Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 27, No 1. Agosto, 2026 – Febrero, 2027

CC BY NC ND

ISSN 1659 -0643
DOI: XXX

Otra prueba de la fórmula cuadrática: comparación con la prueba tradicional y la de Po-Shen Loh, y su uso como método de solución

| Another proof of the quadratic formula: comparison with the traditional proof and Po-Shen Loh's approach, and its use as a solution method |

| Outra demonstração da fórmula quadrática: comparação com a demonstração tradicional e com a de Po-Shen Loh, e sua aplicação como método de resolução |

Guido José Fernández Quirós
gjfernandez@uned.ac.cr
Universidad Estatal a Distancia
San José, Costa Rica

Recibido: 28 de octubre 2025 Aceptado: 1 de abril de 2026

Resumen: Este artículo propone otra prueba de la fórmula general para solucionar en los números complejos las ecuaciones polinómicas de segundo grado en una incógnita con coeficientes reales, popularmente conocida como fórmula cuadrática. Además, analiza las semejanzas y diferencias con la prueba tradicional que implementa la técnica de completar cuadrados y con la prueba propuesta en años recientes por el matemático Po-Shen Loh. Finalmente, muestra un ejemplo para ilustrar el uso del algoritmo de la demostración como método de solución para esta clase de ecuaciones.

Palabras Clave: Ecuaciones cuadráticas, fórmula cuadrática, algoritmos algebraicos, números complejos.

Abstract: This article proposes another proof of the general formula for solving in the complex numbers second-degree polynomial equations in one unknown with real coefficients, popularly known as quadratic formula. In addition, it analyzes the similarities and differences with the traditional proof that implements the technique of completing the square and with the proof proposed in recent years by mathematician Po-Shen Loh. Finally, it shows an example to illustrate the use of the algorithm from the demonstration as a solution method for this class of equations.

Keywords: Quadratic equations, quadratic formula, algebraic algorithms, complex numbers.

Resumo: Este artigo propõe outra demonstração da fórmula geral para resolver, nos números complexos, as equações polinomiais do segundo grau em uma incógnita com coeficientes reais, popularmente conhecida como fórmula quadrática. Além disso, analisa as semelhanças e diferenças em relação à demonstração tradicional que utiliza a técnica de completar quadrados e à demonstração proposta

[1]Guido José Fernández Quirós. Profesor del Programa de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Estatal a Distancia (UNED). Dirección postal: Cartago, Cartago, Costa Rica. Código postal: 30105. Correo electrónico: gjfernandez@uned.ac.cr

nos últimos anos pelo matemático Po-Shen Loh. Por fim, apresenta um exemplo para ilustrar o uso do algoritmo da demonstração como método de resolução para essa classe de equações.

Palavras-chave: Equações quadráticas, fórmula quadrática, algoritmos algébricos, números complexos.

1. Introducción

Las ecuaciones cuadráticas han estado presente a lo largo de la historia de la humanidad. En la antiguedad, fueron encontradas ecuaciones como $cx^2 = d$, expresadas verbalmente, en papiros de la civilización egipcia (c. 3500 a.C.) y otras como $x^2 \pm bx = c$ donde b y c eran números positivos, en tablillas de la civilización babilónica (c. 2500 a.C.) (Ruiz, 2003, pp. 12 y 14).

Durante la edad media, el erudito persa Al-Kwarizmi (c. 825) sistematizó en su famoso tratado algebraico el método de resolución por completación de cuadrados para ecuaciones como $ax^2 + bx = c$, donde a, b y c eran enteros positivos (Ruiz, 2003, p. 164). Mientras que en el renacimiento, el francés François Vieta (c. 1600) expresó la fórmula general de resolución de ecuaciones cuadráticas simbólicamente en la forma que la conocemos actualmente (Muñoz et al., 2012, p. 60).

En años recientes, el profesor universitario estadounidense Po-Shen Loh (c. 2019) ha estado divulgando un método alternativo de resolución en los números reales para esta familia de ecuaciones basado en la propiedad de simetría de la parábola asociada (Gen & Padilla, 2025, p. 2).

Por otra parte, la importancia actual de las ecuaciones cuadráticas es innegable. Forma parte de los principales currículos de álgebra elemental a nivel global, como en los estándares del *National Council of Teachers of Mathematics*[1] (National Council of Teachers of Mathematics, 2025) y aparecen constantemente en la física, la ingeniería y la economía (Cedeño et al., 2024, p. 129). Por tal razón, en este artículo se propone otra prueba de la fórmula cuadrática, se contrasta con el método tradicional de completar cuadrados y con el moderno de Po-Shen Loh, y se ejemplifica su uso como método de resolución alternativo para estas ecuaciones.

2. Elementos teóricos sobre ecuaciones cuadráticas

2.1. Conceptos importantes

A continuación, se precisan ciertas nociones fundamentales para este artículo (Sequeira & Rojas, 2015, pp. 14, 15 y 18):

Definición 1 (Ecuación cuadrática)

Aquella ecuación en la incógnita x de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales llamados *coeficientes* y $a \neq 0$, se conoce como *ecuación cuadrática*.

Definición 2 (Solución de ecuación)

Aquel número que al sustituirlo por la incógnita de la ecuación cuadrática verifica su igualdad se conoce como *solución de la ecuación*.

[1] Organización de docentes de Matemática fundada desde 1920 en Estados Unidos cuyo fin es mejorar la educación matemática en dicho país.

Definición 3 (Ecuaciones equivalentes)

Aquellas ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones se conocen como *ecuaciones equivalentes*.

Algunas consideraciones importantes al respecto: las ecuaciones cuadráticas están expresadas en la notación dada, el dominio de sus soluciones corresponde al conjunto de números complejos y para efectos de solucionarlas se asume que el coeficiente del término cuadrático tiene signo positivo (de lo contrario, puede considerar su ecuación equivalente obtenida al multiplicar por uno negativo sus dos miembros).

2.2. Propiedades relevantes

Por otra parte, note que al aplicar el teorema fundamental del álgebra y el del factor al polinomio asociado a la ecuación cuadrática $p(x) = ax^2 + bx + c$ puede expresarse de la siguiente forma, donde x_1 y x_2 son números complejos (luego se realizan las operaciones correspondientes):

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow p(x) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

Como ambos números son raíces del polinomio, entonces son las soluciones de la ecuación cuadrática. Al igualar los coeficientes respectivos del polinomio en la expresión anterior y en la forma original se obtienen las siguientes relaciones (Barrantes, 2005, p. 157):

Teorema 1 (Fórmulas de Cardano-Vieta)

Las soluciones x_1 y x_2 de una ecuación cuadrática satisfacen las identidades:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \ \text{ y } \ x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Además, se enuncia el siguiente resultado cuya demostración formal es el objeto de este artículo, el cual expresa explícitamente ambas soluciones de una ecuación cuadrática en términos de los valores de sus coeficientes (Barrantes, 2005, p. 155):

Teorema 2 (Fórmula cuadrática)

Las dos soluciones de una ecuación cuadrática estan dadas por la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2.3. Prueba tradicional de la fórmula cuadrática

Según Sequeira y Rojas (2015, p. 19), para demostrar esta fórmula primero se multiplica por el recíproco de a ambos miembros para obtener la ecuación equivalente:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

A continuación, se suma y resta la constante $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en el miembro izquierdo y se reacomoda:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

Luego, se aplica el producto notable del cuadrado de la suma y se simplifican los otros dos términos:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

Por último, se despeja el valor de x mediante las ecuaciones equivalentes:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\Leftrightarrow x=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

De lo cual, las soluciones de la ecuación cuadrática corresponden a

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2.4. Prueba de Po-Shen Loh de la fórmula cuadrática

Por su parte, según Loh (2019, p. 2), tomando el número complejo $z:=\dfrac{x_1-x_2}{2}$ se obtienen las siguientes igualdades:

$$\frac{x_1+x_2}{2}+z=x_1 \text{ y } \frac{x_1+x_2}{2}-z=x_2$$

Luego, se aplica el Teorema 1 para la suma de las soluciones:

$$\frac{\frac{-b}{a}}{2}+z=x_1\Leftrightarrow\frac{-b}{2a}+z=x_1 \tag{1}$$

$$\frac{\frac{-b}{a}}{2}-z=x_2\Leftrightarrow\frac{-b}{2a}-z=x_2 \tag{2}$$

Posteriormente, se multiplican miembro a miembro las igualdades y se aplica de nuevo el Teorema 1 para el producto de soluciones:

$$\left(\frac{-b}{2a}+z\right)\left(\frac{-b}{2a}-z\right)=x_1x_2\Rightarrow\left(\frac{-b}{2a}+z\right)\left(\frac{-b}{2a}-z\right)=\frac{c}{a}$$

Luego, se aplica el producto notable de diferencia de cuadrados al miembro izquierdo y se despeja el valor de z de forma simplificada:

$$\left(\frac{-b}{2a}\right)^2-z^2=\frac{c}{a}\Rightarrow z=\pm\sqrt{\left(\frac{-b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Finalmente, sustituyendo en (1) y (2) el valor obtenido se obtienen, respectivamente:

$$x_1=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_2=\frac{-b}{2a}\mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Por lo tanto, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

3. Prueba propuesta de la fórmula cuadrática

En este caso, se parte de la siguiente identidad del campo de los números complejos:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4\,(x_1 x_2)$$

Seguidamente, se aplica el Teorema 1 y se despeja el valor de $x_1 - x_2$ de forma simplificada:

$$(x_1 - x_2)^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right) \Rightarrow x_1 - x_2 = \pm\sqrt{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right)} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

Luego, se forma el siguiente sistema de ecuaciones lineales junto con la identidad de la suma de soluciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= \dfrac{-b}{a} \\ x_1 - x_2 &= \pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \end{cases}$$

Por último, se suman y restan miembro a miembro ambas ecuaciones para obtener los valores de cada solución:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_1 - x_2 &= 2x_1 = \frac{-b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_1 + x_2 - (x_1 - x_2) &= 2x_2 = \frac{-b}{a} \mp \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \Rightarrow x_2 = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

De lo cual, las soluciones de la ecuación cuadrática corresponden a $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

4. Discusión

Según lo expuesto, la prueba propuesta presenta semejanzas con la tradicional y la de Po-Shen Loh. Con respecto a la primera, permiten obtener el valor de ambas soluciones de manera directa. Mientras que con la segunda, parten de identidades fundamentales en el campo de los números complejos e implementan las fórmulas de Cardano-Vieta sobre adición y multiplicación de las soluciones de una ecuación cuadrática.

Sin embargo, también tiene diferencias con las otras dos. La propuesta aplica una identidad básica entre suma y resta de dos números complejos para plantear un sistema de ecuaciones que permita determinar las soluciones directamente, mientras que la prueba tradicional se basa en la técnica de completar cuadrados, y la de Po-Shen Loh en una identidad de la media de dos números de dicho conjunto que permite obtenerlas luego de realizar un par de sustituciones.

Finalmente, las demostraciones de la fórmula cuadrática, además de probar con rigurosidad la validez matemática de dicho resultado, también constituyen algoritmos de solución de este tipo de ecuaciones, los cuales pueden ser implementados razonadamente en vez de aplicar mecánicamente dicha fórmula sin comprenderla. Por esta razón, se muestra a continuación su uso como método de resolución con el mismo ejemplo desarrollado por Loh (2019, p. 3).

Ejemplo 1

Resuelva la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

En este caso se tendría:

$$x_1 + x_2 = 2 \text{ y } x_1 x_2 = 4$$

Quedando la identidad (tomando solo uno de los dos posibles valores):

$$x_1 - x_2 = \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4} = 2i\sqrt{3}$$

Formando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 2 \\ x_1 - x_2 & = & 2i\sqrt{3} \end{cases}$$

Sumando y restando miembro a miembro las ecuaciones, respectivamente:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_1 - x_2 & = & 2x_1 = 2 + 2i\sqrt{3} \Rightarrow x_1 = \dfrac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3} \\ x_1 + x_2 - (x_1 - x_2) & = & 2x_2 = 2 - 2i\sqrt{3} \Rightarrow x_2 = \dfrac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3} \end{array}$$

5. Conclusiones

La demostración propuesta de la fórmula cuadrática brinda otra opción para solucionar ecuaciones cuadráticas en el campo de los números complejos, junto con el método tradicional y el de Po-Shen Loh, implementando para ello una identidad básica en dicho campo y las relaciones de Cardano-Vieta.

Además, el algoritmo de resolución que se deriva de ella conecta dos grandes tópicos del álgebra elemental que generalmente se tratan por separado: las ecuaciones cuadráticas y los sistemas de ecuaciones lineales. En este sentido, estas ecuaciones pueden motivar el estudio de dichos sistemas, o bien presentarse como caso de aplicación de estos.

Por último, como el aprendizaje de los métodos tradicionales de solución de esta clase de ecuaciones han presentado diversas dificultades para los estudiantes (Gen & Padilla, 2025, p. 2), la eventual aplicación de este método alternativo en el salón de clase podría convertirse en objeto de estudio para futuras investigaciones en educación matemática.

Agradecimientos: A mis padres y a mi esposa por su apoyo incondicional, al Programa de Enseñanza de la Matemática de la UNED por la formación de calidad recibida y a los árbitros asignados por sus valiosas observaciones.

Contribución de las personas autoras: Este trabajo fue elaborado solamente por el autor, quien asumió la responsabilidad de todas las etapas de desarrollo del artículo.

Accesibilidad de datos: No aplica.

Declaración de uso de IA: El autor declara que no utilizó ninguna herramienta de inteligencia artificial en la elaboración de este artículo.

Referencias

Barrantes, H. (2005). *Introducción a la matemática*. EUNED.

Cedeño, N., Tamaño, M., Merchán, S., & Cedeño, A. (2024). Evolución histórica de las ecuaciones cuadráticas y cúbicas. *Revista Alcance*, *7*(2), 119-134. https://alcance.unesum.edu.ec/index.php/alcance/article/view/85/107

Gen, A., & Padilla, E. (2025). De Vieta a Po-Shen Loh: una fórmula alternativa para la solución de una ecuación de segundo grado. *IV Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe*. https://ponencias.ciaem-redumate.org/cemacyc/article/view/650/166

Loh, P.-S. (2019). A simple proof of the quadratic formula. https://arxiv.org/pdf/1910.06709

Muñoz, L., Terry, E., & Camero, Y. (2012). Algunos matemáticos y sus principales aportes. *Revista Conrado*, *8*(33), 57-70. https://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado/article/view/34/34

National Council of Teachers of Mathematics. (2025). *Algebra*. https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Algebra/

Ruiz, Á. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. EUNED.

Sequeira, R., & Rojas, E. (2015). *Álgebra y funciones*. EUNED.