Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 27, No 1. Agosto, 2026 – Febrero, 2027

ISSN 1659 -0643
DOI: XXX

Símbolo y Sombra: Un análisis histórico y didáctico de la raíz cuadrada de dos

| Symbol and Shadow: A Historical and Didactical Analysis of the Square Root of Two |

| Símbolo e Sombra: Uma análise histórica e didática da raiz quadrada de dois |

Reiman Yitsak Acuña Chacón
reiacuna@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Cartago, Costa Rica

Jorge Luis Chinchilla Valverde
jochinchilla@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica
San José, Costa Rica

Recibido: 3 de setiembre del 2025 Aceptado: 28 de febrero del 2026

Resumen: Este artículo examina la evolución del lenguaje matemático en torno a la expresión de raíces irracionales, con especial énfasis en $\sqrt{2}$. Se rastrea su notación desde la antigüedad hasta la formalización moderna, analiza los métodos de aproximación decimal y discute los conflictos cognitivos que surgen al conciliar la exactitud simbólica con las representaciones finitas. Finalmente, se reflexiona sobre las implicaciones filosóficas y didácticas de esta tensión para la comprensión y enseñanza de los números irracionales. La novedad del trabajo reside en articular estas dimensiones históricas, filosóficas y pedagógicas en un modelo didáctico replicable, que orienta el diseño de actividades con herramientas digitales.

Palabras Clave: Raíces irracionales, $\sqrt{2}$, aproximación decimal, redondeo, truncamiento, lenguaje matemático, conflicto cognitivo, pedagogía.

Abstract: This article examines the evolution of mathematical language concerning the expression of irrational roots, with special emphasis on $\sqrt{2}$. It traces its notation from antiquity to modern formalization, analyzes decimal-approximation methods, and discusses the cognitive conflicts that arise when reconciling symbolic exactness with finite representations. Finally, it reflects on the philosophical and pedagogical implications of this tension for understanding and teaching irrational numbers. The novelty of this study lies in integrating these historical, philosophical, and didactical perspectives into a replicable instructional model that supports the design of digital-based learning activities.

Keywords: Irrational roots, $\sqrt{2}$, decimal approximation, rounding, truncation, mathematical language, cognitive conflict, pedagogy.

[1]Reiman Yitsak Acuña Chacón. Profesora de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Dirección postal: Dulce Nombre, Cartago, Costa Rica. Código postal: 30109. Correo electrónico: reiacuna@itcr.ac.cr

[2]Jorge Luis Chinchilla Valverde. Profesor de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Dirección postal: San Rafael Arriba , Desamparados, San José, Costa Rica. Código postal: 10304. Correo electrónico: jochinchilla@itcr.ac.cr.

Resumo: Este artigo analisa a evolução da linguagem matemática relacionada à representação de raízes irracionais, com foco especial em $\sqrt{2}$. Apresenta-se um percurso histórico de sua notação, desde a Antiguidade até sua formalização moderna, examinam-se os métodos de aproximação decimal e discutem-se os conflitos cognitivos que emergem ao tentar conciliar a exatidão simbólica com representações numéricas finitas. Por fim, são exploradas as implicações filosóficas e didáticas dessa tensão para a compreensão e o ensino dos números irracionais. A originalidade do trabalho está na articulação dessas dimensões históricas, filosóficas e pedagógicas em um modelo didático passível de replicação, que orienta o planejamento de atividades com o uso de ferramentas digitais.

Palavras-chave: Raízes irracionais, $\sqrt{2}$, aproximação decimal, arredondamento, truncamento, linguagem matemática, conflito cognitivo, pedagogia.

1. Introducción

El lenguaje matemático ha sido, desde sus orígenes, mucho más que una herramienta para el cálculo: constituye un entramado simbólico que encarna la forma en que concebimos conceptos abstractos y los trasladamos al plano comunicable (Boyer & Merzbach, 2011). Cada símbolo, cada operación y cada regla gramatical reflejan no sólo necesidades prácticas —como el registro de transacciones comerciales o la predicción astronómica—, sino también un profundo debate filosófico sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y nuestra capacidad para conocerlos (Cajori, 1993).

La historia de la notación numérica y algebraica muestra un constante vaivén entre la búsqueda de precisión y la exigencia de manejabilidad. En la antigua Grecia, los teoremas geométricos de Euclides y Arquímedes convivían con cálculos basados en construcciones gráficas; durante la Edad Media, los monjes europeos y los matemáticos islámicos desarrollaron algoritmos aritméticos que empleaban numeración hindu-árabe y, más tarde, culturas como la china y la maya aportaron sus propias convenciones. A finales del Renacimiento, la consolidación de signos para la raíz y la introducción de la letra x para incógnitas sentaron las bases del lenguaje simbólico moderno.

Dentro de este panorama, el surgimiento del concepto de irracionalidad —hoy representado por $\sqrt{2}$ pero antaño oculto tras razones geométricas— reveló la tensión entre lo exacto y lo aproximado. Si bien el símbolo $\sqrt{2}$ encapsula de manera finitariamente operable una magnitud infinita, su traducción a decimal impone redondeos y truncamientos que obligan al aprendiz a confrontar la disparidad entre el ideal platónico y la limitación de la representación finita. Este contexto filosófico e histórico pone en evidencia un conflicto cognitivo recurrente: el matemático y el estudiante deben alternar entre la visión simbólica —donde $\sqrt{2}$ es un ente perfecto y definible en un sistema axiomático— y la práctica numérica —donde sólo se dispone de aproximaciones finitas.

Investigaciones recientes confirman la complejidad de esta alternancia. Kidron (2018) advierte que centrar la enseñanza exclusivamente en la expansión decimal fomenta concepciones erróneas, como creer que los irracionales "terminan" o "se repiten". Del mismo modo, Zhu y Fan (2018) muestran que la secuenciación instruccional —introducir primero la representación simbólica y después la decimal— reduce significativamente la carga cognitiva y favorece la comprensión conceptual. Estos hallazgos refuerzan que la tensión entre símbolo y aproximación no es solo un problema histórico o filosófico, sino un desafío vigente en la enseñanza contemporánea.

A pesar de la abundancia de estudios históricos sobre notación y de trabajos cognitivos sobre carga extrínseca, falta aún una propuesta integradora que articule evolución simbólica, fundamentos filosóficos y diseño didáctico. Este artículo responde a esa laguna mediante un análisis que recorre la historia del símbolo, examina sus métodos de aproximación y propone un modelo pedagógico en tres fases orientado a mejorar la enseñanza de los números irracionales.

Naturaleza del trabajo. Este manuscrito corresponde a una revisión narrativa y una propuesta teórica/didáctica. No reporta datos empíricos de intervención en aula ni resultados experimentales; las orientaciones instruccionales se derivan de la literatura revisada y se plantean como hipótesis de diseño para ser evaluadas en estudios futuros.

2. Objetivos y preguntas de investigación

Objetivo general

Analizar, desde una perspectiva histórica, filosófica y didáctica, la evolución de la notación de $\sqrt{2}$ y sus implicaciones para la enseñanza de los números irracionales.

Objetivos específicos

1. **Trazo histórico:** Analizar la evolución de la notación de $\sqrt{2}$ desde la geometría griega hasta la formalización moderna, identificando los factores culturales y técnicos que impulsaron cada cambio.
2. **Aproximaciones numéricas:** Examinar los métodos de cálculo y su influencia en la comprensión contemporánea de la irracionalidad.
3. **Conflictos cognitivos:** Identificar los conflictos cognitivos que surgen cuando los estudiantes alternan entre notación simbólica exacta y representación decimal finita, y describir cómo se manifiestan en el aula.
4. **Diseño didáctico:** Diseñar propuestas didácticas que integren la historia y filosofía del símbolo $\sqrt{2}$ en actividades pedagógicas orientadas a mitigar dichos conflictos y a promover una comprensión más profunda de los irracionales.

Estos ejes guiarán el recorrido del artículo. Iniciaremos con la sección 4, que estudia los orígenes geométricos de la notación. Posteriormente, la sección 6 examinará los métodos históricos de aproximación decimal, y la sección 7 analizará los conflictos cognitivos identificados en la enseñanza de este concepto. Finalmente, el trabajo culminará con una discusión que vincula los hallazgos con los objetivos planteados, para luego presentar las conclusiones y proponer orientaciones para el diseño didáctico de los números irracionales.

3. Metodología y criterios de selección de fuentes.

Para sustentar el análisis se realizó una revisión narrativa con los siguientes lineamientos:

1. **Cobertura cronológica.** Se incluyeron hitos desde la Grecia clásica (Euclides) hasta el siglo XX (Bourbaki) para trazar la evolución completa de la notación de $\sqrt{2}$.
2. **Relevancia didáctica.** Se priorizaron estudios —históricos y educativos— que discuten explícitamente la enseñanza de los irracionales o los conflictos cognitivos asociados.
3. **Autoridad académica.** Se seleccionaron ediciones críticas y monografías reconocidas (p. ej., *A History of Mathematical Notations* de Cajori) y artículos indexados en bases como Scopus y ERIC.

4. **Equilibrio disciplinar.** Se buscaron fuentes de historia de la matemática, filosofía y didáctica para articular un enfoque interdisciplinar.

5. **Actualización bibliográfica.** Para la dimensión educativa se limitaron las referencias a investigaciones publicadas entre 2000–2025, garantizando pertinencia contemporánea.

El corpus resultante consta de 24 documentos —aproximadamente 13 históricos, 6 didácticos y 5 filosóficos— que se describen y discuten en las secciones posteriores.

Procedimiento de búsqueda y depuración. La selección se realizó mediante búsquedas en bases indexadas (por ejemplo, Scopus y ERIC) y en buscadores académicos, complementadas con rastreo hacia atrás (revisión de referencias de trabajos clave) y rastreo hacia adelante (citas posteriores). Se utilizaron combinaciones de palabras clave en español e inglés, tales como *irrational numbers*, *square root of two*, *notation history*, *decimal approximation*, *cognitive load* y *mathematics education*. Se excluyeron duplicados y documentos sin relación explícita con (i) la evolución notacional de la raíz, (ii) métodos de aproximación, o (iii) implicaciones didácticas/cognitivas asociadas a irracionales.

4. Notación temprana de las raíces cuadradas

Los primeros matemáticos griegos concebían la raíz cuadrada de un número como la longitud del lado de un cuadrado de área equivalente. En *Los Elementos* (c. 300 a.C.), Euclides describe la comparación de magnitudes mediante la construcción geométrica de figuras cuadradas y utiliza métodos de aplicación de áreas para generar proporciones que equivalen a cuadrados de magnitud dada (Euclides, 1956).

La Figura 1 representa la concepción geométrica de la raíz cuadrada en la matemática griega clásica. El cuadrado $ABCD$, junto con su diagonal AC y el cuadrado adyacente construido sobre el segmento AE, ejemplifica cómo Euclides concebía la raíz cuadrada como la longitud del lado de un cuadrado con área equivalente. Este enfoque, característico de la geometría euclidiana, evidencia que la raíz cuadrada no se expresaba mediante símbolos algebraicos, sino a través de construcciones geométricas y proporciones obtenidas mediante el método de aplicación de áreas descrito en *Los Elementos* (Euclides, 1956). Resulta necesario aclarar que los antiguos matemáticos carecían de un símbolo algebraico para la raíz; en cambio, la expresaban mediante la descripción de construcciones geométricas propias de la geometría euclidiana.

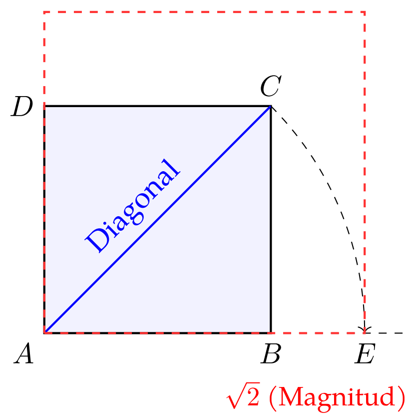


Figura 1: Representación geométrica: El cuadrado $ABCD$ de lado 1 y el cuadrado adyacente construido sobre el segmento AE (donde AE es igual a la diagonal AC). Elaboración propia

Cabe destacar que según Lorenzo (2007), las culturas hindú, egipcia, griega y babilónica conocieron y aplicaron la raíz cuadrada en distintos contextos matemáticos, como el cálculo de áreas, volúmenes y la resolución de ecuaciones cuadráticas. También la emplearon para determinar la hipotenusa en triángulos rectángulos. Entre ellas, los babilonios desarrollaron el método más avanzado, conocido actualmente como "método babilonio", que aún se enseña en secundaria. Este procedimiento consistía en aproximar raíces cuadradas mediante el cuadrado de rectángulos.

Al respecto, las tablillas babilónicas -como la famosa Plimpton 322, fechada hacia 1800a.C.- contienen aproximaciones numéricas de relaciones pitagóricas, incluyendo valores aproximados para $\sqrt{2}$ que revelan que ya empleaban métodos iterativos para calcular raíces cuadradas (Neugebauer, 1969). Estos algoritmos, basados en procedimientos de bisección y en notación sexagesimal, permitieron obtener valores con una precisión sorprendente.

Autores posteriores, como Florian Cajori, documentaron la evolución de estas ideas en culturas islámicas e indias, donde se introdujeron primeros símbolos algebraicos para representar raíces, aunque de manera rudimentaria (Cajori, 1993).

5. El descubrimiento de la irracionalidad y sus repercusiones

La irracionalidad de la raíz cuadrada de dos se atribuye tradicionalmente a Hippaso de Metaponto, discípulo pitagórico del siglo V a.C., quien demostró por contradicción que no existen enteros m y n tales que $(m/n)^2 = 2$, cuestionando la visión de que toda magnitud podía expresarse como proporción de enteros (von Fritz, 2004). Este descubrimiento se relaciona estrechamente con el proceso de antifairesis, entendido como la resta sucesiva entre dos magnitudes A y B (siendo $A > B$), hasta encontrar una magnitud común que las mida a ambas, o bien continuar indefinidamente cuando son inconmensurables. La *antifairesis*, vinculada con los conceptos de razón y proporción, fue trabajada inicialmente por los pitagóricos, retomada por Eudoxo en su teoría de proporciones y finalmente sistematizada por Euclides en el Libro X de *Los Elementos*. En esta obra, Euclides clasifica las longitudes irracionales precisamente a partir de la antifairesis y el análisis de proporciones de segmentos (Roskam, 2009).

Filosóficamente, la irracionalidad desató un debate entre realistas -que sostienen que las entidades matemáticas existen independientemente de la mente- y constructivistas -que las consideran construcciones mentales sujetas a demostración y aproximación-. Esta tensión conceptual persistió durante siglos. En el Renacimiento, matemáticos como François Viète y René Descartes enfrentaron el desafío de cómo representar y operar con estas entidades. En respuesta, formalizaron la notación radica "$\sqrt{\cdot}$" para conciliar exactitud simbólica y practicidad operativa (Cajori, 1993). Este avance se convirtió en un hito crucial para manejar los números irracionales.

No obstante, como subraya Heeffer y Van Dyck (2010), este avance en la notación no fue solo técnico sino una verdadera revolución simbólica que transformó profundamente la forma de pensar la matemática. El uso de símbolos algebraicos permitió manipular entidades como los números irracionales -difíciles de justificar desde una perspectiva constructivista- como si fueran reales y operables, incluso sin una definición clara en términos geométricos o aritméticos. Esta transformación, impulsada por Viète y perfeccionada por Descartes, no solo amplió el campo de las matemáticas, sino que también alteró su fundamento filosófico, acercándolo a una forma de realismo pragmático, donde la existencia matemática se justifica por su utilidad dentro del sistema simbólico.

Así, mientras que Cajori (1993) documenta el desarrollo histórico de la notación radical como un esfuerzo por representar con claridad lo irracional, Heeffer y Van Dyck (2010) nos recuerda que este cambio simbólico modificó la ontología matemática al crear un nuevo espacio en el que los objetos matemáticos existen no por su intuición, sino por su funcionalidad simbólica dentro del razonamiento formal. Este choque conceptual no solo marcó la historia de las matemáticas, sino que sigue vigente en debates sobre cómo enseñar los números irracionales: ¿se debe priorizar la manipulación del símbolo puro o la familiarización con sus aproximaciones numéricas?

Este choque conceptual no sólo marcó la historia de las matemáticas, sino que sigue vigente en debates sobre cómo enseñar los números irracionales: ¿priorizar la manipulación del símbolo puro o la familiarización con sus aproximaciones numéricas? En la siguiente sección abordaremos ya los métodos de cálculo decimal y sus implicaciones pedagógicas.

6. Aproximaciones decimales: redondeos y truncamientos

Los métodos de aproximación decimal a la raíz cuadrada de dos se remontan a las tablillas babilónicas, donde se usaba un sistema sexagesimal y procedimientos de bisección para obtener valores de $\sqrt{2}$ con hasta cuatro o cinco cifras correctas (Neugebauer, 1969). En la Antigua Grecia, aunque la irracionalidad era un tabú, algunos comentaristas de Euclides emplearon aproximaciones por medio de fracciones continuas primitivas antes de pasar a descripciones geométricas. Por su parte, el conocimiento matemático del Antiguo Egipto demuestra una comprensión práctica de la raíz cuadrada, especialmente en contextos como la construcción y la agrimensura.

Lejos de la notación simbólica formal, los escribas egipcios empleaban métodos iterativos de aproximación a través de fracciones unitarias, afinando progresivamente los resultados. Según Knorr (1982), estos procedimientos no solo muestran una capacidad aritmética avanzada, sino que reflejan una concepción operativa del número, basada en la eficacia antes que en el formalismo. Coincidentemente, el análisis del Papiro Rhind en estudios recientes destaca cómo estas raíces cuadradas eran utilizadas en problemas geométricos, como el cálculo de áreas circulares, a través de fórmulas aproximadas que implicaban indirectamente este tipo de operaciones. En conjunto, estos hallazgos revelan una tradición matemática empírica que, aunque carente de abstracción simbólica moderna, anticipa principios fundamentales del cálculo numérico.

Este enfoque pragmático del cálculo numérico continuó desarrollándose en épocas posteriores. Durante la Edad Media islámica, matemáticos como Al-Juarismi desarrollaron algoritmos aritméticos que, apoyados en la numeración indo-arábiga, facilitaban el cálculo manual de raíces cuadradas mediante operaciones sucesivas de división y promedio. (Cajori, 1993). En Europa renacentista, la publicación de tablas numéricas -a menudo impresas en Londres y Amberes- proporcionó valores ya redondeados de $\sqrt{2}$, aunque sin indicar el procedimiento completo, reflejando así una creciente necesidad de acceder a estos valores para fines prácticos.

Con la llegada de la imprenta y los primeros dispositivos mecánicos de cálculo (como los cilindros de Napier, 1617), se pudo automatizar parcialmente la extracción de raíces. Por ejemplo, los logaritmos de Napier y posteriormente de Briggs permitieron convertir la multiplicación y las raíces en sumas y divisiones, mejorando drásticamente la velocidad y precisión de los cálculos de ingenieros y astrónomos (Briggs, 1624).

A finales del siglo XIX, con la aparición de las calculadoras de mesa y los métodos de convergencia acelerada (por ejemplo, el método de Newton–Raphson), se alcanzó la precisión de decenas de dígitos en fracciones de segundo. Estas técnicas siguen vigentes tanto en software matemático como en aplicaciones de ingeniería, donde el control de errores de redondeo y truncamiento es crítico para la estabilidad numérica (Knuth, 1997).

7. Conflictos cognitivos en la enseñanza de irracionales

El estudiante de hoy debe alternar continuamente entre la forma simbólica $\sqrt{2}$ y su forma decimal aproximada (por ejemplo, 1.414), un desafío conceptual que se aborda en la sección 4, donde se conceptualiza la raíz de forma geométrica, y en la sección 6, donde se detallan los métodos de redondeo y truncamiento. Esta constante alternancia puede generar una sobrecarga cognitiva en el aprendizaje, lo que la teoría de Sweller et al. (2011) clasifica en dos tipos:

- *Carga intrínseca*, referida a la complejidad inherente del concepto de irracionalidad, difícil de reducir sin comprometer su profundidad.
- *Carga extrínseca*, aquella sobrecarga mental innecesaria causada por una presentación inadecuada de la información, como la exposición simultánea y no secuenciada de símbolos, diagramas y números decimales (Sweller et al., 2011).

Diversas investigaciones en educación matemática han explorado cómo reducir esta carga extrínseca. Por un lado, se ha demostrado que dividir la enseñanza en dos fases—primero abordando la representación simbólica del número y luego su forma decimal—favorece la comprensión y la transferencia conceptual. Esto es particularmente eficaz si se evita mostrar ambas representaciones en un solo esquema visual denso (Mason, 2006). Por otro lado, estudios recientes advierten sobre los riesgos de centrarse exclusivamente en la forma decimal: presentar solo valores aproximados puede inducir errores conceptuales, como la idea de que los irracionales "terminan" o "se repiten" en la recta real (Babari, 2024; Kidron, 2018). Estos hallazgos respaldan la necesidad de un enfoque pedagógico equilibrado entre lo simbólico y lo numérico.

Además, la sobrecarga cognitiva puede reducirse integrando representaciones visuales, simbólicas y numéricas de manera secuencial. Por ejemplo, comenzar con una construcción geométrica de $\sqrt{2}$ a partir del teorema de Pitágoras, como se presenta en la sección 4, permite formar una intuición visual robusta. Posteriormente, actividades como la bisección numérica sucesiva, tratada en la sección 6, ayudan a transitar hacia el pensamiento algebraico, relacionando lo visual con lo abstracto (Chevallard, 2019; Nurjanah & Retnowati, 2018).

Este tipo de progresión está alineado con la Teoría de la Carga Cognitiva, que enfatiza la necesidad de reducir la carga extrínseca para liberar recursos mentales destinados al aprendizaje profundo (Sweller et al., 2011). Asimismo, se ha demostrado que la articulación entre registros semióticos—como el visual, simbólico y verbal—disminuye la carga mental y potencia la comprensión estructural en procesos de simbolización temprana (Kaput et al., 2017). Actividades que vinculan representaciones geométricas con aproximaciones numéricas permiten al estudiante consolidar el significado de los irracionales sin saturarse cognitivamente.

En conjunto, las evidencias sugieren que un diseño instruccional bien equilibrado entre formas visuales, simbólicas y decimales no solo evita errores conceptuales, sino que también puede favorecer un aprendizaje más profundo, flexible y significativo.

7.1. Ejemplo didáctico: aproximación de $\sqrt{2}$ mediante bisección con GeoGebra

7.1.1. Objetivo

Favorecer en el estudiantado la comprensión del vínculo entre la representación simbólica $\sqrt{2}$ y su valor decimal mediante la exploración del algoritmo de bisección, reconociendo cómo este permite acotar progresivamente el intervalo de incertidumbre y visualizar el carácter irracional del número.

7.1.2. Recursos

Computadora con GeoGebra Classic (versión web o de escritorio). Se recomienda proyectar el applet durante la clase y, de ser posible, compartir el archivo `bisec_sqrt2.ggb`. En caso de publicar el recurso en GeoGebra, incluir aquí el enlace directo al material (no al sitio general): https://www.geogebra.org/classic/kvnyc4mz.[1]

7.1.3. Construcción del applet (fase docente)

Parte A: Parámetros y función

1. Crear un deslizador `n`:
   - Tipo: Número.
   - Intervalo: $1 \leq n \leq 15$.
   - Incremento: 1.
   - Propósito: controla la cantidad de iteraciones de bisección.
2. Definir valores iniciales (como *números* en la barra de entrada): `a=1`, `b=2`, `m=1`, `err=1`.
3. Definir la función: `f(x)=x^2-2`.
4. (Opcional, recomendado) Crear textos dinámicos (como en la imagen):
   - `texto1 = Texto["Aproximación=" + m]`
   - `texto2 = Texto["Intervalo=[" + a + "," + b + "]"]`

Parte B: Guion-script de bisección (*al actualizar* n)

En `n` → **Scripting** → *Al actualizar* (JavaScript), pegar:

```
var a = 1, b = 2, m, fa, fm;

for (var i = 0; i < ggbApplet.getValue("n"); i++) {
  m  = (a + b) / 2;
  fa = ggbApplet.getValue("f(" + a + ")");
  fm = ggbApplet.getValue("f(" + m + ")");

  if (fm * fa <= 0) {  b = m; } else {  a = m; }
}

ggbApplet.setValue("a", a);
ggbApplet.setValue("b", b);
ggbApplet.setValue("m", (a + b) / 2);
ggbApplet.setValue("err", (b - a) / 2);
```

Código 1: Script de bisección (Al actualizar, en el deslizador `n`). Elaboración propia

Nota didáctica. El **script** actualiza `a`, `b`, `m` y `err`. Los textos `texto1` y `texto2` se actualizan automáticamente porque dependen de `m`, `a` y `b`.

[1] El nombre del archivo se refiere a la construcción del applet. La versión de esta construcción fue realizada en https://www.geogebra.org/classic.

Explicación (qué actualiza el script).

- El bucle aplica n iteraciones de bisección para la función $f(x) = x^2 - 2$ en $[1, 2]$.
- Al finalizar, el script **actualiza** los números `a` y `b` (cotas del intervalo), `m` (punto medio como aproximación) y `err` (cota del error: $(b - a)/2$).
- Los textos `tAprox` y `tInt` **se actualizan automáticamente** porque dependen de `m`, `a` y `b`.

Parte C: Visualización geométrica (segmento de longitud m sobre la diagonal)

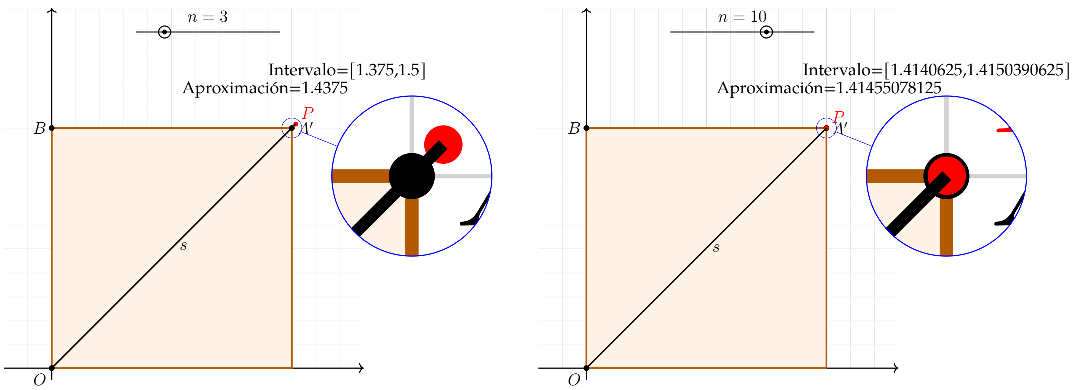
5. Definir el origen: `O=(0,0)`.
6. Construir el cuadrado unidad (como en la imagen):

```
pol1 = Poligono(O,(1,0),4)
```

Código 2: Cuadrado de lado 1.

7. Definir el punto sobre la semirrecta $y = x$: `P=(m/sqrt(2), m/sqrt(2))`.
8. Dibujar el segmento: `s=Segmento(O,P)`.

Lectura visual. La longitud del segmento `s` es m. Cuando $m > \sqrt{2}$, el punto P queda ligeramente *más allá* del vértice $(1, 1)$ del cuadrado; al aumentar n, m converge hacia $\sqrt{2}$ y el intervalo $[a, b]$ se estrecha. Ver la Figura 2 para los detalles.



(a) $n = 3$. **(b)** $n = 10$.

Figura 2: Applet de bisección para aproximar $\sqrt{2}$: cuadrado unitario, segmento s (longitud m) y los valores reportados por el algoritmo. Elaboración propia.

7.1.4. Uso en clase

Mover el deslizador `n` para observar cómo cambian `a`, `b`, `m` y `err`, y cómo en pantalla se actualizan los textos `Aproximación=` y `Intervalo=[a,b]`. Pedir al estudiantado que relacione la cota del error `err` con el ancho del intervalo y que estime cuántas iteraciones se requieren para alcanzar una precisión dada.

La Figura 3 muestra visualmente los pasos anteriores:

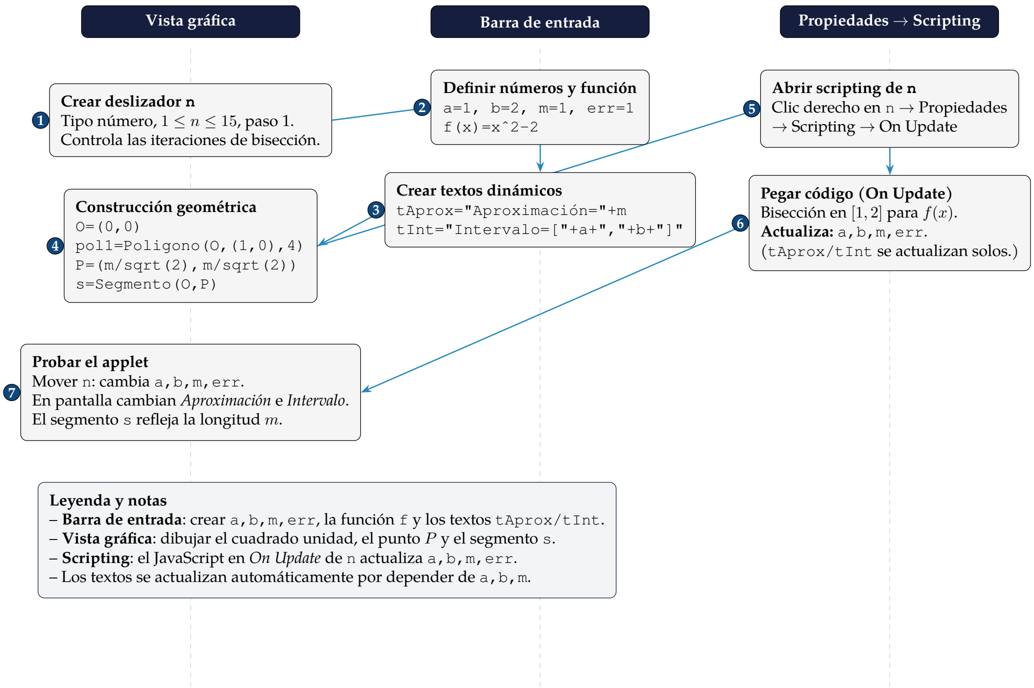


Figura 3: Flujo de construcción del applet de bisección de $\sqrt{2}$ en GeoGebra (versión `a,b,m,err`). Elaboración propia.

7.1.5. Secuencia para el estudiante

1. **Fase 1 (geométrica).** Los estudiantes observan el cuadrado y su diagonal. Se analiza por qué la medida exacta de esta última es $\sqrt{2}$. Se observa como el segmento s se aproxima a la diagonal del cuadrado z.
2. **Fase 2 (numérica).** Se manipula el deslizador `n` desde 1 hasta 15, registrando la cota superior e inferior del intervalo tras cada iteración.
3. **Fase 3 (reflexión).** En parejas, redactan una breve explicación sobre:
   - Cómo la separación de vistas contribuye a reducir la *carga extrínseca*.
   - Por qué, independientemente del valor de `n`, siempre queda un intervalo abierto.
   - Qué significa “convergencia” hacia $\sqrt{2}$ cuando nunca se obtiene un decimal exacto.

7.1.6. Relación con los objetivos del artículo

Esta actividad materializa el *modelo de intervención en tres fases* descrito en la narrativa histórica: (i) símbolo geométrico, (ii) aproximación sucesiva y (iii) transferencia entre representaciones. Además, ejemplifica cómo minimizar la sobrecarga extrínseca señalada por Mason (2006), reforzando la pertinencia didáctica de nuestro análisis. La Figura 4 hace referencia a lo descrito anteriormente.

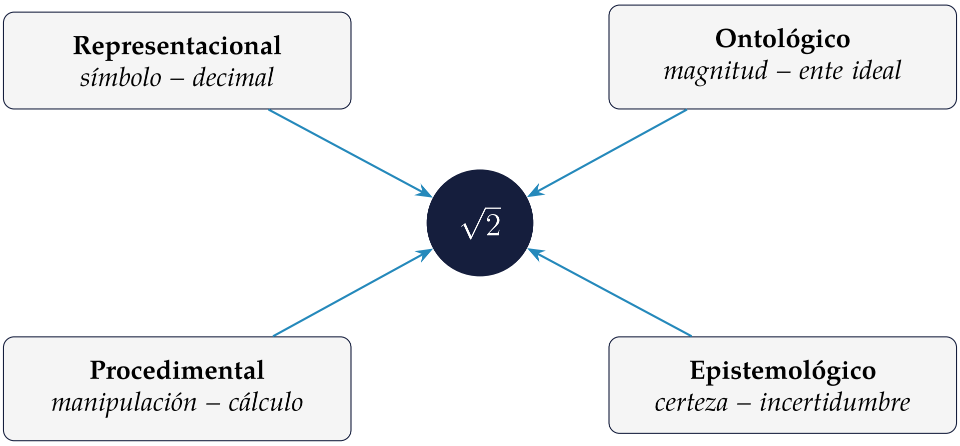


Figura 4: Taxonomía de conflictos cognitivos en torno a la raíz cuadrada de dos. Elaboración propia

7.1.7. Marco comparativo de enfoques didácticos

La Tabla 1 relaciona cada conflicto con estrategias de enseñanza, su objetivo principal, y evidencia disponible.

Tabla 1: Marco comparativo de conflictos y enfoques didácticos. *Nota*. Adaptado de Mason (2006) y Sweller (1988); ampliado con Kidron (2018), Speer et al. (2010) y Thomsen et al. (2022).

Tipo de conflicto	*Estrategia didáctica*	*Objetivo cognitivo*	*Evidencia empírica*
Representacional	Secuenciación "simbólico → decimal" + applet de bisección (GeoGebra)	Reducir carga extrínseca, clarificar infinitud	Kidron (2018) y Mason (2006)
Ontológico	Narrativa histórica de Euclides a Dedekind	Conectar magnitud geométrica con construcción axiomática	Speer et al. (2010)
Procedimental	Taller de transformaciones de radicales + algoritmo de Newton–Raphson	Transferir reglas algebraicas al contexto numérico	Thomsen et al. (2022)
Epistemológico	Debate socrático certeza/error + simulación de redondeo	Explicitar naturaleza provisional de la aproximación	Sweller (1988); Lakatos (1976)

7.1.8. Síntesis y valor formativo

La actividad propuesta no solo permite aproximar con precisión el valor decimal de $\sqrt{2}$, sino que ejemplifica una intervención didáctica alineada con el enfoque de reducción de carga cognitiva extrínseca. Al separar las fases geométrica y numérica mediante un control booleano, se facilita la transición entre representaciones sin sobrecargar la memoria de trabajo del estudiante. Además, el uso del algoritmo de bisección visualiza de manera concreta la convergencia y la inalcanzabilidad de un valor exacto, lo que introduce de forma intuitiva la noción de irracionalidad. Este tipo de diseño instruccional aborda directamente conflictos representacionales y epistemológicos descritos en la taxonomía desarrollada en este artículo, y constituye un ejemplo replicable de cómo los recursos digitales pueden apoyar una enseñanza matemática más profunda, estructurada y consciente del proceso cognitivo.

7.2. Lagunas de Investigación y Agenda Futura

La taxonomía y el marco comparativo propuestos no solo sirven para analizar la enseñanza actual, sino también para delinear una agenda de investigación futura que valide estas estrategias. A continuación, se presentan líneas de investigación que conectan directamente con el marco teórico desarrollado:

- **Comparaciones controladas:** Faltan ensayos cuasi-experimentales que midan el efecto de la secuenciación símbolo→decimal frente a enfoques intercalados.
  - **Pregunta de investigación:** ¿Produce la presentación secuencial mejoras significativas en la comprensión conceptual de los irracionales, en comparación con la presentación intercalada, al controlar la carga cognitiva?
  - **Vínculo con la taxonomía:** Este tipo de estudio abordaría directamente el núcleo del Conflicto Representacional (símbolo-decimal). Permitiría medir de forma empírica qué estrategia pedagógica es más eficaz para ayudar a los estudiantes a construir un puente mental entre la exactitud del símbolo y la infinitud de su expansión decimal, mitigando la carga cognitiva extrínseca. Investigaciones recientes que respaldan esta hipótesis encontraron que presentar representaciones simbólicas antes que las numéricas mejora la comprensión conceptual y reduce la carga mental innecesaria (Zhu & Fan, 2018). Desde nuestra óptica, este resultado valida la pertinencia de diseñar estudios que apliquen estas conclusiones al caso específico de los irracionales, donde la simultaneidad de notaciones puede provocar una interferencia cognitiva aún mayor.
- **Persistencia a largo plazo:** Existe escasa evidencia sobre la retención conceptual de los irracionales más allá de seis meses tras una intervención pedagógica.
  - **Pregunta de investigación:** ¿Cuál es la tasa de retención de los conceptos de irracionalidad a los 6 y 12 meses tras una intervención basada en el modelo de tres fases, frente a un currículo tradicional?
  - **Vínculo con la taxonomía:** Una retención exitosa y a largo plazo implicaría que el estudiante ha internalizado y resuelto las tensiones de los cuatro tipos de conflictos. Esta investigación evaluaría si el modelo propuesto logra una asimilación duradera del Conflicto Ontológico (integrando la magnitud con el ente ideal) y del Conflicto Epistemológico (aceptando la coexistencia de certeza y aproximación). Schneider y Stern (2010) destacan que “la comprensión conceptual de estructuras numéricas complejas [...] no es estable sin intervenciones instruccionales recurrentes y basadas en significados” (p. 514). Este principio, aunque estudiado en el contexto de los racionales, puede extrapolarse al caso de los irracionales, cuya abstracción demanda modelos instruccionales explícitamente diseñados para lograr retención.
- **Entornos digitales:** Se necesitan estudios que midan la carga cognitiva en applets dinámicos (GeoGebra, Desmos) versus manipulativos físicos.
  - **Pregunta de investigación:** ¿Existe diferencia significativa en la carga cognitiva percibida y en el rendimiento en tareas de aproximación decimal de $\sqrt{2}$ cuando se utilizan applets interactivos frente a material manipulativo físico?

- **Vínculo con la taxonomía:** Esta línea de investigación se centra en cómo la tecnología puede mediar los conflictos. Específicamente, evaluaría la eficacia de las herramientas digitales para reducir la fricción del Conflicto Representacional (al vincular dinámicamente el símbolo con el decimal) y del Conflicto Procedimental (al automatizar el algoritmo de cálculo y permitir que el estudiante se enfoque en el concepto de convergencia). Sedig y Liang (2016) sostienen que las representaciones visuales interactivas, cuando están bien diseñadas, disminuyen significativamente la carga extrínseca al distribuir la atención entre canales simbólicos y gráficos. Desde la perspectiva de nuestro modelo, este diseño instruccional permitiría una focalización cognitiva más efectiva en la noción de irracionalidad, aliviando barreras procedimentales y representacionales simultáneamente.

- **Transversalidad cultural:** La mayoría de los trabajos proviene de contextos occidentales; urge investigar cómo se manifiestan estos conflictos en otros currículos.
  - **Pregunta de investigación:** ¿Cómo varía el conflicto representacional (símbolo $\leftrightarrow$ decimal) en torno a los irracionales entre estudiantes costarricenses, japoneses y españoles al aplicar la misma secuencia didáctica?
  - **Vínculo con la taxonomía:** Esta investigación utilizaría la taxonomía como un marco de análisis comparativo. Permitiría determinar si la intensidad de cada tipo de conflicto (p. ej., un mayor énfasis en el *Conflicto Procedimental* en currículos centrados en la algoritmia) es universal o si está condicionada por la cultura pedagógica, validando así la robustez del modelo teórico en diferentes contextos educativos. Si bien la literatura aún es escasa en este aspecto, trabajos como los de Solano-Flores (2021) indican que los marcos culturales influyen en la interpretación de representaciones matemáticas, lo cual justifica el estudio comparado de nuestra taxonomía en distintos entornos educativos.

8. Formalización y consolidación del lenguaje simbólico moderno

A finales del siglo XVI, François Viète introdujo por primera vez la notación literal para parámetros y constantes en su *In artem analyticem isagoge* (1591), sentando las bases del álgebra simbólica moderna (Viète, 1591). Poco después, en 1637, René Descartes publicó *La Géométrie*, donde generalizó el uso de la letra x para incógnitas y acuñó la barra de radical "$\sqrt{\ }$" para la extracción de raíces cuadradas, unificando así la notación algebraica y geométrica (Descartes, 1637). Estos avances marcaron el tránsito desde la geometría clásica hacia un lenguaje algebraico autónomo y expresivo.

Durante el siglo XVIII, Leonhard Euler amplió drásticamente el catálogo de símbolos al popularizar e como base de los logaritmos naturales, i para la unidad imaginaria y la notación funcional $f(x)$; además refinó la tipografía del radical en su *Introductio in analysin infinitorum* (Euler, 1748). Esta consolidación simbólica facilitó la formulación compacta de resultados cada vez más complejos en análisis infinitesimal.

El siglo XIX trajo consigo la necesidad de rigor aritmético. Richard Dedekind propuso en 1872 los célebres *cortes de Dedekind* para construir irracionales a partir de particiones de los racionales (Dedekind, 1872), mientras que Georg Cantor desarrolló casi simultáneamente la teoría de conjuntos, fundamentando la continuidad y la cardinalidad de los números reales (Cantor, 1874). La distinción entre números y símbolos se extendió entonces al terreno de los fundamentos lógicos de la matemática.

En el siglo XX, el colectivo Nicolas Bourbaki homogeneizó gran parte de la notación existente en sus *Éléments de mathématique*, integrando definiciones axiomáticas de los números reales e irracionales en un corpus lógico unificado (Bourbaki, Nicolas, 1954). A su estela, los manuales modernos y los sistemas de tipografía digital (de `TeX` a Unicode) han estandarizado definitivamente los símbolos, lo que permite hoy una comunicación matemática global y consistente.

9. Implicaciones filosóficas y discursivas

La tensión entre lo finito y lo infinito ha obsesionado a los filósofos de la matemática desde Platón, quien en la *República* ya distinguía el mundo de las Ideas (infinitas, perfectas) del sensible (finito, aproximado) (Plato, 1992). En la época moderna, Kant argumentó que los conceptos matemáticos -como el de número- son construcciones a priori de la mente que permiten aprehender tanto lo finito como lo infinito regulativo en la experiencia (Kant, 2007).

En el siglo XX, este debate cristalizó en corrientes contrapuestas:

- El *realismo matemático* (o platonismo) sostiene que las entidades numéricas existen independientemente de nuestras operaciones y aproximaciones, y que la notación simbólica es un reflejo de esa realidad inmutable (Hilbert, 1925).
- El *constructivismo* (intuicionismo), liderado por Brouwer, defiende que los números -en particular los irracionales- sólo tienen sentido en la medida en que pueden construirse efectivamente, de modo que toda afirmación matemática debe provenir de un método finito de construcción (Brouwer, 1913).

Esta fractura filosófica influyó directamente en el lenguaje simbólico: mientras el formalismo hilbertiano buscaba sistemas axiomáticos completos y coherentes, los intuicionistas rechazaban objetos que no pudieran obtenerse por algoritmos finitos, criticando las aproximaciones decimales que daban por supuesta la existencia de límites infinitos (Lakatos, 1976). En la enseñanza, estas posiciones se traducen en enfoques divergentes: unos enfatizan la manipulación simbólica y la confianza en la notación como reflejo de verdades eternas; otros priorizan actividades de construcción numérica que subrayen la finitud de cada paso y la naturaleza aproximativa de los irracionales.

Así pues, el trasfondo filosófico no es un mero debate abstracto, sino que modela nuestras decisiones pedagógicas cotidianas. Como señala Sfard (1991), las metáforas con las que conceptualizamos las matemáticas -como entidades fijas o procesos en construcción- afectan profundamente la forma en que las enseñamos. Incorporar actividades que oscilen entre la construcción numérica paso a paso y la interpretación simbólica permite que los estudiantes naveguen entre estas tradiciones filosóficas sin caer en reduccionismos.

10. Discusión

La revisión histórica respalda el uso de narrativas evolutivas para contextualizar los símbolos; la exposición de métodos de cálculo legitima el tratamiento explícito del error; y el análisis de la carga cognitiva justifica secuencias didácticas graduales. En conjunto, estos resultados ofrecen un marco coherente para diseñar unidades didácticas sobre irracionales que combinen perspectiva histórica y herramientas tecnológicas (p. ej., GeoGebra).

Líneas futuras

- Investigar, mediante estudios cuasi-experimentales, el impacto de la secuencia propuesta sobre la comprensión conceptual de los irracionales.
- Explorar la efectividad de applets interactivos que visualicen simultáneamente la construcción geométrica y la aproximación decimal, evaluando su influencia en la carga cognitiva.

- Extender el análisis a $\sqrt{3}$, π y e para comparar patrones de conflicto cognitivo y estrategias de enseñanza.

En síntesis, la trayectoria de $\sqrt{2}$ ilustra que todo símbolo matemático es a la vez solución histórica y fuente de nuevos desafíos cognitivos. Reconocer este doble carácter permite diseñar experiencias de aprendizaje que conduzcan al estudiante desde la perfección del símbolo hasta la imperfecta —pero necesaria— realidad de la aproximación numérica.

La utilidad de este análisis trasciende la mera propuesta de actividades. Su verdadero valor reside en **enriquecer la práctica docente**, dotándola de una perspectiva histórica y filosófica. Al enfrentar el concepto de los números irracionales, los estudiantes formulan preguntas que, sin saberlo, replican los grandes debates de la historia de las matemáticas. Interrogantes como: "¿Pero qué es realmente $\sqrt{2}$ si su decimal es infinito?" o "¿Cómo puede existir algo así en el mundo real?" son un eco directo de las mismas tensiones que desafiaron a los matemáticos griegos hace siglos. Comprender esta resonancia histórica permite al docente no solo responder, sino también guiar al estudiante a través de un viaje conceptual que revela la profunda naturaleza de las matemáticas. Un docente equipado con el conocimiento de la evolución del concepto puede responder de manera más profunda. Puede explicar que $\sqrt{2}$ nació como una longitud tangible -la diagonal de un cuadrado- mucho antes de ser un símbolo abstracto, conectando la noción con una realidad geométrica y visual. Del mismo modo, comprender la tensión filosófica entre el realismo (que trata a $\sqrt{2}$ como una entidad perfecta y preexistente) y el constructivismo (que lo ve como un proceso de aproximación infinita) permite al educador validar las distintas intuiciones de los alumnos. Al estudiante que se siente abrumado por el infinito decimal, el profesor puede presentarle el enfoque constructivista a través de métodos de aproximación como la bisección, demostrando que podemos .[a]corralar.[el] valor con la precisión que necesitemos. Al que se siente cómodo con la manipulación algebraica, puede reforzar la visión formalista, donde el símbolo garantiza una exactitud que la representación decimal no puede ofrecer. En esencia, este bagaje histórico y filosófico puede enriquecer la gestión del aula: las preguntas de los estudiantes dejan de ser meros obstáculos para convertirse en oportunidades para explorar la naturaleza misma del pensamiento matemático, haciendo la enseñanza más robusta y el aprendizaje más significativo.

11. Conclusiones

Síntesis por objetivos. En relación con los objetivos planteados: (1) se reconstruyó el trazo histórico de la notación de $\sqrt{2}$; (2) se describieron y contextualizaron métodos de aproximación y su vínculo con redondeo/truncamiento; (3) se organizó la discusión de conflictos cognitivos asociados a la alternancia símbolo–decimal; y (4) se propuso un diseño didáctico articulado (tres fases) como hipótesis de trabajo, derivada de la literatura revisada.

El recorrido por la historia del símbolo $\sqrt{2}$ revela que la notación matemática es un lenguaje vivo, moldeado por las necesidades culturales y tecnológicas de cada época (Ernest, 1998). La evolución desde las construcciones geométricas griegas hasta el formalismo abstracto del grupo Bourbaki demuestra cómo un concepto puede ser reinterpretado y su representación simbólica refinada a lo largo de los siglos.

Este viaje histórico pone de manifiesto una tensión fundamental que persiste hasta hoy: la dualidad entre la perfección del símbolo y la realidad de su aproximación. El símbolo $\sqrt{2}$ captura una idea exacta e infinita, pero su aplicación práctica, ya sea a través de los antiguos métodos sexagesimales o de los modernos algoritmos numéricos, nos obliga a operar con valores finitos e imperfectos. Esta dicotomía no constituye únicamente una reflexión filosófica abstracta, sino la fuente de un profundo conflicto cognitivo en el aprendizaje. La alternancia entre la representación simbólica y su expansión decimal genera una carga cognitiva considerable para los estudiantes, dificultando una comprensión cabal de la naturaleza de los números irracionales (Sfard, 1991; Zhu & Fan, 2018).

Para abordar este desafío, el presente artículo propone un modelo didáctico estructurado en tres fases: primero, la introducción del concepto a través de su símbolo y contexto histórico; segundo, la exploración de su naturaleza a través de la aproximación numérica; y tercero, la consolidación del aprendizaje mediante la transferencia consciente entre ambas representaciones. Al integrar la historia, la filosofía y herramientas tecnológicas como GeoGebra, este itinerario pedagógico funciona como un andamiaje que no solo transmite un concepto, sino que guía al estudiante a través de las mismas tensiones que dieron forma a su descubrimiento, fomentando así una comprensión más robusta y significativa de los números irracionales.

Contribución de las personas autoras: Conceptualización: R.Y.A.C., J.L.C.V. Metodología: R.Y.A.C., J.L.C.V. Investigación: R.Y.A.C., J.L.C.V. Análisis formal: R.Y.A.C., J.L.C.V. Visualización: R.Y.A.C. Escritura (borrador original): R.Y.A.C. Escritura (revisión y edición): R.Y.A.C., J.L.C.V.

Accesibilidad de los datos: No aplica.

Declaración de uso de inteligencia artificial (IA): Durante la elaboración del manuscrito se contó con apoyo de herramientas de IA en actividades de revisión lingüística y mejora de redacción, sin sustituir el criterio académico de las personas autoras. No se utilizó IA para análisis de datos, generación de resultados, ni para establecer conclusiones.

Referencias

Babari, P. (2024). *Investigating Instructions on Rational Number Arithmetic in Elementary School.* [Tesis doctoral, ETH Zürich]. https://doi.org/10.3929/ethz-b-000715684

Bourbaki, Nicolas. (1954). *Éléments de mathématique. I: Théorie des ensembles* [La publicación de los capítulos fue escalonada.]. Hermann.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A History of Mathematics* (3rd). Wiley.

Briggs, H. (1624). *Arithmetica Logarithmica*. William Jones.

Brouwer, L. E. J. (1913). Intuitionism and Formalism [Traducción de una dirección de 1912.]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *20*(2), 81-96.

Cajori, F. (1993). *A History of Mathematical Notations* (Vol. 1). Dover Publications.

Cantor, G. (1874). Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *77*, 258-262. https://doi.org/10.1515/crll.1874.77.258

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: an attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, *12*(0), 5-22. https://doi.org/10.15027/48141

Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Friedrich Vieweg und Sohn.

Descartes, R. (1637). *La Géométrie*. Jan Maire.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. SUNY Press.

Euclides. (1956). *The Thirteen Books of The Elements* (T. L. Heath, Trad.; Vol. 1–3) [Republicación de la segunda edición de 1908. Obra original c. 300 a.C.]. Dover Publications.

Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum*. Marc-Michel Bousquet & Cie.

Heeffer, A., & Van Dyck, M. (Eds.). (2010). *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics* (Vol. 26). College Publications.

Hilbert, D. (1925). Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, *95*(1), 161-190.

Kant, I. (2007). *Critique of Pure Reason* (J. M. D. Meiklejohn, Trad.) [Obra original 1781]. Penguin Classics.

Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2017). Algebra from a symbolization point of view. En *Algebra in the Early Grades* (pp. 19-48). Taylor & Francis. https://doi.org/10.4324/9781315097435-3

Kidron, I. (2018). Students' Conceptions of Irrational Numbers. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*, *4*(1), 94-118. https://doi.org/10.1007/s40753-018-0071-z

Knorr, W. (1982). Techniques of fractions in ancient Egypt and Greece. *Historia Mathematica*, *9*(2), 133-171.

Knuth, D. E. (1997). *The Art of Computer Programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms* (3rd). Addison–Wesley.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press.

Lorenzo, M. (2007). Consideración de aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *20*, 497-504.

Mason, L. (2006). Understanding irrational numbers: A teaching approach. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*(4), 307-320. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.11.003

Neugebauer, O. (1969). *The Exact Sciences in Antiquity*. Dover Publications.

Nurjanah, A., & Retnowati, E. (2018). Analyzing the extraneous cognitive load of a 7th grader mathematics textbook. *Journal of Physics: Conference Series*, *1097*(1), 012131. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1097/1/012131

Plato. (1992). *The Republic* [Obra original c. 380 BC]. Hackett Publishing.

Roskam, J. (2009). Book X of The Elements: Ordering Irrationals. *The Mathematics Enthusiast*, *6*(1), 277-294.

Schneider, M., & Stern, E. (2010). The developmental dynamics of rational number understanding: A longitudinal study. *Learning and Instruction*, *20*(6), 511-520. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2009.05.002

Sedig, K., & Liang, H.-N. (2016). Design of visual mathematical representations: A cognitive-centered perspective. *Educational Technology Research and Development*, *64*(4), 765-789. https://doi.org/10.1007/s11423-016-9445-2

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Solano-Flores, G. (2021). The Semiotics of Test Design: Conceptual Framework on Optimal Item Features in Educational Assessment Across Cultural Groups, Countries, and Languages. *Frontiers in Education*, *6*, 637993. https://doi.org/10.3389/feduc.2021.637993

Speer, N. M., Smith, J. P., & Horvath, A. (2010). Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. *Journal of Mathematical Behavior*, *29*(2), 99-114. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.02.001

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*, *12*(2), 257-285. https://doi.org/10.1207/s15516709cog1202_4

Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive Load Theory*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8126-4

Thomsen, M., Jankvist, U. T., & Clark, K. M. (2022). The interplay between history of mathematics and digital technologies: a review. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(7), 1631-1642. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01368-0

Viète, F. (1591). *In artem analyticem isagoge*. Jamet Mettayer.

von Fritz, K. (2004). The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum. En J. Christianidis (Ed.), *Classics in the History of Greek Mathematics* (pp. 211-231). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-2640-9_11

Zhu, Y., & Fan, L. (2018). The effects of representation sequencing on mathematical conceptual understanding: A cognitive load perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *98*(3), 275-292. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9804-7