



El Teorema de Markov y su relación con el espectro de Lagrange

| Markov's Theorem and its relationship to the Lagrange spectrum |

| O Teorema de Markov e sua relação com o espectro de Lagrange |

Christopher Martínez Martínez¹

mamc010620@gs.utm.mx

Estudiante de la Maestría en Modelación Matemática
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Huajuapán de León, Oaxaca, México

Alicia Santiago-Santos²

alicia@mixteco.utm.mx

Instituto de Física y matemáticas
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Huajuapán de León, Oaxaca, México

Recibido: 1 de octubre del 2025

Aceptado: 30 de mayo del 2026

Resumen: Los números, la ecuación y el Teorema de Markov son temas importantes en la teoría de números y el área de probabilidad. El objetivo de este trabajo es buscar una comprensión más profunda de los números de Markov, la ecuación de Markov y el Teorema de Markov. Además, explicar la relación que existe entre el Teorema de Markov y el espectro de Lagrange (conjunto de números reales con cierta característica). Por tal razón, se explican a detalle varios conceptos, que ayudarán a la comprensión de estos temas; a saber: fracciones continuas finitas, fracciones continuas infinitas simples, la ecuación diofántica y el espectro de Lagrange con la finalidad de que los interesados en estos temas tengan un escrito lo más auto contenido posible y se adentren a ciertos temas importantes en el área de Álgebra.

Palabras Clave: ecuación de Markov, números de Markov, teorema de Markov, el espectro de Lagrange.

Abstract: Markov numbers, the equation, and Markov's Theorem are important topics in number theory and probability. The objective of this work is to seek a deeper understanding of Markov numbers, the Markov equation, and Markov's Theorem. Furthermore, it explains the relationship between Markov's Theorem and the Lagrange spectrum (a set of real numbers with a certain characteristic). For this reason, several concepts are explained in detail to aid in understanding these topics; namely: finite continued fractions, simple infinite continued fractions, the Diophantine equation, and the Lagrange spectrum. The aim is to provide those interested in these topics with a self-contained text and to introduce them to certain important topics in the area of algebra.

Keywords: Markov equation, Markov numbers, Markov theorem, Lagrange spectrum.

¹L. M. A. Christopher Salvador Martínez Martínez. Estudiante de la Maestría en Modelación Matemática de la Universidad Tecnológica de la Mixteca. Dirección postal: Universidad Tecnológica de la Mixteca. Av. Dr. Modesto Seara Vázquez No.1, Localidad Acatlima, Huajuapán de León, Oaxaca, México. Código Postal: 69004. Correo electrónico: mamc010620@gs.utm.mx

²Dra. Alicia Santiago Santos. Profesora-Investigadora del Instituto de Física y Matemáticas. Dirección postal: Universidad Tecnológica de la Mixteca. Av. Dr. Modesto Seara Vázquez No.1, Localidad Acatlima, Huajuapán de León, Oaxaca, México. Código Postal: 69004. Correo electrónico: alicia@mixteco.utm.mx

Resumo: Os números de Markov, a equação de Markov e o Teorema de Markov são tópicos importantes em teoria dos números e probabilidade. O objetivo deste artigo é buscar uma compreensão mais profunda dos números de Markov, da equação de Markov e do Teorema de Markov. Além disso, explica a relação entre o Teorema de Markov e o espectro de Lagrange (um conjunto de números reais com uma determinada característica). Para isso, diversos conceitos são explicados em detalhes para auxiliar na compreensão desses tópicos; a saber: frações contínuas finitas, frações contínuas infinitas simples, a equação diofantina e o espectro de Lagrange. O objetivo é fornecer aos interessados nesses tópicos um texto completo e introduzi-los a certos tópicos importantes na área da álgebra.

Palavras-chave: Equação de Markov, números de Markov, teorema de Markov, espectro de Lagrange.

1. Introducción

La ecuación de Markov, es una ecuación diofántica (Gordillo Árdila et al., 2004) que lleva el nombre del matemático ruso Andrey Markov, quien la estudió por primera vez a finales del siglo XIX. La ecuación de Markov tiene la forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

Esta ecuación es de particular interés debido a la relevancia que sus soluciones enteras positivas, conocidas como ternas de Markov, tiene en teoría de números y en particular en la aproximación de los números irracionales por medio de números racionales. Estas ternas tienen propiedades notables y han aparecido tanto en teoría de números como fuera de ésta (Cilleruelo, 2013). Por otro lado, el teorema de Markov explica la importancia que tiene la ecuación de Markov con la teoría de aproximación de números irracionales por medio de números racionales con un denominador acotado.

El objetivo de este trabajo es buscar una comprensión más profunda de los números de Markov, la ecuación de Markov, el Teorema de Markov y explicar su relación con el espectro de Lagrange, conjunto de números reales útiles para aproximar números reales irracionales mediante números racionales. Por tal motivo, la estructura de este trabajo es la siguiente. En la Sección 2 se presentan los números de Markov, las ternas de Markov y la ecuación de Markov. Posteriormente, en la Sección 3 el espectro de Lagrange. Finalmente, en la Sección 4 se presenta el Teorema de Markov y la Conjetura de Unicidad. Dicha conjetura fue enunciada por Frobenius hace más de 100 años y hoy en día sigue abierta. Es importante mencionar que este trabajo es parte de Martínez (2025), pensado en los lectores jóvenes para poner información relevante y accesible sobre estos temas de matemáticas. Cabe mencionar que este apartado está inspirado en el Capítulo 1 de Aigner (2013).

2. Los números de Markov y la ecuación de Markov

A lo largo de esta sección se van a introducir varios conceptos de teoría de fracciones continuas con la finalidad de trabajar con las aproximaciones de números irracionales por números racionales. La fuente principal es el libro Cabezón Manchado (2017), del cual se extraen los conceptos principales, así como algunas de sus propiedades. Como es usual denotamos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{C}$ al conjunto de los números naturales, los números enteros, los números reales, los números reales mayores que cero, los números racionales, y los números complejos, respectivamente. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lfloor \alpha \rfloor$ es la parte entera de α y $\{\alpha\}$ es la parte decimal de α .

En el extenso ámbito de la teoría de números, las fracciones continuas y los números irracionales desempeñan un papel fundamental (Çanakçı & Schiffler, 2018). Las fracciones continuas, una representación alternativa de los números reales, se empezaron a estudiar en los siglos XVII y XVIII, y su

comprensión ha llevado a importantes descubrimientos tanto en matemáticas como sus aplicaciones (Cabezón Manchado, 2017). Así, las fracciones continuas son expresiones matemáticas que representan de manera única números reales tanto racionales como irracionales, esto con la finalidad de estudiar sus propiedades aritméticas más que la expresión en decimales puesto que la representación decimal presenta ciertas dificultades al tratar con números irracionales, los cuales requieren una secuencia infinita de dígitos. Estas representaciones continuas de los números han sido utilizadas en la resolución de ecuaciones, en la teoría de aproximaciones, en la teoría de números y en la criptografía, entre otros campos (Hernández Vargas & Pérez Quiles, 2014).

Por este motivo empezamos la sección con la siguiente definición.

Definición 1

Las **fracciones continuas finitas** se denotan y se definen como expresiones de la forma:

$$[a_0, a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n] := a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{\ddots + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}}}}.$$

Con $a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Además, si todos los a_i son enteros y $b_i = 1$, con $i \in \mathbb{N}$, entonces

$$[a_1, \dots, a_n] := a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}.$$

es una **fracción continua simple** (Cabezón Manchado, 2017).

En el siguiente resultado se muestra que todo número racional se puede expresar como una fracción continua simple.

Teorema 1

Todo número racional, es posible expresarlo como una fracción continua simple.

Demostración. Sea $x = \frac{u_0}{u_1} \in \mathbb{Q}$, con $u_0 \in \mathbb{Z}$ y $u_1 \in \mathbb{Z}^+$. Como $u_1 > 0$, por el algoritmo de la división existen $a_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ tales que $u_0 = u_1 a_1 + r_1$ con $0 \leq r_1 < u_1$. Por lo tanto

$$\frac{u_0}{u_1} = a_1 + \frac{r_1}{u_1},$$

con $0 \leq r_1 < u_1$. Para $r_1 \neq 0$, se tiene que $\frac{r_1}{u_1} = \frac{1}{\frac{u_1}{r_1}}$, al realizar la sustitución correspondiente en la ecuación previamente escrita, se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{u_0}{u_1} = a_1 + \frac{r_1}{u_1} = a_1 + \frac{1}{\frac{u_1}{r_1}}.$$

Como $0 < r_1$, nuevamente, por el algoritmo de la división existen $a_2, r_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\frac{u_1}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1},$$

con $0 \leq r_2 < r_1$. Siguiendo este procedimiento, se obtiene una secuencia de residuos r_i tales que $r_{i+1} < r_i$, y dado que son números enteros positivos, forman un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, por el principio del buen orden, este subconjunto de $\mathbb{N}$ tiene un mínimo, es decir, se concluye que este proceso es finito. De esta manera, se establece la fracción continua correspondiente:

$$\frac{u_0}{u_1} = [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Por lo tanto, todo número racional x puede expresarse como fracción continua simple. □

El Ejemplo 1 y el Ejemplo 2, muestran una aplicación del Teorema 1.

Ejemplo 1

La fracción $\frac{17}{10}$ se puede desarrollar como fracción continua simple como $\frac{17}{10} = [1, 1, 2, 3]$. En efecto, se comienza dividiendo el numerador entre el denominador:

$$\frac{17}{10} = 1 + \frac{7}{10}.$$

Ahora, se considera la fracción $\frac{7}{10}$, para obtener el siguiente coeficiente, al invertir la fracción y tomar su parte entera:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}.$$

Al considerar la fracción $\frac{3}{7}$ obtenemos el siguiente coeficiente, nuevamente se invierte la fracción y al tomar su parte entera:

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}.$$

Finalmente, se considera la fracción $\frac{1}{3}$. Para obtener el siguiente coeficiente, de igual manera se invierte la fracción y se toma su parte entera:

$$\frac{3}{1} = 3.$$

Por lo tanto, los coeficientes de la fracción continua son $[1, 1, 2, 3]$, así

$$\begin{aligned} [1, 1, 2, 3] &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{7}} = 1 + \frac{1}{\frac{10}{7}} \\ &= 1 + \frac{7}{10} = \frac{17}{10}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2

La fracción $\frac{17}{10}$ se puede desarrollar como fracción continua simple como $\frac{17}{10} = [1, 1, 2, 2, 1]$.

Considerando el Ejemplo 1 se sabe que

$$\begin{aligned}\frac{17}{10} &= 1 + \frac{7}{10} \\ \frac{10}{7} &= 1 + \frac{3}{7} \\ \frac{7}{3} &= 2 + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Finalmente, se analiza la fracción $\frac{1}{3}$, para obtener el siguiente coeficiente, se invierte la fracción y se toma su parte entera:

$$\frac{3}{1} = 3 = 2 + 1.$$

Por lo tanto, los coeficientes de la fracción continua son $[1, 1, 2, 2, 1]$, así

$$\begin{aligned}[1, 1, 2, 2, 1] &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{7}} = 1 + \frac{1}{\frac{10}{7}} = 1 + \frac{7}{10} = \frac{17}{10}.\end{aligned}$$

El Ejemplo 1 y el Ejemplo 2 muestran que la fracción $\frac{17}{10}$ puede expresarse de dos maneras distintas, esto nos lleva a la conclusión subsiguiente, la cual postula que existen al menos dos expansiones posibles de un número racional en su forma de fracción continua simple.

Teorema 2 Representación Alternativa de Fracciones Continuas Simples

Sean $\frac{u_0}{u_1} \in \mathbb{Q}$, con $u_0 \in \mathbb{Z}$, $u_1 \in \mathbb{Z}^+$ y $[a_1, \dots, a_n]$ una representación en fracción continua simple. Entonces, existe al menos otra representación alternativa de dicha fracción, es decir,

$$[a_1, \dots, a_n] = \frac{u_0}{u_1} = [a_1, \dots, a_n - 1, 1].$$

Demostración. Sea $[a_1, \dots, a_n]$ la representación en fracción continua simple de $\frac{u_0}{u_1}$ con $\frac{u_0}{u_1} \in \mathbb{Q}$.

Nótese que

$$[a_1, \dots, a_n - 1, 1] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}}}}}$$

$$\begin{aligned}
&= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n - 1 + 1}}}} \\
&= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} \\
&= [a_1, \dots, a_n].
\end{aligned}$$

Observemos que no importa si $a_n = 1$ ya que al final de su expresión en fracción continua simple resulta:

$$a_n - 1 + \frac{1}{1} = 1 - 1 + \frac{1}{1} = 1,$$

por lo que la fracción no se indetermina. Dado $[a_1, \dots, a_n]$ es una representación en fracción continua simple de

$$\frac{u_0}{u_1} \text{ y } [a_1, \dots, a_n] = [a_1, \dots, a_n - 1, 1]$$

se tiene que $[a_1, \dots, a_n - 1, 1]$ también es representación en fracción continua simple de $\frac{u_0}{u_1}$. Por lo tanto, todo número racional tiene al menos dos formas de representación en fracción continua simple. $\square$

Los números irracionales, han cautivado a matemáticos y entusiastas por igual debido a sus propiedades excepcionales. Desde la demostración de la existencia de números irracionales por los antiguos matemáticos griegos hasta el descubrimiento de números trascendentes, los números irracionales han desafiado y enriquecido nuestra comprensión de los números reales (Cabezón Manchado, 2017).

El estudio de las propiedades de los números irracionales ha llevado al desarrollo de conceptos fundamentales en matemáticas, como la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, la trascendencia de números como π y e , y la conexión entre números irracionales y fracciones continuas (Mazariegos Camas, 2018).

Definición 2

Las **fracciones continuas infinitas simples** se denotan y se definen como:

$$x = [a_1, a_2, a_3, \dots] := a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}},$$

donde $a_i \in \mathbb{R}^+$ para $i \in \{1, \dots, n\}$.

A continuación enunciamos algunas observaciones que se obtienen inmediatamente de la Definición 2.

Observación 1

Para obtener una representación adecuada para algún $x \in \mathbb{R}$, se establece una secuencia a_n por medio de un proceso recursivo. Inicialmente, se asigna $\alpha_1 = x$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, si $\alpha_n \notin \mathbb{Z}$ se define

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}.$$

Utilizando la secuencia α_n así generada, se determinan los coeficientes correspondientes a la fracción continua de x como $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$.

A partir de la construcción recursiva de la sucesión a_n , es posible analizar el comportamiento de sus convergentes. En virtud del Teorema 2 se encuentra en la página 222 del libro *Elementary Introduction to Number Theory* (Long, 1987), se garantiza que toda sucesión generada por una fracción continua finita simple es convergente, lo que confirma la validez del método para representar cualquier número real mediante fracciones continuas.

Teorema 3

Si $[a_0, a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n]$ es cualquier fracción continua infinita simple y $\frac{p_n}{q_n}$ es su n -ésima convergente, entonces existe un número real tal que

$$\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}$$

y definimos

$$\varepsilon = [a_0, a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n]$$

Nota: Si en algún momento se cumple que $\alpha_n = a_n$, entonces la fracción continua será finita y representará un número racional, lo cual concuerda con las Definición 1. Es por eso, que las fracciones continuas infinitas simples son representaciones de números irracionales.

A continuación, se procederá a calcular una representación para el número π por medio de la aplicación de su correspondiente fracción continua. Esta metodología permite obtener estimaciones sucesivas que se acercan al valor real de π con un grado de precisión variable.

Ejemplo 3

Considerando la vasta cantidad de más de 22 billones de cifras conocidas de π , se considerarán únicamente las primeras nueve, es decir,

$$\pi \approx 3.141592654.$$

Sea $x = \pi \in \mathbb{R}$. Así, $\alpha_1 = \pi$ con lo cual, el primer número de la secuencia es:

$$a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = \lfloor \pi \rfloor = 3.$$

Luego,

$$\alpha_{1+1} = \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{1}{\pi - 3} \approx 7.062513285.$$

Por tanto, el segundo número de la secuencia es:

$$a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = \lfloor 7.062513285 \rfloor = 7.$$

El cálculo del tercer término de la secuencia se efectúa de la siguiente manera:

$$\alpha_{2+1} = \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - a_2} \approx \frac{1}{7.062513285 - 7} \approx 15.99659976,$$

$$a_3 = \lfloor \alpha_3 \rfloor = \lfloor 15.99659976 \rfloor = 15.$$

El cuarto término de la secuencia se determina mediante el siguiente cálculo:

$$\alpha_{3+1} = \alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - a_3} \approx \frac{1}{15.99659976 - 15} \approx 1.003411841,$$

$$a_4 = \lfloor \alpha_4 \rfloor = \lfloor 1.003411841 \rfloor = 1.$$

Prosiguiendo de esta manera, se obtiene una fracción continua infinita que representa el valor de π , es decir,

$$\begin{aligned} \pi &= [3, 7, 15, 1, \dots] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \ddots}}} \approx 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + 1}} \\ &= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} = 3 + \frac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \frac{113}{16} = \frac{355}{113} \approx 3.14159292. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\pi \approx 3.141592654 = [3, 7, 15, 1, \dots] \approx 3.14159292.$$

Como se ha mencionado previamente, el manejo de números decimales conlleva ciertas complicaciones, pues se puede solo aproximar la fracción continua con un margen de "error". Por ende, el objetivo es minimizar dicho margen de error.

Esta reconocida aproximación de π es altamente precisa, dado que el error asociado es significativamente bajo, de orden de 10^{-7} (Cabezón Manchado, 2017).

El siguiente ejemplo calcula una representación para el número $\sqrt{2}$ por medio de la aplicación de su correspondiente fracción continua.

Ejemplo 4

Dado el gran número de dígitos conocidos para $\sqrt{2}$ en este análisis, solo se considerarán las primeras ocho cifras, es decir,

$$\sqrt{2} \approx 1.41421356.$$

Sea $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Así, $\alpha_1 = \sqrt{2}$ con lo cual, el primer número de la secuencia es:

$$a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1.$$

Para el segundo elemento de la secuencia:

$$\alpha_{1+1} = \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} \approx \frac{1}{1.41421356 - 1} = 2.41422135,$$

$$a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = \lfloor 2.41422135 \rfloor = 2.$$

Para el tercer elemento de la secuencia:

$$\alpha_{2+1} = \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - a_2} \approx \frac{1}{2.41422135 - 2} = 2.41416817,$$

$$a_3 = \lfloor \alpha_3 \rfloor = \lfloor 2.41416817 \rfloor = 2.$$

Para el cuarto elemento de la secuencia:

$$\alpha_{3+1} = \alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - a_3} \approx \frac{1}{2.41416817 - 2} = 2.41447815,$$

$$a_4 = \lfloor \alpha_4 \rfloor = \lfloor 2.41447815 \rfloor = 2.$$

Continuando de esta manera, se obtiene que una fracción continua infinita periódica, es decir, después del 1 solo hay 2 en la sucesión:

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}.$$

A continuación, se presentará un ejemplo que ilustra la manera en que una secuencia, establecida conforme a la Definición 2, produce un número irracional.

Ejemplo 5

Se pretende encontrar del valor de $x \in \mathbb{R}$, el cual corresponde a la fracción continua definida como:

$$x = [b, b, b, b, \dots] = b + \frac{1}{b + \frac{1}{b + \frac{1}{b + \ddots}}}.$$

Primero, nótese que x puede ser reescrito como

$$x = b + \frac{1}{x}.$$

Al multiplicar por x en ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$x^2 = xb + 1.$$

Finalmente, se obtiene una ecuación homogénea de segundo grado:

$$x^2 - xb - 1 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática con la fórmula general:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4}}{2}.$$

Sin embargo, dado que se está buscando una solución positiva que corresponda a la fracción continua, se elige la solución positiva:

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{2}.$$

Observación 2

En el Ejemplo 5 si se toma a $b = 1$, entonces se obtiene

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi,$$

que es conocida como la razón áurea, por lo tanto, la fracción continua de la razón áurea es:

$$\varphi = [1, 1, 1, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}.$$

Definición 3

Una **ecuación diofántica**, se refiere a una ecuación algebraica que tiene dos o más variables desconocidas y cuyos coeficientes son números enteros. El objetivo de estas ecuaciones es encontrar soluciones que sean enteras o naturales.

En particular, se obtiene la siguiente definición.

Definición 4

Una **ecuación diofántica lineal** se define como

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c,$$

dónde $a_i, x_i, c \in \mathbb{Z}$, para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Teorema 4

1. La ecuación diofántica lineal

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c, \tag{1}$$

tiene solución entera si y solo si

$$\text{mcd}(a_1, a_2) | c.$$

2. Si $\text{mcd}(a_1, a_2) = 1$ y además (x'_0, x'_1) es una solución particular de la ecuación diofántica lineal (1), entonces (x_0, x_1) es la solución de la ecuación (1) si y solo si existe $n \in \mathbb{Z}$ ta que

$$x_0 = x'_0 + a_2n,$$

$$x_1 = x'_1 - a_1n.$$

Demostración. 1. $\Rightarrow$] Se asume que la ecuación diofántica lineal (1) tiene solución entera y sea

$$d = \text{mcd}(a_1, a_2).$$

Como la ecuación (1) tiene solución entera, se tiene que existen $x_0, x_1 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a_1x_0 + a_2x_1 = c.$$

Por otra parte, como d es un divisor común de tanto a_1 como de a_2 , entonces existen $a'_1, a'_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a_1 = da'_1,$$

$$a_2 = da'_2.$$

En consecuencia, resulta

$$c = a_1x_0 + a_2x_1 = da'_1x_0 + da'_2x_1 = d(a'_1x_0 + a'_2x_1),$$

puesto que $a'_1, a'_2, x_0, x_1 \in \mathbb{Z}$ y que $\mathbb{Z}$ es cerrado bajo la suma, se obtiene que $a'_1x_0 + a'_2x_1 = k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, queda una expresión del tipo $c = kd$. En consecuencia, $d|c$, es decir, $\text{mcd}(a_1, a_2)|c$. $\Leftarrow$] Se asume que $d|c$, con $d = \text{mcd}(a_1, a_2)$.

Dada la hipótesis, se tiene que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$c = kd.$$

Por otro lado, según se establece el algoritmo de Euclides, existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que

$$d = sa_1 + ta_2,$$

multiplicando ambos lados de esta igualdad por k , se obtiene

$$kd = k(sa_1 + ta_2) = ksa_1 + kta_2 = (ks)a_1 + (kt)a_2,$$

puesto que $k, s, t \in \mathbb{Z}$ y que $\mathbb{Z}$ es cerrado bajo multiplicación, se obtiene que $ks, kt \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, queda una expresión del tipo $c = (ks)a_1 + (kt)a_2$. En consecuencia, la ecuación (1) tiene solución entera.

2. Se asume que $\text{mcd}(a_1, a_2) = 1$ y además que (x'_0, x'_1) es una solución particular de la ecuación diofántica lineal (1).

$\Rightarrow$] Si se supone que (x_0, x_1) es la solución de la ecuación (1), entonces

$$a_1x_0 + a_2x_1 = c.$$

Además, como (x'_0, x'_1) es una solución particular de la ecuación (1), se tiene

$$a_1x'_0 + a_2x'_1 = c.$$

Restando estas igualdades,

$$a_1x_0 + a_2x_1 - (a_1x'_0 + a_2x'_1) = c - c,$$

$$a_1x_0 + a_2x_1 - a_1x'_0 - a_2x'_1 = 0,$$

$$a_1(x_0 - x'_0) - a_2(x'_1 - x_1) = 0.$$

Dado que $x_0, x'_0, x'_1, x_1 \in \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$ es cerrado bajo la suma, se tiene que

$x_0 - x'_0 = k_0$, $x'_1 - x_1 = k_1$ con $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo y despejando a k_0 , se obtiene

$$a_1k_0 - a_2k_1 = 0,$$

$$a_1k_0 = a_2k_1,$$

Por lo que

$$a_1 \mid a_2k_1,$$

pero como $\text{mcd}(a_1, a_2) = 1$, por el lema de Euclides (Veerman, 2022) se tiene que

$$a_1 \mid k_1,$$

así, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $k_1 = a_1 n$, es decir,

$$x'_1 - x_1 = a_1 n,$$

despejando a x_1 , se tiene

$$x'_1 - a_1 n = x_1.$$

Como $k_0 = \frac{a_2 k_1}{a_1}$, se tiene,

$$x_0 - x'_0 = \frac{a_2(x'_1 - x_1)}{a_1} = \frac{a_2(x'_1 - (x'_1 - a_1 n))}{a_1} = \frac{a_2(a_1 n)}{a_1} = a_2 n,$$

despejando a x_0 , se tiene

$$x_0 = x'_0 + a_2 n.$$

$\Leftarrow$] Si se supone que para $n \in \mathbb{Z}$, $x_0 = x'_0 + a_2 n$ y $x_1 = x'_1 - a_1 n$. Despejando a x'_0 y x'_1 , de sus respectivas ecuaciones, se tiene

$$x'_0 = x_0 - a_2 n \text{ y } x'_1 = x_1 + a_1 n.$$

Como (x'_0, x'_1) es una solución particular de la ecuación diofántica lineal (1), se tiene

$$a_1 x'_0 + a_2 x'_1 = c.$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$c = a_1 x'_0 + a_2 x'_1 = a_1(x_0 - a_2 n) + a_2(x_1 + a_1 n) = a_1 x_0 - a_1 a_2 n + a_2 x_1 + a_2 a_1 n,$$

En consecuencia,

$$c = a_1 x_0 + a_2 x_1.$$

Finalmente, (x_0, x_1) es solución de la ecuación diofántica lineal (1).

□

Como se ilustra en el Ejemplo 5, las fracciones continuas pueden ser relevantes para la resolución de ecuaciones diofánticas lineales. Para ilustrar este hecho, se procede a examinar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6

Para encontrar la solución de la ecuación diofántica

$$20x_1 + 17x_2 = 17,$$

se puede emplear el método de las fracciones continuas. Para esto, primero se observa que el $\text{mcd}(20, 17) = 1$, claramente $1|17$ por el primer inciso del Teorema 4, la ecuación tiene solución. Ahora, se procede a determinar la fracción continua finita simple correspondiente al número

$$\frac{20}{17}:$$

$$\frac{20}{17} = 1 + \frac{3}{17},$$

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3},$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{1} = 2.$$

Por tanto,

$$\frac{20}{17} = [1, 5, 1, 2].$$

En seguida, se procede a eliminar el último término de la sucesión, así se obtiene la siguiente fracción continua $[1, 5, 1]$ que representa el número:

$$[1, 5, 1] = 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{5 + 1} = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}.$$

De esta forma se obtiene

$$20(6) - 17(7) = 1.$$

Al multiplicar por 17 de ambos lados de la ecuación y agrupar, resulta:

$$20(102) + 17(-119) = 17.$$

En consecuencia, una solución particular de la ecuación es $(x'_0, x'_1) = (102, -119)$. Así, por el segundo inciso del Teorema 4, la solución general es de la forma

$$x_0 = 102 + 17n \text{ y } x_1 = -119 - 20n \text{ para } n \in \mathbb{Z}.$$

Observación 3

En el Ejemplo 4 se analizó el caso de una fracción simple infinita periódica, sin embargo, cuando se trunca en ciertos términos de la secuencia ocurre algo interesante:

Si se trunca en el primer término:

$$\sqrt{2} \approx [1] = \frac{1}{1}.$$

Si se trunca en el segundo término:

$$\sqrt{2} \approx [1, 2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Si se trunca en el tercer término:

$$\sqrt{2} \approx [1, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}.$$

Si se trunca en el cuarto término:

$$\sqrt{2} \approx [1, 2, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}.$$

Si se trunca en el quinto término:

$$\sqrt{2} \approx [1, 2, 2, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{41}{29}.$$

Si se trunca en el sexto término:

$$\sqrt{2} \approx [1, 2, 2, 2, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} = \frac{99}{70}.$$

Si se trunca en el séptimo término:

$$\sqrt{2} \approx [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}} = \frac{239}{169}.$$

Al continuar con el procedimiento de truncamientos de la fracción continua de la raíz cuadrada de 2, se observa que algunos de los denominadores de las fracciones presentan números peculiares. Los números marcados en rojo son conocidos como *números de Markov*, que se definirán en breve.

En el ámbito de la investigación matemática que se aborda, es de sumo interés la siguiente ecuación diofántica:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1x_2x_3. \quad (2)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Markov y es de especial relevancia debido a sus soluciones enteras denominadas *números de Markov*.

Definición 5

Las **ternas de Markov** describen las ternas solución $(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3$ de la ecuación (2) con $m_i > 0$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Los **números de Markov** son aquellos números que aparecen en alguna terna de Markov. La sucesión de números de Markov se denota por $\mathcal{M}$.

El matemático ruso Andrey Markov investigó a finales del siglo XIX. Los primeros números de Markov son,

$$\mathcal{M} = \{1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, 433, 610, 985, 1325, \dots\},$$

los cuales figuran como entradas de las siguientes ternas de Markov

$$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 5), (1, 5, 13), (2, 5, 29), (1, 13, 34), (1, 34, 89), (2, 29, 169), \\ (5, 13, 194), (1, 89, 233), (5, 29, 433), (1, 233, 610), (2, 169, 985), (13, 34, 1325), \dots$$

Durante la sesión de problemas de la *19th International Fibonacci Conference*, se planteó la pregunta de si el coeficiente 3 en la ecuación de Markov podría ser reemplazado por cualquier otro número $k \in \mathbb{Z}^+$, y si este nuevo valor de k también generaría una terna de Markov como solución (Srinivasan, 2020).

El siguiente resultado garantiza que los únicos casos interesantes son cuando $k = 1$ y $k = 3$, más aún, las soluciones para $k = 1$ están completamente determinadas por el caso $k = 3$ y viceversa. Antes de enunciarlo recordemos que decimos que dos números enteros a y b son coprimos si $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Proposición 1

La ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = kx_1x_2x_3, \quad (3)$$

tiene soluciones positivas solo para $k = 1$ y $k = 3$. Para $k = 1$, (b_1, b_2, b_3) es una solución si y solo si 3 divide a b_i , para $i \in \{1, 2, 3\}$ y $\left(\frac{b_1}{3}, \frac{b_2}{3}, \frac{b_3}{3}\right)$ es una solución de la ecuación de Markov para $k = 3$.

Demostración. Nótese que si se multiplica por una constante k a los elementos de una solución (a_1, a_2, a_3) de la ecuación (3). Al multiplicar cada componente por una constante k , se obtiene que

$$(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + (ka_3)^2 = k^2a_1^2 + k^2a_2^2 + k^2a_3^2 = k^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = k^2(ka_1a_2a_3) \\ = k^3a_1a_2a_3 = (ka_1)(ka_2)(ka_3),$$

dado que (a_1, a_2, a_3) es una solución de la ecuación (3), entonces, (ka_1, ka_2, ka_3) es una solución de la ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1x_2x_3$.

En contraste, suponga que (b_1, b_2, b_3) es una solución de la ecuación

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b_1b_2b_3.$$

Al considerar esta ecuación en el contexto de aritmética modular con módulo 3, se observa que, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, b_i^2 , es congruente con 0 módulo 3 si b_i para $i \in \{1, 2, 3\}$ es múltiplo de 3, y es congruente con 1 módulo 3 en caso contrario, es decir,

$$\begin{cases} b_i^2 \equiv 0 \pmod{3} & \text{si } 3|b_i \text{ para } i \in \{1, 2, 3\}, \\ b_i^2 \equiv 1 \pmod{3} & \text{si } 3 \nmid b_i \text{ para } i \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Si al menos un b_i^2 para $i \in \{1, 2, 3\}$ es congruente con 0 módulo 3 y otro b_j^2 para $j \in \{1, 2, 3\}$ es congruente con 1 módulo 3, entonces el lado derecho de la ecuación sería congruente con 0 módulo 3, mientras que el lado izquierdo no lo sería, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, todos los b_i para $i \in \{1, 2, 3\}$ deben ser múltiplos de 3. Dado que b_i para $i \in \{1, 2, 3\}$ es múltiplo de 3, se puede establecer que

$$a_i = \frac{b_i}{3}, \text{ para } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Esto nos lleva a que

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= \left(\frac{b_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{b_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{b_3}{3}\right)^2 = \frac{b_1^2}{9} + \frac{b_2^2}{9} + \frac{b_3^2}{9} = \frac{1}{9}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = \frac{1}{9}(b_1 b_2 b_3) \\ &= \frac{1}{9}(3a_1)(3a_2)(3a_3) = \frac{1}{9}(27a_1 a_2 a_3) = \frac{1}{9}(3(9)a_1 a_2 a_3) = 3a_1 a_2 a_3, \end{aligned}$$

lo que demuestra la segunda parte del enunciado.

Además, como los números en una terna de Markov son coprimos, se deduce que el máximo común divisor de cualquier solución positiva (b_1, b_2, b_3) de la ecuación $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b_1 b_2 b_3$ debe ser 3, es decir,

$$\text{mcd}(b_1, b_2, b_3) = 3.$$

Esto implica que (ka_1, ka_2, ka_3) no puede ser una solución de la ecuación

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b_1 b_2 b_3$$

a menos que k sea igual a 1 o 3. □

Observación 4

Los números que aparecen en la terna solución de la ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1 x_2 x_3$$

son el conjunto $\{3m : m \in \mathcal{M}\}$. También podría considerarse como la definición de $\mathcal{M}$ de la sucesión de Markov.

Observación 5

La sucesión de números de Markov aparece en la OEIS (Online Encyclopedia of Integer Sequences) como la sucesión A002559 (Sloane & Conway, s.f.).

En particular, Andrey Markov, demostró un teorema destacado sobre el valor mínimo de una forma cuadrática binaria real que ahora se conoce como el *teorema de Markov* (Aigner, 2013). Dicho resultado, lo mencionaremos en la Sección 4.

3. El espectro de Lagrange

Se sabe que todo número real α puede ser aproximado tan bien como uno lo desee utilizando números racionales. Por ejemplo, si α es un número irracional, se puede considerar su expansión decimal y aproximarlos por racionales considerando cada vez más decimales de esta expansión. Nótese que entre más decimales se tomen, la fracción (en general no reducida) que aproxima a α tiene un denominador mayor. Si se toma n decimales se puede encontrar un racional expresado como una fracción con denominador 10^n que da esta aproximación.

Por ello uno se puede preguntar si ¿se puede aproximar arbitrariamente bien a un número real α por medio de racionales $\{\frac{p_n}{q_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que el denominador q_n se mantiene acotado en algún sentido?

Una primera respuesta a esta pregunta la proporciona un teorema clásico de Dirichlet.

Teorema 5 Teorema de Dirichlet

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$, entonces existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $q < N$ tal que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN}.$$

Demostración. Recordando que todo número real α puede escribirse como

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$$

dónde $[\alpha]$ es la parte entera de α y $\{\alpha\}$ es la parte decimal de α , con $0 \leq \{\alpha\} < 1$.

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$. Considérese la partición del intervalo $[0, 1)$ en N subintervalos de igual longitud

$$[0, 1) = \bigcup_{i=0}^{N-1} \left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N} \right).$$

También considérese los $N + 1$ números: $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \{4\alpha\}, \dots, \{(N + 1)\alpha\}$. Por el Principio de Dirichlet de las cajas, al distribuir $N + 1$ números en N subintervalos, al menos dos de estos números decimales, $\{k\alpha\}$ y $\{l\alpha\}$, caerán en el mismo subintervalo. Esto implica que:

$$|\{l\alpha\} - \{k\alpha\}| < \frac{1}{N}.$$

Si se define a $q = l - k$ y $p = [l\alpha] - [k\alpha]$, entonces

$$\begin{aligned} \{l\alpha\} - \{k\alpha\} &= l\alpha - [l\alpha] - (k\alpha - [k\alpha]) = l\alpha - [l\alpha] - k\alpha + [k\alpha] = (l - k)\alpha - ([l\alpha] - [k\alpha]) \\ &= q\alpha - p. \end{aligned}$$

Así, se tiene

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{N}.$$

Dividiendo entre q , se obtiene:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN}.$$

□

Corolario 1

1. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces hay infinitos $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ que satisfacen

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \quad (4)$$

2. Si $\alpha = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, entonces la desigualdad

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^2} \quad (C > 0),$$

se cumple solo un número finito de $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Demostración. 1. Sea $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Por el Teorema 5 existen $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ con

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se asume que no existen una infinidad de $\frac{p_n}{q_n}$, entonces, sea $\frac{p_k}{q_k} \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dada la hipótesis de $\alpha \notin \mathbb{Q}$, resulta que $\alpha \neq \frac{p_k}{q_k}$, por tanto, para n suficientemente grande,

$$\frac{1}{n} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{nq_n} \leq \frac{1}{n}.$$

Lo cual no puede ocurrir, ergo, hay infinitos $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ que satisfacen (4).

2. Sea $\alpha = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ y considérese la desigualdad

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^2} \quad (C > 0).$$

Sustituyendo a α en la desigualdad por su equivalencia:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{rq - sp}{sq} \right|.$$

Como $1 \leq |rq - sp|$, se tiene que

$$\frac{1}{sq} \leq \left| \frac{rq - sp}{sq} \right| < \frac{C}{q^2}.$$

De la desigualdad anterior, se obtiene:

$$\frac{1}{sq} < \frac{C}{q^2}.$$

Multiplicamos ambos lados por q^2 :

$$\frac{q}{s} < C$$

Esto implica que

$$q < sC.$$

Por lo tanto, q tiene un número finito de valores posibles, ya que q es un número entero positivo y está acotado por sC .

□

Ahora uno puede preguntarse qué tanto se puede mejorar a la cota dada en el punto 1 del Corolario 1. Lagrange introdujo el siguiente concepto cuyo objetivo es precisamente entender qué tanto puede mejorarse dicha cota.

Definición 6 Números de Lagrange

El **número de Lagrange** $L(\alpha)$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ es el supremo de todos los $L > 0$ para los cuales la desigualdad

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Lq^2}, \quad (5)$$

se cumple para una infinidad de $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

En primera instancia no es claro cómo usar la Definición 6 para calcular $L(\alpha)$. Sin embargo, uno puede usar a las fracciones continuas para hacerlo. En la página 23 del libro *Markov's theorem and 100 years of the uniqueness conjecture* se encuentra la Proposition 1.22 con su respectiva demostración, la cual relaciona a los números de Lagrange con las fracciones continuas. Dicha proposición enuncia lo siguiente:

Proposición 2 (Aigner, 2013, Proposition 1.22)

Si $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] \notin \mathbb{Q}$ y definimos a $\alpha' = a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$, entonces

$$\alpha = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \alpha'].$$

Más aún, el número de Lagrange de α se obtiene de la siguiente manera:

$$L(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha),$$

con $\lambda_n(\alpha) = [\alpha'] + \frac{1}{\beta_n} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] + [0, a_n, \dots, a_1]$ y $\beta_n = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$.

Ejemplo 7

Considérese la fracción continua infinita simple de la razón áurea enunciada en la Observación 2.

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, 1, \dots].$$

Como

- $\alpha_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$ es la cola de la fracción continua infinita simple.
- $\beta_n = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$ es el número truncado a partir del n – término de la fracción continua inversa.

Y dado que la fracción continua es constante: $a_k = 1$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que

$$\alpha_{n+1} = [1, 1, \dots] = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

y

$$\beta_n = [1, 1, \dots, 1].$$

Por lo que el valor de $\lambda_n(\varphi)$ es:

$$\lambda_n(\varphi) = \lambda_n \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = [1, 1, 1, 1, \dots] + \frac{1}{[1, \dots, 1]} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{[1, \dots, 1]}.$$

Como la fracción continua es constante, el $\limsup$ es simplemente $\lim$, por lo que

$$\begin{aligned} L\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{[1, \dots, 1]}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{[1, \dots, 1]}\right) \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} [1, \dots, 1]} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} &= \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} \\ &= \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Por lo que

$$L\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

Definición 7 El espectro de Lagrange

Al conjunto $\mathcal{L} = \{L(\alpha) : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ se le denomina el **espectro de Lagrange**.

Dada la complejidad en el uso de la Definición 7 para calcular $\mathcal{L}$, Markov trabajó en un teorema que permite calcular de manera más sencilla al espectro de Lagrange, hoy en día se le conoce como el *Teorema de Markov* (vea Teorema 6).

4. El Teorema de Markov y la Conjetura de unicidad

Iniciamos esta sección con algunos conceptos que nos servirán para comprender unas observaciones que se harán posteriores al *Teorema de Markov* (vea Teorema 6).

Definición 8

Un número α es **irracional cuadrático** si α no es racional y α es una solución de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros.

Ejemplo 8

Como bien se sabe el número $\sqrt{2}$ es irracional porque no puede ser expresado como una fracción de dos enteros (ver la página web Morales Medina (2006)). Además, es cuadrático porque es una solución de la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 2 = 0.$$

Dado que 1 y -2 son números enteros y son coeficientes de la ecuación $x^2 - 2 = 0$, se tiene que $\sqrt{2}$ es un número irracional cuadrático.

Ejemplo 9

Como ya es conocido el número π es irracional (ver la página web Morales Medina (2008)), pero no es cuadrático, a diferencia de $\sqrt{2}$, π no es solución de ninguna ecuación cuadrática con coeficientes enteros. De hecho, π es un número **trascendente**, lo cual significa que no es solución de ninguna ecuación algebraica de coeficientes enteros, sea cual sea el grado de la ecuación. Por lo tanto, π no es un número irracional cuadrático.

A continuación mencionaremos el Teorema de Markov, para más detalles, consúltese dicho teorema en la página 35 del libro *Markov's Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture* (Aigner, 2013).

Teorema 6 Teorema de Markov

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de los números de Markov. Entonces el conjunto de números que pertenecen al espectro de Lagrange y que son menores que 3 puede describirse de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_{<3} = \left\{ \frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m} : m \in \mathcal{M} \right\}. \quad (6)$$

Aplicando el Teorema 6 se obtiene el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10

Se procede a hacer el cálculo con los 5 primeros números de Markov:

- Para $m = 1$:

$$\frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m} = \frac{\sqrt{9(1)^2 - 4}}{1} = \sqrt{9m(1) - 4} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} \approx 2.236$$

- Para $m = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m} &= \frac{\sqrt{9(2)^2 - 4}}{2} = \frac{\sqrt{9(4) - 4}}{2} = \frac{\sqrt{36 - 4}}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} \\ &= 2\sqrt{2} \approx 2.828 \end{aligned}$$

- Para $m = 5$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m} &= \frac{\sqrt{9(5)^2 - 4}}{5} = \frac{\sqrt{9(25) - 4}}{5} = \frac{\sqrt{225 - 4}}{5} \\ &= \frac{\sqrt{221}}{5} \approx 2.973 \end{aligned}$$

- Para $m = 13$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m} &= \frac{\sqrt{9(13)^2 - 4}}{13} = \frac{\sqrt{9(169) - 4}}{13} = \frac{\sqrt{1521 - 4}}{13} \\ &= \frac{\sqrt{1517}}{13} \approx 2.996 \end{aligned}$$

- Para $m = 29$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m} &= \frac{\sqrt{9(29)^2 - 4}}{29} = \frac{\sqrt{9(841) - 4}}{29} = \frac{\sqrt{7569 - 4}}{29} \\ &= \frac{\sqrt{7565}}{29} \approx 2.999 \end{aligned}$$

Se observa que $\frac{\sqrt{9m^2-4}}{m}$ se aproxima a 3 por abajo.

Para una mayor legibilidad, se organizan los números previamente calculados en la siguiente tabla:

Tabla 1: Valores aproximados de $\frac{\sqrt{9m^2-4}}{m}$ para los primeros 5 números de Markov. Autoría propia.

$\mathcal{M}$	1	2	5	13	29	...
$\frac{\sqrt{9m^2-4}}{m}$	$\sqrt{5} \approx 2.236$	$2\sqrt{2} \approx 2.828$	$\frac{\sqrt{221}}{5} \approx 2.973$	$\frac{\sqrt{1517}}{13} \approx 2.996$	$\frac{\sqrt{7565}}{29} \approx 2.999$	...

En la Tabla 1, se ilustra que

$$\frac{\sqrt{9m^2-4}}{m} < 3,$$

para los primeros 5 números de Markov.

Una parte importante del teorema establece que, para cada $m \in \mathcal{M}$, existe un número irracional γ_m tal que

$$L(\gamma_m) = \frac{\sqrt{9m^2-4}}{m}.$$

Además, se cumple que $\sqrt{9m^2-4}$ es un irracional cuadrático.

De hecho, puede demostrarse que se puede tener

$$\gamma_m = \frac{-3m + \sqrt{9m^2-4}}{2}.$$

La relación entre el teorema de Markov y el espectro de Lagrange radica en el hecho de que los números que satisfacen el teorema de Markov también forman parte del espectro de Lagrange (Aigner, 2013).

Terminamos trabajo mencionando la conjetura de unicidad de los números de Markov el cual es un problema matemático que ha intrigado a muchos investigadores en más de 100 años. Esta conjetura, fue formulada por el matemático ruso Andrey Markov. Sin embargo, Markov evitó la prueba del Teorema 6 pues la conjetura solo requería los números de Markov, independientemente de la conjetura. Debido a que Frobenius hizo la afirmación en 1913, a veces también se la conoce como la conjetura de Frobenius (Aigner, 2013) desde entonces los matemáticos han intentado probar o refutar esta conjetura, pero hasta ahora no se han descubierto pruebas sólidas que respalden ninguna de las afirmaciones.

Conjetura 1

Cada número de Markov aparece exactamente una vez como máximo en una terna de Markov.

Para tener una visión más clara de esta conjetura, se procede a analizar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11

Considérese la terna de Markov, $(1, 5, 13)$, la conjetura dice que el $\text{máx}(1, 5, 13) = 13$ es único por lo que no existe otra terna de Markov cuyo máximo sea 13, en otras palabras, no existe la terna $(m_1, m_2, 13)$ con

$$13 > m_1 > m_2, m_1 \neq 1, m_2 \neq 5.$$

El Corolario 1.2. del artículo Baragar (1996) afirma que la conjetura es verdadera para dos casos particulares.

Proposición 3 *Theorem 1.3 de Uniqueness Theorem of Generalized Markov Numbers that are Prime Powers (Gyoda & Maruyama, 2023)*

La conjetura es verdadera cuando el número de Markov es una potencia de un primo impar, $c = p^n$, o el doble de una potencia de un primo impar, $c = 2p^n$.

5. Conclusiones

En este trabajo se analizaron diferentes conceptos de teoría de números y de Álgebra, a saber: fracciones finitas continuas, fracciones continuas infinitas simples, ecuación diofántica, los números de Markov, las ternas de Markov, número de Lagrange y el espectro de Lagrange. Se incluyeron ejemplos para aclarar cada uno de los conceptos antes mencionado, es importante mencionar que los ejercicios expuestos en este trabajo son de autoría propia. Además, desarrollados con la intención de motivar al lector para adentrarse a estos temas.

Algunos resultados que fueron probados en este trabajo son los siguientes:

1. Todo número racional es posible expresarlo como una fracción continua simple.
2. El teorema de Representación Alternativa de Fracciones Continuas Simples.
3. El Teorema de Dirichlet.

Es importante mencionar que una de nuestras aportaciones en este trabajo fue la modificación de la redacción del Teorema 2.1 de Cabezón Manchado (2017) quedando planteado en este trabajo como Teorema 2 Representación Alternativa de Fracciones Continuas Simples, aclarando que no existen sólo dos formas de representación de un número racional, si no, al menos dos formas. Además, parte de la prueba de la Proposición 1 es autoría propia, dicho resultado se obtuvo del Libro Aigner (2013) en la cual no se incluye la prueba completa.

Esperamos que este trabajo sea útil y despierte el interés en nuestros lectores para interesarse en estos temas.

Agradecimientos: Los autores agradecemos a la revisora o a el revisor por sus valiosas sugerencias, las cuales, una vez realizadas, mejoraron nuestro trabajo.

Contribución de las personas autoras: Conceptualización: A.S.S, C. M. Metodología: A.S.S, C. M. Análisis formal: A. S. S, C. M. Escritura (borrador original): A. S. S. Escritura (revisión y edición): A. S. S.

Accesibilidad de datos: Se concede la disponibilidad de los datos a través de una solicitud por correo electrónico al correo: alicia@mixteco.utm.mx

Declaración de uso de inteligencia artificial (IA): Las personas autoras declaran no haber utilizado ninguna herramienta de IA.

Referencias

- Aigner, M. (2013). *Markov's Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00888-2>
- Baragar, A. (1996). On the unicity conjecture for Markoff numbers. *Canadian Mathematical Bulletin*, 39(1), 3-9. <https://doi.org/10.4153/CMB-1996-001-x>
- Cabezón Manchado, M. (2017). *Aproximación de un número por racionales. Fracciones continuas* [Trabajo Fin de Grado]. Universidad de Zaragoza. <https://zaguan.unizar.es/record/65176>
- Çanakçı, İ., & Schiffler, R. (2018). Cluster algebras and continued fractions. *Compositio Mathematica*, 154(3), 565-593. <https://doi.org/10.1112/S0010437X17007631>
- Cilleruelo, J. (2013). El diablo de los números. *La Gaceta de la RSME*, 16(2), 313-330. <https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1358>
- Gordillo Árdila, E., Rubiano Ortégón, G. N., & Jiménez Becerra, L. R. (2004). *Teoría de números (para principiantes)*. Universidad Nacional de Colombia.
- Gyoda, Y., & Maruyama, S. (2023). Uniqueness theorem of generalized Markov numbers that are prime powers. <https://arxiv.org/abs/2312.07329>
- Hernández Vargas, E., & Pérez Quiles, M. J. (2014). El método de las fracciones continuas y su significación didáctica en el proceso de formación del ingeniero en telecomunicaciones y electrónica. *Mendive. Revista de Educación*, 12(3), 330-335. <https://mendive.upr.edu.cu/index.php/MendiveUPR/article/view/701>
- Long, C. T. (1987). *Elementary Introduction to Number Theory*. Prentice-Hall.
- Martínez, C. (2025). *Sobre Números de Markov y Álgebras de Conglomerado* [Tesis de licenciatura]. Universidad Tecnológica de la Mixteca. http://jupiter.utm.mx/~tesis_dig/14703.pdf
- Mazariegos Camas, F. J. (2018). *Fracciones continuas* [Trabajo de graduación para obtener el título de Licenciado en Matemática Aplicada, Universidad de San Carlos de Guatemala]. <https://ecfm.usac.edu.gt/drupal-10.1.2/node/200>
- Morales Medina, M. Á. (2006, noviembre). *Dos demostraciones de la irracionalidad de raíz de 2* [Accedido el 13-11-2024]. <https://www.gaussianos.com/dos-demostraciones-de-la-irracionalidad-de-raiz-de-2/>
- Morales Medina, M. Á. (2008, febrero). *Cómo demostrar que π es irracional* [Accedido el 13-11-2024]. <https://www.gaussianos.com/como-demostrar-que-%CF%80-pi-es-irracional/>
- Sloane, N. J. A., & Conway, J. H. (s.f.). A002559: Markoff (or Markov) numbers. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Consultado el 20 de mayo de 2024, desde <https://oeis.org/A002559>

- Srinivasan, A. (2020). The Markoff-Fibonacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 58(5), 222-228. <https://doi.org/10.1080/00150517.2020.12427567>
- Veerman, J. J. P. (2022). 2: El teorema fundamental de la aritmética. En *Una introducción a la teoría de números (Veerman)*. LibreTexts Español. Consultado el 21 de mayo de 2024, desde https://espanol.libretexts.org/Bookshelves/Matematicas/Combinatoria_y_Matematicas_Discretas