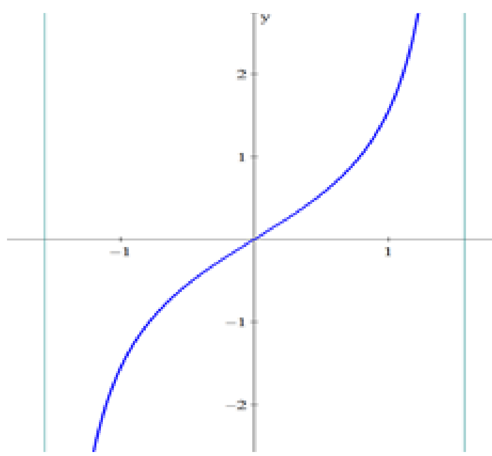


Figure 75: Gráfica de $f(x)=\tan x$.

- $f:]0,2[\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$, si $x\neq 0$, $f(0)=0$. La función tampoco es acotada.

Continuando con la actividad, otro de los grupos se hizo las siguientes preguntas.

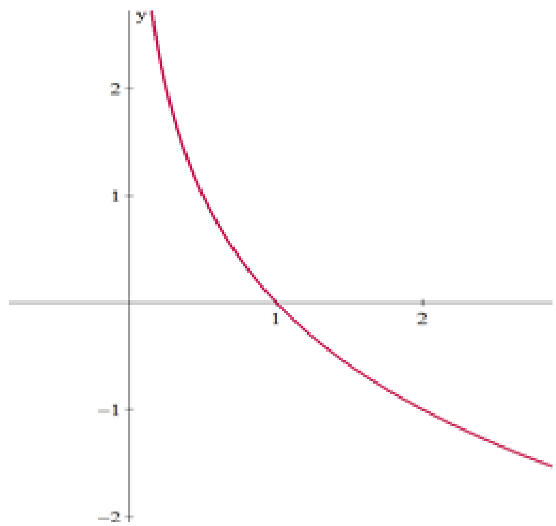
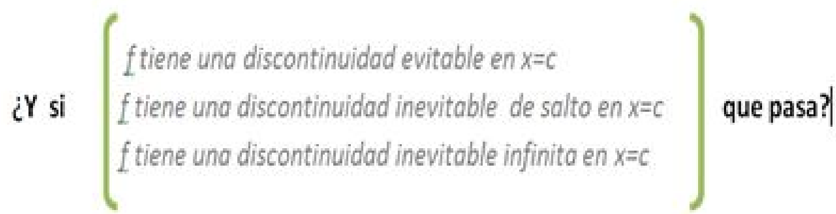


Figure 76: Gráfica de $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.



La actividad los hace reflexionar sobre detalles, que en otras ocasiones pasaban desapercibidas. Los estudiantes mismos expresaron que en realidad se puede rescatar algo, dependiendo del tipo de discontinuidad, que se tenga. Por lo que surgieron más contraejemplos, muy sencillos, pero con gran aceptación por los estudiantes, pues fueron sus propias creaciones, y no se les dieron hechos, como se hace en la mayoría de los casos.

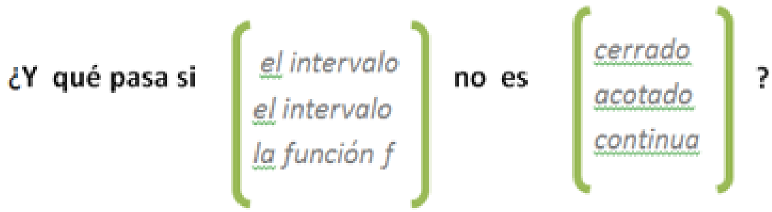
- Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -2$, si $0 \leq x < 1$ y $f(1) = 0.$. Esta función tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$, pero sigue siendo acotada.
- Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -2$, $f(x) = 1$, si $\frac{1}{2} < x \leq 1$. Esta función tiene una discontinuidad de salto, pero es acotada.
- Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$. Esta con una discontinuidad infinita en por lo que no es acotada.

Superada la primera etapa, se les presentó el segundo teorema. Análogamente al teorema anterior, se les pidió primero que repasaran los conceptos involucrados en el teorema, en este caso la definición de máximo y mínimo absoluto, en contraste con los extremos relativos.

Teorema del máximo-mínimo

Sea $I = [a,b]$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I. Entonces f tiene máximo y un mínimo absoluto em I.

Nuevamente los estudiantes iniciaron con las negaciones de las hipótesis.



Algunos de los problemas creados por los estudiantes son los siguientes.

- Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x+1$, la cual cumple con las hipótesis del teorema y tiene su máximo en $x = 1$ y su mínimo absoluto en $x = 0$. Pero si abrimos el intervalo a $f :]0,1[$ ya la función no tiene máximo ni mínimo en $]0,1[$.
- La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, definida en el intervalo de $[1,\infty[$, tiene máximo absoluto pero no tiene mínimo en el intervalo no acotado $[1,\infty[$.

Figure 77: Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Sea $f(x) = (x-2)(x+1)(x-1)$ definida en el intervalo $[-1,3]$. El mínimo absoluto se obtiene en y su máximo absoluto en $x = 3$, pero si se toma el intervalo $[-1,3[$, la función no tiene máximo absoluto, como se puede observar en la figura 78.

Teorema

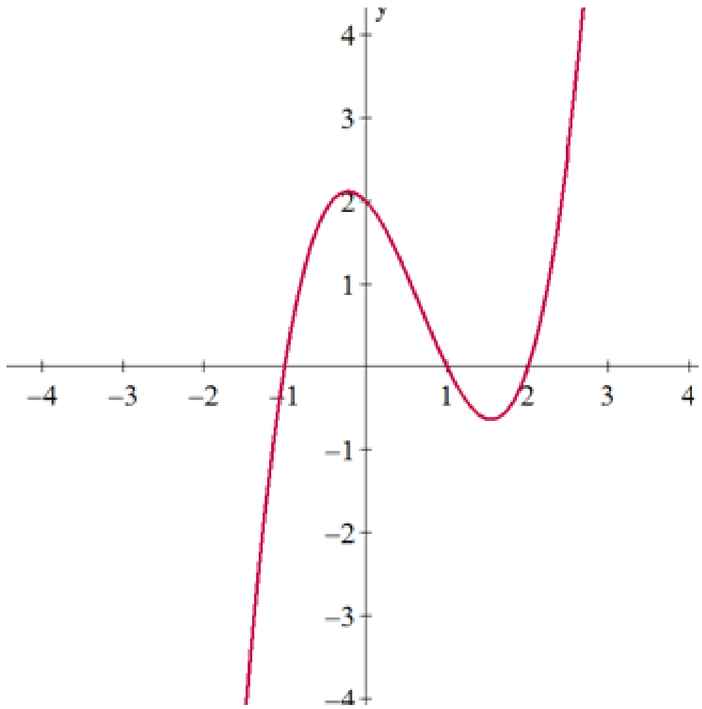


Figure 78: Gráfica de $f(x) = (x-2)(x+1)(x-1)$.

Sea I un intervalo y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I. Si $a, b \in I$ que satisface $f(a)f(b) < 0$, entonces existe un punto c entre a y b tal que $f(c) = 0$.

Se muestran a continuación algunos de los contraejemplos creados por los estudiantes.

- Sea $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ en el intervalo $[-1, 3]$. La función no tiene ninguna raíz.

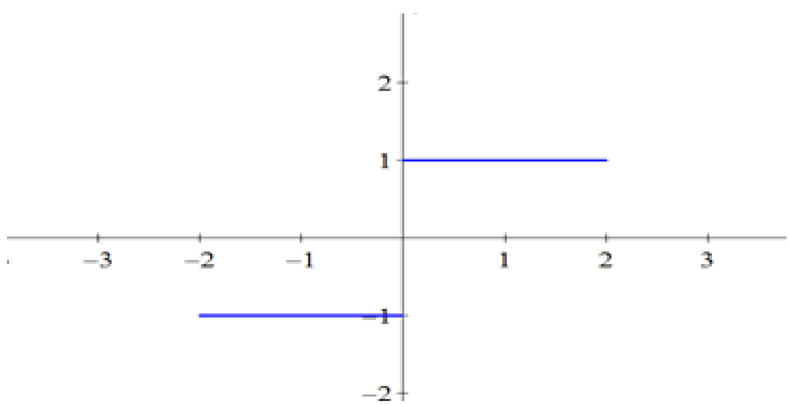


Figure 79: Gráfica de $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$.

- Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo de $[0, \pi]$ y $f(x) = 2$ en el intervalo de $(\pi, 2\pi]$. . La función no es continua, pero aún así se cumple la hipótesis.

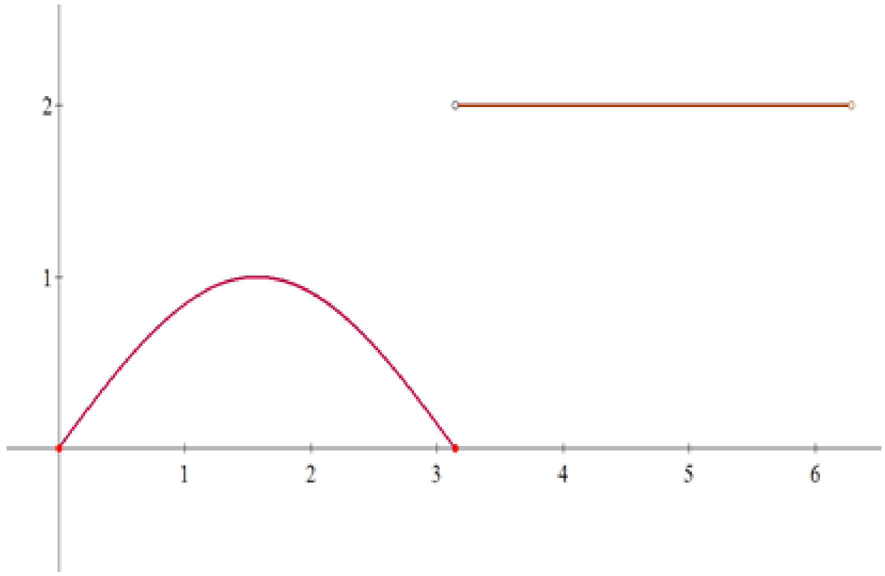


Figure 80: Se cumple la tesis del teorema localización de raíces.

Teorema

Sea I un intervalo y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I. Si $a, b \in I$ y $k \in \mathbb{R}$ satisface $f(a) < k < f(b)$, entonces existe un punto c entre a y b tal que $f(c) = k$.

Continuando con el teorema de valores intermedios, ya los estudiantes estaban muy positivos por los logros alcanzados con los teoremas anteriores, y la dinámica se tornó más rápida. Al omitir la hipótesis de continuidad en un intervalo cerrado, los estudiantes crearon algunos contraejemplos, como puede verse a continuación.

- Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2$, si $0 < x < 1$ y $f(0) = 4, f(1) = 6$. Es claro que $f(0) < 5 < f(1)$, pero no existe ningún valor de $x = c$ tal que $f(c) = 5$. (Ver figura 81).
- Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2$, si $0 < x < 1$ y $f(0) = 1, f(1) = 3$. Es claro que $f(0) < 1.5 < f(1)$, pero no existe ningún valor de $x = c$ tal que $f(c) = 1.5$.(Ver figura 82).
- Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x + 1$, si $0 < x < 1$ y $f(0) = 0, f(1) = 3$. Es claro que $f(0) < 0.5 < f(1)$, pero no existe valor de $x = c$ tal que $f(c) = 0.5$. (Ver figura 83).

A esta altura de la actividad, los estudiantes ya se percataron que muchos de los contraejemplos creados, también pueden ilustrar que la tesis no se cumple, si se omite alguna de las hipótesis, por lo que solo repitieron.

Teorema

Sea I un intervalo cerrado y acotado y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I. Entonces el conjunto $f(I) := \{f(x) : x \in I\}$ es un intervalo cerrado y acotado.

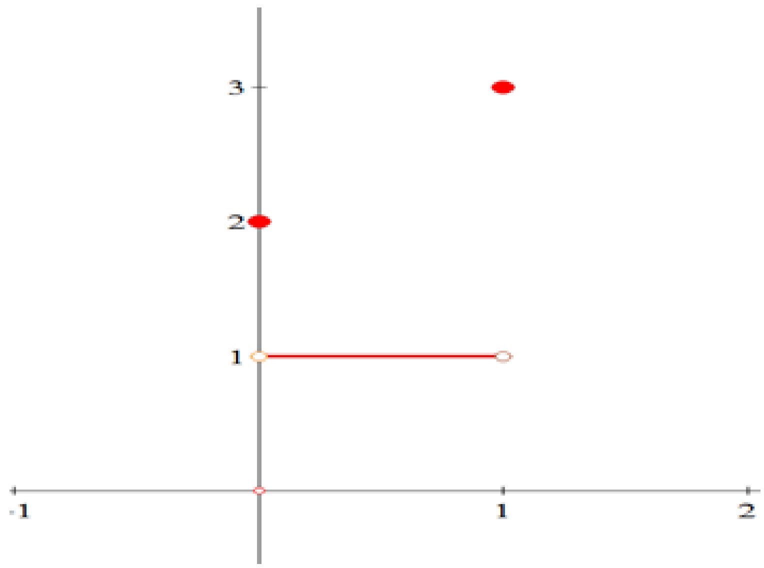


Figure 81: No se cumple el teorema del valor intermedio.

Figure 82: No se cumple el teorema del valor intermedio.

- Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ en el intervalo $[-4, 4]$. La función alcanza un máximo pero no un mínimo en este intervalo. Tampoco es acotada, no cumple el teorema de valores intermedios, y el conjunto imagen no es un intervalo.(Ver figura 84).

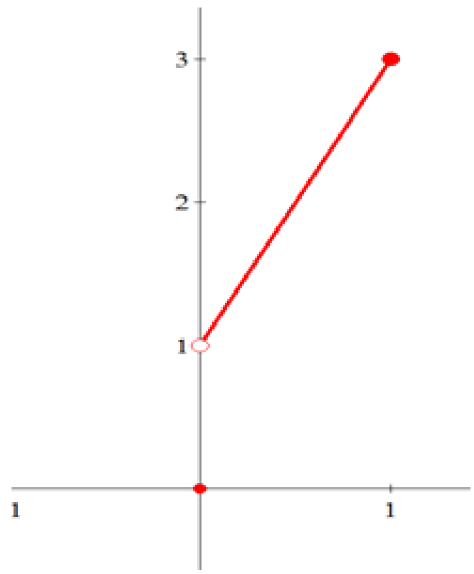


Figure 83: No se cumple el teorema del valor intermedio.

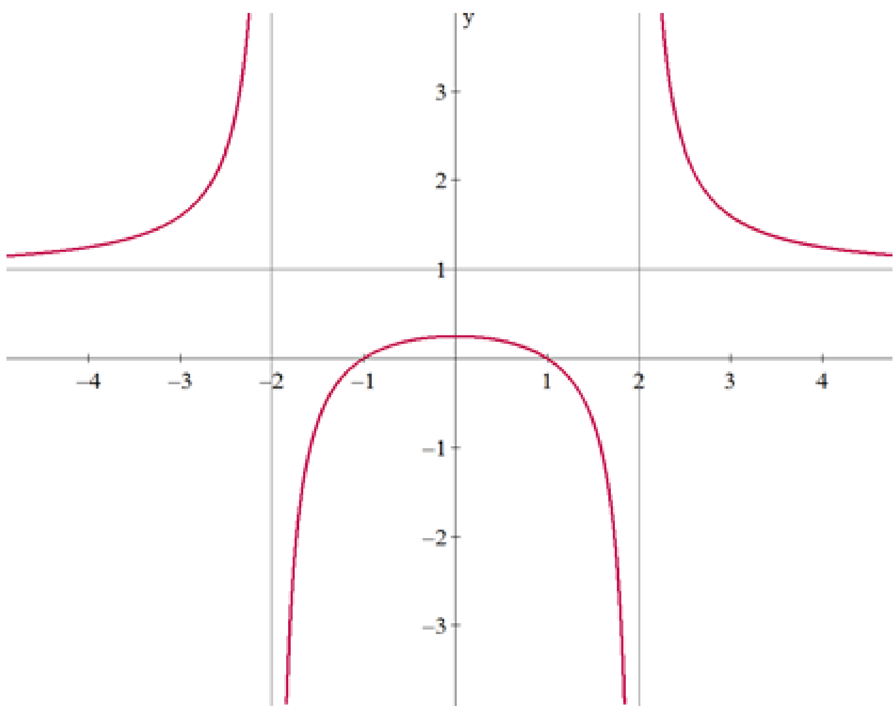


Figure 84: Gráfica de $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$.

D. Consideraciones Finales

La actividad resultó altamente positiva en cuanto a la comprensión de los teoremas de continuidad en intervalos cerrados y acotados. En semestres anteriores donde la docente expuso los mismos temas, pero con la metodología tradicional, no hubo resultados tan altos en cuanto a rendimiento académico en la evaluación de los mismos temas. Los estudiantes se mostraron entusiastas, y cada descubrimiento con la creación de alguno de los contraejemplos, les reafirmó los detalles y sutilezas envueltas en las hipótesis. Por otro lado, se dieron cambios de conducta en algunos de los estudiantes, en los temas siguientes, iniciaron a cuestionarse las hipótesis de otros teoremas, mejorando la comprensión de los mismos. La actitud ante las pruebas de estos teoremas mejoró significativamente, pues tenían muy claro la omisión de alguna de las hipótesis. Por otro lado, después de la actividad, se les asignaron lecturas sobre planteamiento de problemas, para desarrollar y relacionar con su futura labor profesional.

Es importante realizar este tipo de actividades, pues resulta un cambio de actitud ante la matemática y su formalidad. Se recalca lo mencionado en la introducción: se deben incluir innovaciones en la forma de presentar la matemática a los futuros profesores, dado que existe una tendencia a la repetición de estos patrones o modelos de enseñanza en sus futuras clases de matemática. Estemos de acuerdo o no, todo profesional que interviene en la formación inicial de estos profesionales, es un modelo de enseñanza.

Referencias

[1] Bartle, R. y Sherbert, D. (2004). Introducción al análisis matemático de una varaible. México: Limusa.

[2] Espinoza, J, Lupiañez, J y Segovia, I (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. Revista digital Matemática, Educación e Internet. Vol 14, Marzo 2014.

[3] Giménez, J., Font, V. y Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process, en C. Margolinas (Ed.), Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22, (Vol. 1, 581-590). Oxford: ICMI.

[4] Malaspina, U. (2013). Nuevos horizontes matemáticos mediante variaciones de un problema. Unión, 35, 135-143.

[5] Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado, 8 (1).

[6] Rubio, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemático. Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona, España.

[7] SangHun S, H et al. (2006). Possign problems with use the ?what if not?? Strategy in NIM game. Jouenal of Educational Research in Mathematics. Korea.

Principios básicos para la creación de animaciones interactivas con el software geogebra

SÁNCHEZ, STEVEN GABRIEL[I]

Costa Rica

Resumen

El propósito de este taller es darle las herramientas necesarias a los y las participantes para que logren elaborar sus propias animaciones interactivas, con ayuda del software GeoGebra en los diferentes temas de matemáticas, en particular en la resolución de problemas de geometría. Los docentes que participen podrán utilizar estas herramientas tecnológicas, para dar clases de matemática de una forma entretenida y diferente para los y las estudiantes de secundaria.

Palabras clave: Animación, GeoGebra, creatividad.

A. Introducción

La tecnología en los últimos años ha traído cambios en la vida cotidiana de los seres humanos, tanto en facilidad en las tareas diarias como en las laborales. En la educación no se ha quedado atrás, esta poco a poco se ha adentrado en las aulas para cambiar la forma de dar clases. En las matemáticas, las nuevas tecnologías computacionales incursionaron varios programas para ayudar en el aprendizaje de esta asignatura, no muy deseada por la mayoría de los y las estudiantes, lo cual si se utilizan, los alumnos verán de forma diferente a las matemáticas y los docentes podrán apoyarse a estas para motivar a los educandos.

Macías, D (s.f) menciona que "la creación de "Nuevos ambientes de aprendizaje" exige situaciones educativas en que se propicie el contacto, el intercambio y la participación de los miembros de un grupo independientemente de la distancia". En lo cual si el docente va utilizar la tecnología para el aprendizaje del estudiante se debe tomar en cuenta lo que dice Macías, que en pocas palabras es que el alumno pueda aprender haciendo y en un ambiente constructivista.

En el taller propuesto se les da a conocer a los participantes la importancia de usar recursos tecnológicos en el aprendizaje de la matemática en este caso con el software GeoGebra, también se les dará un acercamiento con este y los principios necesarios para poder rotar mover, deslizar objetos y por último animaciones que ayudarán a la enseñanza de diferentes temas de matemáticas a los alumnos (as) de secundaria.

B. El software GeoGebra como recurso didáctico

Ortiz, A. & Arias, R. (2012) indican que

[I]TEC, Costa Rica.

> El uso de TIC en el aula posibilita implementar una visión constructivista en la enseñanza de la matemática. Se ha implementado un curso virtual en Costa Rica, en el que se capaciten a los docentes a utilizar el GeoGebra como una herramienta dinámica con la que mediante el análisis y la exploración, y una guía adecuada, el estudiante pueda construir sus propios conocimientos.

De lo anterior se puede destacar que las tecnologías de información y comunicación ayudan en la enseñanza de los alumnos de secundaria, ya que, aportan ideas constructivistas en el aula. La herramienta GeoGebra tiene un gran potencial a lo que en aprendizaje se refiere, pues por medio de exploración y análisis en la relación profesor-estudiante se puede lograr que el alumno pueda entender de una forma diferente los tópicos de matemáticas.

Y esto es lo que el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica ha propuesto en su nuevo plan de estudios de matemática, en el cual habla de la importancia de utilizar recursos tecnológicos para alcanzar el mayor desempeño por parte del estudiante en cuanto de enseñanza se habla. Entonces utilizando el software GeoGebra como recurso tecnológico en las aulas, este será de gran soporte para el docente de matemáticas en el aprendizaje de sus alumnos, por lo que este programa es un fuerte recurso didáctico.

C. Acercamiento con el software GeoGebra

En primera instancia se necesita una aproximación de las herramientas más importantes para poder crear animaciones, pues es indispensable saber utilizarlas para lograr el objetivo de saber manejar este. Las herramientas son las siguientes:

Figure 85: Herramientas de GeoGebra.

D. Elementos necesarios para crear animaciones

Para crear una animación interactiva con el Software GeoGebra es importante saber mover, rotar y deslizar cada objeto que el practicante quiera para su animación sea esta: un punto, un ángulo, una figura geométrica, una imagen, entre otros. También cada educador logrará como pautar un orden de aparición del objeto animado, según el objetivo de lo que se quiera animar y como importar una imagen para que esta sea animada. Para la creación de una aplicación interactiva en este software lo fundamental es el uso de la herremienta deslizador. Con esta herramienta se podrán mover los objetos que queramos utilizar. Para poder que el deslizador le dé la orden al objeto de moverse, se deberá introducir algunos comandos en la barra de entrada.

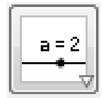


Figure 86: Herramienta deslizador.

○ **Ejemplo 1**

- Se debe definir un deslizador:

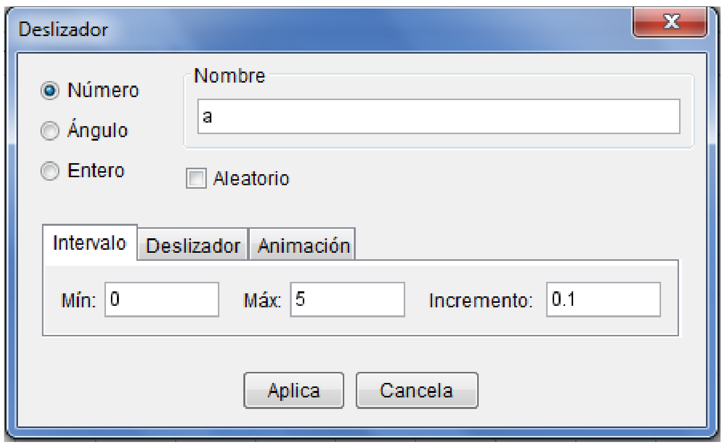


Figure 87: Definir un deslizador.

- Al tener un deslizador ya definido se procede en la barra de entrada a introducir los comandos para lograr mover el objeto, en este ejemplo se moverá un punto de extremo a extremo en un segmento de recta. Los comandos utilizados se presentan en la siguiente imagen:

Figure 88: Ingreso de comandos.

Donde A, B serán los puntos del segmento donde se moverá el punto mediante el deslizador definido anteriormente.

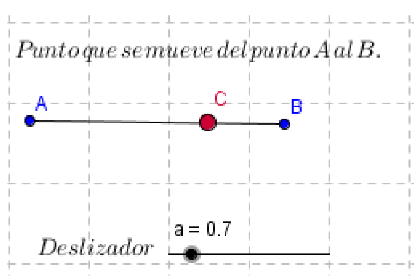


Figure 89: Segmento de extremos A y B.

○ **Ejemplo 2**

¿Cómo rotar un objeto (punto)?

- Se define un deslizador, en este caso se debe seleccionar en modo de grados pues se necesita rotar mediante un ángulo.

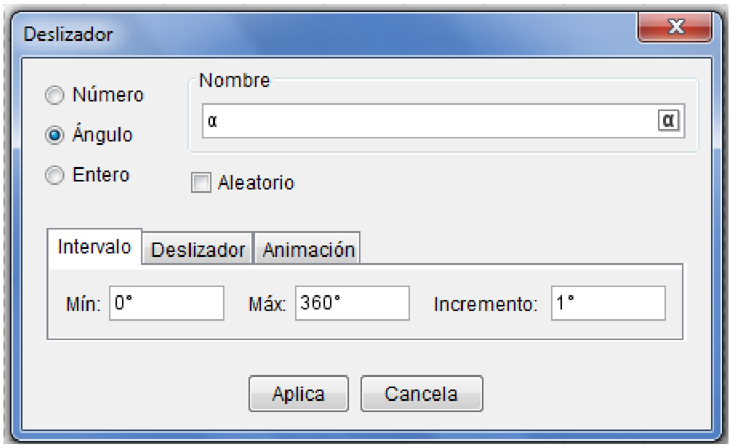


Figure 90: Deslizador en modo ángulo.

- Al tener ya el deslizador definido se debe crear un punto A y un punto B con la herramienta nuevo punto, pues ocupamos que un tercer punto rote alrededor del punto B.

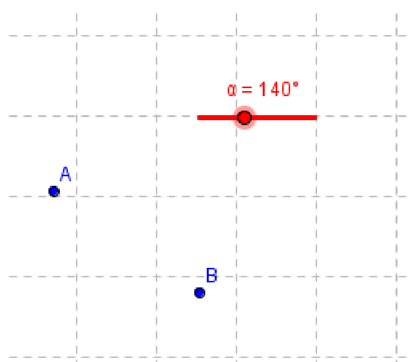


Figure 91: Herramienta Nuevo Punto.

- Definido el deslizador y los puntos con la herramienta **Rota Objeto en torno a punto** se seleccionan los puntos A y B esto para después definir el ángulo por el cual se quiere que rote. En este caso será α , pues es el deslizador definido.

- Al finalizar se verá un punto A' el cual será el que va rotar mediante el deslizador y sobre el punto B, como se muestra en la imagen.

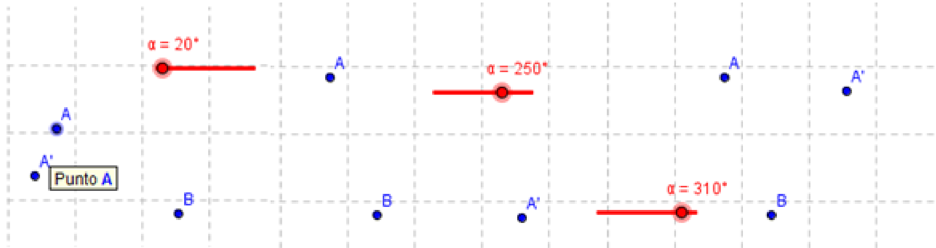


Figure 92: Rotación de punto A.

○ **Ejemplo 3**

¿Cómo introducir una imagen en GeoGebra?

- Para poder introducir una imagen en GeoGebra se debe utilizar la herramienta **Inserta Imagen**. Luego se selecciona una imagen que se tenga guardada en la computadora.
- Al haber seleccionado ya la imagen se le da clic en Abre y la imagen se inserta en la zona gráfica.

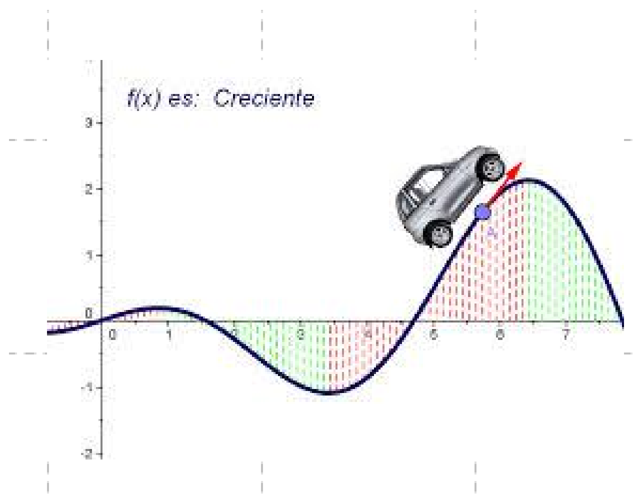


Figure 93: Insertar imagen.

E. Conclusiones

Es importante que el docente tenga herramientas como el software GeoGebra para brindarle a sus alumnos una forma distinta de aprender matemática, se sabe que para el profesor es un reto cambiar la forma de dar clases, pero la tecnología está cambiando todo en el entorno y los docentes también deben actualizarse por el bienestar de sus educandos, por lo que la ayuda de este software hace que este se actualice y le dé una nueva forma creativa a la hora de impartir clases de matemática.

Gómez, P (1997) cita que "gracias a la posibilidad que ofrece de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples sistemas de representación dentro de esquemas interactivos, la tecnología abre espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel) en las que él puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración".

El docente debe tener imaginación para transmitirle a sus alumnos la utilidad por las matemáticas, no solo hacer que aprenda esta asignatura si no también que les interese, por lo que las tecnologías computacionales como este software no solo ayudará al docente en su labor de enseñar matemática, sino también al estudiante, pues aprenderá a disfrutar de ellas.

Referencias

[1] Arias, R y Ortiz, A. (2012). GeoGebra como herramienta para la Enseñanza de la Matemática: Resultados de un curso de capacitación. Consultado en: http://www.cientec.or.cr/matematica/2012/ponenciasVIII/Andres-Ortiz.pdf.

[2] Gómez, P. (1997). Tecnología y Educación Matemática. Colombia: UNIANDES-LINDE, n° 1, 93-111.

[3] Macías, D. (s.f). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. México: Instituto de Estudios Superiores de Tamaulipas.

[4] Montero, E y Sánchez, S. (2013). Proyecto: Lección Asistida por Computadora. Cartago, Costa Rica: Tecnológico de Costa Rica.

[5] Ruiz, A. (2012). Programas de estudio de matemáticas. San José, Costa Rica: Ministerio de Educación Pública.

Aproximación a un modelo de operacionalización de competencias matemáticas: una estrategia necesaria para la práctica curricular.

Valladares, Ayleen Giselle[I]

Honduras

Resumen

La adquisición de las competencias matemáticas es uno de los retos más significativos asumidos por la carrera del profesorado de matemáticas de la UPNFM a partir de la reforma curricular en el 2008. Toda reforma implica la movilización de recursos hacia la definición epistemológica, psicopedagógica, filosófica y sociológica de sus fundamentos y la metodología de implementación. Esto implica que además de la capacitación de docentes, se requiere de la preparación de recursos curriculares y didácticos que viabilicen su concreción. Uno de los recursos requeridos es la creación de un modelo didáctico que permita llevar al aula el modelo propuesto. Este artículo, expone el proceso realizado para la construcción de una propuesta de operacionalización de competencias matemáticas, que permita tanto la preparación de experiencias de aprendizaje como la evaluación de las mismas. El modelo de operacionalización de competencias que aquí se expone es un primer resultado del trabajo desarrollado como parte de la investigación "Nivel de desarrollo de las competencias matemáticas en los estudiantes del segundo año de la carrera del Profesorado en Matemática de la UPNFM en la modalidad presencial, Tegucigalpa, en el tercer periodo del año 2013" y ha servido de base para el diseño de la prueba y el análisis de los niveles de competencia alcanzados por los estudiantes según el desempeño mostrado en el desarrollo de la misma.

Palabras clave: Competencias matemáticas, niveles de complejidad, procesos, tareas, contexto de aplicación.

A. El diseño curricular basado en competencias

La sociedad actual plantea nuevas demandas a la educación, dada su dinámica de cambios, que ha creado una sociedad del conocimiento, un mundo globalizado cargado de incertidumbres. Obliga a crear un nuevo enfoque que permita a los estudiantes convertirse en personas capaces de integrarse en el mundo actual, y de seguir aprendiendo a lo largo de su vida.

Esta situación ha suscitado una tendencia bastante importante, para reestructurar programas educativos y orientarlos hacia un enfoque basado en competencias. Siguiendo a Gonzales y Wagenar (2003), el empleo de competencias, "contribuye a mejorar la pertinencia de los estudios, orientar la educación hacia el aprendizaje, favorecer el reconocimiento internacional y la movilidad nacional e internacional".

En el caso de Honduras, es hacia el año 2006, cuando la UPNFM inicia un proceso de reforma académica con el fin de superar las debilidades detectadas a través del proceso de autoevaluación realizada entre el 2000-2002.

[I]UPNFM, Honduras.

Para ello, después de revisar varias tipologías y conceptualizaciones se adscribe al Proyecto Tuning América Latina (Beneitone, Esquetine, Gonzáles, Marty, Siufy y Wagenaar (2007)(eds) el cual propone un "sistema de competencias como elementos de base para diseñar planes de estudio de las titulaciones de educación superior".

Referido a esta reestructuración curricular, en el caso de la carrera de profesorado en matemática se mencionan dos aspectos importantes. El primero de ellos, manifiesta la intencionalidad de dicha modificación curricular:

Se hace necesario[...] que respondan a los desafíos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática a nivel nacional, regional e internacional, que sean críticos, propositivos y con sensibilidad social (UPNFM, 2008, p.9).

Y el segundo aspecto indicando, puntualiza por qué se decidió seguir el enfoque basado en competencias:

> Bajo el enfoque basado en competencias profesionales, lo que se pretende es brindar una formación integral a la persona como ciudadano de un país y del mundo, por medio de nuevos enfoques orientadosal aprendizaje significativo. En este sentido las competencias no se reducen al simple desempeño profesional, tampoco a la sola apropiación de conocimientos para saber hacer, sino que implica todo un conjunto de capacidades que se desarrollan a través de procesos, que conducen a la persona a ser competente en múltiples áreas: cognitivas, sociales, culturales, afectivas, axiológicas y profesionales. (UPNFM, 2008, p.17).

De esta forma expresa la fundamentación y orientación del proceso educativo y un compromiso de trabajo en la dirección de promover el desarrollo de las capacidades humanas, a través del logro de competencias académico-profesionales.

El desarrollo de competencias requiere de planteamientos y acciones intencionadas y muy bien planificadas. El asumir que las competencias son los elementos estructurantes del nuevo currículo, implica un replanteamiento de la metodología didáctica y de evaluación, así como de reinventar nuevos recursos curriculares; para ello el equipo investigador ha desarrollado una aproximación hacia la operacionalización de competencias matemáticas que pueda contribuir a la discusión y a la creación de los instrumentos que permitan cada vez más visualizar una mejor concreción de la propuesta curricular y de las competencias matemáticas.

B. Las competencias matemáticas

Siguiendo los conceptos elaborados por el equipo de experto de PISA, la competencia matemática se concibe como

> La capacidad que tiene un individuo de identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar e implicarse en las matemáticas de una manera que satisfaga sus necesidades vitales como un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (PISA,2006, p.13).

Esta definición, como se puede notar apunta las componentes cognitivas como son los conocimientos y las habilidades, y también componentes afectivos y axiológicos. Esto coincide con como lo muestra la figura adjunta.

Figure 94: Adaptado de Tobón (2010), D'Ámore, Godino y Fandiño.

Como se puede notar el concepto de competencias es, siguiendo a D'Amore, Godino y Fandiño "dinámico y polisémico? (2008, p.11). Complejo porque conlleva la integración de saberes, ?componentes interactuantes e inseparables en las expresiones no únicas de la competencia: uso (de naturaleza exógena) y dominio (de naturaleza endógena) en la elaboración cognitiva, interpretativa y creativa de conocimientos matemáticos que relacionan contenidos diferentes". Dinámico, porque engloba no solo conocimientos matemáticos, sino también factores meta-cognitivos, afectivos que es el resultado de conocimientos diversos interconectados.

Constituyen referentes importantes para este estudio: la propuesta de Principios y Estándares para la Educación Matemática del National Council of Teachers of Mathematics, (NCTM, 2000), la caracterización de las competencias matemáticas en la reforma curricular portuguesa de Abrantes (2001), las competencias matemáticas del currículum danés propuestas por Mogen Niss (2002), el modelo teórico para la evaluación internacional de estudiantes, PISA (2003), la propuesta de un modelo curricular para la formación de competencias matemáticas de Horacio Solar (2011) de Chile.

A continuación se muestra un cuadro que resume las categorías que diferentes autores relacionan con las competencias matemáticas.

KOM (MogenNiss[4])	Proyecto MAT 747 (Paulo Abrantes)	PISA	NCTM	ICFES	TIMMS[5]
Pensarmatemáticamente	*Pensar matemáticamente*	*Pensar y Razonar*	,·	*Razonamiento y argumentación.*	*Conocimiento: Recordar, reconocer, calcular, medir, clasificar*
Formular y resolver problemas matemáticos	*Capacidad para desarrollar procesos de resolución de problemas*	*Plantear y resolver problemas*	*Resolución de Problemas*	*Planteamiento y resolución de problemas.*	
Razonar matemáticamente	*Razonamiento matemático Analizar errores e intentar estrategias alternativas*	*Argumentar*	*Razonamiento y Demostración*		*Aplicación: Representar, modelar, resolver problemas rutinarios*
Modelar matemáticamente		*Modelar*	,		
Hablar en, con y acerca de las matemáticas	*Discutir con otros y comunicar el pensamiento Matemático*	*Comunicar*	*Comunicación,*	*Comunicación, Modelación. Representación*	*Razonamiento: analizar, generalizar, sintetizar, justificar, resolver problemas*
Representar entidades matemáticas		*Representar*	*Representación*		
Manejar símbolos y formalismos matemáticos	.	*Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones*			
Hacer uso de ayudas y herramientas		*Usar material herramientas y recursos apoyo.*			
	Disposición, Sentir placer y seguridad en sí mismo		*Conexiones*[6]		

Figure 95: Matriz comparativa entre las propuestas de competencias matemáticas.

Evidentemente, se puede apreciar en el cuadro 1 las grandes coincidencias de las propuestas en los modelos presentados. El gran aporte del NCTM es que llama la atención al diferenciar entre estándares de proceso y estándares de contenido. La gran contribución está al señalar que las estrategias de enseñanza de la matemática deben enfocarse de manera intencional hacia tales procesos, esto es, al fortalecimiento de las competencias matemáticas no solo a los contenidos.

Es importante señalar que en PISA la competencia "Pensar y Razonar" se organizan en una sola y se incluye la competencia matemática "Argumentar", competencia que no está dentro de la clasificación que hace Niss (2002).

Los estándares de contenido son las áreas de contenido matemático. En las matemáticas escolares se identifican: Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de datos y Probabilidad. De aquí que autores como MEN(1998) de Colombia, y el PCAP (2010) de Canadá, relacionan y categorizan el "Pensamiento Matemático" según las ramas de la matemática, así: Aritmética, el Pensamiento Numérico; Geometría, el Pensamiento Espacial y el Métrico; Álgebra y el Cálculo, el Pensamiento Métrico y el Variacional y Probabilidad y Estadística, el Pensamiento Aleatorio. Coinciden en que el Pensamiento Lógico, pasa a la categoría de estándares de proceso o competencias matemáticas.

Luego de estas precisiones conceptuales, se pasa a la operacionalización de competencias.

C. Operacionalización de competencias. Conceptos claves.

De acuerdo con PISA (2006), el nivel de competencia matemática de una persona se aprecia en la manera en que emplea sus conocimientos y habilidades matemáticas para resolver problemas de diferentes situaciones de la vida del ciudadano (p.83). Esta es la razón por la cual al profesor le corresponde crear escenarios de aprendizaje donde el estudiante pueda construir sus aprendizajes y mostrar sus competencias.

○ Variables a considerar

Una competencia engloba tres dimensiones contenidos, procesos y situaciones o contextos, estos son aplicados para resolver problemas de la vida adulta y afrontar exigencias de diferente nivel y tipo. De acuerdo con PISA (2003), y Solar(2011), son cuatro variables a considerar para el desarrollo de un modelo que permita formar y evaluar las competencias matemáticas. Estas son:

- Tareas: Entendiéndose como la actividad, el problema que el estudiante debe resolver.
- Contexto de aplicación: Entendiéndose como los ámbitos en los que la persona utiliza las matemáticas. La situación o contexto juega un papel determinante, asegura que el aprendizaje se aplique a satisfacer necesidades del ciudadano y se organizan de acuerdo con el grado de proximidad con el alumno. PISA identifica cinco tipos de situaciones o contextos: personales, educativas, profesionales, públicas y científicas.
- Nivel de complejidad : Dado que las tareas propuestas a los estudiantes deben plantear diferentes tipos y niveles de demandas cognitivas, esta variable se refiere al nivel de dificultad de la situación problema planteado.(PISA,2006, p. 112). Se plantean los siguientes niveles de complejidad:
  - La reproducción se caracteriza por considerar representaciones y definiciones estándar, cálculos rutinarios, procedimientos rutinarios y la solución rutinaria de problemas.
  - La conexión se caracteriza por considerar la construcción de modelos, solución, traducción e interpretación estándar de problemas y la utilización de métodos múltiples claramente definidos.

- La reflexión se caracteriza por considerar el planteamiento y solución de problemas de nivel complejo, reflexión e intuición, el uso de enfoques matemáticos originales, métodos múltiples complejos y la generalización.

- Contenido: Definidos en cuatro grandes ámbitos que tiene que ver con las áreas del pensamiento matemático: cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e incertidumbre.Los contenidos requeridos no son diferentes a los curriculares pero al estar referidos a contextos de vida real se centran en aspectos más sólidos y funcionales.

○ El modelo de operacionalización

El propósito del modelo es diseñar un instrumento que permita determinar diferentes niveles en el logro de las competencias matemáticas.

Se toma como base los siguientes conceptos clave:

- Nivel de desarrollo: Se visualiza como el grado de dominio y ejecución en el cual los estudiantes se encuentran en una determinada competencia. Para identificar tal nivel se introducen dos elementos de conceptualización y de medida.
- Niveles de complejidad: Las diferentes tareas o procesos de lectura deben poseer distintos niveles de profundidad cognitiva que permitan evaluar las competencias. Cada nivel tiene progresivamente un grado más complejo que el anterior y responde a la dificultad de la tarea en términos de los requerimientos para su solución: reproducción, conexión o reflexión.
- Indicador: Es una actividad o un elemento de evaluación que caracteriza la competencia desde la óptica de su medición permitiendo distinguir su dominio o no. Evolucionan de acuerdo con el Nivel de complejidad.
- Descriptor: Los descriptores se visualizan como las expectativas respecto a los logros y habilidades relacionadas con determinado indicador, es decir, son las evidencias significativas que permiten constatar, estimar, valorar e identificar el nivel de dominio de un estudiante en dicho indicador.
- Dominio de la competencia: Describe las etapas sucesivas en el desarrollo de la competencia, especificando los desempeños que el estudiante debe mostrar en el desarrollo de la tarea que corresponde a determinada competencia.

Con estos elementos se siguió un proceso de operacionalización según se muestra en la siguiente figura.

Figure 96: Esquema seguido para la operacionalización de las competencias

○ La propuesta de operacionalización

La operacionalización de cada una de las competencias se muestra a continuación:

Competencia 1. Comunicación:

Dominio de la competencia: Comunica, expresa y presenta conocimiento, razonamientos matemáticos o conclusiones con claridad, precisión y rigurosidad utilizando un lenguaje adecuado tanto verbal, oral o escrito, o el no verbal, tomando en consideración la audiencia a la que se dirige, los diferentes sentidos e intenciones de la comunicación y los recursos tecnológicos. Niss (2011; pag.69).

Nivel de Complejidad	**Indicador**	**Descriptor**	
	I.	**COMUNICACION**	
A. Reproducción	1. Comprende y expresa oralmente y por escrito cuestiones matemáticas sencillas de objetos familiares mencionando cálculos y resultados desarrollados en la solución del problema previamente conocido.	1	Interpreta la situación expuesta, opera matemáticamente pero no comunica ni explica el procedimiento utilizado.
		2	Comunica sus ideas matemáticas, nombres y propiedades en procedimientos rutinarios y algoritmos habituales pero no explica sus cálculos y resultados obtenidos
		3	Comunica sus ideas matemáticas, nombres y propiedades en procedimientos rutinarios y algoritmos habituales. Explica sus cálculos y resultados obtenidos
B. Conexión	1. Comprende y expresa oralmente y por escrito cuestiones matemáticas sencillas de objetos familiares explicando cálculos resultados, estableciendo relaciones entre distintas áreas matemáticas desarrolladas en la solución del problema.	1	Interpreta la situación expuesta, opera matemáticamente pero no comunica ni explica el procedimiento utilizado.
		2	Comunica sus ideas matemáticas, nombres y propiedades en procedimientos y algoritmos habituales pero no explica sus cálculos, resultados ni relaciones matemáticas utilizadas
		3	Comunica sus ideas matemáticas, nombres y propiedades en procedimientos y algoritmos habituales. Explica sus cálculos, resultados y relaciones matemáticas utilizadas
c. Reflexión	1. Comprende y expresa oralmente y por escrito cuestiones matemáticas explicando cálculos, resultados desarrollados en la solución de problemas que implican relaciones complejas entre ellas relaciones lógicas	1	Interpreta la situación expuesta, opera matemáticamente pero no comunica ni explica cálculos y resultados desarrollados en la solución de problemas que implican relaciones complejas entre ellas relaciones lógicas.
		2	Interpreta la situación expuesta, opera matemáticamente y comunica sus ideas matemáticas, nombres y propiedades en procedimientos y algoritmos habituales pero no explica sus cálculos, y resultados desarrollados en la solución de problemas que implican relaciones complejas entre ellas relaciones lógicas.
		3	Interpreta la situación expuesta, opera matemáticamente y comunica sus ideas matemáticas, nombres y propiedades en procedimientos y algoritmos habituales además explica sus cálculos, y resultados desarrollados en la solución de problemas que implican relaciones complejas entre ellas relaciones lógicas.

Competencia 2. Representación:

Dominio de la competencia: Construye y manipula imágenes mentales de objetos e ideas matemáticas, usando papel y lápiz, software matemático, modelos físicos u otros recursos; sus transformaciones y sus diversas traducciones, de manera correcta realizando conexiones matemáticas, a fin de resolver problemas o situaciones de la vida real con éxito.

Nivel de Complejidad	Indicador	Descriptor	
II. REPRESENTACION			
A. Reproducción	1. Descodifica, codifica e interpreta una representación matemática familiar y pasa de un registro de representación a otro si la situación lo requiere.	1	No logra descodificar una representación previamente conocida. Realiza el cambio de una representación conocida a otra conocida pero no es correcta.
		2	Descodifica una representación conocida y la interpreta de manera correcta realiza el cambio de una representación a otra es parcialmente correcto.
		3	Descodifica una representación, la interpreta de manera correcta y logra codificarla de acuerdo a sus experiencias. Realiza el cambio de una representación a otra de manera completa y correcta
B. Conexión	1. Descodifica, codifica e interpreta representaciones poco familiares de objetos entre distintas áreas matemáticas diferenciando entre distintas formas de representación	1	Descodifica una representación más o menos familiar pero no logra interpretarla adecuadamente.
		2	Descodifica una representación más o menos familiar y la interpreta de manera correcta pero no logra utilizar un registro de representación diferente al que se le está dando.
		3	Descodifica una representación más o menos familiar, la interpreta de manera correcta. El cambio de representación es correcto y completo.
c. Reflexión	1. Descodifica, codifica e interpreta formas de representaciones de objetos matemáticos no familiares, selecciona y cambia representaciones de manera creativa	1	Descodifica una representación no familiar pero no logra interpretarla adecuadamente utilizando un cambio de representación incorrecto
		2	Descodifica una representación no familiar y la interpreta de manera correcta, pero el registro de representación utilizado no es pertinente
		3	Descodifica una representación no familiar, la interpreta de manera correcta reflexionando sobre el registro de representación utilizada.

Competencia 3. Plantear y resolver problemas:

Dominio de la competencia: Resuelve, traduce y demuestra problemas matemáticos que le permitan dar solución a problemas contextualizados en la vida cotidiana, pretendiendo desarrollarla capacidad para proyección social, la movilización de los saberes necesarios para el desempeño profesional exitoso, y entre otras cosas, una actitud crítica y propositiva en la búsqueda y solución de los problemas, con una visión de educación permanente, y con conciencia de la responsabilidad profesional.

Competencia 4. Razonamiento y argumentación:

Dominio de la competencia: Distingue entre distintos tipos de asertos (definiciones, teoremas, conjeturas,

Nivel de Complejidad	Indicador	Descriptor	
III. PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS			
A. Reproducción	1. Soluciona reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados utilizando enfoques y procedimientos estándar.	1	Aplica procesos matemáticos estándar en la resolución del problema, pero los cálculos son incorrectos.
		2	Selecciona el algoritmo de solución adecuado pero los cálculos que realiza son incompletos.
		3	Resuelve correctamente el problema.
B. Conexión	1. Soluciona problemas aplicando procesos matemáticos mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también mas independientes que implica establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación	1	Interpreta adecuadamente el enunciado, pero las conexiones entre los diferentes contenidos matemáticos que necesita son deficientes.
		2	Interpreta adecuadamente el enunciado, identifica los datos del problema y establece las conexiones necesarias pero el procedimiento matemático no es pertinente ni adecuado por lo cual la respuesta es incorrecta.
		3	Identifica los datos, establece las conexiones necesarias y el procedimiento matemático es pertinente y adecuado, la respuesta es correcta.
C. Reflexión	1. Expone y formula problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicación estándar pero también de procedimientos mas originales que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación. También conlleva reflexionar sobre las estrategias y las soluciones	1	Interpreta adecuadamente el enunciado, aplicando procesos matemáticos, pero el procedimiento de resolución es incorrecto o incoherente con los datos del problema.
		2	Interpreta adecuadamente el enunciado, aplicando procesos matemáticos pero el procedimiento matemático no es pertinente ni adecuado por lo cual la respuesta es incorrecta y no reflexiona sobre los procedimientos aplicados y resultados obtenidos.
		3	Interpreta adecuadamente el enunciado, aplicando procesos matemáticos el procedimiento matemático es pertinente y adecuado por lo cual la respuesta es correcta y reflexiona sobre los procedimientos aplicados y resultados obtenidos discriminando entre las mejores alternativas de solución.

hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionales); comprende y sabe manejar el alcance y los límites de los conceptos matemáticos que hagan al caso; entiende en qué consisten las pruebas matemáticas y qué las diferencia de otro tipo de razonamientos matemáticos; sigue y evalúa cadenas de argumentaciones matemáticas de distintos tipos; tiene un sentido heurístico, así como crea y expresa argumentaciones matemáticas.

D. Comentarios finales

- El modelo presentado llama la atención acerca de elementos curriculares y didácticos necesarios para el fortalecimiento de las competencias matemáticas.

- Comprender que el desarrollo y evaluación de competencias matemáticas requiere de procesos heurísticas sistemáticos

Nivel de Complejidad	Indicador		Descriptor
IV. RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACION			
A. Reproducción	1. Conoce, sigue, entiende y justifica un razonamiento matemático familiar.	1	Conoce y sigue un razonamiento matemático familiar pero su justificación es incorrecta
		2	Conoce y sigue un razonamiento matemático familiar pero su justificación es incompleta
		3	Conoce, sigue y entiende un razonamiento matemático familiar justificando correctamente
B. Conexión	1. Conoce, sigue, entiende y justifica un razonamiento matemático poco familiar conectando distintas áreas de la matemática.	1	Conoce y sigue un encadenamiento de pasos sin establecer relaciones entre conceptos matemáticos por tanto su justificación es incorrecta
		2	Conoce y sigue un razonamiento matemático poco familiar con relaciones entre algunos conceptos matemáticos pero su justificación es incompleta
		3	Conecta distintas áreas de la matemática para argumentar y justificar con propiedades y teoremas su respuesta de manera completa y correcta.
c. Reflexión	1. Mantiene una actitud activa y reflexiva para argumentar y evaluar encadenamientos matemáticos usando la heurística y la intuición, generalizando la solución.	1	Argumenta utilizando propiedades y relaciones entre algunos objetos matemáticos en situaciones complejas o nuevas pero su justificación es incorrecta
		2	Argumenta y evalúa utilizando propiedades y relaciones entre algunos objetos matemáticos en situaciones complejas o nuevas pero su justificación es incompleta.
		3	Argumenta y evalúa utilizando propiedades y relaciones entre objetos matemáticos en situaciones complejas o nuevas, justificando correctamente y generalizando la solución

- El modelo de operacionalización de competencias que aquí se expone es un aporte que muestra una tecnología evaluativa coherente con la teoría presentada, además ejemplifica el interés por conocer resultados de una reforma curricular en proceso.
- Enseñar matemáticas es más que enseñar contenidos.
- Las competencias por su definición demandan movilización e integración de los saberes (saber conocer, saber hacer y saber ser), la persona es competente cuando puede movilizar e integrar los saberes para resolver un problema.
- "La calidad de un programa de formación viene dada por la relevancia de las competencias que se propone, mientras que su eficacia responde al modo en que éstas se logran"(Rico, 2006).

Referencias

[1] Beneitone, P. Esquetine, c., Gonzáles, J.,Marty, M., SiufyM.yWagenaar, R. (2007)(eds). Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina, en el Informe final

[2] Proyecto Tuning-América Latina. 2004-2007. Publicaciones Universidad de Deusto.

[3] D'Amore, B. (2005). Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática. México: Reverté S.A.

[4] Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN.Bogotá.

[5] NCTM. (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática. España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

[6] OCDE. (2006a). PISA marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. España: Santillana.

[7] OCDE. (2006b). PISA: marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. España: Santillana.

[8] PISA. (2003). Marcos Teóricos de PISA. Obtenido de Conocimientos y destresas en Matemáticas, Lectura, Ciencia y solución de problemas : Recuperado(s.f) en http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/58/25/39732603.pdf

[9] Rico, L. (2007): La competencia matemática en PISA. PNA, 1(2), 47-66. Recuperado el 05 de Junio de 2012 de: http://www.pna.es/Numeros/pdf/Rico2007La.pdf

[10] Rico, L., y Lupiáñez, J. L. (2008). Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular. Madrid: Alianza Editorial

[11] Solar, H., Azcárate, C., Deulofeu, J. (2009). Competencia de modelización en la interpretación de gráficas funcionales. En M.J.

[12] González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 499-510). Santander: SEIEM. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1673/1/326_Solar2009Competencia_SEIEM13.pdf

[13] Tobón, S. (2008). La formación basada en competencias en la educación superior: El enfoque complejo. México: Universidad Autónoma de Guadalajara.

[14] Tobón S. (2010). Secuencias didácticas: Aprendizaje y Evaluación de Competencias. México.

Interpretación etnomatemática de la canasta indígena Bribri de Costa Rica

VÁSQUEZ, ANA PATRICIA[I]

Costa Rica

Resumen

Las canastas que fabrican los indígenas Bribris de Costa Rica, fueron tratadas desde el punto de vista matemático a partir del año 2005 por estudios etnomatemáticos, cuyo análisis consistió en la identificación de las figuras geométricas utilizadas, en el proceso de su construcción y en los acabados finales de dichos artefactos. A la luz de estudios y análisis posteriores de la autora, y en la búsqueda del significado de las figuras geométricas en el mito, se logró interpretar bajo cómputos matemáticos, la razón fundamental por la cual esta cultura revela en su historia mítica, que en cada canasta de base triangular está reflejada una vida humana.

Palabras clave: Pensamiento matemático, etnomatemática, cultura, formas geométricas, patrones numéricos.

A. Presentación

Los indígenas bribris de Costa Rica, cuentan con una enorme riqueza de conocimientos en su cultura ancestral, donde una parte de ellos, han sido plasmados en artefactos de cultura material, como por ejemplo las canastas artesanales de base triangular, hexagonal, redonda u ovalada. Estas canastas fueron destinadas por su Dios -Sibö-[1] para los indígenas de la etnia.

Durante la confección y en los acabados finales de las canastas, se ha identificado el uso concreto de figuras, donde se ve reflejado el pensamiento geométrico del grupo, y la aplicación específica que se da a la transformación de curvas en el contorno de dichos artefactos. A su vez, se evidencia la relación intrínseca de las canastas con la cosmovisión y la historia mítica de este pueblo.

Las canastas que fabrican los indígenas bribris, fueron abordadas desde el punto de vista matemático por Gavarrette & Vásquez (2005)[2] , en su tesis de grado de la Universidad Nacional de Costa Rica. Este acercamiento se sustentó en la observación e identificación de las figuras geométricas participantes en los procesos de construcción y acabados finales de dichos artefactos. No obstante, en ese momento fue imposible brindar un aporte matemáticamente interpretativo, que justificara porque el pueblo bribri, considera que las canastas de base triangular, son depositarias en su cosmovisión de una vida humana.

[I]UNA, Costa Rica.

[1]Según Jara et al. (2003), Sibö es el Dios creador de los indígenas bribris, pero también héroe cultural, que vivió en la tierra haciendo todas las cosas que los seres humanos iban a hacer después de ser creados. Espíritu benigno a quien se le achaca todo lo bueno del mundo. Es omnipresente.

[2]Tesis de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica, denominada "Etnomatemática en el Territorio Talamanca Bribri".

Debido a estudios y análisis posteriores e independientes de la presente proponente, y en la búsqueda del significado de las figuras geométricas en los pueblos originarios en América, se logra descubrir a la luz de cómputos matemáticos, la razón fundamental por la cual este pueblo, indica que en cada canasta está reflejada una vida humana.

B. Marco de referencia conceptual

La historia mítica y la cosmovisión son esenciales para el sustento de la cultura de un pueblo, en este caso del Pueblo Indígena Bribri de Costa Rica. Es así, como los artesanos de este grupo, producen artefactos de cultura material que resguardan información importante, la cual se encuentra codificada por medio de conceptos matemáticos y geométricos articulados.

Es así como se expresa el siguiente marco de referencia conceptual.

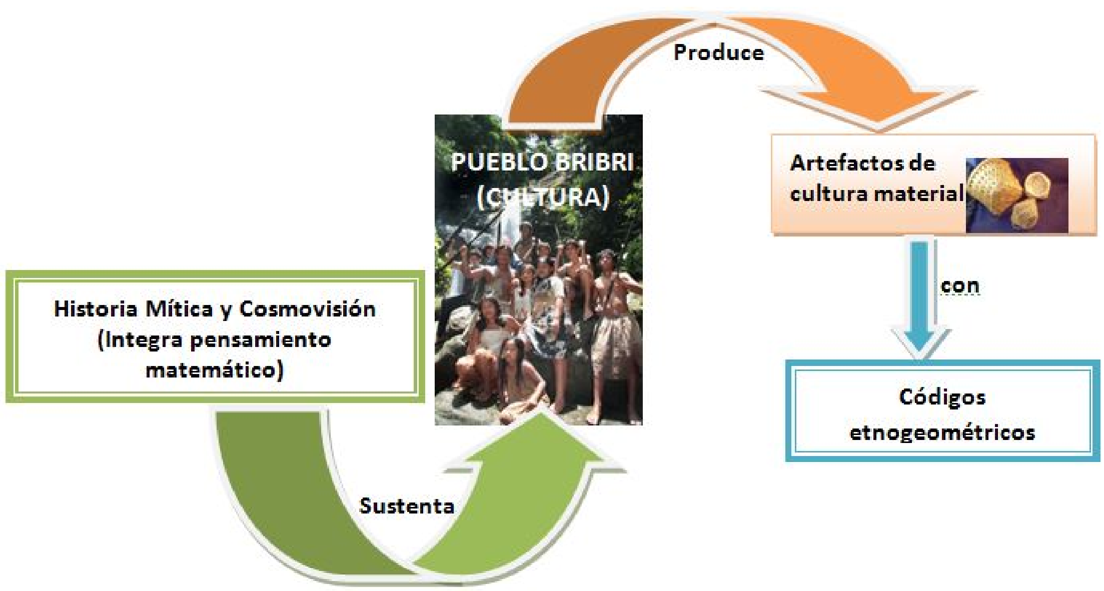


Figure 97: Fuente: Elaboración de Ana Patricia Vásquez Hernández. Universidad Nacional, Campus Sarapiquí. Costa Rica. 2013

C. Metodología

Metodológicamente, este trabajo se clasifica como una investigación no experimental, dado que, como lo afirma Barrantes (1998), "...el control directo no es posible porque sus manifestaciones ya ocurrieron"; debido a que se fundamenta en el conocimiento ancestral de una cultura originaria, cuyos saberes han sido heredados de generación en generación, por tradición oral. Su categoría es exploratoria y descriptiva, dentro del paradigma naturalista, humanista. Su enfoque es cualitativo bajo la línea etnográfica.

Se fundamenta especialmente en la observación participante y la investigación acción como Greenwood (2000) lo indica, ya que esta investigación se desarrolló viviendo por un periodo largo de tiempo de la proponente de esta ponencia, con el pueblo indígena bribri (como visitante del territorio por trece años y viviendo en la localidad indígena bribri de Amubri Talamanca en los años 2004 y 2005 como docente de matemática del Colegio SuLayöm). En esta estancia, se dan conversaciones largas y se participa ampliamente en la vida local. Se apoya este trabajo con los estudiantes de secundaria de la ponente, ya que ellos asumieron el rol de investigadores locales también. El trabajo fue colaborativo y de prácticas multidisciplinarias. También es apoyado metodológicamente, por la fundamentación que aporta Grenier (1999), sobre el conocimiento indígena y la metodología que ofrece para el investigador.

D. Análisis de datos

Los artesanos bribris construyen diversos tipos de canastas, las cuales se clasifican de acuerdo a la forma que muestra su base inferior, ya que es a partir de esta figura, donde se hace evidente la presencia concreta del pensamiento geométrico.

Esencialmente se fabrican tres tipos de canastas según Carlos Jackson indígena de la etnia (comunicación personal, 05 de setiembre de 2004. Uatsi-Talamanca), las de base triangular que en bribri se llama -jaba-; las de base hexagonal que se llama -kó-; y la de base ovalada o redonda que se llama -penéch-. En la siguiente imagen se muestran los tipos de canastas mencionados en el párrafo anterior.

IMAGEN #1. FOTOS DE CANASTAS BRIBRIS

Figure 98: Fuente: Colección de Ana Patricia Vásquez Hernández. Costa Rica. 2010

En las narraciones e historias míticas de los indígenas del grupo, Sánchez y Mayorga (1994) recopilaron la importancia que se le da a las canastas. Así:

Sibö hizo a los primeros indígenas de semillas de maíz /dtsö/. Trajo las semillas de un lugar que se llama SuLa'kaska (Lugar del Destino). De ahí Sibö trajo semillas de distintos colores (...). En un principio, Sibö mantenía las semillas de maíz /dtsö/ en una canasta forrada por dentro con hojas de bijagua(...)

Fundamentada, en los argumentos científicos sobre la gestación, en un trabajo personal de análisis matemático emprendido sobre el significado de los símbolos en América (Shepherd, 2003) se llegó a demostrar cuál es el cómputo matemático existente y codificado en las canastas. Lo anterior para ser consecuentes con la fundamentación que realizan los bribris en la historia mítica y en la cosmovisión donde indica que la vida humana está reflejada en una canasta.

E. Conclusiones

a) La correlación existente entre el pensamiento matemático y geométrico de un pueblo originario, se ve manifestado a través de la creación de artefactos de cultura material.

b) Hay una consecuencia de matemática que se refleja en la historia mítica y la cosmovisión indígena bribri, plasmada en las canastas de base triangular, a través de cómputos codificados.

c) La interpretación matemática realizada, da respuesta a las expresiones de los miembros del pueblo originario sobre la creencia que en cada canasta de base triangular está reflejada una vida humana.

Referencias

[1] Bozzoli, M. (1979). El nacimiento v la muerte entre los bribris. Costa Rica: Editorial Universidad de Costa Rica.

[2] Gavarrette, M. Vásquez, A. (2005). Etnomatemática en el Territorio Indígena Talamanca Bribri. Tesis de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática. Costa Rica: Universidad Nacional.

[3] González, A. González, F. (2000). La casa cósmica talamanqueña y sus simbolismos. Costa Rica: Editorial Universidad Nacional Estatal a Distancia.

[4] Greenwood, D. (2000). De la observación a la investigación acción participativa: una visión crítica de las prácticas antropológicas. Revista de antropología Social de Cornell University. 9: 27-49.

[5] Grenier, L. (1999). Conocimiento indígena: guía para el investigador. Costa Rica: Editorial Instituto Tecnológico de Costa Rica y el Centro Internacional Canadiense de Investigadores para el Desarrollo.

[6] Jara, C. y otros. (2003). Diccionario de mitología Bribri. Costa Rica: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

[7] Sánchez, J. Mayorga, G. (1994). Se? Siwá. Costa Rica: Editorial UNESCO.

[8] Shepherd, R. Shepherd, R. (2003). 1000 Símbolos: Lo que significan las formas en el arte y en el mito. Barcelona, España: Editorial Acanto S.A.

Proyecto FUNDER Etnomatemática: Metodología en la construcción de unidades didácticas contextualizadas

VÁSQUEZ, ANA PATRICIA[I] TRIGUEROS, EITHEL

Costa Rica

Resumen

El presente trabajo muestra la metodología de un proyecto de etnomatemática financiado con Fondos para el Desarrollo de las Regiones (FUNDER), con vigencia 2014-2015, coordinado por el Campus Sarapiquí de la Universidad Nacional de Costa Rica. Su objetivo es desarrollar capacidades académicas para la confección colectiva de obras didácticas de matemática contextualizadas y validadas por territorios indígenas, para el fortalecimiento de la identidad cultural y el respeto por el derecho indígena a un sistema de educativo intercultural.

Palabras clave: Etnomatemática, recursos didácticos, educación intercultural.

A. Introducción

El presente artículo muestra la descripción de la metodología de un proyecto de etnomatemática con vigencia 2014-2015, coordinado por el Campus Sarapiquí de la Universidad Nacional de Costa Rica, con el apoyo de la Dirección Regional de Educación SuLá de Talamanca del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. Se enmarca dentro del campo estratégico de la educación y el desarrollo integral, cuyas temáticas concordantes son: pueblos originarios, sectores poco favorecidos por la sociedad y educación para una ciudadanía democrática.

B. Antecedentes

En el año dos mil, ciento ochenta y nueve países miembros de las Naciones Unidas plantearon ocho objetivos cuantificables con el fin de ser alcanzados en el año 2015. A estos objetivos, se les denomina los "Objetivos de Desarrollo del Milenio"; donde uno de ellos vincula una estrecha relación con la educación y la cultura.

Es a partir de la existencia de estos, que la UNESCO y la CEPAL, crean a partir del año 2002, un proyecto regional de educación para América Latina y el Caribe (PRELAC), para realizar cambios sustantivos en las políticas y prácticas educativas, para asegurar aprendizajes de calidad donde nadie quede excluido (UNESCO, 2013).

Costa Rica, realiza un cambio en su Política Educativa en el año 2008, denominado "El centro educativo de calidad como eje de la educación costarricense", que expresa una visión de educación costarricense que armonice

[I]UNA, Costa Rica.

las relaciones entre el ser humano y la naturaleza, dentro de un marco de respeto por la diversidad cultural y étnica (Garnier, 2008).

En materia de educación matemática, en el año 2013 da inicio la implementación de nuevos Programas de Estudio para esta disciplina, por medio de un programa de transición, cuyo enfoque principal del currículo es la resolución de problemas. Su trabajo se enfatiza en problemas asociados a entornos reales, físicos, sociales y culturales de los educandos.

Por su parte, desde el punto de vista matemático, se ha evidenciado desde el año 2005, la existencia de una riqueza científica en comunidades indígenas, a partir de los primeros estudios en Costa Rica sobre etnomatemática en comunidades originarias actuales. Estos trabajos los presentaron Vásquez y Gavarrette (2005) en su tesis de Licenciatura denominada "Etnomatemática en el Territorio Talamanca Bribri". Con este trabajo se disminuye la tendencia del pensamiento popular a concebir que el conocimiento matemático desapareció con las comunidades precolombinas y que este país carece de conocimientos matemáticos autóctonos.

Por estos motivos, se ha establecido el proyecto de Etnomatemática: Construcción de Unidades Didácticas Contextualizadas, para impulsar de manera local, los cambios positivos generados en materia de educación matemática e impactar directamente el accionar de los docentes y educandos en los centros educativos. Bajo la etnomatemática como uno de los ejes centrales para la recuperación de saberes matemáticos.

○ Objetivo general

Desarrollar capacidades académicas para la confección colectiva de obras didácticas de matemática para el III Ciclo de la Educación General Básica contextualizadas y validadas por el Pueblo Indígena Bribri/Cabécar a partir de estudios etnomatemáticos, para el fortalecimiento de la identidad cultural y el respeto por el derecho indígena a un sistema de educativo intercultural.

○ Objetivos específicos

1. Caracterizar aspectos referentes a política educativa, programas de estudio, estrategias de enseñanza aprendizaje, interculturalidad, derechos y educación indígena, aspectos históricos, lingüísticos y antropológicos del pueblo indígena bribri para el análisis del estado de situación de la educación matemática en este territorio y la capacitación del equipo del proyecto.

2. Identificar estudios y prácticas etnomatemáticas de la cultura indígena bribri como parte de la recuperación de saberes matemáticos para el establecimiento de convergencias con los nuevos programas de estudio del MEP y la inclusión de los mismos a las obras didácticas.

3. Confeccionar colectivamente obras didácticas interculturales de matemática para el III Ciclo de la Educación General Básica con diseño artístico, de comunicación visual y lingüísticamente contextualizados al Pueblo Indígena Bribri para la contribución de una educación matemática pertinente para este territorio.

4. Socializar las obras didácticas de matemática confeccionadas colaborativamente por la comunidad educativa, para el establecimiento de una propuesta de elaboración de obras didácticas que contribuyan al fortalecimiento de la identidad cultural y el respeto por el derecho indígena a un sistema de educación intercultural.

C. Marco teórico

Dentro del marco teórico o referencial, se tomará en cuenta aquellos conceptos que definen el eje central del presente proyecto así como definiciones de carácter metodológico. Es así, como se menciona que el producto principal del proyecto corresponde a las obras didácticas de matemática para el III ciclo de la Educación General Básica contextualizadas para el Pueblos Indígena Bribri/Cabécar a partir de estudios etnomatemáticos, las cuales contarán con la particularidad de ser interculturales, contextualizadas, traducidas parcialmente al bribri, integrando la recuperación de saberes matemáticos propios de la cultura mediante estudios etnomatemáticos y con un diseño de arte y comunicación visual pertinente.

Es así, como se define la terminología que se utilizará como referente en el desarrollo del presente proyecto mediante la siguiente lista de términos:

a) a) Antropología

b) Arte y comunicación visual

c) Contextualización

d) Didáctica

e) Etnomatemática

f) Etnogeometría

g) Etnografía

h) Etnología

i) Geometría

j) Intercultural

k) Investigación-acción

l) Lingüística

m) Matemática

n) Obra

o) Obra didáctica de matemática

p) Observación participante

q) Pueblo

r) Territorio

s) Validez

D. Metodología

Desde el punto de vista de la parte investigativa de este proyecto, esta se clasifica como una investigación no experimental, dado que, como lo afirma Barrantes (1998), "...el control directo no es posible porque sus manifestaciones ya ocurrieron"; debido a que se trabajará con conocimiento ancestral de una cultura originaria cuyos saberes han sido heredados de generación en generación, por tradición oral. Su categoría es exploratoria y descriptiva, dentro del paradigma naturalista, humanista. Su enfoque es cualitativo bajo la línea etnográfica.

Su metodología en general es la observación participante y la investigación acción, ya que interviene una comunidad, analiza junto con sus miembros las problemáticas en educación matemática y trabaja en conjunto para solucionar la o las problemáticas identificadas. Se trabaja bajo la teoría del aprendizaje colaborativo, ya que es un proceso social en el que a partir del trabajo conjunto y establecimiento de metas comunes, se genera la construcción de conocimientos. (Galindo et al, 2012, p. 1).

El abordaje metodológico del presente proyecto se enfoca en tres etapas a saber: I Etapa de conocimientos previos, II Etapa de abordaje y III Etapa de evaluación y socialización de resultados. La metodología de cada una de ellas se muestra a continuación.

I Etapa. Conocimientos previos(Corto plazo. I cuatrimestre de 2014)

En esta etapa se atiende:

a) Protocolo de ingreso a las comunidades:

   Los protocolos de ingresos representan la estrategia para hacer ingreso a las comunidades respetando las reglas y normativas de los Territorio Indígena, estás son abordadas de manera enfática, ya que es fundamental y muy susceptible a la participación de los miembros de la comunidad educativa. Se establecen las relaciones pertinentes para que el acompañamiento de la Dirección Regional de Educación SuLá en todo el proceso y que la Asociación de Desarrollo (ADITIBTI/ADITICA) como instancia líder en la organización política, participe de toda decisión que se tome dentro y fuera de los territorios, sobre su propio conocimiento matemático.

   El trabajo con los docentes de matemática, los estudiantes y los líderes comunales y espirituales es fundamental, y se llevará a cabo de una manera estrecha y siempre en consulta y aprobación por parte de estos miembros.

b) Capacidades académicas:

   En esta etapa se fortalecen las capacidades docentes por medio de capacitaciones a los miembros del equipo del proyecto para trabajar en el territorio y se establece los lineamientos generales para desarrollar las labores del proyecto. Estas capacitaciones están dirigidas a los académicos de la UNA, los docentes de matemática y algunos estudiantes talentosos de secundaria del territorio. Las capacitaciones mencionadas abarcarán tres grandes temáticas a saber: 1) historia, antropología y lingüística; 2) derechos y educación indígena, interculturalidad, etnomatemática, Política Educativa y nuevos programas de estudio de matemática del MEP; 3) confección de obras didácticas. Estas capacitaciones se certificarán mediante una alianza MEP-UNA.

   También se participa en eventos académicos nacionales e internacionales, donde se desarrollen temáticas atinentes y de interés para desarrollar en los y las docentes las capacidades para confeccionar obras didácticas.

c) Estado de situación:

Comprende todo el conocimiento que será posible recabar por medio de un diagnóstico a cerca de aspectos generales relacionados con la cultura de los pueblos indígenas de interés, como historia, cosmovisión, religiosidad, lingüística, organización social y política, educación, entre otros. Así mismo, se tomarán en cuenta aspectos relacionados con los derechos humanos generales y específicos de estas comunidades, la educación indígena, y temáticas relacionadas con la interculturalidad.

d) Plan de abordaje:

Considerando los resultados de los conocimientos previos, se procederá a elaborar en conjunto, el Plan de Abordaje para la etapa de trabajo de campo del proyecto, donde se toman en cuenta las metas y se vislumbran las estrategias pertinentes para hacer el abordaje. El mismo será establecido en parámetros cronológicos con los permisos correspondientes de instituciones gubernamentales, y locales del territorio indígena. Este trabajo se diseña en reunión general, donde la participación de los involucrados directos e indirectos del proyecto es fundamental para establecer las mejores estrategias, en función de las experiencias con que cuentan cada una de las partes. Así mismo, se construye conjuntamente la estructura de las obras didácticas de matemáticas para su confección.

II Etapa. Abordaje(Mediano plazo: II y III cuatrimestre de 2014 y I Semestre de 2015)

a) Trabajo de campo:

El trabajo de campo será orientado metodológicamente según lo expone Grenier (1999), por mostrar las características más adecuadas para relacionarse con el conocimiento indígena, la protección de los derechos a la propiedad intelectual, el desarrollo del marco del trabajo con comunidades indígenas, y la evaluación y validación del conocimiento por parte de estas comunidades.

Explícitamente en el trabajo con la comunidad se espera una comunicación bidireccional, con la ayuda de traductores en los casos necesarios, tomando en cuenta los investigadores comunitarios, la entrevista individual y grupal, la sensibilidad en cuanto género y poder del conocimiento indígena, reconociendo los límites culturales y las limitaciones del conocimiento indígena.

La participación activa de los docentes y educandos del territorio será fundamental en esta etapa para validar y contextualizar en base a las necesidades del currículo matemático para la educación secundaria. Así mismo, los miembros de las comunidades darán su aporte en pro de la participación e inclusión de estos al proceso educativo.

b) Generación de obras didácticas:

Serán generados por los participantes del proyecto llámese académicos y docentes del Territorio. Estos a su vez serán validados por los estudiantes de secundaria en su uso en las aulas con las buenas prácticas del respeto, hacia estas comunidades, sus miembros y su conocimiento. El papel de los académicos de las universidades en esta etapa, es la de ser aprendiz, ya que se estará bajo la enseñanza de miembros de estos pueblos que son los que tienen el conocimiento y son los expertos.

El diseño base de las obras didácticas será ajustado a los nuevos programas de matemática del MEP por la coordinación general del proyecto, serán los docentes de matemática del territorio y el antropólogo los encargados de la contextualización de los contenidos y la traducción de algunas partes de las obras didácticas al Bribri. Así mismo, esta última actividad también será complementada por servicios profesionales de un lingüista experto en el idioma Bribri. Las obras serán enriquecidas con un diseño de arte y comunicación visual aprobado por la comunidad educativa.

En una última etapa, se incorporarán los conocimientos matemáticos propios que sean autorizados por el pueblo bribri, mediante los estudios etnomatemáticos que desarrollarán los docentes del territorio, la coordinación del proyecto, el antropólogo, los estudiantes y las autoridades indígenas como los awapa(médicos indígenas) por ejemplo.

III Etapa. Evaluación(Largo plazo: II semestre 2015)

a) Validación de resultados:

Las obras didácticas serán validadas por toda la comunidad educativa (docentes de matemática, estudiantes del territorio, líderes comunales, Dirección Regional de Educación SuLá, Departamento de Educación Intercultural del MEP y sus involucrados), por medio de revisiones individuales y colectivas, con el desarrollo de talleres para este fin.

b) Socialización de resultados:

Serán establecidos básicamente dos espacios de presentación y socialización de los resultados de las obras didácticas de matemática para el III Ciclo, una dentro del Territorio Indígena y otra en la Universidad Nacional. No obstante, se ofrecerán espacios para que los miembros del equipo de proyecto u otros interesados, socialicen las experiencias y determinen convergencias que podrían mejorar la educación matemática desde la perspectiva intercultural de las comunidades indígenas.

c) Propuesta colectiva:

Será en consulta colectiva con docentes de matemática de la zona, la coordinación del proyecto y la Dirección Regional SuLá, donde se establecerá una propuesta modelo de confección de obras didácticas pertinentes para los territorios indígenas en general bajo el respeto por el derecho a una educación intercultural. Esta propuesta será presentada al Departamento de Educación Intercultural del MEP.

E. Notas adicionales en metodología

a) Sobre la participación estudiantil

En las labores generales del proyecto la participación de los estudiantes asistentes será activa, apoyarán todas las actividades bajo supervisión y consejo del coordinador de proyecto, asistirá a giras al Territorio Indígena para colaborar en algunas de las actividades del proyecto en vinculación con las comunidades. Apoyan el fortalecimiento de la investigación y extensión involucrándose y comprendiendo los procesos de negociación y de protocolos de ingreso en trabajo con comunidades indígenas. A solicitud de la Dirección Regional de Educación SuLá, se estarán integrando al proyecto estudiantes talentosos de todos los centros educativos del territorio para que se empoderen de esta iniciativa y sean generadores de proyectos análogos en el futuro.

b) Convocatorias

Las labores del proyecto se enmarcan dentro de la política de trabajo de la Dirección Regional, por ende esta instancia será la encargada de realizar las convocatorias a reuniones y la solicitará informes de avances del proyecto. Convocará a reuniones cuando así lo considere necesario de manera que el trabajo establecido estará dentro de una calendarización anual de dicha dirección.

F. Productos esperados al finalizar el proyecto

1. Dos obras didácticas confeccionadas para el III Ciclo de la Educación General Básica con las características de: contextualizadas, vinculadas a los nuevos programas de matemática, con diseño de arte y comunicación visual, con integración de su matemática propia y traducciones a la lengua materna.

2. Equipo del proyecto capacitado en historia, antropología y lingüística, derechos y educación indígena, interculturalidad, etnomatemática, política educativa, nuevos programas de matemática, obras didácticas y derechos de autor.

3. Un diagnóstico de las estrategias de enseñanza y aprendizaje utilizadas por los docentes de matemática de los territorios.

4. Un documento que determine las prácticas y conceptos matemáticos de la cultura a partir de entrevistas a mayores, maestros de lengua y cultura, profesores de matemática, miembros de los pueblos con dominio de la lengua materna y estudios superiores.

5. Un diagnóstico estudiantil elaborado que determine los conceptos y prácticas matemáticos de la cultura indígena y su percepción a cerca de la educación matemática escolarizada que reciben.

6. Documento aprobatorio de las autoridades de los territorios, para integrar los conocimientos matemáticos identificados e incorporarlos a las obras didácticas.

7. Una propuesta elaborada para confeccionar obras didácticas para el resto de los niveles.

8. Un evento realizado para presentar los resultados del proyecto y el cierre del mismo, con un equipo de trabajo empoderado de su propia matemática y educación matemática.

9. Comunicación del proyecto en eventos nacionales e internacionales con cobertura periodística, así como la creación de un video.

Referencias

[1] D'Ambrosio, U. (2008). Etnomatemática. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 1(1). 21-25. Recuperado de: http://www.etnomatematica.org/v1-n1-febrero2008/blanco.pdf

[2] Galindo, R. et al. (2012). Acercamiento epistemológico a la teoría del aprendizaje colaborativo. Revista Apertura, 4(2). 1. Recuperado de: http:www.udgvirtual.udg.mx/apertura/index.php/apertura3/article/view/32 5

[3] Greenwood, D. (2000). De la observación a la investigación acción participativa: una visión crítica de las prácticas antropológicas. Revista de antropología Social de Cornell University. 9: 27-49.

[4] Hernández, R. Fernández, C. Baptista, M. (2010). Metodología de la Investigación. Perú: Mc Graw Hill

[5] Garnier, L. (2008). El centro educativo de calidad como eje de la educación costarricense. Costa Rica: Editorial Ministerio de Educación Pública.

[6] Organización Internacional del Trabajo. Convenio No 169 sobre Pueblos Indígenas y Tribales en Países Independientes. Editorial de la Organización Internacional del Trabajo para América Central, Panamá y República Dominicana. San José, Costa Rica. 2002.

[7] Vásquez, A. Gavarrette, M. (2005). Etnomatemática en el Territorio Indígena Talamanca Bribri. Tesis de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática. Costa Rica: Universidad Nacional.

[8] UNESCO. CEPAL. (sf). Objetivos de desarrollo del milenio: una mirada desde América Latina y el Caribe. Recuperado de: http://www.eclac.cl/publicaciones/xml/1/21541/lcg2331e.pdf