



Análisis de errores algebraicos que manifiestan docentes en formación de la carrera de Enseñanza de la Matemática en la Universidad Nacional de Costa Rica

| Analysis of algebraic errors displayed by mathematics teacher trainees in the mathematics education program at the National University of Costa Rica |
| Análise de erros algébricos manifestados por docentes em formação no curso de Ensino da Matemática na Universidade Nacional da Costa Rica |

Emanuelle Parra Rodríguez¹
emaparra@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Cartago, Costa Rica

Marianela Alpízar Vargas²
marianela.alpizar.vargas@una.ac.cr
Universidad Nacional de Costa Rica
Heredia, Costa Rica

Miguel Picado Alfaro³
miguel.picado.alfaro@una.cr
Universidad Nacional de Costa Rica
Heredia, Costa Rica

Recibido: 10 de marzo de 2024

Aceptado: 20 de marzo de 2025

Resumen: En este estudio se presentan resultados provenientes de un análisis cualitativo donde se describen y clasifican errores algebraicos que cometen estudiantes en formación inicial en enseñanza de la matemática cuando ingresan al curso MAC400 Matemática fundamental de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica, en un test diagnóstico. Se seleccionó una muestra de 24 estudiantes informantes extraída de tres grupos. Los contenidos de la prueba corresponden al álgebra básica, que constituye el área de enfoque del curso. El estudio reveló que los estudiantes ingresan con deficiencias sobre conocimientos algebraicos básicos, donde destacan errores asociados con el desarrollo de algoritmos o reglas inválidas para efectuar sumas y productos entre polinomios, que acarrean en otro tipo de operaciones con expresiones algebraicas.

Palabras Clave: errores algebraicos, educación matemática, docentes en formación, álgebra básica, dificultades en la comprensión.

¹Emanuelle Parra Rodríguez. Profesor en Instituto Tecnológico de Costa Rica. San Vicente de Moravia, Costa Rica. Código Postal: 11401. Correo electrónico: emaparra@itcr.ac.cr.

²Marianela Alpízar Vargas. Profesora en Universidad Nacional de Costa Rica. Heredia, Costa Rica. Código Postal: 40101. Correo electrónico: marianela.alpizar.vargas@una.ac.cr.

³Miguel Picado Alfaro. Profesor en Universidad Nacional de Costa Rica. Heredia, Costa Rica. Código Postal: 40101. Correo electrónico: miguel.picado.alfaro@una.cr.

Abstract: This study presents the results of a qualitative analysis describing and classifying algebraic errors made by pre-service mathematics teachers during their initial training when entering the MAC400 Fundamental Mathematics course in the Bachelor's and Licentiate Degree Program in Mathematics Teaching at the National University of Costa Rica, based on a diagnostic test. A sample of 24 informant students was selected from three groups. The test contents correspond to basic algebra, which is the focus area of the course. The study revealed that students enter the course with deficiencies in basic algebraic knowledge, particularly errors related to the development of invalid algorithms or rules for performing additions and multiplications of polynomials, which subsequently lead to errors in other operations with algebraic expressions.

Keywords: algebraic errors, mathematics education, pre-service teachers, basic algebra, comprehension difficulties.

Resumo: Neste estudo, são apresentados resultados provenientes de uma análise qualitativa na qual são descritos e classificados erros algébricos cometidos por estudantes em formação inicial em ensino da matemática ao ingressarem na disciplina MAC400 Matemática Fundamental da carreira de Bacharelado e Licenciatura em Ensino da Matemática da Universidade Nacional da Costa Rica, em um teste diagnóstico. Foi selecionada uma amostra de 24 estudantes informantes extraída de três grupos. Os conteúdos da prova correspondem à álgebra básica, que constitui a área de enfoque do curso. O estudo revelou que os estudantes ingressam com deficiências nos conhecimentos algébricos básicos, destacando-se erros associados ao desenvolvimento de algoritmos ou regras inválidas para realizar somas e produtos entre polinômios, o que afeta outros tipos de operações com expressões algébricas.

Palavras-chave: erros algébricos, educação matemática, docentes em formação, álgebra básica, dificuldades na compreensão.

1. Introducción

Los errores en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática se presentan de forma natural, se pueden concebir como una fuente de aprendizaje y una herramienta para generar esquemas correctivos, los cuales promueven la autorregulación del estudiantado. En este sentido Sucas (2011) afirma que, en el campo de la Educación Matemática, el estudio de errores está dirigido a resultados cualitativos y cuantitativos, donde se distinguen esquemas teóricos que permiten describir e interpretar los errores en matemática, a partir de los cuales se generan herramientas y acciones que permiten al estudiante reconstruir su saber, ante distintas situaciones de aprendizaje.

Mejía (2004) considera que es imprescindible realizar procesos de diagnóstico y análisis de las dificultades que se observan en las producciones de los estudiantes desde etapas muy tempranas. Uno de los componentes clave en este análisis es el error observable que el estudiantado manifiesta durante su proceso de aprendizaje. En algunos casos, estos errores están vinculados con la formación previa del estudiante.

En el marco de la formación de docentes de matemáticas, recientes estudios enfatizan la necesidad de prestar atención a la formación universitaria de docentes que tendrán a cargo la formación matemática del estudiantado a nivel de educación secundaria (Cruz et al., 2020; Araneda y Uribe, 2020).

Olmedo et al. (2015) y Godino y Font (2003) sostienen que, durante la formación inicial, un docente de matemáticas enfrenta la resolución de tareas que requieren habilidades y aptitudes para comprender, interpretar y manipular ciertos fenómenos algebraicos. Estas tareas exigen justificaciones, validaciones y argumentaciones rigurosas de las producciones matemáticas, lo cual hace “natural” la aparición de errores en esta área. El error, por tanto, puede abordarse como una oportunidad de aprendizaje, ya que su identificación y estudio, desde cualquier perspectiva, contribuyen al proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en cualquier nivel de instrucción (Aguerrea et al., 2022).

Desde este marco, es fundamental identificar concepciones erróneas o imprecisas y fomentar la auto-reflexión sobre los errores cometidos en las tareas matemáticas resueltas por docentes en formación. Esto brinda a futuras personas educadoras la oportunidad de desarrollar herramientas cognitivas que les permitan promover en sus estudiantes la autorregulación en el aprendizaje y la formulación de estrategias con esquemas correctivos. Así, se pueden contrastar concepciones erróneas con aquellas correctas, promoviendo una reestructuración adecuada de los conocimientos previos. Según Godino y Font (2003), el conocimiento matemático de una persona docente está interrelacionado con el desarrollo de actitudes y habilidades que le permitan comprender, interpretar, corregir y orientar situaciones de error en cada área de la matemática, beneficiando así el proceso de aprendizaje del estudiantado.

Para un docente de matemática en formación inicial los errores pueden ser obstáculos para el desarrollo de su conocimiento matemático. Por ello, es necesario realizar acciones explícitas en su formación, atendiendo tempranamente las dificultades propias del alumnado al ingresar a la carrera de formación docente en matemática (Aguerrea et al., 2022).

En la Universidad Nacional (UNA) de Costa Rica, el plan de estudios de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática (BLEM), ofrecido por la Escuela de Matemática desde el 2017 y vigente en la actualidad, incluye la asignatura MAC400-Matemática Fundamental en el primer semestre del primer año (Escuela de Matemática, 2017). En dicho curso, se abordan conceptos básicos del álgebra desde un enfoque teórico-práctico, dirigidos al desarrollo de capacidades para la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos avanzados. Además, se posibilita la evaluación de los conocimientos que posee la persona docente en formación inicial en correspondencia con su formación previa, especialmente, al trabajar con el álgebra básica.

Dado el interés por analizar los errores manifestados por docentes en pre-servicio (se entenderá como personas docentes en su formación inicial) al iniciar un programa de formación profesional en enseñanza de la matemática, es que se elige el curso MAC400 para realizar este estudio, el cual tiene por objetivo diagnosticar y clasificar los errores algebraicos que presenta este profesorado de matemáticas, cuando resuelven tareas que involucran la simplificación de expresiones algebraicas. Es pertinente destacar que, el análisis expuesto en este artículo se origina a partir de un extracto de la investigación vinculada con la tesis para optar por el grado de licenciatura en Enseñanza de la Matemática elaborada por Parra (2021). Es importante aclarar que el enfoque que se busca con este estudio es el de diagnosticar y clasificar los errores que manifiesta esta población estudiantil, no el de analizar las causas de estos.

La Escuela de Matemática de la UNA para su primer nivel de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática cuenta con tutorías impartidas por estudiante avanzados que ayudan al estudiantado que comienza en la carrera y que se encuentra matriculado en el curso MAC400, de modo que los resultados de esta investigación pueden ser un insumo importante en la planificación de estas tutorías, al conocer posibles dificultades y clasificaciones de errores comunes que manifiesta la población que ingresa a la carrera indicada.

Este artículo se organiza en varias secciones clave que abordan de manera integral el tema de los errores matemáticos en la formación inicial de docentes de matemática. Comienza con el marco teórico, que explora la formación de docentes, la concepción y clasificación del error matemático. A continuación, se presenta la metodología, detallando los participantes, los criterios para su selección, los métodos de recolección y análisis de la información. Luego se realiza la discusión de los resultados, la cual permite analizar los hallazgos obtenidos, seguida de las conclusiones que resumen los principales aprendizajes. Finalmente, el artículo incluye anexos con información complementaria y una sección de referencias bibliográficas.

2. Marco teórico

Este estudio se sustenta en las teorías del error y la formación de docentes en matemáticas. A continuación, se exponen algunos aspectos relevantes sobre estas teorías.

2.1. Formación inicial de docentes de matemática

En la formación inicial de docentes de matemática es vital el manejo de operaciones y conceptos algebraicos que se posea desde los primeros cursos de dicha formación. En esta etapa, los errores y dificultades se manifiestan en tareas que exigen un conocimiento básico sobre la sintaxis del lenguaje algebraico. Estas falencias tienen, según Olmedo et al. (2015), un carácter sistemático, que se origina en los hábitos de estudio y concepciones inadecuadas que se acarrean desde los niveles previos de escolarización, los cuales se asocian con creencias, actitudes y experiencias en torno a la matemática.

Aunado a lo anterior, el estudiantado enfrenta situaciones que exigen habilidades y aptitudes para comprender, interpretar y manipular ciertos fenómenos algebraicos, con el fin de completar su formación en matemática y en docencia. En este proceso, es necesaria la corrección de falencias y el desarrollo de procesos metacognitivos sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra básica. Con ello, se busca construir herramientas cognitivas que contribuyan con su futura labor como docente, donde se fomente la autorregulación del aprendizaje, la generación esquemas correctivos y la reestructuración de los esquemas previos erróneos, donde se conciba un error como una fuente de conocimiento (Godino y Font, 2003).

El curso MAC400 es una de las asignaturas del primer nivel del profesorado en formación inicial. En este, se abordan conceptos básicos del álgebra desde un enfoque teórico-práctico, orientado a homogeneizar los conocimientos de álgebra básica que se enseñan a nivel de educación secundaria. Entre los conocimientos que se desarrollan en los Programas de Estudio de Matemática del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP), vigentes al 2018, que se encuentran en correspondencia con el curso MAC400, destacan: operaciones con polinomios y productos notables, factorización de polinomios, operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias y ecuaciones de primer y segundo grado en una incógnita.

2.2. Concepción del error matemático

Los errores son considerados un componente fundamental del conocimiento científico. Kilpatrick et al. (1998), y Gandulfo et al. (2013), sostienen que los errores presentan una posibilidad permanente de generación y consolidación del conocimiento. Para estos autores, los errores son sinónimo de un saber distinto, no de una ausencia de saber y no dependen solo de la persona que los comete, sino que en su manifestación inciden otras variables como el entorno educativo, la persona encargada de la formación, el aspecto sociocultural, el currículo, las creencias, entre otros.

Para este estudio se adoptó la concepción de error matemático en congruencia con Abrate et al. (2006), y Gandulfo et al. (2013), quienes hacen referencia a este cuando la persona realiza alguna acción o argumenta de una manera que no es válida desde el punto de vista de la intuición matemática. Según estos autores, estos argumentos están vinculados con aquellos conocimientos que las personas han aprendido con cierto grado de inexactitud, preservando los criterios de ser intrínsecamente válidos y sólidos, pero equivocados.

2.3. Clasificación del error matemático

En la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, es crucial implementar procesos de detección de errores para describir e interpretar los procedimientos que presentan falencias, así como identificar las causas subyacentes de estos errores. El objetivo es desarrollar estrategias que ayuden a superar las dificultades que llevan a la persona a cometer dichos errores. En este contexto, las clasificaciones de errores matemáticos en el área de álgebra básica han cobrado gran relevancia. Numerosos investigadores han adaptado tipologías de errores que facilitan una clasificación integral, considerando el contexto educativo en el que se presentan.

Autores como Cervantes y Martínez (2007), García (2010) y Movshovitz-Hadar et al. (1987), han analizado los errores que el estudiantado comete en cursos de matemática, enmarcados en el área del álgebra básica o álgebra introductoria. A continuación, se presentan clasificaciones de errores que han propuesto estos especialistas, las cuales fueron utilizadas como sustento para la formulación de la clasificación con que se caracterizaron los errores en este estudio.

Movshovitz-Hadar et al. (1987) determinan una clasificación de errores algebraicos sintéticos que son generalizables a distintas áreas de la matemática. Estos se pueden extrapolar y orientar a diferentes niveles educativos. Estos autores identifican errores asociados a: (a) datos mal utilizados, (b) interpretación incorrecta del lenguaje, (c) inferencias no válidas lógicamente, (d) teoremas o definiciones deformados, (e) falta de verificación en la solución y (f) errores técnicos.

Por su parte, García (2010) plantea una clasificación enfocada en errores particulares del área de álgebra básica. Este autor plantea errores como: (a) errores al realizar operaciones aritméticas-algebraicas, (b) procedimiento inconcluso, (c) procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas, (d) aplicación parcial de regla de factorización por factor común, (e) asociación incorrecta de productos notables, (f) uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra, (g) error en la determinación de la potencia de otra potencia, (h) resolución aditiva de la potencia de un binomio, (i) error al realizar productos de polinomios y (j) error de cálculo simple.

Por último, se destaca la tipificación del error propuesta por Cervantes y Martínez (2007), quienes trabajan en un enfoque particular de errores que se presentan al realizar operaciones con polinomios, expresiones algebraicas fraccionarias; dichos errores no son extrapolables a otras áreas de la matemática. Los autores reconocen errores: (a) de linealización, (b) de extensión de la cancelación, (c) de extensión en el producto nulo, y (d) de truncamiento. Estos errores delimitan teóricamente el estudio en cuanto a la concepción del error matemático, y han sido la fuente primordial para la definición de las categorías de análisis en la fase metodológica.

Identificar y tratar los errores algebraicos es parte del progreso académico, donde se vuelve esencial el establecimiento de estrategias que aborden las dificultades subyacentes. Autores como Khasawneh et al. (2022) y Hoth et al. (2022) afirman que el análisis de los errores algebraicos puede tener un impacto positivo en la capacidad de razonamiento y comprensión de un concepto algebraico, en el estímulo para el pensamiento crítico y la evaluación del nivel de habilidad; con los insumos relacionados con el estudio de errores se puede adaptar la enseñanza a través de estrategias específicas que se convierten en herramientas fundamentales para formar un entendimiento sólido y duradero del álgebra.

3. Metodología

Este estudio se dirigió al diagnóstico y clasificación de los errores algebraicos que manifiestan docentes de matemática en formación inicial cuando simplifican expresiones algebraicas en el primer curso de matemáticas del plan de estudios de la carrera BLEM de la UNA. Para llevar a cabo este estudio se desarrollaron procesos de descripción y síntesis de las producciones del estudiantado al resolver

ejercicios de álgebra básica. La investigación se enmarca en el enfoque cualitativo; según Hernández et al. (2010), “la investigación cualitativa se enfoca a comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto” (p. 364). Bajo esta perspectiva, se busca la interpretación y descripción de lo que se capta activamente en un entorno natural (Hernández et al., 2010).

3.1. Participantes

Para el estudio se contó con una muestra de 24 estudiantes en formación inicial del profesorado de matemática, esta fue extraída de tres grupos del curso MAC400 Matemática Fundamental. Para el tratamiento de la información, a cada participante (denominado DP) se le identificó con el código DP01, DP02, etc.

3.1.1. Criterios para la selección de los participantes

La selección de los participantes estuvo respaldada por dos criterios particulares:

1. *Matrícula.* Se aseguraba la participación de estudiantes de primer ingreso matriculados en el curso MAC400, siempre que no hubieran cursado asignaturas a nivel universitario ni aquellas de programas equivalentes que incluyeran temas de álgebra básica. Esto se debía a que una persona que haya desertado o reprobado una asignatura similar podría presentar errores derivados de dicha experiencia.
2. *Prueba o test diagnóstico.* El grupo de personas estudiantes seleccionados en la muestra debían haber desarrollado la prueba o test diagnóstico aplicado al inicio del curso lectivo a toda la población de estudiantes matriculados en la asignatura. En esta, se solicitó información general sobre cada participante, con el fin de cumplir el criterio anterior. Los detalles sobre este instrumento se presentan en el apartado de recolección de la información.

3.2. Recolección de la información

Parte de la información tratada y analizada se recolectó mediante la aplicación de un test diagnóstico a la muestra de participantes descrita. El propósito de esta prueba seguía el objetivo del estudio, el cual busca el diagnóstico y la clasificación de los errores algebraicos con que ingresan las personas a la asignatura MAC400. Por ello, el test se administró previo al abordaje de los contenidos de álgebra básica en el curso.

Para la resolución del test, cada participante debía hacer las anotaciones correspondientes al desarrollo de cada ejercicio matemático en los espacios que se le brindaban en el folleto de la prueba y no podía hacer uso de una calculadora; el tiempo promedio de aplicación de la prueba fue de 30 minutos.

La prueba consistió en nueve ítems de desarrollo (ver composición en tabla 1, denotados con I1, I2, etc.), relacionados con operaciones básicas con polinomios y con expresiones algebraicas fraccionarias. Para su construcción, se tomaron en cuenta los objetivos curriculares y los contenidos del curso MAC400, así como los conocimientos incluidos en los Programas de Estudio de Matemática del MEP, lo que permitió establecer una correspondencia directa con los contenidos procedimentales de álgebra básica. Además, los ítems utilizados fueron una adaptación de la prueba aplicada por García (2010) para la detección de errores en álgebra básica, quien trabajó con estudiantes de primer ingreso del curso Matemáticas I de la Universidad de Guadalajara. Los contenidos de esta prueba, tanto a nivel conceptual como procedural, coincidían directamente con los abordados en el curso MAC400.

Tabla 1: Descripción de los ítems del test diagnóstico considerando los conocimientos y habilidades específicas de los Programas de Estudio de Matemáticas del MEP (2012), el curso MAC 400 y la prueba aplicada por García (2010). Elaboración propia.

Conocimiento	Habilidad específica	Ejercicios incluidos en el test
Operaciones con polinomios y productos notables	Sumar, restar y multiplicar polinomios. Utilizar productos notables para desarrollar expresiones algebraicas.	Efectúe la operación y simplifique al máximo los resultados (I1) $4xy(5x + 3y^3 - 3xy) + x^2y$ (I2) $(2x + 5)^2 - (1 - 3x)^2$ (I3) $16 + (z^2 + 4)(z^2 - 4) - z^2$
Factorización de polinomios	Factorizar y simplificar expresiones algebraicas.	Factorice al máximo (I6) $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$
Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias	Efectuar operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.	Efectúe las siguientes operaciones y simplifique al máximo. (I5) $\frac{2x + 6}{x^2 - 6x + 9} - \frac{5x}{x^2 - 9}$ (I7) $\frac{x^3 + 6x^2}{x^2 + 12x + 36}$ (I4) $\frac{a^2 + 6a - 55}{b^2 - 1} \div \frac{ab^2 + 11b^2}{ab - a}$
Ecuaciones de primer y segundo grado en una incógnita	Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolver ecuaciones que se reducen a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.	Determine el conjunto solución de cada ecuación (I8) $5(x - 1) + 2x = 6$ (I9) $3x(x - 2) - (x - 6) = 23(x - 3)$

Nota: Los ítems diseñados consideran los conocimientos y habilidades específicas de los Programas de Estudio de Matemáticas del MEP (2012) para los niveles de octavo, noveno, decimo y undécimo año; además, fueron adaptados de la prueba propuesta por García (2010) para la detección de errores en álgebra básica.

Cabe añadir que la prueba que diseño García (2010) fue validada mediante análisis de contenido del factor por evaluar y cuya confiabilidad se determinó mediante la prueba Alfa de Cronbach. Particularmente el análisis de contenido asegura que los ítems de la prueba representen adecuadamente el constructo que se desea medir, garantizando que cubran los aspectos relevantes del tema (Boydston, 2023). Por otro lado, el Alfa de Cronbach evalúa la consistencia interna de la prueba, calculando la correlación promedio entre los ítems. Un valor alto de Alfa de Cronbach indica que los ítems están bien relacionados y miden de manera coherente el mismo concepto (Zakariya, 2022).

Por otro lado, se identificaron las unidades temáticas, las cuales se define como las secciones del programa de un curso que agrupan conceptos y habilidades relacionados bajo un tema general, en este caso serían las unidades temáticas del curso MAC 400 que estaban involucradas en cada uno de los ítems del test, con el fin de analizar la frecuencia de errores presentes en cada una. Estas unidades temáticas corresponden a suma y resta de polinomios; producto entre polinomios; potenciación de polinomios, simplificación de una expresión algebraica fraccionaria; suma y resta de expresiones al-

gebraicas fraccionarias; división entre expresiones algebraicas fraccionarias; factorización de polinomios; ecuaciones polinomiales de primer grado; ecuaciones polinomiales de grado mayor o igual que dos; y aritmética básica.

3.3. Análisis de la información recolectada

La descripción y clasificación de los errores detectados en la prueba aplicada se organizó en tres fases. Primero, se identificaron los procedimientos erróneos en las resoluciones de los ítems del test, que corresponde a errores directamente observables del instrumento, sin llevar a cabo procesos de clasificación. Segundo, se clasificaron los primeros errores detectados en la prueba en correspondencia con las categorías de errores presentadas por Movshovitz-Hadar et al. (1987), Cervantes y Martínez (2007), y García (2010), para ello se identificó la categoría con mayor asociación para cada caso. Por último, se crearon las clases que conforman la clasificación general de los errores matemáticos, a partir de la síntesis de categorías que presentaban similitudes de falencias. Para describir las clases de errores que componen la clasificación generada se seleccionaron los casos más representativos, según la frecuencia con que se presentó el error en la prueba.

4. Discusión de los resultados

Para analizar la información se examinó el test diagnóstico resuelto por cada participante y se describió cada error identificado por ítem. En estas soluciones se distinguieron errores en la adición y el producto con polinomios; en la potenciación de polinomios, específicamente en el cálculo del cuadrado de un binomio; en la factorización de polinomios; en la simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias, donde destacan la suma, resta y división; y, al resolver ecuaciones de primero y segundo grado. En total, se detectaron 10 unidades temáticas en las que los estudiantes incurrieron en errores, que corresponden a E1: Suma y resta de polinomios, E2: Producto entre polinomios, E3: Potenciación de polinomios, E4: Simplificación de una expresión algebraica fraccionaria, E5: Suma y resta de expresiones algebraicas fraccionarias, E6: División entre expresiones algebraicas fraccionarias, E7: Factorización de polinomios, E8: Ecuaciones polinomiales de primer grado, E9: Ecuaciones polinomiales de grado mayor o igual que dos y E10: Aritmética básica. En la tabla 2 se presenta la frecuencia con que se identificaron errores en cada unidad temática por ítem del test diagnóstico. Cabe destacar que estos errores resultaron de las producciones desarrolladas por el profesorado en pre-servicio que conformó la muestra del estudio.

Entre los hallazgos más representativos, se observa que 22 de las 24 personas participantes que respondieron el ítem I2 cometieron errores, lo que lo convierte en el ítem con mayor incidencia de fallos. La mayoría de los errores (28 % del total detectado en este ítem) se relacionó con el cálculo incorrecto del cuadrado de un binomio, lo cual podría reflejar dificultades generalizadas en la comprensión y aplicación de esta propiedad algebraica fundamental.

En segundo lugar, el ítem I9 mostró errores en 21 de las 24 respuestas, destacando como una de las áreas más problemáticas. Aquí, el 35 % de los errores estuvo asociado con el uso incorrecto de la ley distributiva del producto respecto a la suma. Este patrón de errores podría sugerir confusiones al manejar propiedades básicas de las operaciones algebraicas con polinomios, lo que podría impactar otras áreas fundamentales.

Otro ítem que presentó una frecuencia importante de errores fue el I3, donde 19 participantes realizaron desarrollos incorrectos, 2 no respondieron y solo 3 lograron resolverlo sin errores. En este caso, 42 % de los errores encontrados representó la mayoría de las incidencias de error y estaban atribuidas nuevamente al uso incorrecto de la ley distributiva, lo que refuerza la hipótesis de que esta propiedad constituye un desafío recurrente en la prueba.

Tabla 2: Frecuencia absoluta y porcentual, relativa al total de errores cometidos en el test diagnóstico, por ítem, según las unidades temáticas del curso. Elaboración propia.

Unidad temática	<i>Ítem del test diagnóstico</i>									Total	%
	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9		
E1	18	5	11	6	6	11	5	2	8	72	27,3
E2	4	10	14	4	5	3	0	1	13	54	20,5
E3	0	16	1	0	1	0	0	0	0	18	6,8
E4	0	0	0	6	8	0	14	1	2	31	11,7
E5	0	0	0	0	13	0	0	0	0	13	4,9
E6	0	0	0	8	0	0	0	0	0	8	3,0
E7	2	2	4	4	1	13	6	1	2	35	13,3
E8	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0,8
E9	0	0	0	0	1	0	0	0	9	10	3,8
E10	3	3	3	1	2	2	0	3	4	21	8
Total	27	36	33	29	37	29	25	10	38	264	100
%	10,2	13,6	12,5	11	14	11	9,5	3,8	14,4	100	

Nota: La frecuencia de errores presenta la totalidad de incidencias encontradas en la revisión de los desarrollos, de modo que una persona estudiante pudo cometer un error en reiteradas ocasiones en un mismo ítem o en una misma unidad temática.

En contraste, el ítem I8 presentó una frecuencia significativamente menor de errores: solo 8 estudiantes cometieron fallos, 1 no respondió, y el resto lo resolvió correctamente. Este ítem, relacionado con la resolución de una ecuación lineal, mostró que los errores predominantes estuvieron vinculados a cálculos incorrectos en sumas de polinomios y operaciones aritméticas básicas. Esto sugiere que, aunque en menor frecuencia, las dificultades en habilidades aritméticas pueden influir en problemas aparentemente más simples.

A nivel general de la prueba, el desarrollo incorrecto de operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias se identificó en el 20 % de los escenarios de error, distribuidos entre simplificaciones, sumas, restas y divisiones. En el caso del ítem I5, que requería el desarrollo y simplificación máxima de una diferencia de fracciones algebraicas, solo cinco participantes aplicaron correctamente el algoritmo esperado para efectuar una resta. Los demás mostraron procedimientos inconsistentes o erróneos, lo que podría indicar una falta de comprensión profunda sobre el manejo de fracciones algebraicas y sus algoritmos asociados.

La caracterización de cada operación donde se detectó error y la correspondencia con las categorías de errores propuestas por Movshovitz-Hadar et al. (1987), Cervantes y Martínez (2007), y García (2010), permitió organizar los datos y delimitar clases de errores disjuntas que conforman la clasificación general de errores algebraicos con que ingresa el profesorado en pre-servicio al curso MAC400. En la tabla 3 se presenta la asociación entre el escenario de error que se identificó simultáneamente en categorías propuestas por estos autores. Se codificaron las categorías de errores identificadas de la propuesta de estos autores de la siguiente manera: errores al realizar operaciones aritméticas-algebraicas (Er1), procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas (Er2), error de truncamiento (Er3), error de extensión de la cancelación (Er4), error de linealización (Er5), procedimiento inconcluso (Er6), uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra (Er7), error al realizar productos de polinomios (Er8), asociación incorrecta de productos notables (Er9), error en la determinación de la potencia de otra potencia (Er10), resolución aditiva de la potencia de un binomio (Er11), error de cálculo simple (Er12), aplicación parcial de regla de factorización por factor común (Er13), interpretación incorrecta del lenguaje (Er14), teoremas o definiciones deformados (Er15), inferencias no válidas lógicamente (Er16), falta de verificación en la solución (Er17), errores técnicos (Er18), datos mal utilizados (Er19).

Tabla 3: Identificación de escenarios de error cometidos por el grupo de estudiantes informantes en categorías simultáneas propuestas por Movshovitz-Hadar et al. (1987), Cervantes y Martínez (2007), y García (2010). Elaboración propia.

<i>Tipo de operación ejecutada</i>	<i>Categorías identificadas en la resolución</i>
Suma y resta de polinomios	García (2010): Er1; Er2. Movshovitz-Hadar et al. (1987): Er14; Er15.
Producto de polinomios	García (2010): Er1; Er2; Er7; Er8. Movshovitz-Hadar et al. (1987): Er15.
Ecuaciones polinomiales	Cervantes y Martínez (2007): Er3; Er4. Movshovitz-Hadar et al. (1987): Er16; Er15; Er17.
Potencias cuadradas de binomios	Cervantes y Martínez (2007): Er5; Er3. García (2010): Er2; Er9; Er10; Er11. Movshovitz-Hadar et al. (1987): Er16; Er15.
Aritmética básica	García (2010): Er1; Er7; Er12. Movshovitz-Hadar et al. (1987): Er18.
Omisión o inserción de datos	Cervantes y Martínez (2007): Er3; Er4. García (2010): Er12. Movshovitz-Hadar et al. (1987): Er19; Er14.
Operaciones entre expresiones algebraicas fraccionarias	Cervantes y Martínez (2007): Er3; Er4. García (2010): Er1; Er6; Er2; Er7; Movshovitz-Hadar et al. (1987): Er16; Er15.
Factorización	Cervantes y Martínez (2007): Er3. García (2010): Er6; Er2; Er13; Er7. Movshovitz-Hadar et al. (1987): Er19; Er14; Er15; Er17.

Nota: Esta tabla muestra la asociación entre el tipo de operación aritmético-algebraica desarrollada en el test diagnóstico y las categorizaciones propuestas por Movshovitz-Hadar et al. (1987), Cervantes y Martínez (2007), y García (2010).

En general, se destacan con mayor frecuencia los errores debidos a la suma y resta de monomios no semejantes, donde algunos estudiantes del profesorado crean algoritmos o reglas inválidas para efectuar los desarrollos. Otro tipo de error que fue muy reiterado se manifestó al operar productos entre polinomios, donde se aplicaba la ley distributiva de forma parcial. Estas situaciones son congruentes con los hallazgos de los estudios realizados por Cervantes y Martínez (2007) y García (2010), quienes aseguran que la mayoría de las falencias se manifiestan al generalizar reglas, propiedades y definiciones de la primera forma en que son vistas, donde se da un uso inapropiado en una situación nueva, o bien una adaptación incorrecta de una regla conocida al resolver un nuevo problema.

Se determinaron otros casos de error que no son particulares de un contenido en específico, sino que se presentaron de forma más general en diversos contenidos de la prueba; tales como errores ocasionados por la omisión en inserción de datos de forma incorrecta, la prioridad operativa al combinar las operaciones suma-resta y producto de polinomios, y la resolución parcial o inconclusa de un ejercicio. Según Gandulfo et al. (2013), este tipo de errores exhiben una falta de correlación entre la aplicación

de diversas propiedades, como así también de la relación entre los teoremas aplicados en álgebra y las propiedades aritméticas de los números reales, además, de la falta de aprehensión y estructuración de los conceptos accedidos durante la escuela media.

A continuación, se presentan las clases de errores definidas a partir de la síntesis de las categorías propuestas por los autores Movshovitz-Hadar et al. (1987), Cervantes y Martínez (2007), y García (2010), que conforman la clasificación general de los errores identificados en las producciones del estudiantado participante. Además, se ilustra cada categoría con la resolución planteada por una persona estudiante, que haya tenido alta frecuencia en la detección.

Clase 1. Establecimiento de esquemas operacionales inválidos al realizar operaciones aritmético-algebraicas con polinomios

Se utilizan teoremas o definiciones que son adaptados del álgebra de polinomios de forma incorrecta, con lo que se establecen procedimientos propios incorrectos y generalizados ante ejercicios específicos. Estos esquemas se identifican en sumas, restas y productos de polinomios; también, al efectuar potencias de polinomios. En esta clase de error, el profesorado en pre-servicio no reconoce los procedimientos correctos que deben ser aplicados, sino que actúan de forma subjetiva. A continuación, se presenta una de las producciones del participante DP19 que muestra uno de los casos más reiterado de error de esta clase (figura 1).

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & 4xy(5x + 3y^3 - 3xy) + x^2y \\
 & + xy(8xy^3 - 3xy) + x^2y \\
 & + xy(5xy^3) + x^2y \\
 & 20xy^3 + x^2y \\
 & 20x^2y^3
 \end{aligned}$$

Figura 1: Desarrollo del Participante DP19. Fuente: imagen tomada por las personas investigadoras de las resoluciones que presenta la persona estudiante.

En la producción de DP19 se evidencia que al efectuar la suma (resta) de monomios no semejantes escribe como resultado un monomio, donde el coeficiente numérico queda determinado por la suma (resta) de los coeficientes que preceden; el factor literal, por el producto de los factores que preceden, con el grado de la suma (resta) según sea la operación entre los monomios. Los procedimientos sugieren que al trabajar con variables de exponente 1 o monomios de coeficiente numérico 1, el docente en pre-servicio asume que hay un 0 en el coeficiente numérico o en el exponente.

Clase 2. Teoremas y propiedades deformadas en la resolución ecuaciones

Se utilizan propiedades inválidas que están relacionadas con principios básicos para simplificar una ecuación; sin embargo, altera los mismos y los adapta de forma generalizada. Estos casos únicamente se pueden determinar en una ecuación, ya que se precisa de la estructura operativa en ambos miembros de la igualdad, tal como los principios necesarios para despejar una incógnita. Una de las situaciones más reiteradas en esta clase se presenta en la figura 2, que muestra la producción del profesor en pre-servicio DP20.

En la figura 2 se puede apreciar que DP20 simplifica un producto presente en un miembro de una ecuación restando uno de los factores asociado a un término en el lado contrario de la igualdad.

$$\begin{aligned} 0 &= 11 - 7 \cdot x \\ -x &= 11 - 7 \\ -x &= 4 \end{aligned}$$

Figura 2: Desarrollo del Participante DP20. Fuente: imagen tomada por las personas investigadoras de las resoluciones que presenta la persona estudiante.

Clase 3. Establecimiento de esquemas operacionales inválidos al realizar operaciones aritmético-algebraicas con expresiones algebraicas fraccionarias

Se utilizan teoremas o definiciones incorrectas que son adaptados de la estructura operativa al simplificar operaciones con fracciones, con lo que establece procedimientos propios incorrectos y generalizados ante ejercicios específicos. En esta clase de error se da una interpretación incorrecta en cuanto a los algoritmos a desarrollar, especialmente en sumas, restas, productos y cocientes de fracciones algebraicas. En la figura 3 se presenta uno de los casos más representativos de esta clase, que fue desarrollada por DP23.

$$\frac{2x+6}{x^2-6x+9} - \frac{5x}{x^2-9} = \frac{-3x+6}{-6x}$$

Figura 3: Desarrollo del Participante DP23. Fuente: imagen tomada por las personas investigadoras de las resoluciones que presenta la persona estudiante.

En este caso, DP23 linealiza la resta (o suma) de expresiones algebraicas fraccionarias al simplificar la expresión como una fracción cuyo numerador está conformado por la operación determinada por el numerador precedente (de la izquierda), el signo “–” (o “+”), y el numerador posterior (de la derecha) seguido del signo; respectivamente, el denominador se compone por el denominador precedente, el signo “–” (o “+”), y el denominador posterior; esto sin delimitar con paréntesis cada polinomio en el caso de la resta.

Clase 4. Discrepancia entre el enunciado del ejercicio en cuestión y el tratamiento de los datos

Se interpreta incorrectamente el lenguaje del enunciado, por lo que utiliza los datos de manera incorrecta; expone una estructura inconsistente que no corresponde al esquema operativo adecuado para el ejercicio. Aunque los procedimientos que se establecen son correctos en otros contextos, no son adecuados en los ejercicios donde se manifiesta este error. En la figura 4 se muestra la producción de DP04.

DP04 presenta una resolución que es inconsistente con los métodos de factorización. La resolución sugiere que el profesor en pre-servicio intenta simplificar la expresión asociando con una reducción a partir de operaciones efectuadas entre los exponentes de cada variable. En este caso no se evidencia la intención de factorizar la expresión.

Clase 5. Verificación parcial de las condiciones en el método de factorización

No se verifican todas las condiciones que amerita el método de factorización a utilizar; aunque selecciona el método correcto, no es aplicado de manera adecuada, debido a los componentes que requiere.

$$a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$$

$$a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$$

$$ab - ab^2$$

$$ab^4$$

Figura 4: Desarrollo del Participante DP04. Fuente: imagen tomada por las personas investigadoras de las resoluciones que presenta la persona estudiante.

En métodos como el factor común, extrae un factor incorrecto; en el de inspección, no verifica la totalidad de las condiciones que permiten descomponer los términos. En la figura 5 se ilustra uno de los casos más representativo de esta clase.

$$\begin{aligned} & \quad (x+1)(x-3) \\ & \quad \cancel{x} \quad 3 \\ & = \frac{-x^2 + \cancel{2x} + 3}{\cancel{x^2} - 11x + 9} \\ & \quad \cancel{x} \quad -9 \\ & \quad x \quad -1 \\ & (x-9)(x-1) \end{aligned}$$

Figura 5: Desarrollo del Participante DP22. Fuente: imagen tomada por las personas investigadoras de las resoluciones que presenta la persona estudiante.

En esta resolución de DP22 se efectúa el método de factorización por inspección de manera incorrecta, ya que descompone el primer y tercer término de cada trinomio cuadrático como producto de dos factores, con el fin de factorizar, pero no verifica las condiciones que se deben satisfacer respecto al término lineal en cada caso.

Los errores relacionados con la factorización de polinomios en estudiantes de primer ingreso a la universidad también fueron determinados en un estudio llevado a cabo por Bolaños-Barquero y Segovia-Alex (2021). Estos autores analizaron los errores cometidos por dos grupos estudiantiles del curso Matemática General de la UNA y aunque es un curso que no corresponde al plan de estudios de la carrera BLEM, tiene correspondencia con algunas unidades temáticas del curso MAC400. Dentro de sus hallazgos, indican que al presentarse dificultades en los métodos de factorización se puede condicionar el aprendizaje de otras temáticas tales como operaciones con fracciones algebraicas. Dicha afirmación es congruente con los resultados que han obtenido expertos como Mejía (2004) y García (2010).

Clase 6. Extrapolación incorrecta de la distributividad del producto respecto a la suma

Se aplica una distribución incorrecta de la suma respecto al producto o de la suma respecto a la suma, al operar con polinomios. Infiere que la ley de distributividad del producto respecto a la suma es extrapolable en estos contextos. En este caso el docente en formación inicial reconoce cómo sumar o multiplicar monomios, pero desarrolla una distribución inconsistente. Esta situación se puede evidenciar en la figura 6, referente a procedimientos aplicados por DP02.

Como se observa, en la resolución de DP02 se genera una distribución de la suma respecto al pro-

$$\text{c)} \quad 16 + \overbrace{(z^2 + 4)(z^2 - 4)}^{\text{Error: no se multiplican los términos}} - z^2$$

$$16z^2 + 64 \cdot 16z^2 - 64 - z^2$$

Figura 6: Desarrollo del Participante DP02. Fuente: imagen tomada por las personas investigadoras de las resoluciones que presenta la persona estudiante.

ducto de polinomios. Además, se omiten los paréntesis de asociatividad. Es importante destacar que esta situación sugiere una generalización incorrecta de la propiedad de distributividad del producto respecto a la suma.

Clase 7. Truncamiento en un principio, fórmula, o estructura, al simplificar una operación aritmético-algebraica

Se reconoce la operación que necesita desarrollar, pero omite algunos datos que son necesarios en el resultado, o trunca parte de la fórmula que se está aplicando. Esta situación es más reiterada en el caso del producto entre polinomios, donde se realiza una distribución parcial de los términos, y el caso de las operaciones suma y división entre fracciones algebraicas, donde incurre en el error a la hora de determinar un denominador común, o bien, simplificar la división. Otro caso contenido en esta clasificación es la distribución del -1 que genera un cambio de signo en un polinomio. En la figura 7 se muestra el caso de DP01.

$$3x(x - 2)$$

$$3x^2 - 2$$

Figura 7: Desarrollo del Participante DP01. Fuente: imagen tomada por las personas investigadoras de las resoluciones que presenta la persona estudiante.

La resolución de DP01 pone de manifiesto que en las expresiones que se encuentran delimitadas por paréntesis denotando asociación, los productos no son efectuados de forma completa. Generalmente se trunca la ley de distributividad, donde no todos los términos del primer factor se multiplican con los del segundo.

Clase 8. Extensión de la cancelación en la simplificación de una fracción algebraica

Se reconoce la simplificación de la expresión algebraica fraccionaria a realizar, por medio de la simplificación de factores en común entre el numerador y denominador; sin embargo, no realiza la factorización de estos miembros, y, aun así, elimina los términos o factores de cada término, en común, presentes en el numerador y denominador (figura 8).

En el ejemplo correspondiente DP16, para simplificar la expresión se suprime algunos términos en común en el numerador y denominador, sin mostrar una previa factorización.

$$\frac{x^3 + 6x}{x^2 + 12x + 36} = \frac{x^3 + 6}{x^2 + 12x + 36} = \frac{x^3}{x^2 + 6}$$

Figura 8: Desarrollo del Participante DP16. Fuente: imagen tomada por las personas investigadoras de las resoluciones que presenta la persona estudiante.

Clase 9. Linealización en la potencia de un polinomio

No se identifica la operación necesaria para desarrollar el producto notable que se establece; se escribe como resultado la potencia de cada término, separadas por el signo precedente en la base; alude a los errores por linealización que definen Cervantes y Martínez (2007). En la figura 9, se presenta la producción de DP22.

$$(2x+5)^2$$

$$4x^2 + 25$$

Figura 9: Desarrollo del Participante DP22. Fuente: imagen tomada por las personas investigadoras de las resoluciones que presenta la persona estudiante.

DP22 al calcular la potencia de un binomio genera un binomio conformado por la potencia de cada término de la base (con igual exponente al que se eleva el binomio), preservando la operación entre estos. El participante no reconoce el producto notable asociado.

Las dos clases de errores anteriores también fueron determinadas en el estudio de Aguerrea et al. (2022) el cual fue realizado con docentes en formación inicial en su primer año de universidad.

Clase 10. Errores aritméticos

Manifiesta errores determinados por el cálculo incorrecto de operaciones básicas en aritmética que contemplan la suma, la resta, el producto, el cociente, radicales o potencias, con números. La producción de DP19, mostrada en la figura 10, ilustra uno de los casos más reiterados en esta clase.

$$16 + (z^2 - 16) - z^2$$

$$16 + z^2 - 16 - z^2$$

$$32 - 1$$

Figura 10: Desarrollo del Participante DP19. Fuente: imagen tomada por las personas investigadoras de las resoluciones que presenta la persona estudiante.

DP19 enfatiza en el cálculo numérico incorrecto al restar dos números iguales y obtener la suma de estos. El error puede estar asociado con un descuido en la operación. Cabe destacar que también se comete un error al restar los monomios semejantes.

Clase 11. Errores por la omisión o inserción de datos de forma inválida

Se considera la omisión o inclusión de datos o signos de forma inválida, donde se suprime estos elementos de un paso al siguiente y la transcripción de datos de manera incorrecta. En la figura 11, se presenta uno de los casos más reiterados de esta clase, cometido por DP20.

$$\begin{aligned} & (4x^2 - 9x^2) - (2 - 25) \\ & - 5x^2 + 23 \\ & x^2 = \frac{23}{-5} \\ & x = \sqrt{\frac{23}{-5}} \end{aligned}$$

Figura 11: Desarrollo del Participante DP20. Fuente: imagen tomada por las personas investigadoras de las resoluciones que presenta la persona estudiante.

En el ejercicio de simplificación realizado por DP20, donde se solicita efectuar sumas y restas de polinomios, se formula una ecuación cuadrática que es inconsistente con el enunciado.

Clase 12. Resolución parcial o inconclusa

Los procedimientos mostrados son correctos, pero el ejercicio se muestra inconcluso, ya que la respuesta que se brinda como final no es la solución adecuada, según el enunciado del ejercicio. Asimismo, se exhiben procedimientos que son incorrectos y culminan con la generación de una expresión que, aunque no se obtiene de la secuencia de pasos correctos, se puede simplificar; sin embargo, los docentes en formación inicial no proceden con tal simplificación. En la figura 12 se presenta uno de los casos más reiterados en esta clase, que corresponde al desarrollo efectuado por DP17.

$$\begin{aligned} & 4xy(5x + 3y^3 - 3xy) + x^2y \\ & 20x^2y + 12xy^4 - 12x^2y + x^2y \end{aligned}$$

Figura 12: Desarrollo del Participante DP17. Fuente: imagen tomada por las personas investigadoras de las resoluciones que presenta la persona estudiante.

En este caso correspondiente a una resolución de DP17, aunque el procedimiento mostrado al efectuar el producto es correcto, no completa el ejercicio; el resultado mostrado es parcial, considerando que en el enunciado se solicitó simplificar al máximo las operaciones.

La cuantificación de los errores definidos en la clasificación anterior se muestra en la tabla 4.

De las clases de errores definidos en la clasificación, el establecimiento de esquemas operacionales inválidos al realizar operaciones aritmético-algebraicas con polinomios (clase 1) tuvo mayor presencia en el test diagnóstico (detectado en 102 ocasiones en la muestra de participantes), dicho hallazgo está en correspondencia con los errores identificados al efectuar sumas, restas y productos entre polinomios; además, la clase de errores debidos a la omisión o inserción de datos de forma inválida (clase 11), destacó como la segunda clase con mayor cantidad de incidencias de error en esta prueba, el cual se detectó en 36 ocasiones. En contraste, el error con menor frecuencia fue el debido a una verificación parcial de las condiciones en el método de factorización, la cual puede estar asociada a que pocos estudiantes completaron factorizaciones en los ejercicios que lo requerían; de hecho, en estos ejercicios, la mayoría procedía con el desarrollo de sumas y restas inválidas, entre los términos no semejantes

Tabla 4: Frecuencia de errores cometidos en el test diagnóstico, por ítem, según la elaborada en la investigación. Elaboración propia.

Clase de error	<i>Ítem del test diagnóstico</i>									Total	Fr
	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9		
1	19	13	16	12	7	9	10	4	12	102	38,6 %
2	0	0	0	0	1	0	0	2	1	4	1,5 %
3	0	0	0	3	13	0	5	0	0	21	8 %
4	2	0	1	1	1	8	0	0	0	13	4,9 %
5	0	0	0	0	1	1	1	0	0	3	1,1 %
6	0	0	3	0	0	0	0	0	1	4	1,5 %
7	1	8	3	2	1	0	3	1	10	29	11 %
8	0	0	0	5	2	0	2	1	0	10	3,8 %
9	0	9	0	0	1	1	0	0	0	11	4,2 %
10	2	2	3	0	1	0	0	0	1	9	3,4 %
11	0	4	6	4	6	5	2	1	8	36	13,6 %
12	3	0	1	2	3	5	2	1	5	22	8,3 %
Total	27	36	33	29	37	29	25	10	38	264	100 %
Fr	10,2 %	13,6 %	12,5 %	11 %	14 %	11 %	9,5 %	3,8 %	14,4 %	100 %	

del polinomio por factorizar. Los datos sugieren que la mayor parte de los estudiantes participantes no comprenden la instrucción de factorizar o no manejan los métodos necesarios para llevar a cabo una factorización con una instrucción explícita sobre este procedimiento o cuando eran requerido en operaciones con fracciones algebraicas.

Los errores identificados en cada unidad temática no necesariamente están asociados al tema por desarrollar y el tipo de error manifestado con mayor frecuencia. Esto quedó evidenciado cuando en la unidad de suma y resta de polinomios, donde la mayoría de los errores corresponden a procedimientos inconsistentes o incongruentes con las propiedades básicas para efectuar cada operación. Dicha situación también se presentó, con menor frecuencia, al operar productos entre polinomios y las operaciones de suma y resta con expresiones algebraicas fraccionarias.

5. Conclusiones

De la información obtenida tras la aplicación del test diagnóstico se puede afirmar que, en general el grupo de docentes en pre-servicio matriculados en el curso MAC400 presenta deficiencias en conocimientos algebraicos básicos. Esto concuerda con Aguerre et al. (2022), ya que estos autores en su estudio determinaron que un alto porcentaje de docentes en pre-servicio presenta dificultades y, errores conceptuales y procedimentales de naturaleza aritmética y algebraica en los primeros cursos de su formación.

La clasificación de errores determinada en esta investigación permitió caracterizar de forma general las operaciones erróneas efectuadas por los docentes en pre-servicio en el test diagnóstico. Con ello, es posible tener una base de categorías para clasificar y contrastar eventuales errores que surgen a lo largo del curso, o bien realizar estudios con distintas cohortes de estudiantes que cursen esta asignatura.

Aunado a lo anterior, el estudio permitió recopilar datos base sobre errores matemáticos, con los que, eventualmente, se pueden consolidar nuevas líneas de investigación donde se dé seguimiento a los

errores y dificultades que presente el profesorado en matemática en formación inicial. Entre estas líneas de estudio se puede considerar el análisis de errores cometidos por estudiantes que han repetido el curso, estudios de errores enfocados en otras asignaturas del plan de estudio del profesorado en formación inicial, análisis supervisado de la evolución de los errores manifestados por una población estudiantil en distintos períodos, estudio de las causas y efectos de los errores algebraicos, o bien investigaciones enfocadas al análisis de errores algebraicos cometidos por estudiantes de otras carreras.

Este estudio puede contribuir con el proceso de enseñanza-aprendizaje del estudiantado que se inicia en el estudio del álgebra básica durante la formación inicial de docentes de matemática si se plantean algunas estrategias que permitan ayudar a los estudiantes a superar las dificultades presentadas. En la línea de Saucedo (2007), la identificación de errores que manifiesta el profesorado en pre-servicio posibilita la generación de herramientas metodológicas para su tratamiento en correspondencia con las dificultades mostradas y la organización de estrategias curriculares remediales que aseguren la prevención y corrección de errores identificados. Entre estas estrategias se encuentran las clases de repaso y tutorías que estén enfocadas al abordaje de errores comunes, donde se dé un acompañamiento continuo que posibilite la supervisión y revisión del proceso de aprendizaje; materiales que permitan reforzar conceptos erróneos, que estén acompañados de una evaluación del progreso de los docentes en pre-servicio para asegurar la detección y corrección de las falencias; revisiones y adaptaciones de planes de estudio donde se considere el error como un elemento de análisis en la formación inicial de los futuros docentes de matemática, y otros.

Contribución de las personas autoras: Conceptualización: E.P.R, M.A.V, M.P.A. Curación de datos: E.P.R. Análisis formal, Investigación, Metodología y Validación: E.P.R, M.A.V, M.P.A. Escritura (borrador original, revisión y edición): E.P.R, M.A.V, M.P.A.

Accesibilidad de datos: Los datos científicos que se utilizaron en esta investigación pueden ser solicitados a la dirección emaparr@itcr.ac.cr.

6. Referencias

- Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Villa María]. <https://docer.com.ar/doc/n88c58>.
- Aguerre, M., Solís, M., & Huincahue, J. (2022). Errores matemáticos persistentes al ingresar en la formación inicial de profesores de matemática: El caso de la linealidad. *Uniciencia*, 36(1), 1-18. <https://doi.org/10.15359/ru.36-1.4>.
- Araneda, R., & Uribe, M. (2020). Reflexiones de futuros profesores en relación con situaciones contingentes en la sala de clases. *Educación Matemática*, 32(3), 178-208. <https://doi.org/10.24844/EM3203.07>.
- Bolaños-Barquero, M., & Segovia Álex, I. (2021). Sentido estructural de los estudiantes de primer curso universitario. *Uniciencia*, 35(1), 152-168. <https://doi.org/10.15359/ru.35-1.10>.
- Boydston, A. (2023). Quantitative content analysis: A primer and call for robustness. In M. L. De Vries & D. B. Snow (Eds.), *Oxford handbook of engaged methodological pluralism in political science* (pp. 440-455). Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780192868282.013.54>.
- Cervantes, G., & Martínez, R. (2007). Sobre algunos errores comunes en desarrollos algebraicos. *Zona Próxima*, 1(8), 34-41. <https://doi.org/10.14482/zp.08.121.64>.

- Cruz, M. F., Esteley, C., & Scaglia, S. (2020). Una experiencia de formación para futuros profesores: producir matemática en un contexto de modelización matemática vinculada con fenómenos geométricos. *Educación Matemática*, 32(1), 192-220. <https://doi.org/10.24844/EM3201.09>.
- Escuela de Matemática. (2017). *Plan de estudios de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática (BLEM)*. Universidad Nacional, Costa Rica. <http://www.matematica.una.ac.cr/index.php/documentacion-digital/category/7-planes-de-estudio?download=151:plan-estudios-blem-2017-completo>.
- Gandulfo, M. I., Benítez, I. M., Ramírez, R. G., Brandolín, J. R., Gemignani, M. A., De Zan, M., & Musto, D. (2013). El aprendizaje de la matemática a partir de los errores. *Actas del VII CIBEM*. Montevideo, Uruguay. <http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/982.pdf>.
- García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura* [Tesis de Maestría, Universidad de Granada]. https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose_Garcia.pdf.
- Godino, J., & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación* (5^a ed.). McGraw-Hill.
- Hoth, J., Larrain, M., & Kaiser, G. (2022). Identifying and dealing with student errors in the mathematics classroom: Cognitive and motivational requirements. *Frontiers in Psychology*, 13(1). <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.1057730>.
- Khasawneh, A., Al-Barakat, A., & Almahmoud, S. (2022). The Effect of Error Analysis-Based Learning on Proportional Reasoning Ability of Seventh-Grade Students. *Frontiers in Education*, 7(1). <https://doi.org/10.3389/feduc.2022.899288>.
- Kilpatrick, J., Gómez, P., & Rico, L. (1998). *Errores y dificultades de los estudiantes: resolución de problemas, evaluación, historia*. Grupo Editorial Iberoamérica. <https://www.researchgate.net/publication/278009025>.
- Mejía, M. F. (2004). *Análisis didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas* [Tesis de Licenciatura, Universidad del Valle, Colombia]. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/analisis-didactico-de-la-factorizacion-de-expresiones-polonomicas-cuadraticas/>.
- Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de estudio de matemáticas: III ciclo de la educación general básica y educación diversificada*. San José, Costa Rica. <https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf>.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 3-14. <https://doi.org/10.5951/jresematheduc.18.1.0003>.
- Olmedo, N., Galdínez, M., Peralta, J., & Di Barbaro, M. (2015, mayo). Errores y concepciones de los alumnos en álgebra. En T. Gutiérrez (Presidencia), *Conferencia Interamericana en Educación Matemática XIV Congreso CIAEM*. Chiapas, México. https://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/877/367
- Parra, E. (2021). *Errores matemáticos en el área de álgebra básica que manifiestan estudiantes del curso Matemática Fundamental* [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de Costa Rica]. <https://repositorio.una.ac.cr/handle/11056/26503>.
- Saucedo, G. (2007). Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la Universidad. *Itinerarios Educativos*, 1(2), 22-43. <https://doi.org/10.14409/ie.v1i2.3898>.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77(1), 5-34. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/la-ensenanza-del-algebra-en-la-educacion-obligatoria-aportaciones-de-la-investigacion/>

Zakariya, Y. (2022). Cronbach's alpha in mathematics education research: Its appropriateness, overuse, and alternatives in estimating scale reliability. *Educational Psychology*, 42(13), 1074430. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.1074430>.

A. Anexos

Prueba aplicada por García (2010):

Nombre: _____ Carrera: _____ Fecha: _____ ID: A

PRIMER EXAMEN DEPARTAMENTAL DE MATEMÁTICAS I, 2008-B

Resuelve lo que se te pide, anexando tus procedimientos en hojas por separado.

Recuerda que no se permite hacer uso de calculadora, formulario ni celular.

1. Encuentra el valor de x para la siguiente ecuación: $3(x + 4) - 4 = 2x - 5$
2. Ejecutar la siguiente división:
$$\frac{2y^3 + 5y^2 + 2y + 15}{y + 3}$$
3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $2x + 2y + 2z = 4$; $4x + 10y + 6z = 2$; $6x - 2y - 4z = -2$
4. Desarrollar el siguiente binomio: $(2r - 3s^2)^2$
5. Desarrollar el siguiente binomio: $(ab^2 + y^2)^3$
6. Factoriza el siguiente polinomio: $x^2 - 15x + 54$
7. Desarrolla la siguiente expresión: $4xy(5x + 3y - 3xy)$
8. Factorizar la siguiente expresión: $8x^2y^3 - 2xy^2 + 4x^3y^2 + x^2y^2$
9. Encontrar el intervalo de solución de la desigualdad: $4 < 3x - 4 < 11$
10. Resolver la siguiente desigualdad: $\frac{2x + 3}{2} + 4 < 3x + 5$