



Estrategia didáctica para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

| Didactic strategy for solution of higher order ordinary differential equations |

| Estratégia didática para a resolução de equações diferenciais ordinárias de ordem superior |

Mario. A. Sandoval-Hernández¹

marioalberto.sandoval.cb190@dgeti.sems.gob.mx

Centro de Bachillerato Tecnológico industrial y de servicios No.190
Boca del Río, Ver., México

Hugo Jiménez-Islands²

hugo.jimenez@itcelaya.edu.mx

Tecnológico Nacional de México en Celaya
Celaya Gto., México

Salvador E. Torreblanca-Bouchan³

salvadorenrique.torreblanca.cb190@dgeti.sems.gob.mx

Centro de Bachillerato Tecnológico industrial y de servicios No.190
Boca del Río, Ver., México

F. Iván Molina-Herrera⁴

fi.molina@ugto.mx

Universidad de Guanajuato
Guanajuato Gto., México

J. Jesús Villegas-Saucillo⁵

jesus.villegas@itcelaya.edu.mx

Tecnológico Nacional de México en Celaya
Celaya Gto., México

Héctor Vázquez Leal⁶

hvazquez@uv.mx

Universidad Veracruzana
Xalapa, Ver., México

Recibido: 5 de junio de 2024

Aceptado: 30 de abril de 2025

¹Mario. A. Sandoval-Hernández. Profesor de la academia local de matemáticas Titular C en el Centro de Bachillerato Tecnológico industrial y de servicios No. 190. Dirección postal: Av 15 esquina calle 11, col. E. Venustiano Carranza, Boca del Río, Ver., México. Código postal: 94297. Correo electrónico: marioalberto.sandoval.cb190@dgeti.sems.gob.mx.

²Hugo Jiménez-Islands. Investigador Emérito del Departamento de Ingeniería Bioquímica y Ambiental del Tecnológico Nacional de México en Celaya. Dirección Postal: Antonio García Cubas Pte #600 esq. Av. Tecnológico Celaya, Gto. México. Código Postal: 38010. Correo electrónico: hugo.jimenez@itcelaya.edu.mx.

³Salvador E. Torreblanca-Bouchan. Profesor asociado A del Centro de Bachillerato Tecnológico industrial y de Servicios No. 190. Dirección postal: Av 15 esquina calle 11, col. E. Venustiano Carranza, Boca del Río, Ver., México. Código postal: 94297. Correo electrónico: salvadorenrique.torreblanca.cb190@dgeti.sems.gob.mx.

⁴F. Iván Molina-Herrera. Profesor en la Universidad de Guanajuato, Campus Celaya–Salvatierra. Dirección postal: Ave. Javier Barros Sierra No. 201, Esq. Baja California, Ejido Santa María del Refugio, Celaya, Gto., México. Código postal: 38140. Correo electrónico: fi.molina@ugto.mx.

⁵J. Jesús Villegas-Saucillo. Profesor del Departamento de Ciencias del TecNM en Celaya. Dirección postal: Dirección TecNM: Antonio García Cubas Pte. #600, Esq. Ave. Tecnológico, col. Fovissste. Código postal: 38010. Correo electrónico: jesus.villegas@itcelaya.edu.mx.

⁶Héctor Vázquez Leal. Profesor de la facultad de Instrumentación Electrónica en la Universidad Veracruzana. Dirección postal: Cto Aguirre Beltrán S/N, Zona Universitaria, Xalapa-Enríquez, Ver. Mexico. Código postal: 91090. Correo electrónico: hvazquez@uv.mx.

Resumen: En la enseñanza del análisis numérico en las instituciones de educación universitaria se utilizan libros de texto que omiten aspectos pedagógicos procedimentales, que inhiben algunos procesos de enseñanza-aprendizaje. En el caso de los algoritmos presentados en los libros de texto orientados a resolver ecuaciones diferenciales ordinarias mantienen la metodología de utilizar un ecuación diferencial de primer orden para la aplicación de los métodos numéricos de solución obviando los detalles cuando se da solución de ecuaciones diferenciales de orden superior. En este artículo educativo se presentan dos guías de solución didáctica con el fin de ayudar al aprendizaje con el objetivo de que los alumnos sean capaces de proponer la solución numérica para problemas de valor inicial aplicando los métodos de Euler y Runge-Kutta a ecuaciones ordinarias de orden superior y puedan entonces generar sus propias implementaciones en lenguajes de programación como Fortran 90. En este trabajo se presentan 4 casos de estudio mostrando la aplicación de la propuesta. En este trabajo se probaron las estrategias didácticas propuestas de este artículo a un grupo de estudiantes obteniéndose resultados favorables en los aprendizajes de los estudiantes.

Palabras Clave: Matemática educativa, enseñanza universitaria, análisis numérico, discurso matemático escolar.

Abstract: In the teaching of numerical analysis at university-level institutions, textbooks often neglect pedagogical aspects, which in some cases may hinder certain teaching-learning processes. Specifically, algorithms presented in textbooks for solving ordinary differential equations typically rely on the use of first-order differential equations, overlooking significant details required for solving higher-order differential equations. This educational article presents a generalized and didactic approach that enables students to formulate numerical solutions for initial value problems. By applying Euler's and Runge-Kutta methods to higher-order ordinary differential equations, students will be empowered to develop and implement their own solutions in programming languages. This study includes four case studies that illustrate the practical application of the proposed approach. In this work, the two strategies proposed in this paper were tested on a group of students, obtaining favorable results in student learning.

Keywords: Mathematics education, college education, numerical analysis, school mathematical speech.

Resumo: Na ensino de análise numérica nas instituições de ensino superior, utilizam-se livros didáticos que omitem aspectos pedagógicos procedimentais, o que inibe alguns processos de ensino-aprendizagem. No caso dos algoritmos apresentados nos livros orientados para resolver equações diferenciais ordinárias, mantém-se a metodologia de usar uma equação diferencial de primeira ordem para a aplicação dos métodos numéricos de solução, ignorando os detalhes ao resolver equações diferenciais de ordem superior. Neste artigo educacional, apresentam-se dois guias de solução didática com o objetivo de auxiliar a aprendizagem, permitindo que os alunos sejam capazes de propor a solução numérica para problemas de valor inicial aplicando os métodos de Euler e Runge-Kutta a equações ordinárias de ordem superior e, assim, gerar suas próprias implementações em linguagens de programação como Fortran 90. Neste trabalho, apresentam-se quatro estudos de caso mostrando a aplicação da proposta. As estratégias didáticas propostas neste artigo foram testadas com um grupo de estudantes, obtendo-se resultados favoráveis na aprendizagem dos alunos.

Palavras-chave: Matemática educativa, ensino universitário, análise numérica, discurso matemático escolar.

1. Introducción

En la ciencia y tecnología es importante disponer de modelos matemáticos que sean capaces de predecir el comportamiento de un sistema. Las ecuaciones diferenciales ordinarias (ordinary differential equation: ODE) es una manera de expresar los modelos matemáticos y son los más utilizados en distintas áreas de la ciencia y la ingeniería. Por ejemplo, algunas de sus aplicaciones son en el área de

fenómenos de transporte, electricidad, física, electromagnetismo, entre otras. Sin embargo, no siempre es posible obtener una solución analítica exacta debido a las altas no linealidades que presentan estas expresiones. En estos casos debe utilizarse el análisis numérico con la finalidad de dar solución a estas ecuaciones (Burden & Faires, 2011; Chapra & Canale, 2011; Gerald, 1997; Mora, 2018; Rapp, 2017), con la desventaja de no disponer de la solución analítica. El análisis numérico tiene una alta importancia en los distintos campos de la ciencia y la ingeniería. Por un lado, resuelven ecuaciones que no tienen solución exacta, con la ventaja que estos algoritmos pueden implementarse en computadoras altamente eficientes. Por otro lado, los algoritmos numéricos permiten validar modelos propuestos en las distintas disciplinas de la ciencia y la ingeniería. Por ejemplo, en Sandoval-Hernández et al. (2018) y Vázquez-Leal et al. (2015) se utilizó el algoritmo del trapezoide combinado con extrapolación de Richardson con el objetivo de validar las soluciones semi-analíticas generadas con los métodos de la serie Taylor modificada, método de Padé directo optimizado, y el método de perturbación de homotopía con el fin de resolver la ecuación diferencial ordinaria que modela la difusión de oxígeno en una célula esférica con cinética de absorción de Michaelis-Menten con condiciones de frontera. En Sandoval-Hernández et al. (2019) se empleó el análisis numérico en la implementación de la homotopía de continuación con seguimiento hiperesférico para encontrar las raíces de los sistemas de ecuaciones no lineales (Jiménez-Islas, 1996; Jiménez-Islas et al., 2020), no obstante, el aprendizaje del análisis numérico también se encuentra influido por el discurso matemático escolar (DME), ya que tanto las clases como los libros se encuentran influenciados por este discurso carente de marcos de referencia imponiendo una violencia simbólica (Paz-Corrales & Molina, 2022; Sandoval-Hernández et al., 2021, 2022; Soto & Cantoral, 2014; Uriza et al., 2015). En caso de los libros de análisis numérico utilizados en los cursos de educación universitaria, se presentan ejemplos de aplicación en la ciencia y la ingeniería conservando la misma exposición de los temas (Burden & Faires, 2011; Chapra & Canale, 2011; Gerald, 1997). En algunos casos, la explicación de los algoritmos de solución dejan a la expectativa la implementación de sistemas más complejos (Burden & Faires, 2011; Chapra & Canale, 2011; Gerald, 1997). Por ejemplo, en la solución numérica de las ODE con valor inicial usando algoritmos de un solo paso, como los métodos de Euler y Runge-Kutta, presentan el clásico ejemplo de solución utilizando una ecuación diferencial de primer orden y en su caso argumentan que para dar solución a ecuaciones diferenciales de orden superior, estas deben de descomponerse en sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden haciendo un cambio de variable sin presentar detalles (Edwards & Penney, 2009; Ricardo, 2018). En otros casos, algunos autores presentan cuando mucho, un ejemplo utilizando una ecuación de segundo orden (Burden & Faires, 2011; Edwards & Penney, 2009).

En la enseñanza del análisis numérico, es fundamental considerar estrategias didácticas alternas que fomenten la conexión entre los conocimientos previos del estudiante y la nueva información que debe ser aprendida (Díaz Barriga Arceo & Hernández Rojas, 2002). En el caso del aprendizaje de los algoritmos de un solo paso como el método de Euler (ME) y Runge-Kutta de cuarto orden (R-K4) para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales se busca crear o potenciar enlaces adecuados entre los conocimientos previos y la información nueva que ha de adquirirse, asegurando con ello una mayor significatividad de los aprendizajes logrados.

En la enseñanza tradicional los profesores que impartían las asignaturas de matemáticas en las licenciaturas de ingeniería provenían del sector productivo contando con amplia experiencia de campo industrial pero en muchos casos con poca o nula formación docente ya que gran parte de su ejercicio profesional lo habían dedicado al sector productivo (Lucena, 2021; Sánchez-Olavarría, 2020). Sin embargo, la proliferación de maestros con maestría y doctorado enriquece el contenido de las clases, y ante una falta de experiencia o formación docente, algunos contenidos en las asignaturas no son impartidos de manera clara y concisa. La problemática crece cuando no se realiza una planeación didáctica adecuada de los contenidos y de los conocimientos previos que los alumnos deben poseer (Díaz Barriga Arceo & Hernández Rojas, 2002), en la misma manera que se ignoran los canales de aprendizaje de los alumnos (Gamboa Mora et al., 2015).

En el trabajo reportado por Castro y Guzmán de Castro (2017) se llevó a cabo un estudio cualitativo

en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador Instituto Pedagógico de Caracas, Venezuela, en donde se encontró que los docentes dominan su área de conocimiento, algunos conocen la teoría acerca de los estilos de aprendizaje pero frente a grupo no los toman en cuenta. Mucho menos en sus planeaciones didácticas. Asimismo, se encontró que hay estudiantes que ignoran la teoría como la práctica de los estilos de aprendizaje. También se halló que los docentes tienden a utilizar la misma estrategia de enseñanza y los mismos recursos didácticos de acuerdo al contenido que marca el temario de la asignatura. En ese sentido, la técnica más utilizada por los docentes es la expositiva con el uso del pizarrón.

En todo proceso de enseñanza-aprendizaje deben tomarse en cuenta los estilos de aprendizaje, ya que el empleo de esquemas e ilustraciones favorecen a quienes aprenden mejor mediante recursos visuales. De acuerdo con Díaz Barriga Arceo y Hernández Rojas (2002), las ilustraciones representan la realidad visual que nos rodea. Además están clasificados en descriptiva, expresiva, construccional, funcional, lógico matemática, algorítmica y arreglo de datos. De esta manera, al incorporar el manejo de ilustraciones del tipo lógico matemática o algorítmica en los cursos de matemáticas como lo es el análisis numérico promueven que los estudiantes asimilen la nueva información.

En este artículo se exponen los planteamientos esenciales que permiten a los alumnos comprender los métodos numéricos de Euler y de Runge-Kutta de cuarto orden en la resolución de ecuaciones diferenciales de orden superior. Al lograr este objetivo, los estudiantes estarán en condiciones de desarrollar sus propios códigos de programación orientados a la solución de problemas de valor inicial.

2. Estado del arte

Existen diversos métodos en la literatura que permiten resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales (Burden & Faires, 2011; Chapra & Canale, 2011; Gerald, 1997). Entre los métodos de paso fijo más conocidos y que se enseñan en las universidades se encuentran, el método de la serie de Taylor, el método de Euler, Euler modificado, método de Heun, método de punto medio, métodos de Runge-Kutta, entre otros (Burden & Faires, 2011; Chapra & Canale, 2011; Gerald, 1997; Rapp, 2017). Los libros, al enseñar estos métodos numéricos, generalmente parten de un ejemplo sencillo: una ecuación diferencial ordinaria de primer orden con su respectiva condición inicial.

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha. \quad (1)$$

Contextualizando, de manera geométrica un problema de valor inicial (PVI) de primer orden significa que se busca una función solución $y(x)$ de la ecuación diferencial en el intervalo δ que contiene a x_0 , de tal manera que la gráfica de la función pasa por el punto (x_0, y_0) . En el caso de una ODE de segundo orden, se está buscando una función solución $y(c)$ en el intervalo δ que contiene a x_0 , que la función pase por (x_0, y_0) y que además, la pendiente a la curva en ese punto tenga un valor m .

El método de Euler es una de las primeras técnicas de aproximación que se introduce con el propósito de resolver problemas de valor inicial, debido a su sencillez y a que constituye un punto de partida útil en la comprensión de otros métodos numéricos más complejos (Burden & Faires, 2011; Chapra & Canale, 2011; Gerald, 1997; Rapp, 2017). Comúnmente se emplea con fines didácticos, ya que permite explicar los principios básicos en los que se sustentan técnicas más avanzadas. De igual manera, a este método se le conoce como predictor de Euler. Es un procedimiento de integración numérica que consiste en encontrar de manera iterativa la solución de una ODE de primer orden a partir de un valor inicial dado $y(t_0)$, avanzando con un paso de tamaño de paso fijo h . Consiste en aplicar la fórmula iterativa en (1) de tal manera

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n), \quad (n \geq 0)$$

para calcular las aproximaciones de manera sucesiva y_1, y_2, y_3, \dots de los valores $y(t_1), y(t_2), y(t_3), \dots$ de la solución exacta $y = y(t)$ en los respectivos puntos t_1, t_2, t_3, \dots . La figura 1 muestra el proceso de Euler.

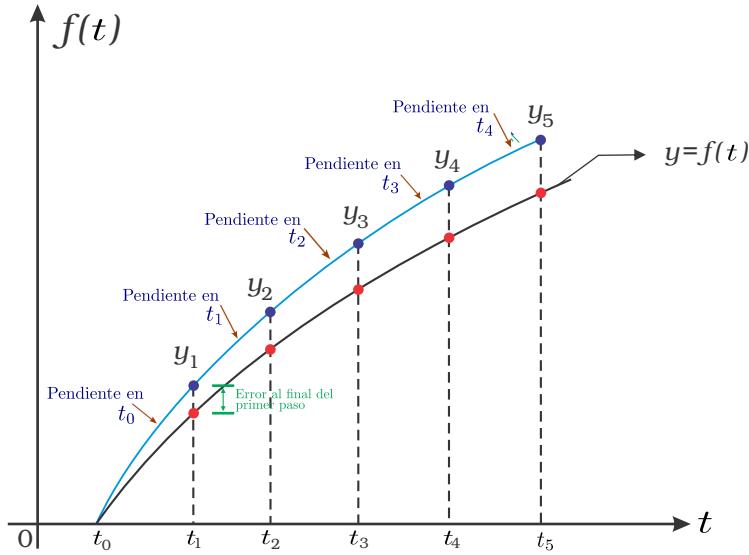


Figura 1: Interpretación geométrica del ME. Modificación propia, tomado de Jerves-Cobo (2009).

Veáse que el ME utiliza la pendiente al inicio del intervalo como una aproximación de la pendiente promedio en todo el intervalo (Chapra & Canale, 2011). De acuerdo a la figura 1, en cada iteración se va encontrando una pendiente en cada punto de t_0, t_1, \dots . En realidad lo que se va trazando en cada iteración es una recta con una pendiente que va cambiando en cada punto t formando un polígono prediciendo el próximo valor de $y(t)$. Si se reduce el tamaño de paso, entonces disminuye el error entre la aproximación y el valor exacto (Burden & Faires, 2011; Chapra & Canale, 2011; Gerald, 1997), sin embargo, la disminución del tamaño de paso no evita que acumulen errores con el paso del tiempo (o respecto a la variable independiente en su caso), principalmente cuando se tienen funciones con una curvatura muy severa. En otras palabras, el error local es proporcional al cuadrado del tamaño del paso, y el error global es proporcional al tamaño del paso (Chapra & Canale, 2011; Gerald, 1997). Sin embargo, tiene la desventaja que si el tamaño de paso se hace demasiado pequeño en relación con las cantidades con las que se está trabajando, los errores pueden empeorar dando como resultado una aproximación errónea (Chapra & Canale, 2011).

Los métodos RK logran mayor precisión en las aproximaciones numéricas sin la necesidad de calcular derivadas de orden superior. Son métodos de un paso porque la determinación de la solución en un instante determinado se utiliza únicamente la información relativa a la solución obtenida en el instante anterior. Existen diversas variantes que tienen la forma general de

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i, h)h,$$

donde $f(t_i, y_i, h)$ es la función incremento, la cual es una pendiente representativa en el intervalo (Chapra & Canale, 2011). La función $f(x_i, y_i, h)$ se escribe de forma general como

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\ k_3 &= f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\ &\vdots \\ k_n &= f(t_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h), \end{aligned}$$

donde p, q son constantes y las k_n son relaciones de recurrencia (Chapra & Canale, 2011). De esta manera, los métodos de Heun y punto medio son considerados como métodos de Runge-Kutta de segun-

do orden (Burden & Faires, 2011; Chapra & Canale, 2011). Existen otros métodos considerados dentro de la clasificación RK, los métodos de tercer orden (RK3), cuarto orden (RK4), Runge-Kutta-Fehlberg (RK45), entre otros (Burden & Faires, 2011; Chapra & Canale, 2011; Gerald, 1997). La denominación del orden se debe al error correspondiente por paso. En Burden y Faires (2011) y Chapra y Canale (2011) se presentan detalles de la deducción de los métodos RK más conocidos. La figura 2 presenta la clasificación de los métodos RK más conocidos que permiten resolver numéricamente problemas de valor inicial y que son los que de manera tradicional se enseñan en las instituciones universitarias.

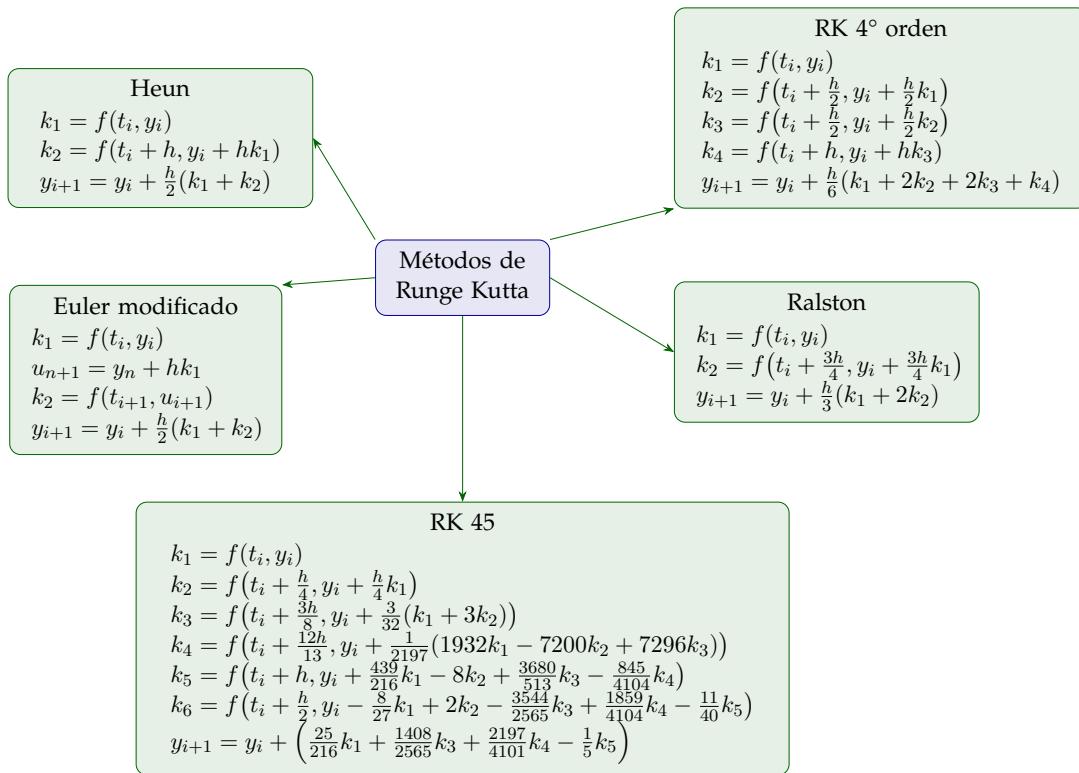


Figura 2: Clasificación de los algoritmos Runge-Kutta más conocidos. Elaboración propia.

En el caso del método de Runge-Kutta consiste en calcular y_{i+1} del valor de la solución exacta en el instante t_i , con estos valores se pueden encontrar k_1, k_2, k_3 y k_4 . Las fórmulas para R-K4 son:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_i, y_i), \\
 k_2 &= f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1), \\
 k_3 &= f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2), \\
 k_4 &= f(t_i + h, y_i + hk_3), \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Veáse que $\frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ en la última ecuación de 2 es un promedio ponderado de valores de $f(t, y)$. La figura 3 muestra la interpretación geométrica de este método de solución numérica.

En la figura 3 puede verse k_1 es la pendiente en el extremo izquierdo del intervalo, k_2 la pendiente en el punto medio. Aplicando el método de Euler en el punto t_i obtenemos $t_i + h/2$; k_3 es la segunda aproximación para la pendiente en el punto medio, y k_4 es la pendiente en el punto $t_i + h$ usando fórmula de Euler y la pendiente k_3 en t_i para obtener $t_i + h$. El método RK4 tiene error por paso del

orden de $O(h^5)$, mientras que el error total acumulado tiene el orden $O(h^4)$. Por lo tanto, la convergencia del método es del orden de $O(h^4)$, razón por la cual es usado en los métodos computacionales (Burden & Faires, 2011; Chapra & Canale, 2011; Gerald, 1997).

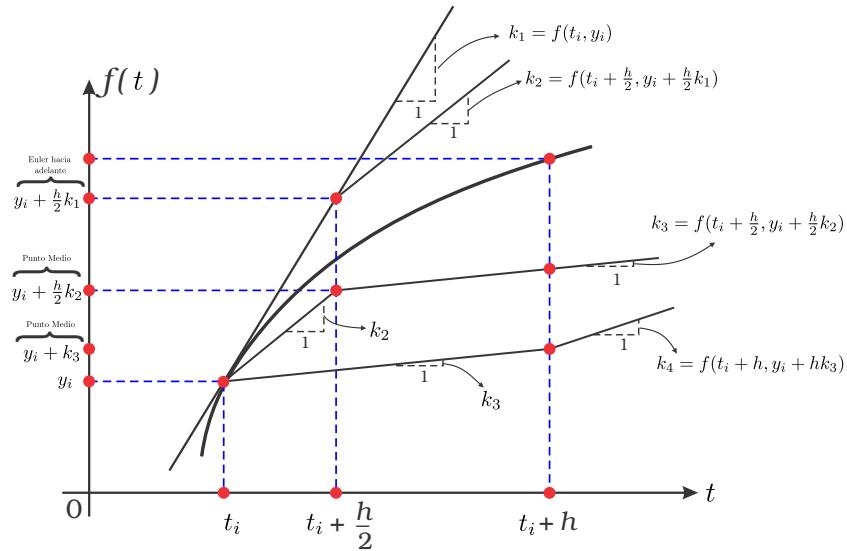


Figura 3: Interpretación geométrica del método R-K4. Modificación propia, tomado de Jerves-Cobo (2009).

Cabe destacar que en la literatura del análisis numérico se han desarrollado diversos algoritmos dirigidos a resolver problemas de valor inicial mediante esquemas de paso múltiple, entre los cuales se encuentran los métodos de Milne, Adams-Basforth y Adams-Moulton, entre otros (Burden & Faires, 2011; Chapra & Canale, 2011; Gerald, 1997; Rapp, 2017).

3. Materiales y métodos

La computadora utilizada en el desarrollo de este trabajo estaba equipada con una CPU Intel Core i5-7200U @ 2.50 GHz con 2 núcleos y 4 hilos, con tarjeta de video Mesa Intel® HD Graphics 620 y 8 GB de RAM, sistema operativo Linux Ubuntu versión 20.04.6 LTS. El software utilizado fue Maple 2021 para realizar las gráficas y obtener las soluciones exactas para los casos de estudio. Asimismo, se utilizó la computadora Raspberry Pi modelo 1, con procesador Broadcom BCM2835 @ 700 MHz, 512 MB RAM, GPU VideoCore IV, salidas de video HDMI y compuesto, audio 3.5 mm, lector SD, 2 x USB 2.0, GPIO 26 pines, con sistema operativo Raspbian 12.2.0-14+rpi1. La versión de gfortran utilizado fue 12.20. El lenguaje de programación utilizado fue Fortran 90.

En este trabajo se llevó a cabo una revisión documental mediante el enfoque de revisión sistemática (Crossan & Apaydin, 2010). Esta metodología emplea un algoritmo explícito con el objetivo de realizar una búsqueda exhaustiva y una evaluación crítica de la literatura. Las revisiones sistemáticas incrementan la calidad del proceso y de los resultados al seguir un procedimiento transparente y reproducible (Tranfield et al., 2003). No obstante, esta técnica también enfrenta ciertos desafíos, como la dificultad de sintetizar información proveniente de distintas disciplinas, la escasa representación de libros y el volumen considerable de material que debe analizarse (Pittaway et al., 2004). Por lo general, el proceso de revisión consta de tres etapas: recopilación de datos, análisis de información y síntesis (Crossan & Apaydin, 2010).

En la primera etapa, se hizo una revisión sistemática de la literatura de análisis numérico, en artículos educativos. De la misma manera, en el caso de los libros, se llevó a cabo una revisión física, tanto en aquellos publicados en formato físico como en formato electrónico. La Tabla 1 presenta el proceso metodológico utilizado en este trabajo. Las principales fuentes de búsqueda para las referencias de

los artículos científicos fueron las bases de datos SCOPUS y Elsevier, Scielo y Redalyc. Se seleccionaron artículos publicados en revistas indexadas y se utilizaron términos de búsqueda relacionados con el tema de esta investigación. También se consideraron las estrategias didácticas empleadas. Referente a los libros, se incluyeron aquellos que suelen ser los más utilizados en las universidades en las asignaturas de métodos numéricos. En este artículo, se citan Burden y Faires (2011), Chapra y Canale (2011) y Gerald (1997) porque son referencias consideradas como un referente bibliográfico en países de habla hispana (Granados-Ospina, 2015) y anglosajones. Esta afirmación se basa en el hecho que la mayoría de los libros utilizados en los países hispanohablantes son traducciones de obras originalmente publicadas en inglés por autores no latinos. No obstante, también existen textos primigenios en español como la obra *Introducción a los Métodos numéricos* del profesor Walter Mora F. del Instituto Tecnológico de Costa Rica (Mora, 2018), hecho que puede comprobarse al consultar los datos de impresión en las primeras páginas.

Tabla 1: Revisión de las referencias. Elaboración propia basada en Shu y Liu (2021).

Paso	Descripción	Procedimiento
1	Bases de datos consultadas	Scopus, Scielo, Dianet, Google Scholar.
2	Criterios de búsqueda	Análisis numérico, discurso matemático escolar, métodos numéricos, matemática educativa. Período de búsqueda: 2011-2024.
3	Criterios de inclusión y exclusión	<p>Exclusión:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Documentos no representativos (revisión de libros, artículos sin ISSN, etc.) ■ Fuera del tiempo descrito <p>Inclusión:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Idiomas en Español e Inglés ■ Estrategias didácticas para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior en países latinos
4	Documentos irrelevantes	Cada referencia fue revisada minuciosamente a fin de sustraer las fuentes menos relevantes.
5	Citas	Se consideran los enlaces de las referencias encontradas en las bases de datos para expandir la búsqueda de datos.
6	Criterios de revisión	El mismo del paso 3.

Con el propósito de evaluar la metodología presentada en este artículo, se trabajó con dos grupos, compuestos de estudiantes de las ingenierías en Electrónica, Semiconductores y Ambiental, correspondientes al quinto semestre del Tecnológico Nacional de México en Celaya. Los grupos estuvieron conformados por 30 y 31 alumnos, respectivamente. Uno de ellos fue designado como grupo experimental, al que se le aplicó la estrategia didáctica desarrollada en este estudio. El otro, con 31 estudiantes, actuó como grupo de control y recibió la enseñanza de los métodos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden (R-K4) siguiendo el enfoque tradicional. Posteriormente, ambos grupos fueron evaluados mediante el instrumento descrito en el Apéndice A.

4. Fundamento teórico

En general, el análisis numérico se emplea en la búsqueda de soluciones aproximadas de sistemas de ecuaciones no lineales, así como de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, especialmente cuando no es posible obtener una solución exacta. También se recurre a este campo para calcular el valor numérico de integrales que no pueden resolverse mediante métodos analíticos conocidos (Collins, 2021; Guichard, 2017). Tienen la ventaja que se pueden implementar en alguna computadora utilizando lenguajes de programación como C++, Java, Python, Matlab, Maple, Fortran, entre otros. Asimismo, el análisis numérico tiene aplicación en el procesamiento digital de señales (Vázquez et al., 2015). Por ejemplo, en dispositivos electrónicos como los DSPic (Digital Signal Programmable Integrated Circuit), es posible programar la transformada rápida de Fourier con el fin de realizar el análisis espectral de las señales adquiridas (Vázquez et al., 2015).

En el caso de los algoritmos numéricos orientados a resolver problemas de valor inicial exigen que las ODE sean de primer orden, como es caso de la ecuación 1, sin embargo, esto no siempre es así. Muchos problemas en la ciencia y la ingeniería son modelados por ecuaciones de orden 2 o superior. En el caso del movimiento armónico simple, modelar un sistema masa-resorte conduce a una ecuación de segundo orden con valores iniciales (Edwards & Penney, 2009). De la misma manera, los problemas de frontera son gobernados por ecuaciones diferenciales de segundo orden (Edwards & Penney, 2009; Sandoval-Hernández et al., 2018; Vázquez-Leal et al., 2015).

Una ecuación ordinaria de orden superior que gobierna un sistema o que describe un fenómeno físico, químico puede representarse de la forma canónica

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2}(t) \frac{d^{n-2}y(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + a_0(t)y(t) = f(t) \quad (3)$$

Introduciendo las variables que permiten reducir el orden de las derivadas (Edwards & Penney, 2009; Ricardo, 2018) tenemos $y(t) = x_1$, $y'(t) = x_2$, $y''(t) = x_3$, ..., $y^{n-1} = x_n$. Estas expresiones pueden reescribirse si derivamos los cambios de variable, obteniéndose

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ y''(t) &= \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ y'''(t) &= \frac{dx_3}{dt} = x_4 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(t) &= \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ y^{(n)}(t) &= \frac{dx_n}{dt}. \end{aligned}$$

Notése que $y^{(n)}(t) = \frac{dx_n}{dt}$ implica que en la ecuación (3) debe despejarse la derivada de mayor orden, por lo tanto se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{dx_n}{dt} &= -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x_n - \frac{a_{n-2}(t)}{a_n(t)}x_{n-1} - \frac{a_{n-3}(t)}{a_n(t)}x_{n-2} - \dots - \frac{a_1(t)}{a_n(t)}x_2 - \frac{a_0(t)}{a_n(t)}x_1 + \frac{1}{a_n(t)}f(t), \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n, \\ \frac{dx_{n-2}}{dt} &= x_{n-1}, \\ &\vdots && \vdots \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2. \end{aligned} \quad (4)$$

De esta manera, la ODE de orden superior puede ser resuelta aplicando cualquiera de los métodos numéricos para problemas de valor inicial. La versión vectorial del método de Euler se puede representar como

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \mathbf{k}, \\ \mathbf{k} &= h f(t_i, \mathbf{x}_i).\end{aligned}\tag{5}$$

En la ecuación (5) se puede ver que la variable \mathbf{x} tiene una dimensión n así como tambien la constante k . La ecuación (6) es la versión vectorial del método de Runge-Kutta de orden 4, donde \mathbf{x} tambien tiene dimensión n y k multiplicidad n

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= h f(t_i, \mathbf{x}_i), \\ \mathbf{k}_2 &= h f\left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_i + \frac{\mathbf{k}_1 h}{2}\right), \\ \mathbf{k}_3 &= h f\left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_i + \frac{\mathbf{k}_2 h}{2}\right), \\ \mathbf{k}_4 &= h f(t_i + h, \mathbf{x}_i + \mathbf{k}_3), \\ \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4).\end{aligned}\tag{6}$$

5. Propuesta didáctica

5.1. Estrategia propuesta con el método de Euler

En la figura 4 se muestra el esquema de la estrategia didáctica propuesta con el fin de abordar ODE de orden superior. Inicialmente, la ecuación diferencial (3) se transforma en un sistema de ecuaciones lineales (4), determinando el número de ecuaciones en función del valor de n .

$$\begin{aligned}\frac{dx_n}{dt} &= -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x_n - \frac{a_{n-2}(t)}{a_n(t)}x_{n-1} - \frac{a_{n-3}(t)}{a_n(t)}x_{n-2} - \dots - \frac{a_1(t)}{a_n(t)}x_2 \\ &\quad - \frac{a_0(t)}{a_n(t)}x_1 + \frac{1}{a_n(t)}f(t),\end{aligned}$$

Sujeta a las condiciones iniciales

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n,$$

$y(0)=\text{val}_1$	$y'(0)=\text{val}_2$	$y''(0)=\text{val}_3$	\dots	$y^{(n-1)}(0)=\text{val}_n$
x_1	x_2	x_3		x_n

$$\frac{dx_{n-2}}{dt} = x_{n-1},$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2.$$

Discretizando

$$x_{1,m+1} = x_{1,m} + h x_{2,m}$$

$$x_{2,m+1} = x_{2,m} + h x_{3,m}$$

$$x_{3,m+1} = x_{3,m} + h x_{4,m}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$x_{n,m+1} = x_{n,m} + h \frac{dx_n}{dt}$$

Variables

$$t_0 = 0,$$

$$x_{1,0} = \text{val}_1,$$

$$x_{2,0} = \text{val}_2,$$

$$x_{3,0} = \text{val}_3,$$

$$\vdots = \vdots$$

$$x_{n,0} = \text{val}_n.$$

Figura 4: Estrategia didáctica enfocada en el método de Euler. Elaboración propia.

En segundo lugar, el número de variables que se utilizan, x_n será igual al orden n de la ODE. De esta manera, el número de variables empleadas en la implementación numérica es $n + 1$ porque se incluye la variable independiente t (o del tiempo en muchos casos). Para implementar las condiciones iniciales se ocupará la variables x_0, \dots, x_n asignando desde $y(0)$ hasta $y^{n-1}(0)$. Este proceso se muestra en el recuadro de la figura.

En tercer lugar, el número de ecuaciones que discretizan el sistema será igual al orden n de la EDO. A continuación, se presenta la **Estrategia Didáctica Euler** (Algoritmo 1) orientada a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando el método de Euler (ME).

Algoritmo 1. Estrategia D. Euler enfocada en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior.

1. Descomponer la ODE en un sistema de ecuaciones haciendo el cambio de variable. El número de ecuaciones resultantes es igual al orden n de la ecuación diferencial. Ver ecuación (4) y figura (4).
 2. El número de variables necesarias en la implementación del método de Euler es igual a $n + 1$ incluyendo la variable independiente. De esta manera se obtienen x_1, x_2, \dots, x_n , más t , donde t es la variable independiente.
 3. Una vez asignadas las variables, se les adiciona el segundo subíndice m para la implementación. Esto es, $x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n,m}$, y uno para la variable independiente, es decir t_m , en dónde este subíndice será usado para la el proceso de iteración.
 4. A fin de implementar las condiciones iniciales se asignarán dos índices a cada variable. Uno de los índices es $m = 0$. De esta manera se comienza con $x_{1,0} = y(0), x_{2,0} = y'(0), x_{3,0} = y''(0), \dots, x_{n,0} = y^{n-1}(0)$. En el caso de la variable independiente tenemos $t_0 = 0$.
 5. Con el fin de implementar el método de Euler el número de ecuaciones recursivas que discretizan al sistema es igual al orden n de la ODE. Veáse la estructura en la figura 4. La función despejada $f(x)$ o bien $\frac{dx_n}{dt}$. En este momento se inicia el proceso de iteración. La solución deseada de $f(t)$ se encuentra en la variable x_1 .
-

5.2. Estrategia propuesta con el método de Runge-Kutta de cuarto orden

En la implementación del método de R-K4, conviene expresar la notación de las derivadas por funciones en eq. (4) como se ve en la figura 5. De esta manera, el número de funciones es igual al orden n de la ecuación diferencial que se busca resolver numéricamente. Por otro lado, cada una de las constantes k_1, k_2, k_3 y k_4 , tendrá una multiplicidad n debido que tenemos n funciones. Esto es, cada constante tendrá doble índice. Para cada constante, el primer índice es $1, \dots, n$ mientras que el segundo hace referencia a que constante nos referimos. Por ejemplo, si tenemos una ODE de orden 3, entonces para la constante k_1 tendremos $k_{1,1}, k_{2,1}, k_{3,1}$. Este proceso se muestra en la misma figura 5. En la parte inferior de esta figura, se observa la ecuación de recursividad, que también posee multiplicidad n y doble índice. Del mismo modo, las ecuaciones de recursividad asociadas presentarán una multiplicidad n .

A continuación se presenta la estrategia didáctica (Algoritmo 2) que expone el procedimiento orientado a resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior y sistemas de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned}
f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) &= -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x_n - \frac{a_{n-2}(t)}{a_n(t)}x_{n-1} - \frac{a_{n-3}(t)}{a_n(t)}x_{n-2} - \\
f_{n-1}(x_n) &= x_n, & \dots - \frac{a_1(t)}{a_n(t)}x_2 - \frac{a_0(t)}{a_n(t)}x_1 + \frac{1}{a_n(t)}f(t), \\
f_{n-2}(x_{n-1}) &= x_{n-1}, & \vdots = \vdots & \text{Sujeta a las condiciones iniciales} \\
f_2(x_3) &= x_3, & y(0)=\text{val}_1 & | y'(0)=\text{val}_2 & | y''(0)=\text{val}_3 & | \dots & | y^{(n-1)}(0)=\text{val}_n \\
f_1(x_2) &= x_2. & & & & & | t_0 = 0
\end{aligned}$$

Ecuaciones R-K4

$$\begin{aligned}
k_{1,1} &= f_1(t, x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n,m}) \\
k_{2,1} &= f_2(t, x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n,m}) \\
&\vdots = \vdots \\
k_{n,1} &= f_n(t, x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n,m}) \\
k_{1,2} &= f_1(t + \frac{h}{2}, x_{1,m} + \frac{k_{1,1}h}{2}, x_{2,m} + \frac{k_{2,1}h}{2}, \dots, x_{n,m} + \frac{k_{n,1}h}{2}) \\
k_{2,2} &= f_2(t + \frac{h}{2}, x_{1,m} + \frac{k_{1,1}h}{2}, x_{2,m} + \frac{k_{2,1}h}{2}, \dots, x_{n,m} + \frac{k_{n,1}h}{2}) \\
&\vdots = \vdots \\
k_{n,2} &= f_n(t + \frac{h}{2}, x_{1,m} + \frac{k_{1,1}h}{2}, x_{2,m} + \frac{k_{2,1}h}{2}, \dots, x_{n,m} + \frac{k_{n,1}h}{2}) \\
k_{1,3} &= f_1(t + \frac{h}{2}, x_{1,m} + \frac{k_{1,2}h}{2}, x_{2,m} + \frac{k_{2,2}h}{2}, \dots, x_{n,m} + \frac{k_{n,2}h}{2}) \\
k_{2,3} &= f_2(t + \frac{h}{2}, x_{1,m} + \frac{k_{1,2}h}{2}, x_{2,m} + \frac{k_{2,2}h}{2}, \dots, x_{n,m} + \frac{k_{n,2}h}{2}) \\
&\vdots = \vdots \\
k_{n,3} &= f_n(t + \frac{h}{2}, x_{1,m} + \frac{k_{1,2}h}{2}, x_{2,m} + \frac{k_{2,2}h}{2}, \dots, x_{n,m} + \frac{k_{n,2}h}{2}) \\
k_{1,4} &= f_1(t + h, x_{1,m} + k_{1,3}h, x_{2,m} + k_{2,3}h, \dots, x_{n,m} + k_{n,3}h) \\
k_{2,4} &= f_2(t + h, x_{1,m} + k_{1,3}h, x_{2,m} + k_{2,3}h, \dots, x_{n,m} + k_{n,3}h) \\
&\vdots = \vdots \\
k_{n,4} &= f_n(t + h, x_{1,m} + k_{1,3}h, x_{2,m} + k_{2,3}h, \dots, x_{n,m} + k_{n,3}h) \\
x_{1,m+1} &= x_{1,m} + \frac{h}{6}(k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4}) \\
x_{2,m+1} &= x_{2,m} + \frac{h}{6}(k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4}) \\
&\vdots = \vdots \\
x_{n,m+1} &= x_{n,m} + \frac{h}{6}(k_{n,1} + 2k_{n,2} + 2k_{n,3} + k_{n,4})
\end{aligned}$$

Figura 5: Estrategia didáctica con R-K4. Elaboración propia.

Algoritmo 2. Estrategia D. R-K4 en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior.

1. Descomponer la ODE en un sistema de ecuaciones haciendo el cambio de variable. El número de ecuaciones resultantes es igual al orden n de la ecuación diferencial. Ver ecuación (4) y figura 5.
 2. El número de variables para la implementación del método de R-K4 es igual a $n + 1$ incluyendo la variable independiente t . De esta manera se obtienen x_1, x_2, \dots, x_n , más t .
 3. Una vez asignadas las variables, se les adiciona el segundo sub índice m en su implementación. Esto es, $x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n,m}$, y uno para la variable independiente, es decir t_m , en dónde este subíndice será usado para el proceso de la iteración.
 4. Con el fin de establecer las condiciones iniciales se asignarán dos índices a cada variable. Uno de los índices es $m = 0$. De esta manera se comienza con $x_{1,0} = y(0), x_{2,0} = y'(0), x_{3,0} = y''(0), \dots, x_{n,0} = y^{n-1}(0)$. En el caso de la variable independiente tenemos $t_0 = 0$.
 5. Las constantes k_1, \dots, k_4 tendrán una multiplicidad n . Esto es, $k_{n,1}, \dots, k_{n,4}$, ver la figura 5.
 6. La ecuación recursiva tendrá dimensión n , y la variable $x_{1,m+1}$ se tiene el valor buscado de $f(x)$.
-

6. Casos de estudio

Se presentan 4 casos de estudio en donde se aplica la metodología presentada en este artículo con el fin de resolver numéricamente ODE's de orden superior.

Caso de estudio 1

Resolver la ecuación diferencial de segundo orden dada por

$$6\frac{d^2}{dt^2}y(t) - 5\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = 0, \quad (7)$$

con condiciones iniciales $y(0) = 4, y'(0) = 0$ en el intervalo $0 \leq t \leq 1.5$. Muestre el procedimiento numérico para las primeras 3 iteraciones con un $h = 0.02$. Con propósito de comparación, se tiene que la solución exacta de (7) es $f(t) = 12 \exp(31t) - 8 \exp(12t)$.

Solución. Aplicando la **Estrategia D. Euler** con sus respectivos pasos se tiene:

- Paso 1. La ecuación diferencial debe escribirse como un sistema de ecuaciones lineales introduciendo el cambio de variable. De esta manera se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dt} &= \frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_1, \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2.\end{aligned}$$

Nótese que se tienen dos ecuaciones diferenciales lineales porque se ha linealizado una ecuación de segundo orden y las variables introducidas son x_1, x_2 .

- Paso 2. El número de variables es $n + 1 = 3$ y las variables que utilizaremos en la solución del sistema son x_1, x_2 más la variable independiente t .
- Paso 3. Establece que una vez asignadas las variables debe introducirse el índice m a nuestras variables, obteniéndose entonces $x_{1,m}, x_{2,m}$. En el caso de la variable independiente tenemos t_m .
- Paso 4. Discretizar las condiciones iniciales implica que el índice m se debe poner a cero, esto es $x_{1,0} = 4, x_{2,0} = 0, t_0 = 0$. Con estos valores iniciales se da inicio al proceso de iteración.
- Paso 5. En la implementación del método de Euler tendremos dos ecuaciones porque $n = 2$. De esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned}x_{1,m+1} &= x_{1,m} + h x_{2,m}, \\ x_{2,m+1} &= x_{2,m} + h \frac{d}{dt}(x_{2,m}).\end{aligned}$$

Comenzando el proceso de iteración se muestran las primeras cuatro iteraciones por tratarse de

un procedimiento repetitivo

$$\begin{aligned}
 m &= 0, \\
 t_1 &= 0.02, \\
 x_{1,1} &= x_{1,0} + hx_{2,0} = 4, \\
 x_{2,1} &= x_{2,0} + h\left(\frac{5}{6}x_{2,0} - \frac{1}{6}x_{1,0}\right) = -0.0333. \\
 m &= 1, \\
 t_2 &= 0.04, \\
 x_{1,2} &= x_{1,1} + hx_{2,1} = 3.9997, \\
 x_{2,2} &= x_{2,1} + h\left(\frac{5}{6}x_{2,1} - \frac{1}{6}x_{1,1}\right) = -0.02683. \\
 m &= 2, \\
 t_2 &= 0.06, \\
 x_{1,3} &= x_{1,2} + hx_{2,2} = 3.9992, \\
 x_{2,3} &= x_{2,2} + h\left(\frac{5}{6}x_{2,2} - \frac{1}{6}x_{1,2}\right) = -0.0407.
 \end{aligned}$$

La figura 6 muestra la solución del sistema de ecuaciones contra la solución exacta. Obsérvese que la solución de la ecuación diferencial corresponde a la variable x_1 .

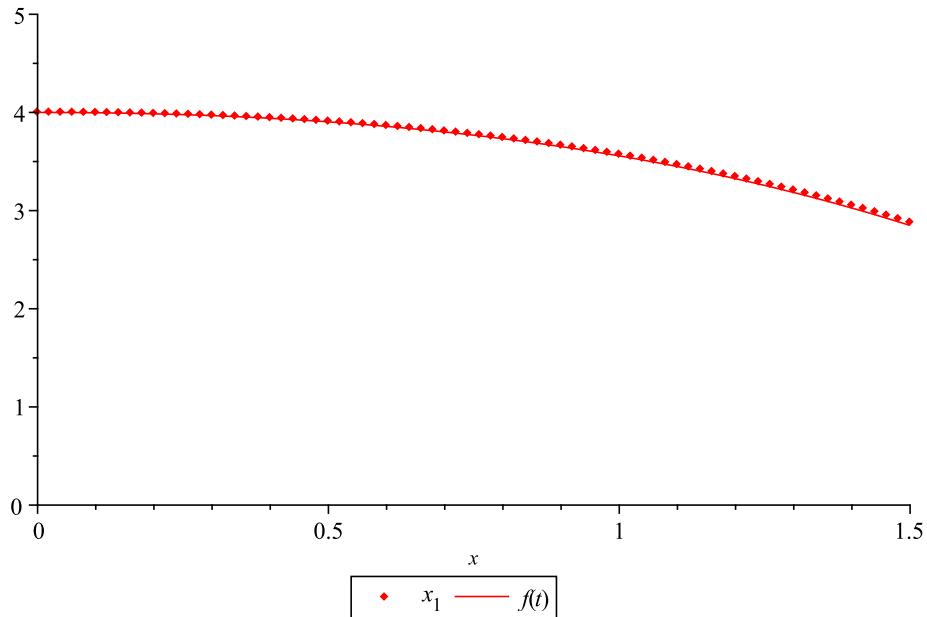


Figura 6: Solución numérica con el método de Euler vs analítica. Elaboración propia.

Caso de estudio 2

Resolver por el método de Euler con un paso $h = 0.02$ y hasta $t = 1.5$ la ecuación diferencial dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{d^3}{dt^3}y(t) + 6\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6y(t) &= -10 - t, \\
 y(0) = 0.15, y'(0) = 0.1, y''(0) = 2.
 \end{aligned} \tag{8}$$

La solución exacta de (8) es:

$$f(t) = -0.166666667t - 1.66666667 + 0.0934937850 \exp(-6.15821289t) + \\ 1.72317286 \exp(0.0791064438t) \cos(-0.983895744t) - \\ 0.717664773 \exp(0.0791064438t) \sin(-0.983895744t).$$

Solución. Aplicando los pasos de la **Estrategia D. Euler**, el paso 1 establece en descomponer la ODE en un sistema de ecuaciones con la introducción de las variables x_1, x_2, x_3 . El paso 2 establece que se tienen $n + 1 = 4$ variables porque se incluye variable independiente t , obteniéndose

$$\frac{dx_3}{dt} = -6x_3 - 6x_1 - 10 - t, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \frac{dx_1}{dt} = x_2.$$

El paso 3 nos indica que se debe asignar el indice m a todas las variables, y el paso 4, donde se introducen las condiciones iniciales en forma discretizada, se obtiene lo siguiente: $x_{1,0} = 0.15, x_{2,0} = 0.1, x_{3,0} = 2, t_0 = 0$; y el paso 5 que establece la implementación de la ecuación de Euler al sistema de ecuaciones con las iteraciones, en este caso se tiene que la ecuación de Euler tiene una multiplicidad 3.

$$x_{1,m+1} = x_{1,m} + hx_{2,m}, \\ x_{2,m+1} = x_{2,m} + hx_{3,m}, \\ x_{3,m+1} = x_{3,m} + h \frac{d}{dt}(x_{3,m}).$$

Iniciando el proceso iterativo obtenemos

$$m = 0, \\ t_1 = 0.02, \\ x_{1,1} = x_{1,0} + hx_{2,0} = 0.1520, \\ x_{2,1} = x_{2,0} + hx_{3,0} = 0.140, \\ x_{3,1} = x_{3,0} + h(-6x_{3,0} - 6x_{1,0} - 10 - t_0) = 1.5420.$$

$$m = 1, \\ t_2 = 0.04, \\ x_{1,2} = x_{1,1} + hx_{2,1} = 0.1548, \\ x_{2,2} = x_{2,1} + hx_{3,1} = 0.1708, \\ x_{3,2} = x_{3,1} + h(-6x_{3,1} - 6x_{1,1} - 10 - t_1) = 1.1383.$$

$$m = 2, \\ t_3 = 0.06, \\ x_{1,3} = x_{1,2} + hx_{2,2} = 0.1582, \\ x_{2,3} = x_{2,2} + hx_{3,2} = 0.1936, \\ x_{3,3} = x_{3,2} + h(-6x_{3,2} - 6x_{1,2} - 10 - t_2) = 0.7823.$$

La figura 7 presenta la solución numérica de x_1 en el intervalo $0 \leq t \leq 1.5$.

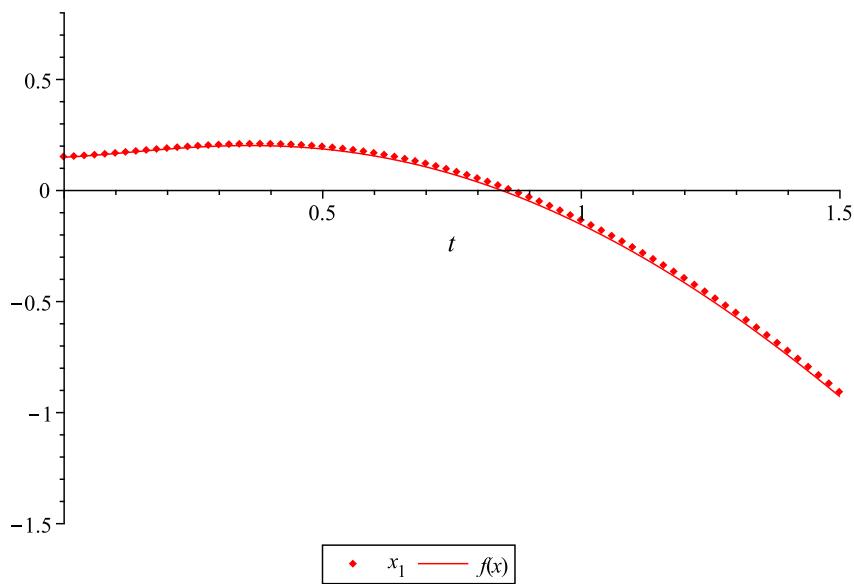


Figura 7: Solución numérica con el método de Euler vs analítica. Elaboración propia.

Caso de estudio 3

La figura 8 muestra un reactor tipo tanque agitado continuo (CSTR), en el cual tiene lugar una secuencia de transformaciones químicas modelada mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (Mostoufi & Constantinides, 2022).

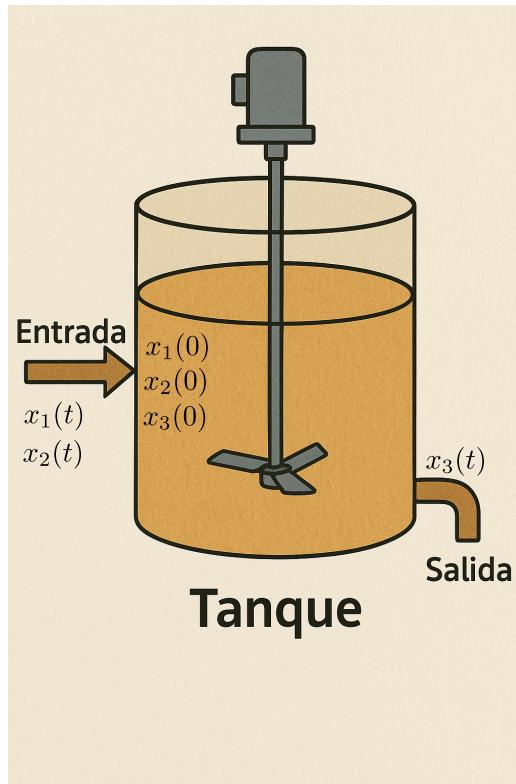


Figura 8: Concentración de solución en el tanque. Elaboración propia.

Las especies x_1 y x_2 se adicionan de forma individual al primer reactor con un flujo volumétrico constante de $1 \text{ dm}^3/\text{min}$. Inicialmente, cada reactor está lleno con un disolvente líquido inerte. Las concen-

tracciones iniciales de los reactivos son $x_1(0) = 1 \text{ mol/dm}^3$, $x_2(0) = 1 \text{ mol/dm}^3$, y $x_3(0) = 0 \text{ mol/dm}^3$. El sistema dinámico se describe como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1(t), \quad x_1(0) = 1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1(t) - x_2(t), \quad x_2(0) = 1, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_2(t) + \cos(t), \quad x_3(0) = 0.\end{aligned}\tag{9}$$

Note que la tercera ecuación incorpora un término oscilatorio $\cos(t)$ que representa una perturbación externa periódica, como podría ser la adición forzada de un coadyuvante o fuente energética variable en el tiempo. En este caso de estudio se usca obtener el perfil de concentración de cada especie en función del tiempo hasta alcanzar el estado estacionario, mediante simulación numérica. La soluciones analíticas de (10) son $x_1(t) = \exp(-t)$, $x_2(t) = t \exp(-t)$, $x_3(t) = 1 - (1+t) \exp(-t) + \frac{\sin(t)}{2}$. Determine la solución en el intervalo $0 \leq t \leq 10$, con $h = 0.2$.

Solución. El sistema de ecuaciones (9) puede reescribirse utilizando la notación de función, obteniéndose

$$\begin{aligned}f_1(t, x_1(t)) &= -x_1(t), \quad x_1(0) = 1, \\ f_2(t, x_1(t), x_2(t)) &= x_1(t) - x_2(t), \quad x_2(0) = 1, \\ f_3(t, x_2(t)) &= x_2(t) + \cos(t), \quad x_3(0) = 0.\end{aligned}\tag{10}$$

Observe que los primeros 4 pasos de la **Estrategia D. R-K4** son idénticos que en la **Estrategia D. Euler**.

En este problema hay un sistema de 3 ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden, el cual es equivalente a una única ecuación diferencial ordinaria de tercer orden que ha sido linealizada de acuerdo con (4). Aplicando el paso 5 de la **Estrategia D. R-K4** y refiriéndonos a la figura 5 tenemos

$$\begin{aligned}k_{1,1} &= f_1(t_m, x_{1,m}, x_{2,m}, x_{3,m}), \\ k_{2,1} &= f_2(t_m, x_{1,m}, x_{2,m}, x_{3,m}), \\ k_{3,1} &= f_3(t_m, x_{1,m}, x_{2,m}, x_{3,m}), \\ k_{1,2} &= f_1\left(t_m + \frac{h}{2}, x_{1,m} + \frac{k_{1,1}h}{2}, x_{2,m} + \frac{k_{2,1}h}{2}, x_{3,m} + \frac{k_{3,1}h}{2}\right), \\ k_{2,2} &= f_2\left(t_m + \frac{h}{2}, x_{1,m} + \frac{k_{1,1}h}{2}, x_{2,m} + \frac{k_{2,1}h}{2}, x_{3,m} + \frac{k_{3,1}h}{2}\right), \\ k_{3,2} &= f_3\left(t_m + \frac{h}{2}, x_{1,m} + \frac{k_{1,1}h}{2}, x_{2,m} + \frac{k_{2,1}h}{2}, x_{3,m} + \frac{k_{3,1}h}{2}\right), \\ k_{1,3} &= f_1\left(t_m + \frac{h}{2}, x_{1,m} + \frac{k_{1,1}h}{2}, x_{2,m} + \frac{k_{2,1}h}{2}, x_{3,m} + \frac{k_{3,1}h}{2}\right), \\ k_{2,3} &= f_2\left(t_m + \frac{h}{2}, x_{1,m} + \frac{k_{1,1}h}{2}, x_{2,m} + \frac{k_{2,1}h}{2}, x_{3,m} + \frac{k_{3,1}h}{2}\right), \\ k_{3,3} &= f_3\left(t_m + \frac{h}{2}, x_{1,m} + \frac{k_{1,1}h}{2}, x_{2,m} + \frac{k_{2,1}h}{2}, x_{3,m} + \frac{k_{3,1}h}{2}\right), \\ k_{1,4} &= f_1(t_m + h, x_{1,m} + k_{1,3}, x_{2,m} + k_{2,3}, x_{3,m} + k_{3,3}), \\ k_{2,4} &= f_2(t_m + h, x_{1,m} + k_{1,3}, x_{2,m} + k_{2,3}, x_{3,m} + k_{3,3}), \\ k_{3,4} &= f_3(t_m + h, x_{1,m} + k_{1,3}, x_{2,m} + k_{2,3}, x_{3,m} + k_{3,3}), \\ x_{1,m+1} &= x_{1,m} + \frac{h}{6}(k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4}), \\ x_{2,m+1} &= x_{2,m} + \frac{h}{6}(k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4}), \\ x_{3,m+1} &= x_{3,m} + \frac{h}{6}(k_{3,1} + 2k_{3,2} + 2k_{3,3} + k_{3,4}).\end{aligned}\tag{11}$$

Es claro el proceso iterativo en el sistema (11). Una vez calculado en nuevo valor de $x_{1,m+1}, x_{2,m+1}, x_{3,m+1}$ y la actualización de t_m , estos valores se utilizan para calcular los nuevos valores de las constantes de R-K, y el proceso se repite hasta llegar a $t = 1.5$. A continuación se muestra el desarrollo correspondiente a las primeras tres iteraciones

$$\begin{aligned}
 t_0 &= 0.0000, \\
 x_{1,0} &= 1.0, \\
 x_{2,0} &= 0.0, \\
 x_{3,0} &= 0.0, \\
 k_{1,1} &= f_1(t_0, x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}) = -1.0000, \\
 k_{2,1} &= f_2(t_0, x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}) = 1.0000, \\
 k_{3,1} &= f_3(t_0, x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}) = 0.5000, \\
 k_{1,2} &= f_1(t_0 + 0.1, x_{1,0} + 0.1k_{1,1}, x_{2,0} + 0.1k_{2,1}, x_{3,0} + 0.1k_{3,1}) = -0.9000, \\
 k_{2,2} &= f_2(t_0 + 0.1, x_{1,0} + 0.1k_{1,1}, x_{2,0} + 0.1k_{2,1}, x_{3,0} + 0.1k_{3,1}) = 0.8000, \\
 k_{3,2} &= f_3(t_0 + 0.1, x_{1,0} + 0.1k_{1,1}, x_{2,0} + 0.1k_{2,1}, x_{3,0} + 0.1k_{3,1}) = 0.5975, \\
 k_{1,3} &= f_1(t_0 + 0.1, x_{1,0} + 0.1k_{1,1}, x_{2,0} + 0.1k_{2,1}, x_{3,0} + 0.1k_{3,1}) = -0.9100, \\
 k_{2,3} &= f_2(t_0 + 0.1, x_{1,0} + 0.1k_{1,1}, x_{2,0} + 0.1k_{2,1}, x_{3,0} + 0.1k_{3,1}) = 0.8300, \\
 k_{3,3} &= f_3(t_0 + 0.1, x_{1,0} + 0.1k_{1,1}, x_{2,0} + 0.1k_{2,1}, x_{3,0} + 0.1k_{3,1}) = 0.5775, \\
 k_{1,4} &= f_1(t_0 + 0.1, x_{1,0} + k_{1,3}, x_{2,0} + k_{2,3}, x_{3,0} + k_{3,3}) = -0.8180, \\
 k_{2,4} &= f_2(t_0 + 0.1, x_{1,0} + k_{1,3}, x_{2,0} + k_{2,3}, x_{3,0} + k_{3,3}) = 0.6520, \\
 k_{3,4} &= f_3(t_0 + 0.1, x_{1,0} + k_{1,3}, x_{2,0} + k_{2,3}, x_{3,0} + k_{3,3}) = 0.6560, \\
 x_{1,1} &= x_{1,0} + 0.0333(k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4}) = 0.8187, \\
 x_{2,1} &= x_{2,0} + 0.0333(k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4}) = 0.1637, \\
 x_{3,1} &= x_{3,0} + 0.0333(k_{3,1} + 2k_{3,2} + 2k_{3,3} + k_{3,4}) = 0.1169.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_1 &= 0.2000, \\
 x_{1,1} &= 0.8187, \\
 x_{2,1} &= 0.1637, \\
 x_{3,1} &= 0.1169, \\
 k_{1,1} &= f_1(t_1, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}) = -0.8187, \\
 k_{2,1} &= f_2(t_1, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}) = 0.6550, \\
 k_{3,1} &= f_3(t_1, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}) = 0.6537, \\
 k_{1,2} &= f_1(t_1 + 0.1, x_{1,1} + 0.1k_{1,1}, x_{2,1} + 0.1k_{2,1}, x_{3,1} + 0.1k_{3,1}) = -0.7369, \\
 k_{2,2} &= f_2(t_1 + 0.1, x_{1,1} + 0.1k_{1,1}, x_{2,1} + 0.1k_{2,1}, x_{3,1} + 0.1k_{3,1}) = 0.5076, \\
 k_{3,2} &= f_3(t_1 + 0.1, x_{1,1} + 0.1k_{1,1}, x_{2,1} + 0.1k_{2,1}, x_{3,1} + 0.1k_{3,1}) = 0.7069, \\
 k_{1,3} &= f_1(t_1 + 0.1, x_{1,1} + 0.1k_{1,1}, x_{2,1} + 0.1k_{2,1}, x_{3,1} + 0.1k_{3,1}) = -0.7450, \\
 k_{2,3} &= f_2(t_1 + 0.1, x_{1,1} + 0.1k_{1,1}, x_{2,1} + 0.1k_{2,1}, x_{3,1} + 0.1k_{3,1}) = 0.5306, \\
 k_{3,3} &= f_3(t_1 + 0.1, x_{1,1} + 0.1k_{1,1}, x_{2,1} + 0.1k_{2,1}, x_{3,1} + 0.1k_{3,1}) = 0.6922, \\
 k_{1,4} &= f_1(t_1 + 0.1, x_{1,1} + k_{1,3}, x_{2,1} + k_{2,3}, x_{3,1} + k_{3,3}) = -0.6697, \\
 k_{2,4} &= f_2(t_1 + 0.1, x_{1,1} + k_{1,3}, x_{2,1} + k_{2,3}, x_{3,1} + k_{3,3}) = 0.3999, \\
 k_{3,4} &= f_3(t_1 + 0.1, x_{1,1} + k_{1,3}, x_{2,1} + k_{2,3}, x_{3,1} + k_{3,3}) = 0.7304, \\
 x_{1,2} &= x_{1,1} + 0.0333(k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4}) = 0.6703, \\
 x_{2,2} &= x_{2,1} + 0.0333(k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4}) = 0.2681, \\
 x_{3,2} &= x_{3,1} + 0.0333(k_{3,1} + 2k_{3,2} + 2k_{3,3} + k_{3,4}) = 0.2563.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_1 &= 0.4000, \\
x_{1,2} &= 0.6703, \\
x_{2,2} &= 0.2681, \\
x_{3,2} &= 0.2563, \\
k_{1,1} &= f_1(t_2, x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}) = -0.6703, \\
k_{2,1} &= f_2(t_2, x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}) = 0.4022, \\
k_{3,1} &= f_3(t_2, x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}) = 0.7286, \\
k_{1,2} &= f_1(t_2 + 0.1, x_{1,2} + 0.1k_{1,1}, x_{2,2} + 0.1k_{2,1}, x_{3,2} + 0.1k_{3,1}) = -0.6033, \\
k_{2,2} &= f_2(t_2 + 0.1, x_{1,2} + 0.1k_{1,1}, x_{2,2} + 0.1k_{2,1}, x_{3,2} + 0.1k_{3,1}) = 0.2950, \\
k_{3,2} &= f_3(t_2 + 0.1, x_{1,2} + 0.1k_{1,1}, x_{2,2} + 0.1k_{2,1}, x_{3,2} + 0.1k_{3,1}) = 0.7471, \\
k_{1,3} &= f_1(t_2 + 0.1, x_{1,2} + 0.1k_{1,1}, x_{2,2} + 0.1k_{2,1}, x_{3,2} + 0.1k_{3,1}) = -0.6099, \\
k_{2,3} &= f_2(t_2 + 0.1, x_{1,2} + 0.1k_{1,1}, x_{2,2} + 0.1k_{2,1}, x_{3,2} + 0.1k_{3,1}) = 0.3124, \\
k_{3,3} &= f_3(t_2 + 0.1, x_{1,2} + 0.1k_{1,1}, x_{2,2} + 0.1k_{2,1}, x_{3,2} + 0.1k_{3,1}) = 0.7364, \\
k_{1,4} &= f_1(t_2 + 0.1, x_{1,2} + k_{1,3}, x_{2,2} + k_{2,3}, x_{3,2} + k_{3,3}) = -0.5483, \\
k_{2,4} &= f_2(t_2 + 0.1, x_{1,2} + k_{1,3}, x_{2,2} + k_{2,3}, x_{3,2} + k_{3,3}) = 0.2177, \\
k_{3,4} &= f_3(t_2 + 0.1, x_{1,2} + k_{1,3}, x_{2,2} + k_{2,3}, x_{3,2} + k_{3,3}) = 0.7433, \\
x_{1,3} &= x_{1,2} + 0.0333(k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4}) = 0.5488, \\
x_{2,3} &= x_{2,2} + 0.0333(k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4}) = 0.3293, \\
x_{3,3} &= x_{3,2} + 0.0333(k_{3,1} + 2k_{3,2} + 2k_{3,3} + k_{3,4}) = 0.4042.
\end{aligned}$$

La figura 9 muestra el comportamiento de las especies x_1 , x_2 y x_3 a lo largo del tiempo en un sistema de tres reactores continuos en serie. Se observa que las concentraciones de las especies x_1 y x_2 disminuyen progresivamente conforme avanza la reacción, lo cual refleja su transformación a lo largo de las etapas del proceso. Inicialmente, x_1 y x_2 se encuentran presentes en concentraciones iguales, pero con el paso del tiempo, x_1 se consume primero, dando lugar a la generación de x_2 , que posteriormente también disminuye.

Por su parte, la especie x_3 , que representa el producto final, incrementa su concentración con el tiempo, indicando que el sistema favorece su formación. Este incremento no es completamente lineal, ya que presenta un comportamiento oscilatorio como resultado de la perturbación externa modelada por el término en su ecuación diferencial. Esta oscilación refleja la influencia directa de una fuente periódica externa sobre la acumulación de x_3 , incluso cuando las especies x_1 y x_2 tienden a agotarse.

Asimismo, la figura 9 muestra una comparación entre el comportamiento de las especies x_1 y x_2 obtenido mediante métodos numéricos y aquel obtenido de forma exacta a partir de soluciones analíticas reportadas en la literatura.

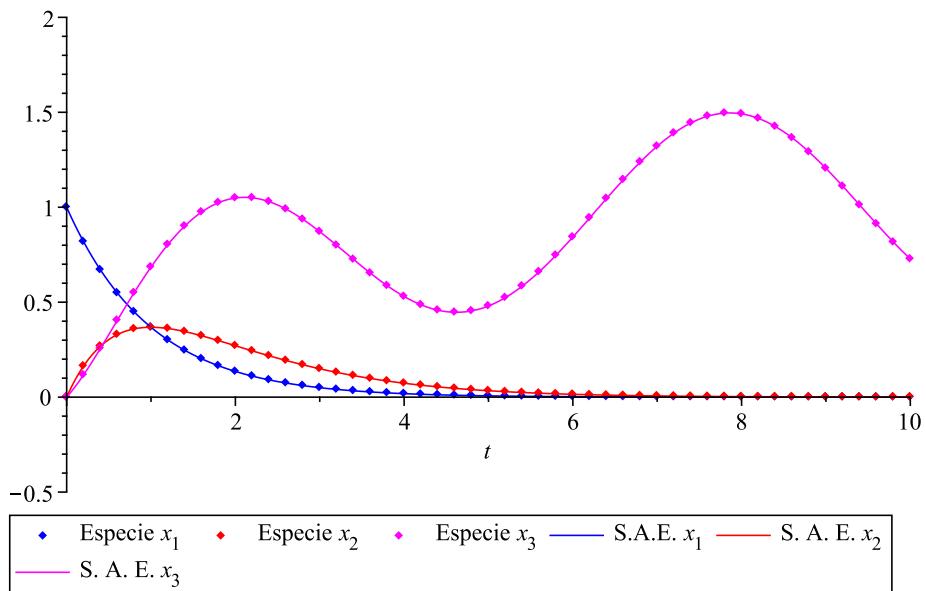


Figura 9: Solución numérica con R-K4 vs analítica. Elaboración propia.

Caso de estudio 4

Resolver la ecuación diferencial de tercer orden con condiciones iniciales dada por

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3}y(t) + 6\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 11\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) &= 10 \exp\left(-\frac{1}{2}t\right), \\ y(0) = 0.15, y'(0) = 0.1, y''(0) &= 2. \end{aligned} \quad (12)$$

La solución exacta es

$$\begin{aligned} f(t) = 1.06666667 \exp(-0.500000000x) + 0.0110741428 \exp(-5.25667409x) - \\ 0.927740872 \exp(-0.371662953x) \cos(1.39801451x) + 0.2. \end{aligned}$$

Solución. Aplicando los primeros 4 pasos de la **Estrategia D. R-K4** obtenemos la linealización de la ODE en un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{dt} &= -6x_3 - 6x_2 - 11x_1 + 10 \exp\left(-\frac{1}{2}t\right), \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2. \end{aligned}$$

Las variables son x_1, x_2, x_3, t . Al asignar el subíndice m a las variables y a las condiciones iniciales con $m = 0$ obtenemos $x_{1,0} = 0.15, x_{2,0} = 0.1, x_{3,0} = 2, t_0 = 0$. Los pasos 5 y 6 son los mismos descritos en el caso de estudio 3 y presentados por el sistema (11). La figura 10 muestra la comparación de la solución numérica contra la solución exacta.

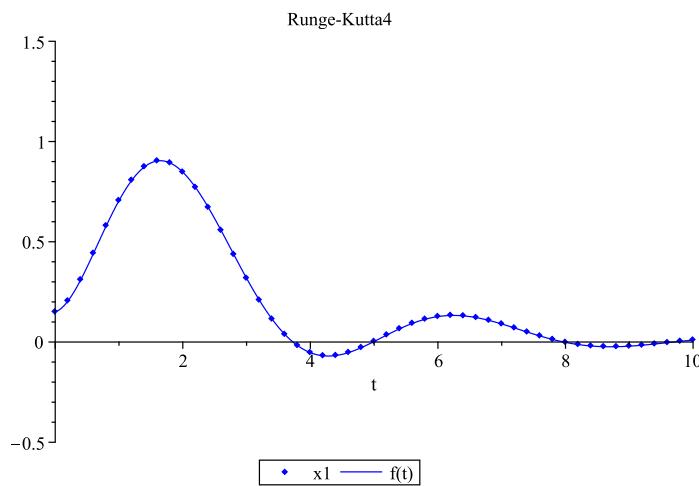


Figura 10: Solución numérica con R-K4 vs analítica. Elaboración propia.

7. Discusión

En esta investigación se analizaron distintos artículos educativos y científicos enfocados en métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales. En general, estos trabajos abordan esos métodos de solución como Euler y R-K. Por un lado, los artículos científicos mencionan que para su solución han utilizado comandos inter-construidos de software matemático como Maple, MATLAB y Mathematica, que resuelven numéricamente las ecuaciones. Por otro lado, los artículos educativos abordan los problemas clásicos que generalmente aparecen en los libros. Referente a los textos de análisis numérico también se revisaron varios ejemplares incluyendo versiones previas de mismos autores. Se observó que los textos aparece generalmente el ejemplo clásico de una ODE de primer orden. Asimismo, los artículos educativos y libros de texto no suelen ofrecer propuestas didácticas específicas con el fin de facilitar el aprendizaje de los métodos de Euler y Runge-Kutta.

En este trabajo se han citado libros ampliamente reconocidos como base en la enseñanza del análisis numérico dentro de las licenciaturas en ciencias e ingeniería (Burden & Faires, 2011; Chapra & Canale, 2011; Gerald, 1997). Por otro lado, textos especializados como el de Rapp (2017), dirigidos al campo de las ciencias químicas, suelen dar por sentado que el estudiante posee una formación sólida y un razonamiento abstracto bien desarrollado, necesarios a fin de comprender los temas abordados.

Merece la pena poner atención en la implementación de la **Estrategia Didáctica R-K4**. Después de obtener el sistema de ecuaciones que linealiza la ODE de orden superior, con las respectivas variables x_1, x_2, \dots, x_n , a primera vista se puede pensar que si $f_1(x_2) = x_2$ y $f_2(x_3) = x_3$ entonces deberíamos tener, por ejemplo, para el caso de k_1 , las constantes $k_{1,1} = f_1(x_2)$ y para $k_{2,1} = f_2(x_3)$, etc. Sin embargo, este razonamiento nos llevaría a particularizar la **Estrategia Didáctica R-K4**. Expresarla de la manera en cómo aparece en la figura 5, nos permite resolver cualquier sistema de ecuaciones, lineales y de orden superior. En relación con la **Estrategia Didáctica R-K4**, conviene señalar que la figura 5 se utiliza como recurso pedagógico, ya que apoya visualmente a los estudiantes en la comprensión paso a paso del método.

En la práctica se debe utilizar una estrategia de implementación con el fin de simplificar pasos repetitivos en el cálculo de las constantes $k_{1,1}, \dots, k_{n,1}$, por dar un ejemplo. En la figura 11 se presenta de manera gráfica una implementación donde simplifican cálculos repetitivos. Se han utilizado las variables c_1, c_2, \dots, c_n con el objetivo de simplificar este hecho.

Algunos ejemplares de ecuaciones diferenciales dedican una sección para introducir algunos métodos numéricos como el método de Euler y R-K orden 4, como el libro de los autores Edwards y Penney (2009). En títulos que son un referente en las clases de ecuaciones diferenciales y análisis numérico

$$\begin{aligned}
k_{1,1} &= f_1(t, x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n,m}) \\
k_{2,1} &= f_2(t, x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n,m}) \\
&\vdots = \vdots \\
k_{n,1} &= f_n(t, x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n,m}) \\
T &= t + \frac{h}{2} \\
c_1 &= x_{1,m} + \frac{hk_{1,1}}{2}, c_2 = x_{2,m} + \frac{hk_{2,1}}{2}, \dots, c_n = x_{n,m} + \frac{hk_{n,1}}{2} \\
k_{1,2} &= f_1(T, c_1, c_2, \dots, c_n) \\
k_{2,2} &= f_2(T, c_1, c_2, \dots, c_n) \\
&\vdots = \vdots \\
k_{n,2} &= f_n(T, c_1, c_2, \dots, c_n) \\
T &= t + h \\
c_1 &= x_{1,m} + hk_{1,3}, c_2 = x_{2,m} + hk_{2,3}, \dots, c_n = x_{n,m} + k_{n,3} \\
k_{1,4} &= f_1(T, c_1, c_2, \dots, c_n) \\
k_{2,4} &= f_2(T, c_1, c_2, \dots, c_n) \\
&\vdots = \vdots \\
k_{n,4} &= f_n(T, c_1, c_2, \dots, c_n) \\
x_{1,m+1} &= x_{1,m} + \frac{h}{6}(k_{1,1} + 2(k_{1,2} + k_{1,3}) + k_{1,4}) \\
x_{2,m+1} &= x_{2,m} + \frac{h}{6}(k_{2,1} + 2(k_{2,2} + k_{2,3}) + k_{2,4}) \\
&\vdots = \vdots \\
x_{n,m+1} &= x_{n,m} + \frac{h}{6}(k_{n,1} + 2(k_{n,2} + k_{n,3}) + k_{n,4})
\end{aligned}$$

Figura 11: Estrategia didáctica optimizada R-K 4. Elaboración propia.

como Burden y Faires (2011), Chapra y Canale (2011), Edwards y Penney (2009) y Gerald (1997) se presenta la implementación de la figura 11 en pseudocódigos en cada una de las subsecciones, y en el caso de Edwards y Penney (2009) se incluyen programas con esta implementación. Estas obras literarias no dan mayores detalles del por qué se debe utilizar esta implementación y esto se debe al DME, que impone significados en los libros y en las clases dentro del salón de clase.

Una de las razones es precisamente evitar hacer cálculos repetitivos, la cual se puede intuir de manera visual. La otra razón, quizás la más importante, es que al simplificar estos cálculos se optimizan tiempos de cómputo en la ejecución del programa codificado, independientemente del lenguaje de programación elegido (ver Apéndice B). Por otro lado, las funciones intrínsecas que se implementan en cualquier lenguaje de programación como las funciones trigonométricas circulares también requieren tiempo cómputo en su evaluación. En Sandoval-Hernández et al. (2023) se realizó una comparación en tiempos de cómputo en las funciones intrínsecas de Fortran 90 utilizando compilador GNU gfortran. Se encontró que de las funciones trascendentales la que más tardó en ejecutarse fue la función logaritmo y exponencial natural. En ese estudio, también se calculó la evaluación de las funciones hiperbólicas obteniendo algunas ellas tiempos superiores a la función logaritmo, sin embargo, debe considerarse que estas funciones son una combinación de funciones exponenciales. Note que el último caso de estudio presentado corresponde a una ecuación diferencial de tercer orden que incluye en su estructura una función exponencial. Por ello, resulta útil implementar la estrategia didáctica optimizada, con el propósito de reducir los tiempos de cómputo. Con fines de comparación, la ecuación (12) fue resuelta utilizando ambas implementaciones mostradas en las figuras 5 y 11, obteniéndose tiempos de cómputo de $221.080\mu s$ y $159.148\mu s$, respectivamente. Es importante advertir las diferencias de tiempo obtenidas. En el Apéndice B se listan las rutinas escritas en Fortran 90, ejecutadas en la computadora Raspberry Pi 1, correspondientes al caso de estudio 4. Dichas rutinas pueden adaptarse con el propósito de medir los tiempos de cómputo empleados en los demás casos de estudio.

La aplicación de la **Estrategia D. Euler** y **Estrategia D. R-K4** en el curso de métodos numéricos al grupo experimental se aplicó de manera semanal, con cinco horas a la semana. El grupo experimental estaba

conformado por 6 mujeres y 24 hombres, mientras que el grupo de control por 2 mujeres y 29 hombres. El docente que aplicó las estrategias didácticas en el grupo experimental tenía 14 años de experiencia docente, mientras que el docente que aplicó la metodología de enseñanza habitual tenía 16 años de experiencia. En la figura 12 se presentan los resultados obtenidos de manera porcentual al final de la aplicación de las estrategias didácticas.

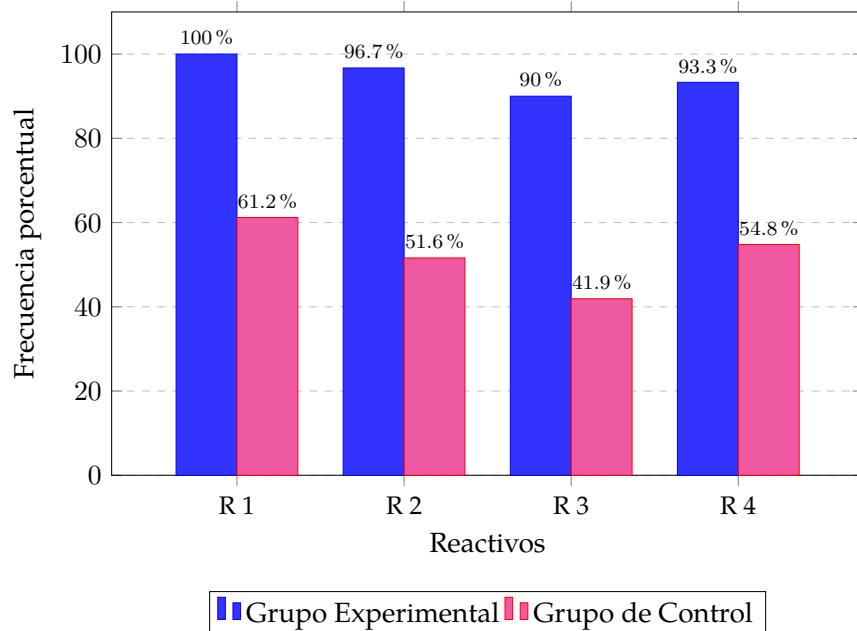


Figura 12: Estadísticas de la aplicación de las estrategias didácticas. Elaboración propia.

La figura 12 muestra la comparación de los resultados obtenidos por los estudiantes por reactivo, en los grupos experimental y de control respectivamente. En general los resultados obtenidos por el grupo experimental fueron muy superiores en relación al grupo de control. El criterio de revisión era que cada acierto del examen tenía que ser resuelto correctamente en su totalidad. Los estudiantes del grupo experimental, en general fueron capaces de descomponer las ecuaciones diferenciales de orden superior en sistemas de ecuaciones lineales para aplicarles los métodos numéricos ME y R-K4. El reactivo que tuvo una frecuencia más baja, fue el 3, en donde 3 alumnos no respondieron correctamente, obteniéndose el 90 %. Al finalizar, la evaluación se les preguntó a los alumnos que elemento de la estrategia les ayudó a comprender los procedimientos. En general, mencionaron que las figuras 4 y 5 que acompaña las estrategias **Estrategia D. Euler** y **Estrategia D. R-K4** les ayudaron a visualizar y comprender los procedimientos durante la resolución de ejercicios vistos en clase. Cabe mencionar que los dos docentes que participaron en los grupos de experimental y de control tenían casi la misma experiencia dando la asignatura de métodos numéricos. A pesar que la experiencia docente juega un papel importante en la enseñanza de cualquier asignatura, contar con estrategias didácticas mejora el aprendizaje de los alumnos, como se puede observar las frecuencias porcentuales en ambos grupos, en la figura 12.

8. Conclusiones

En este artículo se propusieron dos estrategias didácticas: una enfocada en el método de Euler y otra en el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Además, se diseñaron y llevaron a cabo actividades orientadas a su aplicación práctica en el aula. Los resultados obtenidos muestran que las estrategias propuestas en este trabajo le facilitan al profesor su práctica docente dentro del salón de clase en la enseñanza de los métodos de Euler y Runge-Kutta cuando se tienen ecuaciones ordinarias de orden

superior. Por otro lado, a los estudiantes les facilita el aprendizaje en estos procedimientos que los libros no muestran, así como artículos de investigación, evitando dejar deficiencias y permitiéndoles implementar sus ideas al momento de escribir sus propias rutinas en el lenguaje de programación de su interés.

Asimismo, este trabajo abordó el tema del tiempo de cómputo, un aspecto de gran relevancia que comúnmente es omitido en los libros de texto. Para destacar su importancia, se realizaron dos comparaciones utilizando diferentes implementaciones, con el objetivo de medir los tiempos de ejecución. Estas pruebas permitieron demostrar cómo una codificación eficiente, que evita cálculos redundantes, puede optimizar significativamente el desempeño computacional. Los resultados reportados nos muestran que la reducción del tiempo para el caso de estudio, en particular, fue aproximadamente un 30 %. Esta implementación cobra importancia cuando se disponen de dispositivos de cómputo limitados, o cuando la complejidad de la ecuación es mayor incorporando más operaciones algebraicas o más funciones.

Contribución de las personas autoras: Conceptualización: M.A.S.H. Metodología: F.I.M.H. Software: H.J.I., H.V.L. Investigación: J.J.V.L., Visualización: S.E.T.B, J.J.V.L.. Análisis formal: M.A.S.H., F.I.M.H. Validación: H.J.I. Escritura-borrador original: F.I.M.H., M.A.S.H. Escritura-revisión y edición: M.A.S.H., H.V.L.

Accesibilidad de datos: Los resultados obtenidos en los casos de estudio presentados en este artículo pueden replicarse utilizando la información presentada en el apéndice B.

Referencias

- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis*. Thomson Cengage.
- Castro, S., & Guzmán de Castro, B. (2017). Los estilos de aprendizaje en la enseñanza y el aprendizaje: Una propuesta para su implementación. *Revistas de investigación*, 29(58). <https://www.redalyc.org/pdf/3761/376140372005.pdf>
- Chapra, S. C., & Canale, R. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros*. McGraw-Hill New York, NY, USA.
- Collins, J. (2021). *Cálculo integral*. ALEC.
- Crossan, M. M., & Apaydin, M. (2010). A multi-dimensional framework of organizational innovation: A systematic review of the literature. *Journal of management studies*, 47(6), 1154-1191. <https://doi.org/10.1111/j.1467-6486.2009.00880.x>
- Díaz Barriga Arceo, F., & Hernández Rojas, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista*. McGraw-Hill.
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación.
- Gamboa Mora, M. C., Briceño Martínez, J. J., & Camacho González, J. P. (2015). Caracterización de estilos de aprendizaje y canales de percepción de estudiantes universitarios. *Opción*, 31(3), 509-527. <https://produccioncientificaluz.org/index.php/opcion/article/view/20497>

- Gerald, C. F. (1997). Análisis numérico.
- Granados-Ospina, A. (2015). Las TIC en la enseñanza de los métodos numéricos. *Sophia*, 11(2), 143-154. <http://www.scielo.org.co/pdf/sph/v11n2/v11n2a03.pdf>
- Guichard, D. (2017). *Calculus Early Transcendentals*. Lyryx.
- Jerves-Cobo, A. X. (2009). *Elementos de cálculo numérico*. Abya-Yala/UPS.
- Jiménez-Islas, H. (1996). SEHPE: programa para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales mediante método homotópico con seguimiento hiperesférico. *Avances en Ingeniería Química*, 6(2), 174-179.
- Jiménez-Islas, H., Calderón-Ramírez, M., Martínez-González, G. M., Calderón-Álvarado, M. P., & Oliveros-Muñoz, J. M. (2020). Multiple solutions for steady differential equations via hyperspherical path-tracking of homotopy curves. *Computers & Mathematics with Applications*, 79(8), 2216-2239. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.10.023>
- Lucena, N. F. (2021). Reflexiones de la experiencia docente como aprendizaje. *Educere*, 25(81), 657-667. <https://www.redalyc.org/journal/356/35666225026/35666225026.pdf>
- Mora, W. (2018). *Introducción a los métodos numéricos*.
- Mostoufi, N., & Constantinides, A. (2022). *Applied numerical methods for chemical engineers*. Academic Press.
- Paz-Corrales, L. M., & Molina, K., Joseh David y Alonso-García. (2022). Construcción mecánica de la hipérbola desarrollada por Descartes. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 35(1). <https://alme.org.mx/revista/index.php/alme/article/view/53>
- Pittaway, L., Robertson, M., Munir, K., Denyer, D., & Neely, A. (2004). Networking and innovation: a systematic review of the evidence. *International journal of management reviews*, 5(3-4), 137-168. <https://doi.org/10.1111/j.1460-8545.2004.00101.x>
- Rapp, B. E. (2017). *Microfluidics: modeling, mechanics and mathematics*. William Andrew. <https://doi.org/10.1016/C2012-0-02230-2>
- Ricardo, H. (2018). *Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna*. Reverté.
- Sánchez-Olavarría, C. (2020). Trayectorias profesionales docentes: ¿una cuestión de experiencia? *Revista de la educación superior*, 49(196), 39-56. <https://resu.anuies.mx/ojs/index.php/resu/article/view/1406>
- Sandoval-Hernández, M. A., Alvarez-Gasca, O., Contreras-Hernández, A. D., Pretelin-Canela, J. E., Palma-Grayeb, B. E., Jiménez-Fernández, V. M., Filobello-Nino, U., Pereyra-Díaz, D., Hernández-Machuca, S. F., Sampieri-González, C. E., et al. (2019). Exploring the Classic Perturbation Method for Obtaining Single and Multiple Solutions of Nonlinear Algebraic Problems with Application to Microelectronic Circuits. *International Journal of Engineering Research & Technology*, 8(9). <https://doi.org/10.17577/IJERTV8IS090154>
- Sandoval-Hernández, M. A., Vazquez-Leal, H., Sarmiento-Reyes, A., Filobello-Nino, U., Castro-Gonzalez, F., Herrera-May, A. L., Callejas-Molina, R. A., & Ruiz-Gomez, R. (2018). Optimized direct Padé

- and HPM for solving equation of oxygen diffusion in a spherical cell. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2018(1), 9142124. <https://doi.org/10.1155/2018/9142124>
- Sandoval-Hernández, M., Filobello-Nino, U., Vazquez-Leal, H., Velez-López, G., Morales-Alarcón, G., Martínez-Barrios, F., Vichi-Mendoza, J., Chong-Duran, J., Sampieri-González, C., Castaneda-Sheissa, R., et al. (2023). Measurement of Computing Times using the Intrinsic Functions of Gfortran. *International Journal of Engineering Research y Technology*, 12(03), 291-294. <https://doi.org/10.17577/IJERTV12IS030182>
- Sandoval-Hernández, M. A., Hernández-Méndez, S., Torreblanca-Bouchan, S. E., & Díaz-Arango, G. U. (2021). Actualización de contenidos en el campo disciplinar de matemáticas del componente propedéutico del bachillerato tecnológico: el caso de las funciones especiales. *RIDE Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 12(23). <https://doi.org/10.23913/ride.v12i23.1044>
- Sandoval-Hernández, M. A., Vázquez-Leal, H., Huerta-Chua, J., Filobello-Nino, U. A., & Mayorga Cruz, D. (2022). La didáctica del cálculo integral: el caso de los procedimientos de integración. *RIDE Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 13(25). <https://doi.org/10.23913/ride.v13i25.1245>
- Shu, S., & Liu, Y. (2021). Looking back to move forward: A bibliometric analysis of consumer privacy research. *Journal of Theoretical and Applied Electronic Commerce Research*, 16(4), 727-747. <https://doi.org/10.3390/jtaer16040042>
- Soto, D., & Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Bolema: Boletim de EducaCão Matemática*, 28, 1525-1544. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25>
- Tranfield, D., Denyer, D., & Smart, P. (2003). Towards a methodology for developing evidence-informed management knowledge by means of systematic review. *British journal of management*, 14(3), 207-222. <https://doi.org/10.1111/1467-8551.00375>
- Uriza, R. C., Espinosa, G. M., & Gasperini, D. R. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de investigación en educación matemática*, (8), 9-28. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.123>
- Vázquez, R., Mariguetti, J., Burgos, A., & Canali, L. (2015). Implementación de un Algoritmo de Filtrado en Microcontroladores dsPICy PIC32. *IV Argentine Symposium on Industrial Informatics (SII)-JAIIo 44 (Rosario, 2015)*. <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/59130>
- Vázquez-Leal, H., Sandoval-Hernández, M., Castaneda-Sheissa, R., Filobello-Niño, U., & Sarmiento-Reyes, A. (2015). Modified Taylor solution of equation of oxygen diffusion in a spherical cell with Michaelis-Menten uptake kinetics. *International Journal of Applied Mathematics Research*, 4(2), 253. <https://doi.org/10.14419/ijet.v4i2.4221>

A. Apéndice

Instrumento aplicado para recolección de datos

Nombre del estudiante: _____
 Fecha: _____

Instrucciones: Resuelve los ejercicios que se presentan a continuación.

1. Resuelva la siguiente ecuación diferencial utilizando el método de Euler con paso $h = 0.1$.

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 9 \frac{dy(x)}{dx} + 10y(x) = 10$$

Condiciones iniciales:

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$$

2. Resuelva la siguiente ecuación diferencial utilizando el método de Euler con paso $h = 0.1$.

$$\frac{d^3Q(x)}{dx^3} + 6 \frac{d^2Q(x)}{dx^2} + 11 \frac{dQ(x)}{dx} + 6Q(x) = e^{-3x}$$

Condiciones iniciales:

$$Q(0) = 1, \quad Q'(0) = -0.5, \quad Q''(0) = 2.2$$

3. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con paso $h = 0.1$.

Condiciones iniciales:

$$CA(0) = 1, \quad CB(0) = 0, \quad CC(0) = 0$$

Sistema de ecuaciones:

$$\frac{d}{dt}CA(t) = -0.5CA(t)$$

$$\frac{d}{dt}CB(t) = 0.5CA(t) - 0.25CB(t)$$

$$\frac{d}{dt}CC(t) = 0.25CB(t)$$

4. Resuelva la siguiente ecuación diferencial utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con paso $h = 0.1$.

$$\frac{d^3Q(x)}{dx^3} + 6 \frac{dQ(x)}{dx} + 11Q(x) - 5e^{-x} = 0$$

Condiciones iniciales:

$$Q(0) = 0.15, \quad Q'(0) = 0.1, \quad Q''(0) = 0.5$$

B. Apéndice

```
! Este programa mide tiempos de computo
program rk4'solver
implicit none
```

```
! Variables
real :: t, tf, h, x1, x2, x3
real :: k11, k21, k31, k12, k22, k32, k13, k23, k33, k14, k24, k34
integer :: n, i, ii, maxiter
real :: start, finish, tt
real :: f1,f2,f3
```

```

maxiter=1000
! Parameters

tf = 10.0
h = 0.2
n = int(tf / h) + 1

call cpu'time(start)
do ii = 1, maxiter
!   Initial conditions
    x1 = 0.15
    x2 = 0.1
    x3 = 2.0
    t = 0.0

!   Imprime valores iniciales!!!!!!!!!!!!!!
!   Descomenta estos prints para visualizar
!   valores iniciales
!   print *, "t", "x1", "x2", "x3"
!   print *, t, x1, x2, x3

    do i = 1, n
!       K1
        k11 = f1(t, x1, x2, x3)
        k21 = f2(t, x1, x2, x3)
        k31 = f3(t, x1, x2, x3)

!       K2
        k12 = f1(t + h / 2.0, x1 + h * k11 / 2.0, x2 + h * k21 / 2.0, x3 + h * k31 / 2.0)
        k22 = f2(t + h / 2.0, x1 + h * k11 / 2.0, x2 + h * k21 / 2.0, x3 + h * k31 / 2.0)
        k32 = f3(t + h / 2.0, x1 + h * k11 / 2.0, x2 + h * k21 / 2.0, x3 + h * k31 / 2.0)

!       K3
        k13 = f1(t + h / 2.0, x1 + h * k12 / 2.0, x2 + h * k22 / 2.0, x3 + h * k32 / 2.0)
        k23 = f2(t + h / 2.0, x1 + h * k12 / 2.0, x2 + h * k22 / 2.0, x3 + h * k32 / 2.0)
        k33 = f3(t + h / 2.0, x1 + h * k12 / 2.0, x2 + h * k22 / 2.0, x3 + h * k32 / 2.0)

!       K4
        k14 = f1(t + h, x1 + h * k13, x2 + h * k23, x3 + h * k33)
        k24 = f2(t + h, x1 + h * k13, x2 + h * k23, x3 + h * k33)
        k34 = f3(t + h, x1 + h * k13, x2 + h * k23, x3 + h * k33)

!       Update variables
        x1 = x1 + (h / 6.0) * (k11 + 2.0 * k12 + 2.0 * k13 + k14)
        x2 = x2 + (h / 6.0) * (k21 + 2.0 * k22 + 2.0 * k23 + k24)
        x3 = x3 + (h / 6.0) * (k31 + 2.0 * k32 + 2.0 * k33 + k34)

        t = t + h

!       Imprime resultados
!       Descomenta para ver valores
!       print *, t, x1, x2, x3
    end do

!   Comenta este ciclo externo para ver valores
!   y descomenta los prints
end do
!print *, t, x1, x2, x3
call cpu'time(finish)
tt=((finish-start)/maxiter)*1000000
write( *, "( 0PF14.8)" ) tt
end program rk4'solver

function f1(t, x1, x2, x3) result(f)
  real, intent(in) :: t, x1, x2, x3
  real :: f
!   Usa la linea de abajo si el compilador genera variables dummy
!   f = x2+0*(t+x1+x3)

  f = x2
end function f1

function f2(t, x1, x2, x3) result(f)
  real, intent(in) :: t, x1, x2, x3
  real :: f
!   Usa la linea de abajo si el compilador genera variables dummy

```

```

f = x3+0*(t+x2+x1)

f = x3
end function f2

function f3(t, x1, x2, x3) result(f)
  real, intent(in) :: t, x1, x2, x3
  real :: f
  f = -6.0 * x3 - 6.0 * x2 - 11.0 * x1 + 10.0 * exp(-0.5 * t)
end function f3

=====
! Este programa mide tiempos de computo
! optimizando tiempos de computo
program rk4'solverT
implicit none

! Variables
real :: t, tf, h, x1, x2, x3, Ti
real :: k11, k21, k31, k12, k22, k32, k13, k23, k33, k14, k24, k34
real :: cn1, cn2, cn3, hp
real :: start, finish, tt
real :: f1,f2,f3
integer :: i,ii, n, maxiter

maxiter=1000
! Parameters

tf = 10.0
h = 0.2
n = int(tf / h) + 1

call cpu_time(start)
do ii = 1, maxiter
  ! Initial conditions
  x1 = 0.15
  x2 = 0.1
  x3 = 2.0
  t = 0.0
  ti = 0.0
  hp = 0.0

  ! Imprime valores iniciales!!!!!!!!!!!!!!
  ! Descuenta estos prints para visualizar
  ! valores iniciales
  ! print *, "t", "x1", "x2", "x3"
  ! print *, t, x1, x2, x3

  ! do i = 1, n
  !   K1
  k11 = f1(t, x1, x2, x3)
  k21 = f2(t, x1, x2, x3)
  k31 = f3(t, x1, x2, x3)

  !   K2
  cn1 = x1 + h * k11 / 2.0
  cn2 = x2 + h * k21 / 2.0
  cn3 = x3 + h * k31 / 2.0
  Ti = t + h / 2.0
  k12 = f1(Ti, cn1, cn2, cn3)
  k22 = f2(Ti, cn1, cn2, cn3)
  k32 = f3(Ti, cn1, cn2, cn3)

  !   K3
  cn1 = x1 + h * k12 / 2.0
  cn2 = x2 + h * k22 / 2.0
  cn3 = x3 + h * k32 / 2.0
  k13 = f1(Ti, cn1, cn2, cn3)
  k23 = f2(Ti, cn1, cn2, cn3)
  k33 = f3(Ti, cn1, cn2, cn3)

  !   K4
  cn1 = x1 + h * k13
  cn2 = x2 + h * k23

```

```

cn3 = x3 + h * k33
Ti = t + h
k14 = f1(Ti, cn1, cn2, cn3)
k24 = f2(Ti, cn1, cn2, cn3)
k34 = f3(Ti, cn1, cn2, cn3)

!      Update values
hp = (h) / 6.0
x1 = x1 + hp * (k11 + 2.0 * (k12 + k13) + k14)
x2 = x2 + hp * (k21 + 2.0 * (k22 + k23) + k24)
x3 = x3 + hp * (k31 + 2.0 * (k32 + k33) + k34)

t = t + h

!      Imprime resultados
!      Descomenta para ver valores
!      print *, t, x1, x2, x3
end do

!      Comenta este ciclo externo para ver valores
!      y descomenta los prints
end do

!      print *, t, x1, x2, x3
call cpu'time(finish)
tt=((finish-start)/maxiter)*1000000
write( *, "( 0PF14.8)" ) tt
end program rk4'solverT

function f1(t, x1, x2, x3) result(f)
  real, intent(in) :: t, x1, x2, x3
  real :: f
!      Usa la linea de abajo si el compilador genera variables dummy
  f = x2+0*(t+x1+x3)

  f = x2
end function f1

function f2(t, x1, x2, x3) result(f)
  real, intent(in) :: t, x1, x2, x3
  real :: f
!      Usa la linea de abajo si el compilador genera variables dummy
  f = x3+0*(t+x2+x1)

  f = x3
end function f2

function f3(t, x1, x2, x3) result(f)
  real, intent(in) :: t, x1, x2, x3
  real :: f
  f = -6.0 * x3 - 6.0 * x2 - 11.0 * x1 + 10.0 * exp(-0.5 * t)
end function f3

```