



Sobre a sequência numérica de François, seu Tabuleiro e a visualização de propriedades com ladrilhos

| Sobre la secuencia numérica de François, su tablero y la visualización de propiedades con mosaicos |

| On the Francois numerical sequence, his board and some tillings properties |

 **Francisco Regis Vieira Alves¹**

fregis@ifce.edu.br

Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
Fortaleza, Brasil

Recibido: 13 de marzo del 2024

Aceptado: 30 de julio del 2025

Resumo: O estudo de sequências numéricas recorrentes impõe certo vês restritivo e limitado, uma vez que, predominantemente, os compêndios de livros de História da Matemática acentuam apenas o papel da sequência numérica recorrente de 2ª ordem, chamada de sequência de Fibonacci. Por outro lado, quando examinamos o interesse moderno sobre a generalização de vários outros casos de sequências numéricas recorrentes, confirmamos que a abordagem combinatória proporciona a descoberta de inúmeras propriedades matemáticas e, de modo especial, quando examinamos tais propriedades com o emprego da noção de Tabuleiro. Assim, o presente trabalho aborda o caso de uma sequência numérica recorrente recém introduzida na literatura científica, chamada de sequência numérica de François. Por fim, a partir da constatação de certos casos relacionados com a noção de Tabuleiro hexagonal, o trabalho apresenta uma formulação que, de modo indireto, finda por empregar propriedades relacionadas com a sequência de Lucas e Fibonacci.

Palavras-chave: História da Matemática, Sequência numérica, Tabuleiro, Professor de Matemática.

Resumen: El estudio de secuencias numéricas recurrentes impone cierto carácter restrictivo y limitado, dado que, predominantemente, los compendios de libros de Historia de la Matemática acentúan solo el papel de la secuencia numérica recurrente de segundo orden, llamada secuencia de Fibonacci. Por otro lado, al examinar el interés moderno sobre la generalización de diversos casos de secuencias numéricas recurrentes, se confirma que el enfoque combinatorio permite el descubrimiento de innumerables propiedades matemáticas y, de manera especial, cuando se examinan tales propiedades con el empleo de la noción de Tablero. Así, el presente trabajo aborda el caso de una secuencia numérica recurrente recientemente introducida en la literatura científica, llamada secuencia numérica de François. Finalmente, a partir de la constatación de ciertos casos relacionados con la noción de Tablero hexagonal, el trabajo presenta una formulación que, de manera indirecta, termina empleando propiedades relacionadas con la secuencia de Lucas y Fibonacci.

¹Francisco Regis Vieira Alves. Bolsista de Produtividade em Pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico CNPq. Docente do Programa de Doutorado em Ensino - RENOEN/IFCE. Código postal: 60.000-000. Correio eletrônico: fregis@ifce.edu.br.

Palabras Clave: Historia de la Matemática, Secuencia numérica, Tablero, Profesor de Matemática.

Abstract: The study of recurring numerical sequences imposes a certain restrictive and limited aspect, since, predominantly, the compendiums of History of Mathematics books emphasize only the role of the recurring numerical sequence of 2nd order, called the Fibonacci sequence. On the other hand, when we examine the modern interest in the generalization of several other cases of recurring numerical sequences, we confirm that the combinatorial approach provides the discovery of numerous mathematical properties and, especially, when we examine such properties using the notion of Chessboard. Thus, the present work addresses the case of a recurring numerical sequence recently introduced in the scientific literature, called the Francois numerical sequence. Finally, from the observation of certain cases related to the notion of hexagonal board, the work presents a formulation that, indirectly, ends up using properties related to the Lucas and Fibonacci sequences.

Keywords: History of Mathematics, Numerical sequence, Board, Mathematics Teacher.

1. Introdução

O estudo de sequências numéricas recorrentes preserva vigor atual, na medida em que atrai o entusiasmo de especialistas de vários países. Ademais, dentre das inúmeras especialidades e formas de generalização do objeto matemático denominado sequências numéricas recorrentes, se destacam os matemáticos que dedicam interesse em sua abordagem e propriedades combinatórias (Došlić & Podrug, 2022a, 2022b). Com efeito, registramos muitos trabalhos que introduzem uma abordagem e interpretação do modelo combinatório para determinadas sequências numéricas recorrentes (Benjamin & Quinn, 1999, 2003a, 2003b; Benjamin et al., 2008; Koshy, 2001, 2018, 2019; Koshy, 2014; Ziqian, 2019).

De modo especial, na figura 1 a seguir, constatamos um apelo mnemônico introduzido por Koshy (2018) com o intuito de significar e representar propriedades combinatórias relacionadas com a sequência recorrente de Fibonacci e, ao lado direito a sequência recorrente de Pell. Ambas as sequências podem ser discutidas por intermédio da noção de Tabuleiro (Alves, Vieira et al., 2023). Na figura 1 visualizamos sua correspondente descrição.

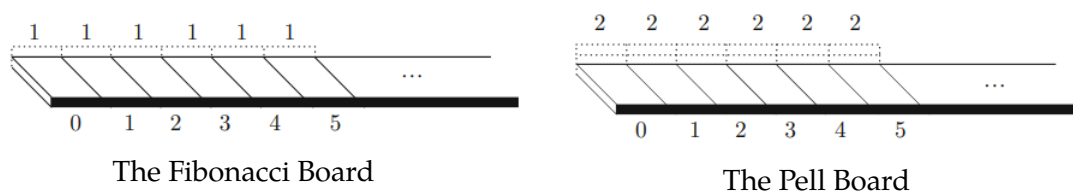


Figura 1: Koshy (2014) explica a noção de Tabuleiro relacionado com as sequências de Fibonacci e de Pell.

Mais recentemente, encontramos o caso do Tabuleiro hexagonal, formulado por Došlić y Podrug (2022a, 2022b), Ziqian (2019) y Ziqian y Dresden (2019), podemos perceber que determinadas relações com a sequência Tribonacci e a sequência Tetranacci, que envolvem generalizações da sequência de Fibonacci (Alves, 2017, 2022; Alves & Catarino, 2022; Alves, Catarino & Aires, 2023), por exemplo, envolvem uma configuração com células hexagonais e dos arranjos cristalográficos simétricos. Na figura 2, assinalamos o Tabuleiro bidimensional proposto por Ziqian y Dresden (2019), em que podemos constatar, ao lado direito, os casos particulares, quando o mesmo se constitui apenas por células enumeradas.

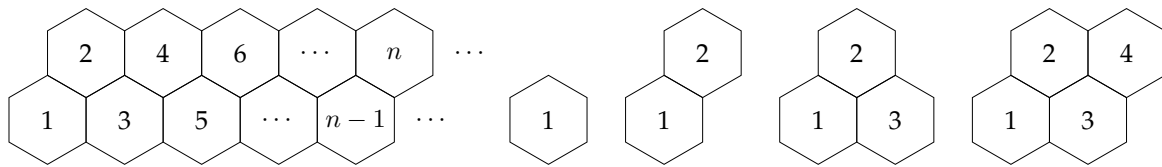


Figura 2: Ziqian y Dresden (2019) descrevem o Tabuleiro hexagonal bidimensional. Imagem modificada.

Vamos considerar o seguinte tabuleiro constituído de células hexagonais, com amparo do trabalho de Ziqian y Dresden (2019). No lado direito da figura 3, podemos verificar alguns casos particulares, envolvendo células hexagonais. A seguir, ainda na figura 3, podemos visualizar: um quadrado, um dominó horizontal, um dominó inclinado à esquerda, um dominó inclinado à direita (todos na cor laranja). A partir de certas propriedades combinatórias, os autores demonstram que o Tabuleiro hexagonal bidimensional apresenta propriedades que revelam a sequência Tetranacci, conhecida na literatura pelos valores numéricos indicados a seguir: 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, 401, 773,....

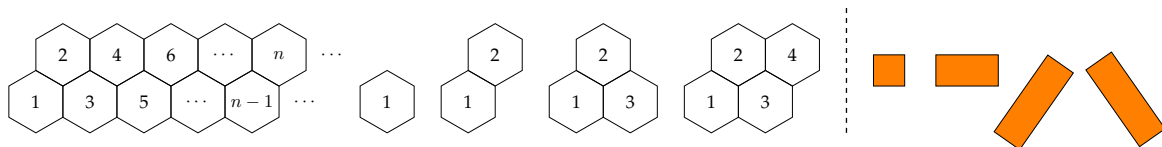


Figura 3: Ziqian y Dresden (2019) definem os ladrilhos que podem ser empregados para preencher o Tabuleiro e descobrir suas relações com a sequência Tetranacci. Imagem modificada.

Došlić y Podrug (2022b) empregam um Tabuleiro Hexagonal, todavia, introduzem a noção de composição de células via monômeros e dímeros. Na figura 4 abaixo visualizamos exemplos de dímeros na cor verde. No canto direito, divisamos três monômeros (na cor verde, na cor laranja, na cor amarela). Reparemos que o Tabuleiro com enumeração à esquerda!

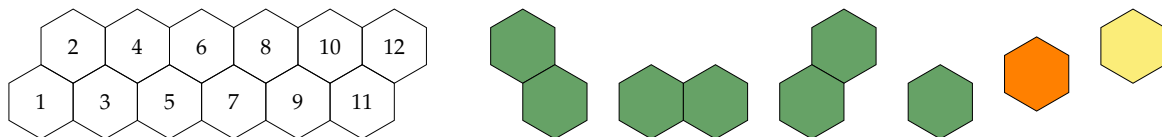


Figura 4: Došlić y Podrug (2022b) descrevem o Tabuleiro hexagonal, considerando sua composição a partir de monômeros e dímeros. Adaptação do autor.

Diante do cenário anterior, assinalamos o seguinte problema: A descrição de sequências numéricas e propriedades via Tabuleiro se demonstra possível e verificável para toda sequência numérica recorrente e, de modo particular, para a sequência de François?

O questionamento anterior possui resposta afirmativa quando, por exemplo, tomamos os casos da sequência de Fibonacci, de Lucas, de Jacobsthal e de Pell, todavia, a partir de uma breve verificação da literatura, constataremos que, em muitos casos não temos uma representação correspondente via Tabuleiro, como os seguintes casos: sequência generalizada de Woodall (Eren & Soykan, 2023); sequência generalizada de Adrien (Soykan, 2023a); sequência generalizada de Richard (Soykan, 2023b), etc.

Por conseguinte, formularemos o seguinte objetivo do trabalho: Descrever algumas propriedades aritméticas e combinatórias em relação à sequência numérica de François, por intermédio da formulação do seu respectivo Tabuleiro, de sorte que tais propriedades se mostrem acessíveis ao professor de Matemática, mediante o amparo da visualização.

2. Breve cenário sobre pesquisa em torno de sequências numéricas

Na Tabela 1 apresentamos um cenário explicativo sobre um conjunto de mais de cerca de 14 sequências, inclusive o caso dos números gregos figurais que podem ser descritos, de igual modo, por relações de recorrência. Assinalamos que, conseguimos identificar alguns casos de sequências numéricas em que, o Tabuleiro correspondente e, por conseguinte, algumas de suas propriedades combinatórias, não foram introduzidas e/ou descobertas por pesquisadores (Alves, 2022). Na coluna da direita fornecemos algumas informações sobre trabalhos recentes que empregam a noção de Tabuleiro visando extrair propriedades combinatórias de sequências numéricas recorrentes.

Tabla 1: Exemplo de um conjunto de aproximadamente onze sequências numéricas recorrentes e sua regra de recorrência. Elaborado pelo autor.

<i>Sequência recorrente de 2ª e 3ª ordem, etc</i>	<i>Relação de recorrência</i>	<i>Tabuleiros, propriedades e dimensão</i>
Sequência de fibonacci, tribonacci, tetranacci, pentanacci, etc.	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$ $F_0 = 0, F_1 = 1.$	$1 \times n$ e $2 \times n$ no trabalho de Benjamin & Quinn (2003a)
Sequência de Lucas	$L_{n+1} = L_n + L_{n-1},$ $L_0 = 1, L_1 = 3.$	Tabuleiro circular no trabalho de Benjamin & Quinn (2003b)
Sequência de Pell, Tri-Pell, Tetra-Pell, etc.	$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1},$ $P_0 = 0, P_1 = 1.$	Koshy (2018)
Sequência de Jacobsthal	$J_{n+1} = J_n + 2J_{n-1},$ $J_0 = 0, J_1 = 1.$	Koshy (2018)
Sequência de Padovan, Tridovan, Tetravan, Pentavan, etc.	$C_{n+1} = C_{n-1} + C_{n-2},$ $C_0 = 1, C_1 = 0.$	Vieira (2020, 2024) y Vieira & Alves (2019)
Sequência de Perrin, Triperrin, Tetraparran, Pentaran, Hexarran, etc.	$Q_{n+1} = Q_{n-1} + Q_{n-2},$ $Q_0 = 3, Q_1 = 0.$	Vieira (2020, 2024)
Sequência de Narayanna	$N_{n+1} = N_n + N_{n-2},$ $N_0 = 1, N_1 = 1.$	Não identificado na literatura
Sequência de Oresme	$O_{n+2} = O_{n+1} - (1/4)O_n,$ $O_0 = 0, O_1 = 1/2.$	Não identificado na literatura
Sequência de Mersenne	$M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n,$ $M_0 = 0, M_1 = 1$	Não identificado na literatura
Sequência de Leonardo	$Le_{n+1} = 2Le_n - Le_{n-2},$ $Le_0 = 1, Le_1 = 1.$	Não identificado na literatura
Sequência dos números telefônicos	$T_n = T_{n-1} + (n-1)T_{n-2},$ $T_0 = 1, T_1 = 1.$	Não identificado na literatura
Sequência de Ernst	$E_n = E_{n-1} + 2E_{n-2} + 1,$ $E_0 = 0, E_1 = 1, n \geq 2.$	Não identificado na literatura
Sequência de Francois	$IF_n = IF_{n-1} + IF_{n-2} + 1,$ $IF_0 = 2, IF_1 = 1.$	Não identificado na literatura
Sequência dos números figurais gregos n - dimensionais	$T_n = T_{n+1} + n$ $Q_{n+1} = Q_n + 2n + 1$ $Pent_{n+1} = Pent_n + 3n + 1$	Não identificado na literatura

3. Sobre a sequência numérica recursiva de François e Tabuleiro hexagonal

Na presente seção abordaremos algumas propriedades de uma sequência numérica recorrente há pouco introduzida pelos pesquisadores Diskaya et al. (2023). A seguir, destacamos a principal definição matemática que descreve o comportamento recursivo da sequência nominada a seguir.




Definição 1

A sequência de Francois $\{IF_n\}$ é definida pela seguinte relação de recorrência $IF_n = IF_{n-1} + IF_{n+2} + 1$, $IF_0 = 2$, $IF_1 = 1$ com $n \geq 0$ (Diskaya et al., 2023).

Facilmente, os primeiros termos desta sequência são indicados por 2, 1, 4, 6, 11, 18, 30, 49, 80, 130, 211, ... Para efeito sistemático, ainda indicamos a Tabela 2 a seguir, alguns valores correspondentes aos índices inteiros negativos (ver Tabela 2).

Tabela 2: Descrição de alguns elementos da sequência de François com índices inteiros positivos $\{IF_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e negativos $\{IF_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Elaborado pelo autor.

\dots	IF_{-4}	IF_{-3}	IF_{-2}	IF_{-1}	IF_0	IF_1	IF_2	IF_3	\dots
\dots	8	-6	3	-2	2	1	4	6	11

Na etapa seguinte, passaremos a escolher um conjunto de ladrilhos que, na figura 5, indicamos ao lado direito, a saber: um quadrado amarelo , um retângulo (dominós) laranja horizontal , um retângulo (dominós) laranja inclinado à direita . As células hexagonais ficam enumeradas, com a indicação de sua ordem crescente, correspondente, da esquerda para a direita no Tabuleiro que indicamos na figura 5. Ademais, certas operações com ladrilhos podem ser consultadas em Graham et al. (1995).

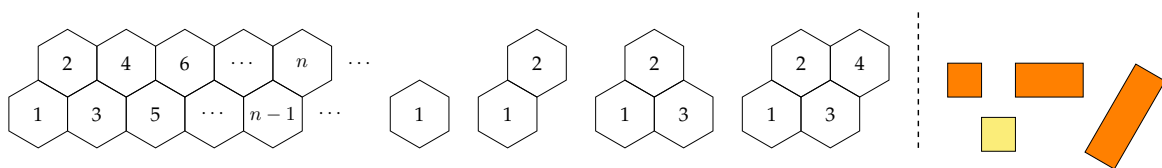














Figura 5: Descrição do Tabuleiro hexagonal e os ladrilhos correspondentes. Elaboração do autor.

Em seguida, consideraremos as seguintes regras $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4, \mathcal{R}_5\}$:

- \mathcal{R}_1) Não podem ocorrer ladrilhos com dois ou mais dominós  ou , isto é, com dois ou mais dominós deve ocorrer pelo menos um quadrado laranja .
- \mathcal{R}_2) Os ladrilhos laranjas  sempre ocupam posição e células de maior ordem do que os quadrados amarelos , isto é, não podem ocorrer quadrados ocupando células de maior ordem do que ladrilhos laranja e os ladrilhos laranja ficam sempre à direita dos amarelos.
- \mathcal{R}_3) Em ladrilhos com quadrados amarelos  podem ocorrer apenas um único dominó (horizontal ou inclinado). Não podem ocorrer ladrilhos apenas com quadrados amarelos  e dominós.

- \mathcal{R}_4) Não podem ocorrer ladrilhos apenas com dois dominós laranja  ou com dois dominós laranja inclinados  ocupando células de ordem $(n-3, n-2, n-1, n)$.
- \mathcal{R}_5) Ladrilhos que encerram com quadrados amarelos , com uma quantidade de células maior do que ou igual a 2, não podem comparecer os demais ladrilhos.

Vamos definir o termo f_n que representa a quantidade de ladrilhos que conseguimos formar, em um Tabuleiro hexagonal, considerando o conjunto de regras $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4, \mathcal{R}_5\}$. Na figura 6 exibimos os casos preliminares que indicamos por $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Reparemos que, no caso $n = 0$ e, diante da inexistência de Tabuleiro e células hexagonais, vamos atribuir e definir que $IF_0 = 2 = f_0$. No caso $n = 1$ tendo em vista a regra \mathcal{R}_5 , como estamos no caso de um Tabuleiro com uma única célula, o mesmo não poderá ser preenchido somente com um quadrado amarelo. Assim, teremos a seguinte correspondência $IF_1 = 1 = f_1$.

No caso $n = 2$, não ocorrem possibilidades com dominós horizontais e desconsideramos, por exemplo, ladrilho da forma  (regra \mathcal{R}_2) e constatamos que $IF_2 = 4 = 1 + 2 + 1 = f_2$. Logo em seguida, quando consideramos o caso $n = 3$. Facilmente, conseguimos identificar uma quantidade total de 4 ladrilhos, desconsiderando ladrilhos da forma , tendo em vista a regra \mathcal{R}_2 . Mais uma vez, estabelecemos a correspondência $IF_3 = 6 = 1 + 5 = 4 + 1 + 1 = IF_2 + IF_1 + 1 = f_3$. Para exemplificar, ao lado direito, indicamos alguns ladrilhos desconsiderados, tendo em vista com às regras $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4, \mathcal{R}_5\}$.

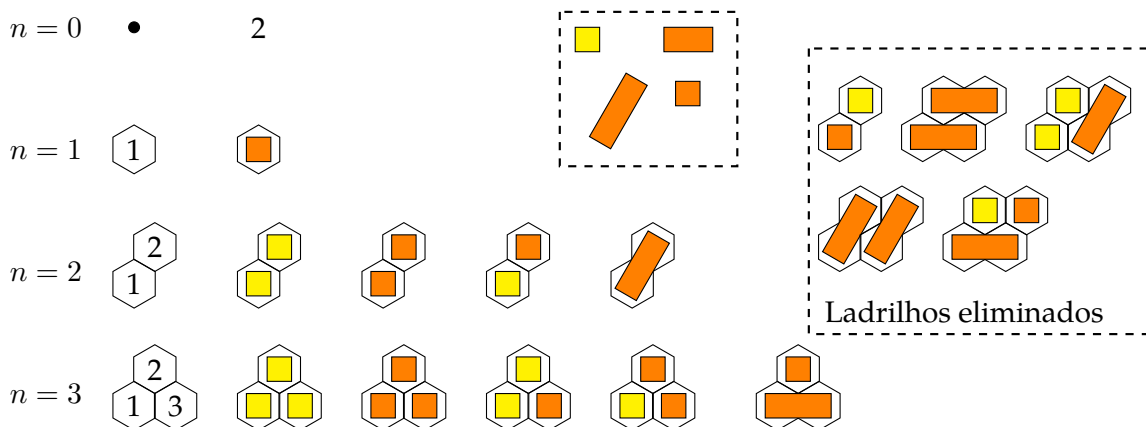




Figura 6: Descrição do comportamento dos ladrilhos segundo os casos $n = 0, 1, 2, 3$.
Elaboração do autor.

Vamos considerar agora o caso $n = 4$. Na linha superior, considerando a figura 7, conseguimos divisar uma quantidade precisa de 11 ladrilhos. Poderemos inferir, do ponto de vista numérico e verificação de contagem, que vale $IF_4 = 11 = f_4$. Ademais, na linha inferior, separamos três grupos de ladrilhos. O primeiro, em conformidade com a regra \mathcal{R}_5 , com um único ladrilho apenas e com quadrados amarelos. No grupo intermediário, considerando $n = 4$, os ladrilhos que possuem retângulos nas células de maior ordem, lembrando que dois dominós  não podem ocorrer juntos. Por fim, no grupo ao lado direito, separamos exatamente 6 ladrilhos que possuem, na célula de maior ordem, um quadrado laranja . Por conseguinte, estabelecemos a relação numérica indicada por $IF_4 = 11 = 1 + 4 + 6 = IF_3 + IF_2 + 1 = f_3 + f_2 + 1 = f_4$.

Reparemos que podemos continuar empregando, na construção dos ladrilhamentos, o conjunto das regras $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4, \mathcal{R}_5\}$, todavia, poderemos constatar que tais regras não se mostram suficientes e consistentes nos casos $n = 5, 6, 7$. Em todo caso, a partir dos casos anteriores, poderemos formular a seguinte conjectura 1.

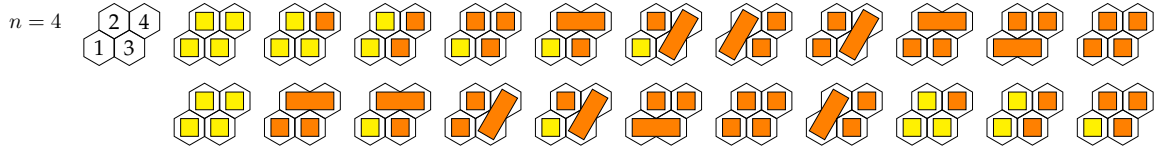






Figura 7: Descrição do comportamento dos ladrilhos segundo o caso $n = 4$. Elaboração do autor.

Conjectura 1.

Seja f_n a quantidade de ladrilhos que se podem formar sobre um tabuleiro hexagonal enumerado, segundo a figura 5, considerando-se unicamente as configurações válidas de ladrilhamentos definidas pelas regras $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4, \mathcal{R}_5\}$. Seja IF_n o n -ésimo termo da sequência de François, então vale a relação $IF_n = f_n$, para os valores inteiros $n = 1, 2, 3, 4$.

Verificação: Podemos reparar que, quando tomamos arbitrariamente um índice inteiro e não negativo $n \geq 0$, começamos a introduzir um ladrilho na célula de ordem n na parte superior do Tabuleiro, como exemplificamos na figura abaixo. Considerando a regra \mathcal{R}_5 , quando na célula de maior ordem ocorrer um  então, todo o ladrilho será preenchido com quadrados amarelos, o que resulta na contribuição $+1$. Ao lado direito, para exemplificar, em virtude da regra \mathcal{R}_4 . Em seguida, iremos considerar dois casos: a) Casos em que, na célula de ordem ' n ', inserimos um ladrilho ; b) Casos em que, nas células de ordem n e na posição $(n, n - 1)$, inserimos um dominó  ou um dominó inclinado .

No caso (a), quando fixamos um quadrado na célula de ordem ' n ', constatamos que as células de ordem inferior podem receber as demais peças, isto é, teremos uma quantidade total de f_{n-1} . No caso (b), observamos que, $(n, n - 1)$ podemos inserir um dominó inclinado ou na posição $(n, n - 2)$ um dominó horizontal. Para ambos os casos, passamos a constar a inserção de novos ladrilhos a partir da posição $n - 2$, isto é, teremos uma quantidade total de f_{n-2} . Finalmente, considerando todas as contribuições, passaremos a considerar um total de $f_n = (1 + f_{n-1} + f_{n-2})$. Ademais, ao considerarmos os valores numéricos iniciais indicados por $f_0 = 2 = IF_0$, $f_1 = 1 = IF_1$ poderemos concluir que teremos ainda que $f_n = (1 + f_{n-1} + f_{n-2}) = 1 + IF_{n-1} + IF_{n-2} = IF_n, \forall n \geq 0$.

Na figura 8 separamos os casos examinados e que indicamos por a) e b). Por intermédio dessa verificação, conseguimos imprimir maior certeza sobre a principal propriedade indicada na conjectura anterior, isto é, que ocorre a igualdade $IF_n = f_n$, para todo inteiro $n \geq 0$, em que $\{IF_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é o n -ésimo termo da sequência de François.

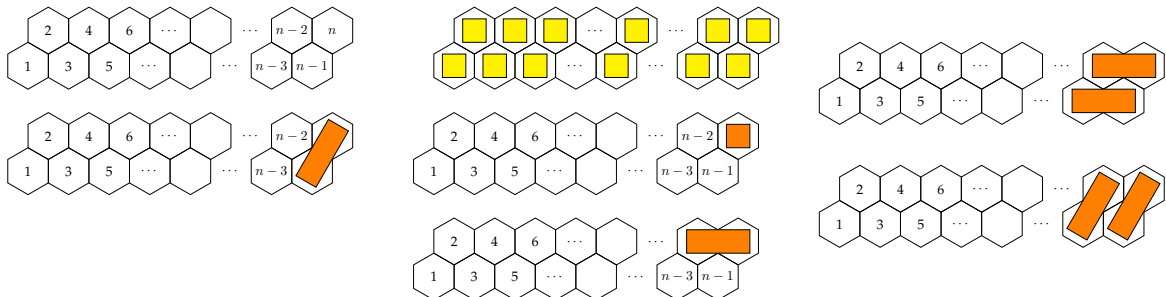


Figura 8: Casos considerados na verificação da conjectura relacionada com propriedades de recorrência da sequência de François segundos os casos a) e b). Elaboração do autor.

Como mencionamos anteriormente, prosseguindo com a aplicação do conjunto das regras $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4, \mathcal{R}_5\}$, constataremos que tais regras não se mostram suficientes nos casos $n = 5, 6, 7$ e que não se mostram consistentes. Nesses termos, se mostra necessário uma alternativa de abordagem para a contagem do conjunto $\{IF_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Para tanto, mostraremos que por intermédio da sequência de

Fibonacci e certas identidades, podemos resolver o problema e visualizar os respectivos ladrilhamentos relacionados com o conjunto $\{IF_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Tabuleiro de François a partir da sequência de Fibonacci e de Lucas

Semelhantemente ao modelo de verificação de validade de uma propriedade matemática, segundo exposto por Brousseau (1997). Certamente que, para o leitor de maior interesse, sugerimos consultar outras propriedades da sequência de François diretamente no trabalho de Diskaya et al. (2023). Antes de finalizarmos a seção atual, se mostra imprescindível assinalar que o conjunto de argumentações anteriores dizem respeito, somente, a uma conjectura e que, embora o conjunto de regras formuladas $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4, \mathcal{R}_5\}$ podem não funcionar em todos os casos.

Por outro lado, ao consultarmos o trabalho de Diskaya et al. (2023), deparamos o teorema 1. De modo simplificado, quando buscamos estabelecer uma correspondência bijetiva entre os elementos do conjunto $\{IF_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com amparo do teorema 1, necessitamos realizar uma contagem dos elementos dos conjuntos $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que refere-se ao números determinados pela sequência de Lucas. Bem como uma contagem dos elementos dos conjuntos $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Todavia, enquanto o comportamento das propriedades relacionadas com Fibonacci seguem um modelo clássico de Tabuleiro $1 \times n$, no caso da sequência de Lucas, se mostra necessário lidar com um Tabuleiro circular (Benjamin & Quinn, 2003b). Desse modo, tal problema precisa ser contornado, na medida em que buscaremos explorar apenas um Tabuleiro linear, evitando o caso do Tabuleiro circular!

Teorema 1

Para todo índice inteiro $n \geq 0$, e válida a seguinte relação $IF_n = L_n + F_{n+1} - 1, n \geq 0$.

Demonstração: Sugerimos ao leitor consultar detalhes no trabalho de Diskaya et al. (2023).

Por outro lado, quando consultamos o trabalho de Martinjak y Prodinger (2019) poderemos constatar uma outra relação ou identidade que permitirá realizar uma contagem dos ladrilhamentos relacionados com a sequência de Lucas a partir dos ladrilhamentos de Fibonacci. A vantagem de tal método, quando consultamos a figura 9, refere-se ao caráter de simplicidade e manipulação de ladrilhos lineares, do tipo quadrado e dominó.

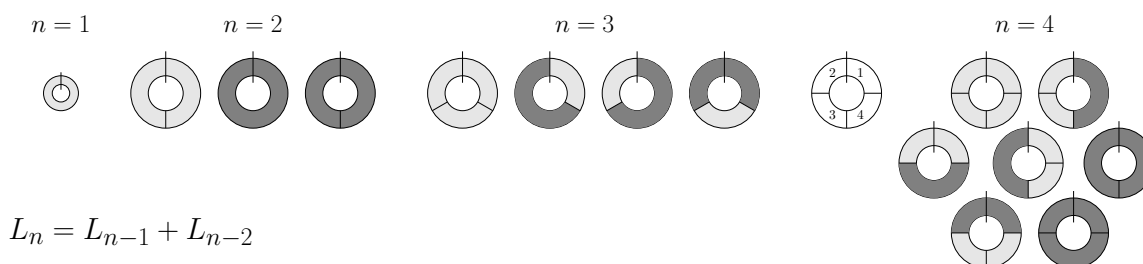


Figura 9: Descrição do Tabuleiro circular e ladrilhos segundo Benjamin y Quinn (2003b) relacionado com a sequência de Lucas, para os casos $n = 1, 2, 3, 4$.

Teorema 2

Para todo índice inteiro $n \geq 0$, e válida a seguinte relação $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$.

Demonstração: Sugerimos ao leitor consultar detalhes da verificação no trabalho de Martinjak y Prodinger (2019).

Por outro lado, considerando o teorema 2 e fixando o conjunto dos ladrilhos que, segundo Benjamin y Quinn (2003b), produzem relações imediata com a sequência de Fibonacci. Por outro lado, a partir das

relações indicadas no teorema 2, poderemos determinar o comportamento dos ladrilhamentos correspondentes, desconsiderando a interpretação que indicamos na figura 9, por intermédio de tabuleiro circular. Vamos fixar e/ou fazer corresponder, para certos índices particulares, uma correspondência envolvendo ladrilhos. Inicialmente, vamos acrescentar um quadrado azul, como indicamos na figura 10.

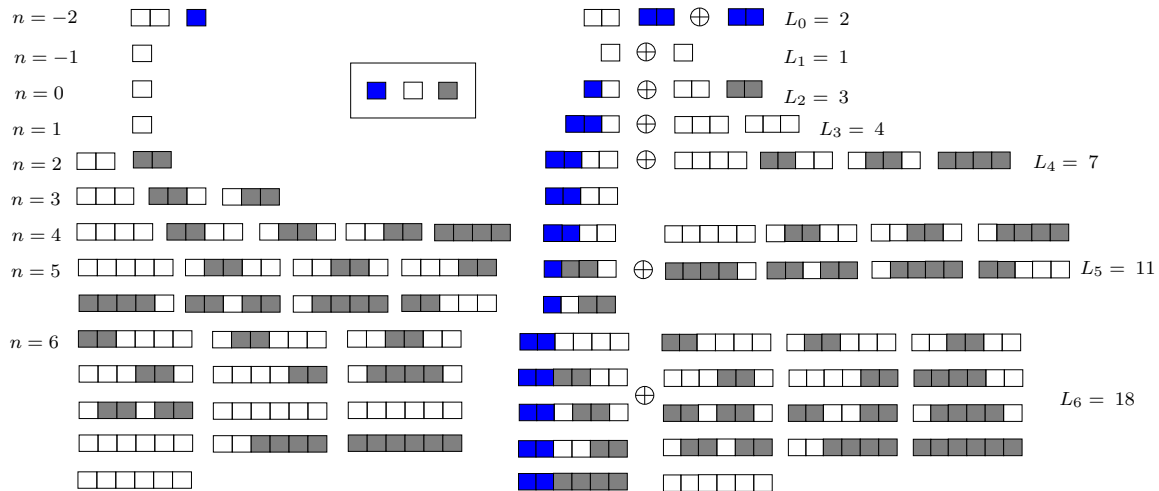


Figura 10: Descrição da sequência de Lucas via do Teorema 2. Elaboração do autor.

Nesses termos, para a determinação e descrição de uma composição de nosso interesse de ladrilhos, estabelecemos que, para $n = -2$ faremos corresponder ao ladrilhamentos que indicamos por $\square\square$ e $\blacksquare\square$. Assinalamos uma operação multiplicativa que permite interpretar o ladrilhamento $\blacksquare\square$ como o resultado da operação entre quadrado branco e quadrado azul. Em seguida, para determinar a quantidade $L_0 = 2$ consideramos a soma da quantidade de ladrilhamentos para os casos $n = -2$ e $n = 0$, cuja soma vale $L_0 = 1 + 1$, tendo em vista que, quando consultamos a figura, o ladrilhamento $\blacksquare\square$ se repete!

Em seguida, para determinar que $L_1 = 1$, quando consultamos a figura, ao lado esquerdo, para os casos $n = -1$ e $n = 1$ que correspondem ao ladrilhamentos que determinamos no caso de Fibonacci, verificamos que temos apenas quadrados brancos, cuja quantidade correspondente do conjunto será $L_1 = 1$. Mais uma vez, verificamos na figura 10, ao lado esquerdo, para determinarmos que $L_2 = 3 = 1 + 2$, torna necessário necessário realizar uma operação multiplicativa com o quadrado azul \blacksquare , produzindo o seguinte conjunto de ladrilhamentos: $\square\square, \blacksquare\square, \blacksquare\square$. Prosseguindo o mesmo raciocínio e argumento indutivo, considerando que, ora realizamos uma operação multiplicativa por um quadrado azul e, para os casos com índices pares, precisamos considerar $\blacksquare\blacksquare$. Vejamos, ainda, que no caso $L_3 = 4$, quando consultamos a figura, ao lado esquerdo, para os casos $n = 1$ e $n = 3$, contamos a quantidade correspondente de ladrilhamentos $L_3 = 4 = 1 + 3$ e, tendo em vista que todos os ladrilhamentos necessitam de mesmo comprimento, realizamos a operação com o quadrado azul para determinar o ladrilhamento $\blacksquare\blacksquare$. Desse modo, da figura 10, fornecemos uma interpretação do teorema 2 por intermédio de ladrilhamentos. Todavia, desde que nosso maior interesse envolve sequência de François, necessitaremos do corolário seguinte que decorre, de imediato, dos teoremas 1 e 2.

Corolário 1 Para todo índice inteiro $n \geq 0$, e válida a seguinte relação $IF_n = F_{n-1} + 2F_{n+1} - 1$, $n \geq 0$.

Demonstração: Considerando o teorema 1, para todo os elementos do conjunto $\{IF_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, podemos escrever a relação $IF_n = L_n + F_{n+1} - 1$, $n \geq 0$. Pelo teorema 2, substituiremos o seguinte termo $IF_n = L_n + F_{n+1} - 1 = (F_{n-1} + F_{n+1}) + F_{n+1} - 1 = F_{n-1} + 2F_{n+1} - 1$, para todo índice inteiro $n \geq 0$. ■

A partir do teorema 2 indicamos uma interpretação dos ladrilhamentos que correspondem com a identidade $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, diferentemente do que indicam Benjamin y Quinn (2003b), tendo em vista que não empregamos tabuleiros circulares. Em seguida, a partir do conjunto conhecido de ladrilhos que determinam propriedades que correspondem com a sequência de Fibonacci, determinaremos uma maneira de verificar os ladrilhamentos que correspondem ao conjunto $\{IF_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Finalmente, na figura 11, indicamos um Tabuleiro com dimensões $1 \times n$ e células enumeradas da esquerda para a direita. Ademais fixamos o conjunto de ladrilhos constituídos de um quadrado branco e um azul, um dominó cinza, um dominó preto. Em seguida, vamos definir o termo f_n que corresponde com a quantidade de ladrilhamentos que determinamos com o conjunto supramencionados de ladrilhos. Na figura 12 indicamos os dois conjuntos de ladrilhamentos determinados por um quadrado branco e um dominó cinza (ao lado esquerdo) e um quadrado branco e um dominó preto (ao lado direito).

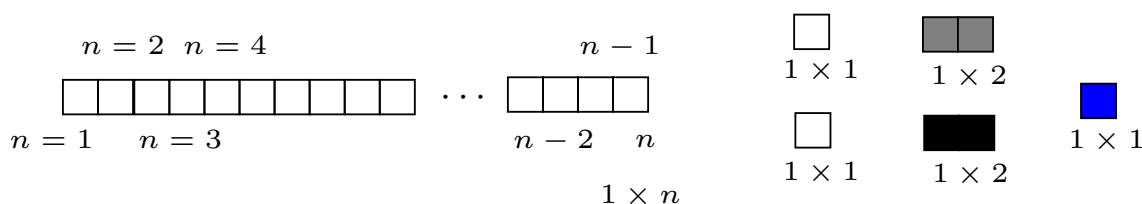


Figura 11: Descrição do Tabuleiro de François a partir do Tabuleiro de Fibonacci. Elaboração do autor.

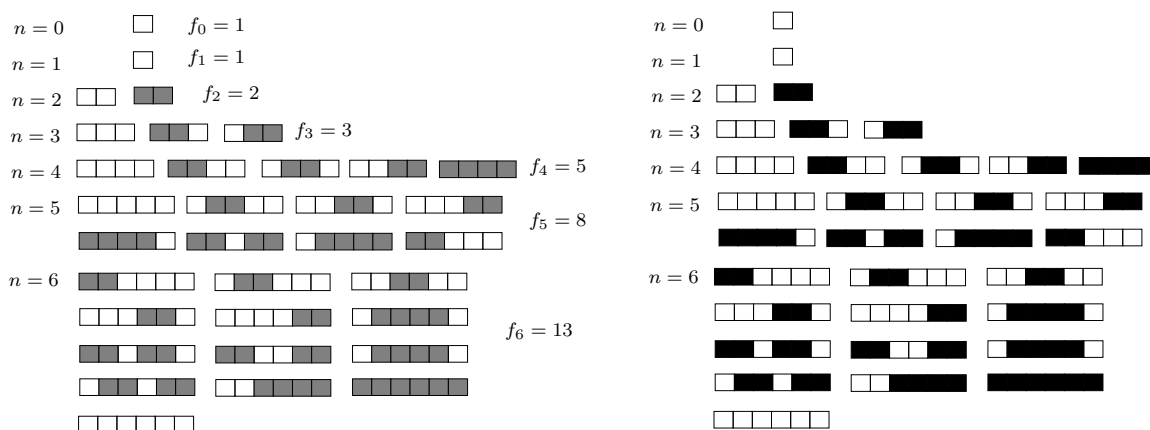


Figura 12: Comportamento dos ladrilhamentos mediante interpretação do termo $2F_{n+1} - 1$. Elaboração do autor.

Finalmente, a partir da identidade estabelecida no corolário 1, que foi indicada por $IF_n = F_{n-1} + 2F_{n+1} - 1$, poderemos descrever uma maneira indireta de contar e descrever os ladrilhamentos do Tabuleiro de François. Com efeito, vamos inicialmente considerar a expressão $2F_{n+1} - 1$ que, em termos dos ladrilhos relacionados com a sequência de Fibonacci, envolve dobrar a quantidade de ladrilhamentos e retirar uma unidade. Ora, ao lado esquerdo determinamos os casos $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, formados a partir de um quadrado branco e um dominó cinza. Ao lado direito, mais uma vez, determinamos os casos $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, formados a partir de um quadrado branco e um dominó preto. De modo trivial, quando consideramos, de modo aditivo, a soma de todos os ladrilhamentos, poderemos constatar que a única interseção ocorre com o quadrado branco presente em ambos os conjuntos. Dessa forma, vamos eliminar justamente os ladrilhamentos que se repetem e visualizamos tal operação (Graham et al., 1995) na figura 13.

Por fim, visando considerar e realizar a contagem dos termos correspondentes com a expressão $F_{n-1} + 2F_{n+1} - 1$, na figura 14. Observamos, porém, um ajuste no valor que correspondem ao índice $n = 0$, ao fixarmos os quadrados branco e azul, determinaremos a quantidade de ladrilhamentos correspondentes com $IF_0 = 2$.

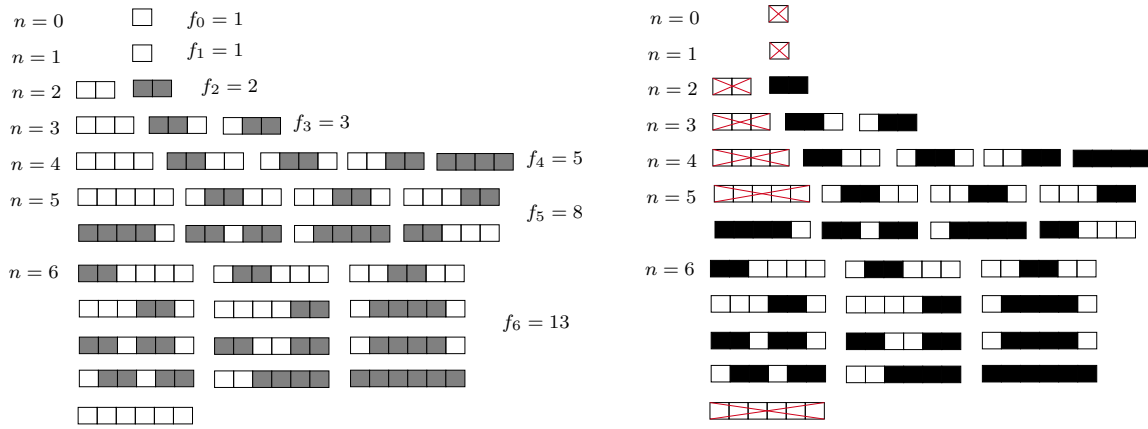


Figura 13: Descrição do Tabuleiro de François a partir do Tabuleiro de Fibonacci. Elaboração do autor.

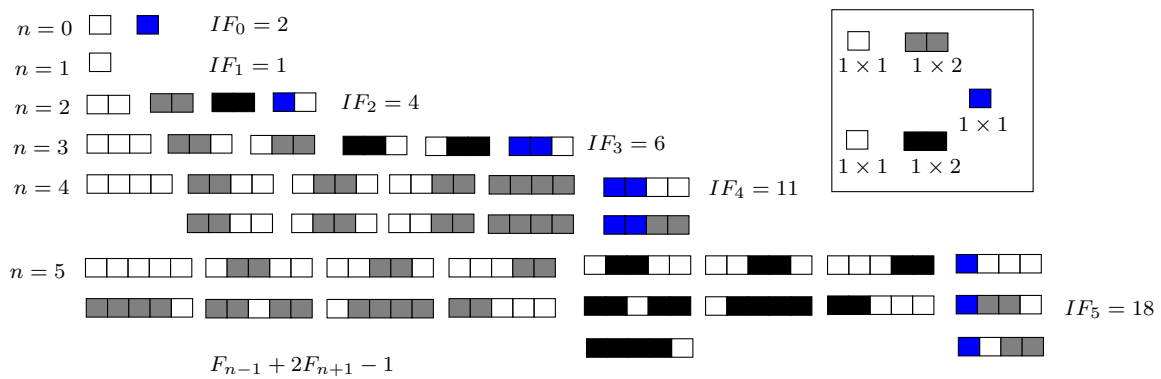


Figura 14: Descrição do Tabuleiro de François a partir do Tabuleiro de Fibonacci. Elaboração do autor.

Para o caso $n = 1$ fixamos apenas um quadrado branco, fazendo corresponder ao valor $IF_1 = 1$. Na etapa seguinte, passamos a empregar algumas operações com o quadrado azul. De fato, no caso $n = 2$, consideramos a quantidade $2F_2 - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ e acrescentamos os ladrilhos correspondentes ao caso $n = 0$ realizando apenas o produto por um quadrado branco.

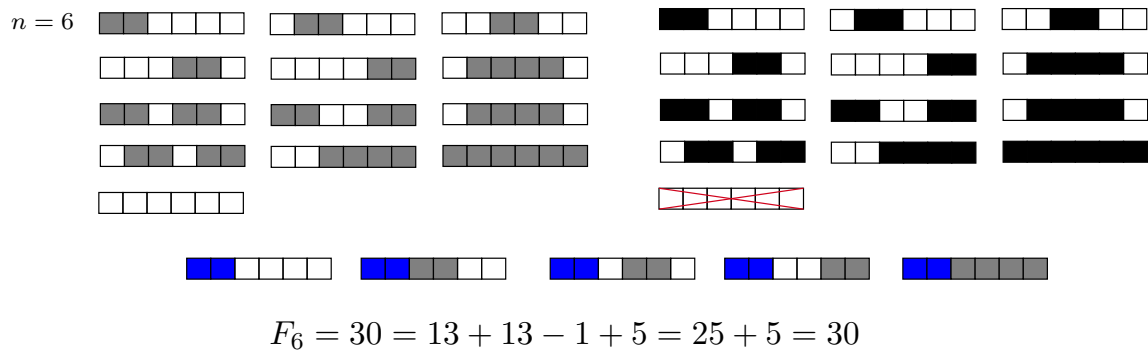


Figura 15: Descrição do Tabuleiro de François a partir do Tabuleiro de Fibonacci para o caso $n = 6$. Elaboração do autor.

Por fim, encontramos condições para estabelecer as regras para a determinação do Tabuleiro de François a partir do Tabuleiro de Fibonacci. Neste sentido, indicaremos o seguinte sistema de duas regras de composição de ladrilhamentos, fixados os ladrilhos indicados na figura 10: \mathcal{R}_1^{IF} - para todo inteiro $n \geq 0$, os ladrilhamentos se originam de um quadrado branco e um dominó cinza e um quadrado branco e um dominó preto, eliminando-se os ladrilhamentos repetidos a partir do quadrado branco; \mathcal{R}_1^{IF} - para todo inteiro $n \geq 0$, a quantidade de ladrilhamentos total determinada pela regra \mathcal{R}_1^{IF} será

adicionada ao conjunto de ladrilhamentos de ordem dada por $n - 2$, com operações de produto de ladrilhamentos envolvendo o quadrado azul.

5. Conclusiones

Nas seções predecessoras apresentamos uma nova proposta de Tabuleiro, a partir da adaptação de algumas ideias do trabalho que formula a seguinte relação de recorrência $IF_n = IF_{n-1} + IF_{n-2} + 1$, $IF_0 = 2$, $IF_1 = 1$ recentemente introduzida por Diskaya et al. (2023). Cabe assinalar, a partir de um cenário ampliado, uma pesquisa vigorosa, em diversos países (Bodeen et al., 2014), sobre propriedades combinatórias atinentes ao estudo de sequências numéricas, todavia, se apresenta restrito em um circuito limitado de pesquisa, com acesso amplo de especialistas. Isso posto, apresentamos algumas propriedades aritméticas preliminares que se amparam na visualização (ver figuras 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12), na inspeção visual e na intuição, fato que estimula uma apropriação significativa por parte do professor de Matemática.

Diante da proposição de um problema mais geral, que envolve o interesse de descrever propriedades combinatórias, via tabuleiro, para uma sequência numérica recorrente qualquer, para o caso da sequência de François, a despeito de uma formulação via Tabuleiro hexagonal, que se verifica apenas para alguns casos parciais e preliminares (casos $n = 1, 2, 3, 4$), se mostrou necessário, por intermédio dos teoremas 1 e 2, a utilização da seguinte identidade verificada no corolário 1, a saber: $IF_n = F_{n-1} + 2F_{n+1} - 1$, $n \geq 0$. De modo simplificado, quando consultamos as figuras 12, 13 e 14, podemos contar a quantidade de ladrilhamentos que correspondem aos números $\{IF_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a partir dos clássicos ladrilhos indicados por Benjamin y Quinn (2003b), isto é, apenas um quadrado e um dominós. Para tanto, com o exame das figuras 11, 12, 13 e 14 visualizamos uma maneira de contar e determinar o comportamento dos ladrilhamentos que descrevem correspondência com o seguinte conjunto $\{IF_n\}_{n \in \mathbb{N}} : 2, 1, 4, 6, 11, 18, 30, 49, 80, \dots$.

Quando examinamos o papel do professor de Matemática, se mostra imprescindível uma compreensão sobre uma cultura matemática que, quando amparada em uma perspectiva não estática e atualizada de História da Matemática (Alves, 2017, 2022), proporciona identificar inúmeros casos de objetos matemáticos que, a despeito de sua discussão restrita e superficial, nos compêndios de livros de História da Matemática (Huntley, 1970), encobrem um estádio contemporâneo de vigor da pesquisa e da evolução do saber matemático.

Finalmente, tendo em vista a constatação de uma profusão de trabalhos recentes que confirmam o interesse pela pesquisa em torno de propriedades de sequências numéricas recorrentes e sua representação via Tabuleiro, a apresentação da conjectura matemática que, de modo standard em Matemática Pura, se mostra passível de ser confirmada ou refutada, entretanto, desempenha papel imprescindível e necessário para investigação.

Agradecimientos: Agradecemos o apoio e suporte financeiro concedido no Brasil pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, correspondente ao Processo Nº 305495/2022-4.

Contribución de las personas autoras: Não se aplica.

Accesibilidad de datos: Não se aplica.

Referencias

- Alves, F. R. V. (2017). Fórmula de De Moivre, ou de Binet ou de Lamé: Demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de Fibonacci – SGF. *Revista de História da Matemática*, 17(33), 1-16. <https://doi.org/10.47976/RBHM2017v17n3301-16>
- Alves, F. R. V. (2022). Didactic Engineering (DE) and Professional Didactics (PD): A Proposal for Historical Eesearch in Brazil on Recurring Number Sequences. *The Mathematical Enthusiast*, 19(2), 239-274. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1551>
- Alves, F. R. V., & Catarino, P. M. M. C. (2022). A sequência de Padovan ou Coordonier. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 44(23), 1-20. <https://doi.org/10.47976/RBHM2022v22n4521-43>
- Alves, F. R. V., Catarino, P. M. M. C., & Aires, A. P. F. (2023). Análise preliminar e a priori: O caso dos tabuleiros hexagonais e a sequência Tetranacci. *Revista Paradigma*, 45(1), 1-22. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024008.id1337>
- Alves, F. R. V., Vieira, R. P. M., Catarino, P. M. M. C., & Spreafico, E. V. P. (2023). Abordagem combinatória para a sequência Fibonacci, Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci, ... etc. e a noção de tabuleiro. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 23(3), 1-21. <https://doi.org/10.21167/cqdv23n1ic2023182204>
- Benjamin, A. T., Plott, S. S., & Sellers, J. A. (2008). Tiling Proofs of Recent Sum Identities Involving Pell Numbers. *Annals of Combinatorics*, 12, 271-278. <https://doi.org/10.1007/s00026-008-0350-5>
- Benjamin, A. T., & Quinn, J. J. (1999). Recounting Fibonacci and Lucas Identities. *The College Mathematics Journal*, 30(5), 359-366. <https://doi.org/10.1080/07468342.1999.11974086>
- Benjamin, A. T., & Quinn, J. J. (2003a). The Fibonacci Numbers—Exposed More Discretely. *Mathematics Magazine*, 76(3), 182-192. <https://doi.org/10.1080/0025570X.2003.11953177>
- Benjamin, A. T., & Quinn, J. J. (2003b). *Proofs That Really Count: The art of combinatorial proof*. American Mathematical Society.
- Bodeen, J. S., Butler, T., Kim, X., & Wang, S. (2014). Tiling a strip with triangles. *Electronic Journal of Combinatorics*, 21(1). <https://doi.org/https://doi.org/10.37236/3478>
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer.
- Diskaya, O., Menken, H., & Catarino, P. M. (2023). On the hyperbolic Leonardo and hyperbolic François quaternions. *Journal of New Theory*, 42(3), 74-85. <https://doi.org/10.53570/jnt.1199465>
- Došlić, T., & Podrug, L. (2022a). Identities for full-history Horadam sequences. *arXiv*, 3(2), 1-13. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.06734>
- Došlić, T., & Podrug, L. (2022b). Tilings of a honeycomb strip and higher order Fibonacci. *arXiv*, 1-22. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.11761>
- Eren, O., & Soykan, Y. (2023). Gaussian generalized Woodall numbers. *Archives of Current Research International*, 23(8), 48-68. <https://doi.org/10.9734/ACRI/2023/v23i8611>
- Graham, R., Patashnik, O., & Knuth, D. E. (1995). *Concrete mathematics: A foundation for computer science*. Addison Wesley Pubb.

- Huntley, H. E. (1970). *The divine proportion*. Dover Publications.
- Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. Wiley.
- Koshy, T. (2018). *Fibonacci and Lucas numbers with applications* (Vol. 1). Wiley.
- Koshy, T. (2019). *Fibonacci and Lucas numbers with applications* (Vol. 2). Wiley.
- Koshy, T. (2014). Pell and Pell–Lucas Numbers. En *Pell and Pell–Lucas Numbers with Applications*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8489-9_7
- Martinjak, I., & Prodinger, H. (2019). Complementary families of the Fibonacci–Lucas relations. *Integers*, 19(2), 1-10. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1508.04949>
- Soykan, Y. (2023a). Generalized Adrien numbers. *Applied Mathematics and Computer Science*, 7(1), 37-51. <http://operator.pmf.ni.ac.rs/amcs/volumes/2023/AMCS-2023-7-1-4.pdf>
- Soykan, Y. (2023b). Generalized Richard numbers. *International Journal of Advanced Applied Mathematics and Mechanics*, 10(3), 38-51. http://www.ijaamm.com/uploads/2/1/4/8/21481830/v11n1p4_42-65.pdf
- Vieira, R. P. M. (2020). *Engenharia didática (ED): O caso da generalização e complexificação da sequência de Coordonier ou Padovan* [Tesis doctoral, Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Estado do Ceará].
- Vieira, R. P. M. (2024). *Investigação da complexificação, generalização e modelo combinatório dos números de Padovan e Perrin com a engenharia didática* [Tesis doctoral, Programa de Pós-graduação em Rede Nordeste de Ensino]. <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/79528>
- Vieira, R. P. M., & Alves, F. R. V. (2019). Sequences of tridovan and their identities. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 25(1), 185-197. <https://doi.org/10.7546/nntdm.2019.25.3.185-197>
- Ziqian, A. J. (2019). Tetranacci identities with squares, dominoes, and hexagonal double-strips. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1907.09935>
- Ziqian, A. J., & Dresden, G. (2019). Tetranacci identities via hexagonal tilings. *The Fibonacci Quart*, 43(3), 1-5. <https://dresden.academic.wlu.edu/files/2021/02/TetraaWebsite.pdf>