Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 25, No 2. Marzo, 2025 – Agosto, 2025
ISSN 1659 -0643
DOI: 10.18845/rdmei.v25i2.7602

Algunos cálculos sobre los primos de Sheldon: variaciones a una conjetura

| Some computations about Sheldon primes: variations on a conjecture |

Gerardo Miramontes de León[1]
gmiram@ieee.org
Universidad Autónoma de Zacatecas
Zacatecas, México

Recibido: 15 de abril de 2024 Aceptado: 5 de agosto de 2024

Resumen: La conjetura de Sheldon despierta el interés por encontrar posibles relaciones entre el producto de los dígitos de un número primo p_n y su índice n. En este trabajo se muestra, en un ejercicio numérico, que dicha conjetura podría explicarse por el comportamiento cuasi-cíclico ascendente del producto de los dígitos que forman a p_n. Se encontró que el producto de los dígitos de p_n no puede relacionarse matemáticamente al índice n por varias razones, las cuales se exponen en este trabajo. Además, se reflexiona si dicha conjetura, basada en la observación de una coincidencia, podría modificarse al considerar un reordenamiento del índice de los números primos.

Palabras Clave: conjetura, números primos, primos de Sheldon

Abstract: Sheldon's conjecture arouses interest in finding possible relationships between the product of the digits of a prime number p_n and its index n. This work shows, in a numerical exercise, that this conjecture could be explained by the quasi-cyclical ascending behavior of the product of the digits that make up p_n. It was found that the product of the digits of p_n cannot be mathematically related to the index n for several reasons, which are explained in this work. Furthermore, we reflect on whether this conjecture, based on the observation of a coincidence, could be modified by considering a rearrangement of the index of the prime numbers.

Keywords: conjecture, prime numbers, Sheldon prime

1. Introducción

La conjetura de Sheldon, desde su origen, plantea un problema de cálculo numérico, es decir, calcular el producto de los dígitos de cualquier número primo p_n, no importa qué tan grande sea, y verificar si coincide con su índice n. El empleo de herramientas de cómputo no es nuevo. Como se menciona desde 1975 en [1], "Es especialmente apropiado destacar el interés de Lehmer desde hace mucho

[1]Gerardo Miramontes de León, Profesor de la Facultad de Ingeniería Eléctrica, Universidad Autónoma de Zacatecas, Dirección postal: Zacatecas, Zac., México, Código postal 98000. Correo electrónico: gmiram@ieee.org.

tiempo en la aplicación del cálculo numérico a problemas de teoría de números", haciendo referencia a artículos publicados en 1956.

El número primo de Sheldon es el número primo $p = 73$. Este número primo es el vigésimo primer número en la infinita lista de números primos. La conjetura conocida como la conjetura de Sheldon (CS) nace por mera observación, es decir, si multiplicamos los dígitos del 73 se obtiene su número de ordenamiento en la lista, $n = 7 \times 3 = 21$. En adelante nos referiremos a su índice n. A eso se le llama la regla del producto. Formalmente se dice [2]:

> Para un entero positivo n, sea p_n el n-ésimo número primo. Decimos que p_n tiene la propiedad del producto si el producto de sus dígitos, en base 10, es precisamente n.

La pregunta es si habrá más números primos cuya propiedad del producto se cumpla. Solo se conocen tres de tales primos $p_7 = 17$, $p_{21} = 73$, y $p_{181440} = 2475989$ [3]. También para este trabajo, se realizó la prueba en el intervalo $2 \leq p \leq 1.25 \times 10^{11}$, es decir, hasta $p_{5110999979} = 125265576973$, y solamente se encontraron esos mismos tres números.

En realidad, parece ser solo una coincidencia que $p = 73$ sea el vigésimo primer número primo. Pero la coincidencia no termina ahí, si se invierte el ordenamiento de los dígitos en ambos números, es decir, p_n y n pasan a ser: $73 \rightarrow 37$ y $21 \rightarrow 12$, entonces se cumple otra coincidencia, que el 37 también es el primo número 12 de la lista. Al reordenamiento inverso de los dígitos se le llama la propiedad especular, nuevamente de [2]. Y *voilà*, a ese 73 se le llama el primo Sheldon. La conjetura CS dice que es el único número primo que cumple tanto la propiedad del producto como la propiedad especular. Para el primo $p_{181440} = 2475989$, que sí cumple la propiedad del producto, el espejo de n es 44181 de modo que $p_{44181} = 534697$, el cual no es espejo de 2475989 y, por lo tanto, no es un primo Sheldon. Para números cada vez más grandes, esa coincidencia (Sheldon) se pierde, aunque puedan presentarse casos en que se cumple la primera parte, es decir, la propiedad del producto. Es interesante ver que en [2], se hace un esfuerzo, con apoyo de una herramienta computacional, para encontrar algún otro primo Sheldon. Después se desarrolla una elegante demostración de dicha conjetura como afirmativa.

En este trabajo, se propone reflexionar y probar numéricamente si la conjetura Sheldon está basada en propiedades de los números primos, o por el contrario, si se basa en una mera coincidencia. De hecho, se muestra que el producto de los dígitos de los números primos no tiene relación matemática con su índice, lo cual podría y debería considerarse en su demostración. Al mismo tiempo se proponen algunas variaciones a la CS.

2. Antecedentes

Es necesario repasar, de manera muy breve, algunos conceptos para subrayar la diferencia entre el índice n de un número primo y su cálculo[1], su valor p_n, y la cantidad de números primos $\pi(x)$ menores a un valor x dado. Tomar en cuenta estas diferencias es importante para la discusión presentada en las siguientes secciones.

Durante siglos se ha intentado conseguir una fórmula que proporcione números primos de manera continua y/o ilimitada. Quizá la más antigua sea la fórmula propuesta por Euler, $y^2 + y + 41$. Esta fórmula genera 40 números primos al dar a y valores entre 0 y 39. El primero de ellos es 41 y se requiere revisar qué lugar ocupa en el conjunto de números primos; su posición es la decimotercera. Pero además, no genera números primos de manera consecutiva, así que se pierde la información de su índice n. Por su parte, Gauss, abandonando la búsqueda de esas fórmulas, trató de encontrar la cantidad de números primos que fueran inferiores a un número dado. Para ello definió la función:

$$\pi(x) = \text{cardinal del conjunto}\{p \leq x, \text{ tal que } p \text{ es primo}\}$$

[1] Recuerde que los números primos se registran según los numerales ordinales, indicados por un subíndice n.

Al comparar tablas de logaritmos con la forma en que aumentaba la cantidad de números primos para una x cada vez mayor, Gauss formuló la siguiente hipótesis:

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x} \tag{1}$$

donde $\log$ es el logaritmo natural. Además, observó que esa aproximación subestimaba al valor real de números primos, es decir, $N > x/log\,x$, donde N es la cantidad de números primos obtenidos de manera exacta. Dicha aproximación ha tenido que ser ajustada una y otra vez, comenzando por Legendre quien propuso

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log(x) - 1.08366}$$

Un mejor ajuste fue propuesto por el mismo Gauss. Basándose en la expresión $1/\log x$, la estimación tenía la forma

$$\pi(x) \approx \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \cdots + \frac{1}{\log x} = \sum_{i=2}^{x} \frac{1}{\log i} = L_i(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

donde $L_i(x)$ se conoce como el logaritmo integral. Pero $\pi(x)$ no deja de ser una aproximación; además x pasa de ser una variable discreta a una continua. Para completar la exposición, algunos ejemplos de estos ajustes son los siguientes. En 1852, Chebyshev [4] demostró que para x suficientemente grande, se podía establecer que

$$0.9212\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq 1.1056\frac{x}{\log x}, x \to \infty$$

En [5] se muestran algunas fórmulas para $\pi(x)$, en diferentes intervalos como

$$\begin{aligned}
\pi(x) &\geq \frac{x}{\log x - 1}, x \geq 5393 \\
\pi(x) &\leq \frac{x}{\log x - 1.1}, x \geq 60184 \\
\pi(x) &\geq \frac{x}{\log x}(1 + \frac{1}{\log x} + \frac{2}{\log^2 x}), x \geq 88783 \\
\pi(x) &\leq \frac{x}{\log x}(1 + \frac{1}{\log x} + \frac{2.334}{\log^2 x}), x \geq 2953652287
\end{aligned}$$

En 2017, Christian Axler [6] propone, entre varias estimaciones, que para $x \geq 49$,

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3.15}{\log^2 x} - \frac{12.85}{\log^3 x} - \frac{71.3}{\log^4 x} - \frac{463.2275}{\log^5 x} - \frac{4585}{\log^6 x}}$$

Cabe aclarar que muchas de estas estimaciones, si no todas, se encuentran después de hacer cálculos numéricos; y así se podrán ir desarrollando expresiones cada vez más elaboradas.

Por otro lado, se hacen esfuerzos por encontrar fórmulas para encontrar el n-ésimo número primo. Si consideramos la expresión dada en (1), al sustituir p_n en lugar de x, se tiene

$$\pi(p_n) \approx \frac{p_n}{\log p_n}$$

y se puede suponer $\pi(p_n) = n$, lo cual se discute más adelante.

El teorema de los números primos nos muestra que

$$p_n \approx n \, \log n.$$

Una expansión asintótica para p_n, obtenida por la inversa de $Li(x)$, viene dada por [7]

$$p_n \approx n(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} - \frac{\log^2(\log n) - 6\log\log n + 11}{2\log^2 n} + ...)$$

de donde finalmente se obtiene, por truncamiento, el teorema de Rosser

$$p_n \approx n(\log n + \log\log n - 1).$$

Sin embargo, estas fórmulas no entregan el n-ésimo primo real. La dificultad viene de origen, puesto que al encontrar un número primo, se le asigna el lugar que ocupa en el conjunto de números primos. Si para números pequeños todas estas aproximaciones fallan, no se puede esperar que sean exactas para números muy grandes.

Estas expresiones, junto con otras, son el punto de partida para la elegante demostración dada en [2]. Sin embargo, para comprobar la propiedad del producto se requieren números exactos y no parece óptimo emplear aproximaciones. Tanto la CS como su demostración despiertan el interés para encontrar conjeturas similares, es decir, aquellas que relacionen, de alguna manera, el valor exacto de un número primo con su índice. Pero si es difícil encontrar la relación matemática exacta entre el valor de p_n y n sin recurrir a tablas, podemos asegurar que entre n y el producto de los dígitos de p_n, esa relación no existe.

2.1. Una mirada a la demostración de la CS

En [2], después de su ecuación 1, tomada de la ecuación 3.5 de Rosser and Schoenfeld [8], la cual reescribimos,

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x}, \text{ para toda } x \geq 17$$

dice:

> This beautiful inequality immediately allows us to prove that no Sheldon prime exceeds 10^{45}, and in fact, we only need the product property to show this.

Para demostrar su Proposición 2 (la cual establece que "Si p_n tiene la propiedad del producto, entonces, $p_n < 10^{45}$"), establece que, con $p_n \geq 17$,

$$n = \pi(p_n) > \frac{p_n}{\log p_n} \tag{2}$$

Sin embargo, vale la pena revisar la igualdad del lado izquierdo de $\pi(p_n)$ y la desigualdad a su lado derecho. La función contadora de números primos $\pi(x)$, se define en forma exacta como

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \tag{3}$$

Esta igualdad no es más que la cantidad de números primos tales que sean menores o iguales a x. Es importante notar que su valor se obtiene por la cuenta, uno a uno, de tales números primos. No se trata de una aproximación. Sin embargo, conviene observar que $\pi(x)$ vista como función, es decir, la hipótesis de Gauss dada en (1) y sus ajustes posteriores, no dan en su resultado alguna indicación del valor de p y solo se deduce el valor del índice n, del último primo. Por ejemplo, de (3) se sabe que $\pi(10) = 4$, $\pi(100) = 25$, $\pi(1000) = 168$, $\pi(10000) = 1229$, etc., pero estos resultados se obtienen de una lista. Es así como sabemos que si $\pi(10) = 4$, hay cuatro números primos menores que 10, y que el último, es decir, $n = 4$, es $p = 7$; de $\pi(100) = 25$, el último es $n = 25$ y que $p = 97$, etc., pero si hacemos $\pi(100) = 100/\log 100$, obtenemos 21.7147, cuando en realidad hay 25, y en ese caso no tenemos ni el índice n correcto, ni cuál es el último número primo p_n menor que 100. Más aún, si hacemos $\pi(97) = 97/\log 97 = 21.204$, de modo que ni con el argumento exacto del último número primo menor que 100, se obtiene el valor correcto de n.

Para que se cumpla la igualdad $n = \pi(p_n)$, es necesario aplicar la (3) y que el argumento de $\pi()$ sea exactamente el n-ésimo número primo, tal como lo propone en su demostración; de ese modo obtendríamos la correspondencia correcta entre p_n y su índice n. Pero el lado derecho es una aproximación y bien se sabe que subestima, o sobreestima, al valor de n, como se puede comprobar con unos cuantos cálculos:

$$\begin{aligned} \pi(167) &= 39 \quad \neq \frac{167}{\log 167} = 32.63 \\ \pi(1229) &= 201 \quad \neq \frac{1229}{\log 1229} = 172.76 \end{aligned}$$

Incluyendo valores relativamente grandes tenemos

$$\pi(125265576973) = 5110999979 \neq \frac{125265576973}{log\, 125265576973} = 4902052050.44701$$

En cada caso tenemos $p_{39} = 167$, $p_{201} = 1229$ y $p_{5110999979} = 125265576973$. Así que al lado izquierdo de $\pi(p_n)$, en la (2), utiliza la definición dada en (3), y al lado derecho utiliza la hipótesis de Gauss, dada en (1) y la estimación no se acerca al valor del índice.

Más adelante, reemplaza n por el producto de los dígitos de p_n ya que se supone que se cumple la propiedad del producto. Luego asegura que n es cuando mucho $a \times 9^{k-1}$, para una p_n representada por $a \times 10^{k-1}$, donde k es el número de dígitos de p_n y a es el dígito inicial. Si tomamos su expresión, que mostramos en (2), se observa que sustituye $n = \pi(p_n)$ por $a \times 9^{k-1}$ y p_n por $a \times 10^{k-1}$, para establecer la relación

$$a \times 9^{k-1} > \frac{a \times 10^{k-1}}{\log a \times 10^{k-1}}$$

Con esta relación establece una cota superior como $p_n < 10^{45}$, ya que con $k \geq 45$ y $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ esa desigualdad deja de cumplirse. Con $a = 7, 8, 9$, requiere $k \geq 46$ para que la desigualdad no se cumpla. Pero para $p_{21} = 73$, no se cumple ninguna de las expresiones, ni para n, ni para p_n, ya que $n = 21$, y $a = 7$. Como $k = 2$, $n = a \times 9^{k-1} = 63$, $p = a \times 10^{k-1} = 70$, y $p_n/log\, p_n = 16.47$. Se esperaría que el cálculo de n, dado supuestamente por el producto de los dígitos de p_n, pero expresado como $a \times 9^{k-1}$ coincida con n.

Si ahora consideramos el último p_n que sí cumple la propiedad del producto, se tienen los siguientes resultados: $n = 181440$, $p_n = 2475989$, $a = 2$, $k = 7$, $n = a \times 9^{k-1} = 1062882$, $p_n = a \times 10^{k-1} = 2000000$, $p_n/\log\, p_n = 137848.727018316$, donde se obtienen valores nada aproximados a los esperados. Lo que se cumple es la conocida hipótesis de Gauss, la cual sería solamente una aproximación a n. Sustituir p_n por una aproximación al producto de sus dígitos y aplicar la hipótesis de Gauss parece que pierde sentido, pues como se muestra más adelante, hay más de un valor de p_n que entrega el mismo valor en el producto de sus dígitos.

Por otro lado, al menos en esa expresión, lo que se está suponiendo es que todos los dígitos en p_n se repiten por igual. Como mostramos en la siguiente sección, al recorrer los números primos de menor a mayor, en intervalos múltiplos de 10, es decir, los que tienen solamente un dígito, los que tienen dos dígitos, etc., se tiene, en el producto de sus dígitos, un comportamiento que incluye valores desde cero a un máximo, hasta pasar al siguiente dígito. Para mostrar que esa cota superior no tiene relación con n, a continuación se revisa el comportamiento de los productos de los dígitos de p_n.

Decir que el producto de los dígitos de p_n es cercano a n no probaría que se cumple la propiedad del producto. Como la propiedad del producto exige que los dígitos de p_n excluyan al cero, una consecuencia lógica es que la cantidad de candidatos Sheldon se reduce.

3. Comportamiento del producto de dígitos

En [2] se asegura que la propiedad del producto tiene una cota superior con $p < 10^{45}$. Sin embargo, esta conclusión está basada en suponer que cuando p_n crece, el producto de los dígitos excederá a n para valores muy grandes de p_n, principalmente por el número de dígitos k, más que por el valor actual del número primo. Claro, el producto de los dígitos del primo $p = 73$ entrega un número menor a p_n, es decir, $n = 21$ y en todo caso ese sería el requisito para cumplir la propiedad del producto para cualquier valor de p, ya que se sabe que $n < p_n$; incluso para $n = 1$ el primer primo $p_1 = 2$.

En este trabajo, se propone que esa cota, si existe, es muy diferente a 10^{45}, ya que para valores de p_n muy grandes, el producto de dígitos puede ser menor a n. Para comenzar a estudiar el comportamiento del producto de los dígitos de un número, en esta sección se muestra que ese producto, para una sucesión de números, tiene un comportamiento cuasi-cíclico ascendente. Este comportamiento cuasi-cíclico es similar en cualquier sucesión ascendente de números. La sucesión más sencilla es tomar los números naturales $n = 1, 2, 3, \ldots$, y verificar el comportamiento del producto de los dígitos para cada n.

Es obvio que al aumentar n en cada paso de unidades a decenas, de decenas a centenas, y así sucesivamente, se repetirán los valores de algunos productos. Del 1 al 9 tenemos el mismo producto, del 10 al 19, se repiten los valores anteriores. Aunque los productos también van creciendo, se repiten los primeros, y así se puede continuar.

En la Tabla 1 se muestran algunos productos de dígitos para n. Note el comportamiento cuasi-cíclico ascendente y la repetición de algunos productos de la última columna con la antepenúltima.

Tabla 1: Prueba de la propiedad del producto para diferentes valores de n. (Elaboración propia).

n	producto	n	producto	n	producto	n	producto	n	producto
		10	0	20	0	...	...	210	0
1	1	11	1	21	2	...	...	211	2
2	2	12	2	22	4	...	...	212	4
3	3	13	3	23	6	...	...	213	6
4	4	14	4	24	8	...	...	214	8
5	5	15	5	25	10	...	...	215	10
6	6	16	6	26	12	...	...	216	12
7	7	17	7	27	14	...	...	217	14
8	8	18	8	28	16	...	...	218	16
9	9	19	9	29	18	...	...	219	18

Para mostrar este comportamiento en un rango mayor de valores de n, se incluye la Figura 1, donde `digprod(n)` es la operación producto de dígitos de n. Para esta operación se puede emplear cualquier plataforma de programación numérica. Similarmente a [2], donde utilizaron una función de *Mathematica* para obtener los números primos, aquí se hace el llamado a la función `primes()` de GNU Octave para después llamar a la función `digprod()` desarrollada. Las gráficas también fueron generadas en GNU Octave. Para obtener números más grandes se empleó Python. La función `nextprime` nos permite iniciar con valores conocidos (y grandes) de p_n y n; en este caso el código es el siguiente:

```
# -*- coding: utf-8 -*-

import math
from sympy import *
import sys

# FUNCION digprod()
def digprod(n):
```

```
  product = 1
  while (n != 0):
    product = product * (n % 10)
    n = n // 10
  return product

# DEFINIR TOTAL DE PRIMOS A PROBAR
Total=5*10**8
# DEFINIR p y n INICIALES
p=125265576973
n=5110999979
print('n inicial ',n)
print('p inicial',p)

k=1
while  k<Total:
    n+=1
    p=nextprime(p,1)
    k+=1
    prodig=digprod(p)
    if n==prodig:
        print('P_n SheldonProd  =',p, ', n=', n)

print('n final ',n)
print('p final ',p)
```

Código 1: Ejemplo en Python para comprobar la propiedad del producto. (Elaboración propia)

Con círculos en color rojo, se hacen notar los valores donde se cumpliría la propiedad del producto, pero sin ningún significado, puesto que son los mismos números iniciales de n en el rango de las unidades. En la línea punteada se muestran, a manera de comparación, los valores de n. Debe observarse que $\texttt{digprod}(n) < n$, para toda n.

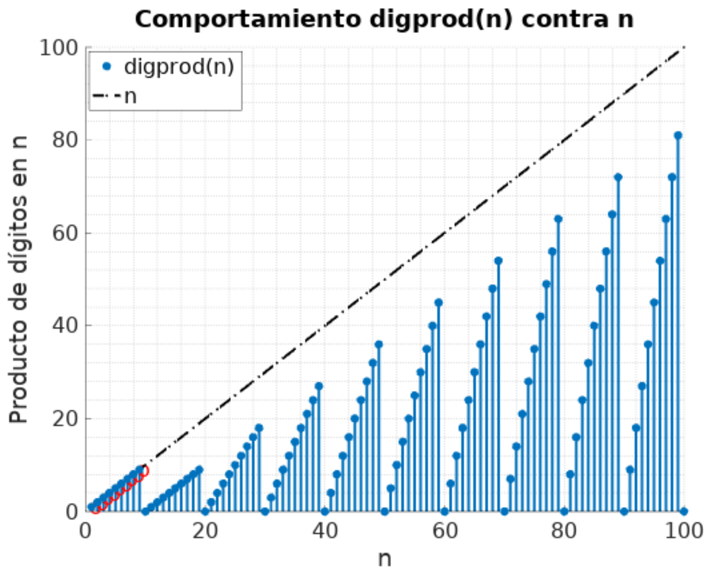

Figura 1: Productos de dígitos de n vs n. (Elaboración propia).

3.1. Comportamiento del producto de dígitos en números primos

Ahora verificamos si se cumple la propiedad del producto usando los números primos contra su índice n. Aunque se realizó la prueba para varios millones de números primos, en la Figura 2 se muestra inicialmente el resultado para $p \leq 100$, donde hay solamente 25 números primos. Además, en la misma figura se incluyen, para su comparación, los valores del índice n, los cuales quedan por debajo o por arriba del producto de dígitos y los valores primos p_n. Se han señalado en un círculo

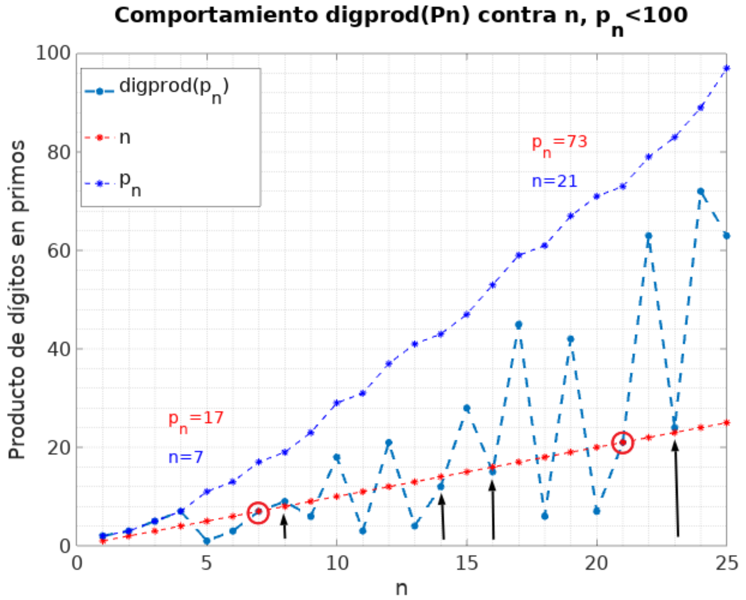

Figura 2: $\texttt{digprod}(p_n)$ vs n, $p_n \leq 100$. (Elaboración propia).

rojo los dos casos en que se cumple la propiedad del producto; las flechas negras indican los casos en que $\texttt{digprod}(p_n)$ es casi igual a n, siendo $p_8 = 19$, $(8, 9)$; $p_{14} = 43$, $(14, 12)$; $p_{16} = 53$, $(16, 15)$; y $p_{23} = 83$, $(23, 24)$. Los paréntesis indican $(n, \texttt{digprod}(p_n))$ y puede observarse que en algunos casos $\texttt{digprod}(p_n)$ es menor y en otros es mayor a n.

Además, los números primos también pueden diferenciarse entre los que tienen solamente unidades, como el 2, 3, 5 y 7; los que tienen decenas, como los que van del 11 al 97, y así sucesivamente en centenas, miles, etc. Entonces el comportamiento cuasi-cíclico observado para $\texttt{digprod}(n)$ también se observará en la operación $\texttt{digprod}(p_n)$. Para mostrar con mayor claridad el comportamiento cuasi-cíclico ascendente del producto de los dígitos de p_n, en la Figura 3 se muestra el comportamiento de $\texttt{digprod}(p_n)$ vs n, para $p \leq 10^6$, donde hay 78498 números primos. En la misma figura se agregaron los valores de n y de p_n. Es evidente que mientras el valor de p_n crece se hace más distante del valor de

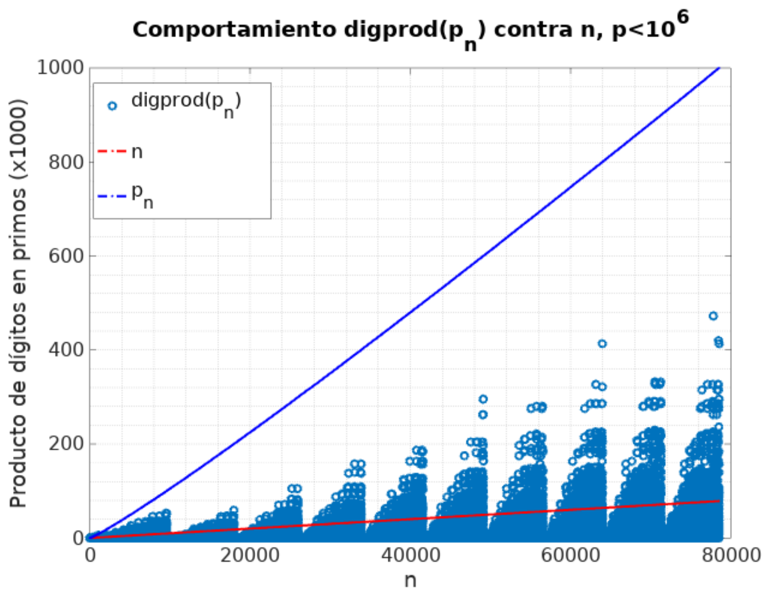

Figura 3: $\texttt{digprod}(p_n)$ vs n. (Elaboración propia).

su índice n. Sin embargo, el producto de dígitos toma valores que oscilan y pasan de estar por debajo de n, hasta valores máximos, muy por encima de su índice.

Conviene observar que $p_{n+1} > p_n$ no garantiza que $\texttt{digprod}(p_{n+1}) > \texttt{digprod}(p_n)$. Por ejemplo, vemos que $p_{25} = 97 > p_{24} = 89$, sin embargo se tiene que $\texttt{digprod}(97) = 63 < \texttt{digprod}(89) = 72$. Otro caso es: $p_{17} = 59$ y $p_{30} = 113$, donde nuevamente $p_{30} > p_{17}$, pero $\texttt{digprod}(17) = 45 > \texttt{digprod}(30) = 3$, es decir, aunque p_{30} sea casi el doble de p_{17}, el producto de sus dígitos no indica esa diferencia entre ellos.

4. Discusión y resultados

Por el comportamiento cuasi-cíclico de `digprod`(p_n), incluso para valores grandes de n, este podrá estar muy cerca de n nuevamente, aunque no coincidan. De hecho [2] menciona, en su página 10, que para $p_{35} = 149$, `digprod(149)=36` y hace la observación que el 149 está muy cerca de cumplir la propiedad del producto. Eso quizá no tiene sentido, ya que lo que importa es si la propiedad se cumple o no. Aun así, se realizó la prueba para los casos en los que `digprod`(p_n) está a $n \pm 1$, $n \pm 2$, $n \pm 3$, $n \pm 4$ y $n \pm 5$.

En la Tabla 2 se muestran los resultados de los productos de dígitos que están muy cerca de tener esa propiedad, como el caso reportado en [2]. Comenzando con $p = 11$, $n = 5$, hasta $p = 11037271871$ ($p \approx 10^{10}$), $n = 500000004$ ($n \approx 5 \times 10^8$).

Tabla 2: Productos de dígitos cercanos a n. (Elaboración propia).

`digprod()`	n	p_n	diferencia
3	6	13	-3
7	7	17	0
9	8	19	+1
6	9	23	-3
12	14	43	-2
15	16	53	-1
21	21	73	0
24	23	83	+1
36	35	149	+1
35	37	157	-2
42	39	167	+3
54	52	239	+2
63	68	337	-5
72	76	383	-4
126	122	673	+4
144	145	829	-1
162	158	929	+4
360	364	2459	-4
720	721	5449	-1
840	845	6547	-5
2016	2012	17489	+4
17640	17639	195787	+1
181440	181440	2475989	0

Se han marcado en color rojo los únicos tres casos en que $\texttt{digprod}(p_n) = n$. Más allá de estos resultados, se realizó una prueba, comenzando con una $n_{inicial} = 500000004$ con su correspondiente

$p_{inicial} = 11037271871$ hasta una $n_{final} = 1000000003$ y su $p_{final} = 22801763531$ y no aparecieron más productos de dígitos cercanos a su correspondiente n, ni siquiera en diferencia de cinco unidades.

Finalmente se realizó una prueba más, comenzando con un primo inicial $p_{5110999979} = 125265576973$ hasta un número primo final $p_{5210999978} = 127822057453$, es decir, en un total de 10^8 números primos, pero iniciando con n ligeramente mayor a 5×10^9, donde nuevamente no se encontró algún producto de dígitos que estuviera cerca de cumplir la propiedad del producto.

4.1. Observaciones adicionales

Se mostró, anteriormente, el comportamiento cuasi-cíclico ascendente de `digprod`(p_n). Ahora se muestra que la transformación de p_n en el producto de sus dígitos no es única. Si observamos algunos números primos en los cuales `digprod`(p_n)=3, tenemos los siguientes: [13, 31, 113, 311, 113, 11131, ...]. También podemos observar que hay más de un número primo cuyo producto de dígitos es igual a 21, como los de la siguiente lista: [37, 73, 137, 173, 13711, 13711, ...], así como en otros casos.

Entonces, plantear la aproximación de Gauss con el producto de dígitos de p_n y relacionarla a n, parece un paso arriesgado. Para hacer más claro esta observación, se calcularon aquellos números primos cuyo `digprod`(p_n) es igual a 3, 12, 21, y 181440, en el intervalo $2 \leq p_n \leq 10^8$, encontrando los siguientes resultados:

$$\#\{\text{digprod}(p_n)\text{=}3\} = 16$$
$$\#\{\text{digprod}(p_n)\text{=}12\} = 86$$
$$\#\{\text{digprod}(p_n)\text{=}21\} = 32$$
$$\#\{\text{digprod}(p_n)\text{=}181440\} = 14239$$

donde #{ } indica cantidad de casos, en un total de 5761455 números primos. Nótese que, así como para el 73 hay más primos cuyo `digprod`() es 21, para el último primo que cumple la propiedad del producto, hay otros 14238 números primos cuyo producto de dígitos coincide con 181440.

En la Tabla 3, se muestra un listado parcial de los 32 números primos cuyo producto de dígitos es igual a 21. Por motivos de espacio no se incluye la lista completa para este caso, ni las tablas para los otros casos estudiados, donde para el último, la lista sería de 14239 números.

Considerando los resultados anteriores, se puede establecer la siguiente:

Observación 1

La operación o transformación de los números primos en el producto de sus dígitos no es única.

Es decir `digprod`(p_n) sería una función no inyectiva.

A partir de la Observación 1, se deduce la siguiente:

Observación 2

Al transformar los números primos en el producto de sus dígitos, estos pierden su identidad y, por lo tanto, no se puede establecer a partir del producto de sus dígitos una relación de cada uno a su índice n.

Finalmente, como consecuencia de las Observaciones 1 y 2, se puede establecer la siguiente:

Tabla 3: Números primos, $p_n \leq 10^8$, con $\texttt{digprod}(p_n) = 21$. (Elaboración propia).

n	p_n	#dígitos
12	37	2
21	73	2
33	137	3
40	173	3
66	317	3
1354	11173	5
⋮	⋮	⋮
15596	171131	6
26930	311711	6
57394	711131	6
733416	11111173	8
⋮	⋮	⋮
4179548	71111311	8
4179633	71113111	8
4190589	71311111	8
Total = 32.		

Proposición 1

No existe una relación funcional inyectiva entre $\texttt{digprod}(p_n)$ y n, por lo tanto, no es reversible, i.e., no tiene relación con su índice n.

$$p_n \underset{\nLeftarrow}{\Longrightarrow} digprod(p_n)$$

Además, de acuerdo a los resultados mostrados en las Figuras 2 y 3, vemos que $digprod(p_n)$ puede ser mayor a n desde mucho antes que $p_n = 10^{45}$; agregando que la ec (2) no establece una relación matemática válida entre $\texttt{digprod}(p_n)$ y n.

5. Cambio de convención: variación a la CS

Como la CS se origina exclusivamente en una coincidencia numérica de dos entidades que no tienen una relación matemática conocida, se muestra que al cambiar ligeramente la numeración dada a los números primos, dicha conjetura se viene abajo.

Para la siguiente discusión, partimos de un cambio en la forma convencional en que se asigna el ordenamiento a los números primos. La numeración de los primos podría ser meramente artificial; no hay regla. Se pide al lector que acepte, como un hecho, que el valor de un número primo no se dio por su índice en la lista de números primos; al contrario, su índice se dio por el orden de aparición.

Para mostrar que el ordenamiento de los números primos podría ser artificial o arbitrario, se hará el siguiente ejercicio. Primero cabe aclarar que decir "arbitrario" no se toma en su acepción despectiva, sino como algo determinado a voluntad. En ese sentido, no hay una única regla o norma. Así pues, podemos definir, sin violar necesariamente la definición de número primo, una lista no convencional de números primos como:

$$\mathbf{P}_{nc} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots p_n\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$$

donde $\mathbf{P}_{nc}$ es la lista (conjunto ordenado de números primos) "no convencional" y p_n es el n-ésimo número primo.

Para justificar esta lista no convencional, repasemos varios conceptos: Los divisores de cualquier número primo, denotados como $Div()$, son solamente dos:

$$Div(p_n) = \{1, p_n\}$$

Arbitrariamente, para este ejercicio, decidimos que $p_1 = 1$ cumple con esta propiedad. En otras palabras, aceptamos que $p = 1$ tiene dos divisores: 1 y él mismo, que también es uno. Cuando calculamos los divisores de cualquier número primo, se consideran solamente $\{\frac{p_n}{1}, \frac{p_n}{p_n}\}$. En el segundo divisor, no causa extrañeza que coincida p_n con su divisor. De la misma manera, se propone que la coincidencia de $p_n = 1$ con su divisor 1, tampoco se vea extraña (ver explicación en el Apéndice A).

Entonces, si el primer número primo es el 1, el segundo es 2, etc., siguiendo esta convención, la conjetura de Sheldon se modificaría; aunque seguramente aparecerán algunos primos que cumplan la propiedad del producto. Con el nuevo orden de $\mathbf{P}_{nc}$, se realizó la búsqueda y se encontraron, entre los primeros 5761456 números primos, aquellos que cumplirían la propiedad del producto. Estos, omitiendo los tres primeros primos, se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4: Productos de dígitos con $\mathbf{P}$ no convencional. (Elaboración propia).

n	p_n	`digprod`(p_n)
9	19	9
24	83	24
36	149	36
17640	195787	17640

Para confirmar, en esta lista no convencional, que en los casos donde se cumple la propiedad del producto no se cumple la propiedad especular, se invirtió el orden de los dígitos de n en cada caso y se encontraron los siguientes números primos: $p_{42} = 179$, $p_{63} = 293$, $p_{4671} = 44953$, los cuales no coinciden con el p_n espejo y, por lo tanto, no son primos Sheldon. Es decir, para el orden no convencional de los números primos, y en el rango $p_n \leq 10^8$, no hay ni un solo primo Sheldon.

6. Conclusión

En este trabajo, se realizaron algunos cálculos numéricos para revisar la CS. Se verificó la prueba del producto de los dígitos de los números primos hasta $p \leq 1.25 \times 10^{11}$, encontrándose solamente tres casos. Más que hacer una búsqueda de números primos que cumplieran la propiedad del producto, se observó el comportamiento cuasi-cíclico ascendente de `digprod`(p_n). Con ello se pudieron establecer algunas observaciones. Pero sobre todo, se mostró que si por una simple convención se reasigna el ordenamiento de los números primos, la CS deja de ser válida.

Otra conclusión es que, aun aceptando que los números primos y su índice puedan tener una relación matemática exacta (hasta ahora desconocida), por la Observación 1 y la Observación 2, el producto de los dígitos de p_n no tiene relación alguna con n, más allá de una rara coincidencia. Por ejemplo, el número primo $p = 73$ no es el único cuyo producto de dígitos es 21. Por lo tanto, la CS es solo una coincidencia numérica, o una curiosidad matemática.

Una implicación más amplia de este trabajo es que resulta predecible que no hay una sola función para asignar de manera exacta un número primo desconocido a un índice n dado.

Como variaciones a la CS (basándose en simples coincidencias), se podrían establecer otras, mucho más fáciles de demostrar, como señalar que solo hay dos números primos que cumplen $p_n = n + 1$, y otra más al decir que solamente hay dos números primos en cuyo caso $p_n = 3n + 1$.

A. Concepto no ordinario de divisores

Aunque resulta obvia la razón para desechar al número 1 como primo, se propone un ejercicio mental para justificar la propuesta anterior, es decir, que la CS es solamente la observación de una coincidencia numérica.

Si tenemos dos monedas, no importa su denominación, para dividirlas por partes iguales entre 2 niños, obviamente corresponde una moneda a cada uno. Pero si solamente tenemos un niño, en realidad no estamos haciendo división alguna al entregarle las dos monedas a él. Por esta razón decir que $\frac{2}{1}$ es el primer divisor de 2, cuando en realidad no dividimos es tan válido como decir que $\frac{1}{1}$ es también una división, de modo que con ello justificamos que el 1 sea considerado, por mera convención y solo para este ejercicio, como el primer número primo, es decir, tiene dos divisores. El segundo divisor coincide consigo mismo $\frac{p_n}{p_n}$, como en el resto de los números primos. Entonces, si adoptamos la convención que en $\frac{p_n}{1}$ no estamos haciendo división alguna, como en el caso de las dos monedas para un solo niño, podemos decir que todos los números primos solamente tienen un divisor, es decir, él mismo. Esto podría justificar la lista de $\mathbf{P}_{nc}$ que comienza con $p = 1$.

Contribución de las personas autoras: Este trabajo fue realizado únicamente por el autor Gerardo Miramontes de León, quien se encargó de todas las etapas del estudio y desarrollo del artículo.

Accesibilidad de datos: Los datos fueron generados como se describe en el artículo, por lo que su accesibilidad solo depende de la herramienta de cómputo descrita.

7. Bibliografía

[1] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, "Sharper bounds for the chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$," *MATHEMATICS OF COMPUTATION*, vol. 29, no. 129, pp. 243–269, January 1975.

[2] C. Pomerance and C. Spicer, "Proof of the sheldon conjecture," *American Mathematical Monthly*, vol. 121, no. 1.

[3] J. Byrnes, C. Spicer, and A. Turnquist, "The sheldon conjecture," *Math Horizons*, vol. 23, no. 2, pp. 12–15, 2015.

[4] L. Chebyshev, "Mémoire sur les nombres premiers," *J. Math. Pures Appl.*, vol. 17, pp. 366–390, 1852.

[5] P. Dusart, "Estimates of some functions over primes without r.h." 2010.

[6] C. Axler, "New estimates for some functions defined over primes," 2017.

[7] M. Cipolla, "La determinazione assintotica dell' nimo numero primo," *Rend. Acad. Sci. Fis. Mat. Napoli*, vol. 3, no. 8, pp. 132–166, 1902.

[8] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, "Approximate formulas for some functions of prime numbers," *Illinois J. Math. 6*, no. 1, pp. 64–94, 1962.