Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 25, No 1. Agosto, 2024 – Febrero, 2025

ISSN 1659 -0643
DOI: 10.18845/meij.v25i1.7094

Una interpretación geométrica de los Axiomas de Peano como estrategia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de los números naturales

| A geometric interpretation of the Peano Axioms as a didactic strategy for teaching and learning natural numbers |

Jesús Guillén Ruiz
jesus.guillen@isfodosu.edu.do
Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña
Santo Domingo de los Caballeros, República Dominicana

Dirwin Muñoz Pinto
dirwin.munoz@isfodosu.edu.do
Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña
Santiago de los Caballeros, República Dominicana

Pedro Peña Duarte
pedro.pena@isfodosu.edu.do
Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña
Licey al Medio, República Dominicana

Recibido: 10 abril 2023 Aceptado: 15 marzo 2024

Resumen: Los axiomas de Peano son un conjunto de proposiciones que permiten definir de manera formal el conjunto de números naturales. En estos axiomas, Peano rescata la esencia de contar objetos y lo materializa asumiendo la existencia de un conjunto, de una función en dicho conjunto (a la que llama sucesor) y un axioma de inducción. En este trabajo se hace una representación e interpretación geométrica de cada uno de estos axiomas que permiten comprender la independencia y necesidad de cada uno de ellos, lo que facilita dar el rigor conceptual de los mismos haciendo uso del lenguaje matemático. Por último, usando la geometría euclidiana, se hace una construcción geométrica de un sistema de números naturales sobre una recta.

Palabras Clave: Números naturales, geometría, sucesor, Axiomas de Peano, Inducción.

Abstract: Peano's axioms are a set of propositions that allow a formal definition of the set of natural numbers. In these axioms, Peano rescues the essence of counting objects and materializes it by assuming the existence of a set, of a function in this set (which he calls successor) and an axiom of induction. In this work a geometrical representation and interpretation of each of these axioms is made,

[1]Jesús Ramón Guillén Ruiz. Profesor de Matemáticas en el Recinto Emilio Prud'Homme del Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña. Dirección postal: Villa Olga, Santiago de los Caballeros, República Dominicana. Código Postal: 51000. Correo Electrónico: jesus.guillen@isfodosu.edu.do.

[2]Dirwin Alfonzo Muñoz Pinto. Profesor de Matemáticas en el Recinto Emilio Prud'Homme del Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña. Dirección postal: La Esmeralda, Santiago de los Caballeros, República Dominicana. Código Postal: 51000. Correo Electrónico: dirwin.munoz@isfodosu.edu.do.

[3]Pedro Leonardo Peña Duarte. Profesor de Matemáticas en el Recinto Luis Napoleón Nuñez Molina del Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña. Dirección postal: Licey-Moca Km10, Licey al Medio, República Dominicana. Código Postal: 51000. Correo Electrónico: pedro.pena@isfodosu.edu.do.

which allows understanding the independence and necessity of each one of them, which facilitates giving the conceptual rigor of them by making use of mathematical language. Finally, using Euclidean geometry, a geometric construction of a system of natural numbers on a straight line is made.

Keywords: Natural numbers, Geometry, Successor, Peano's axioms, Induction.

1. Introducción

Los axiomas de Peano constituyen enunciados que establecen la esencia de los elementos en un conjunto denominado Números Naturales. A pesar de que la comprensión de estos axiomas no demanda un conocimiento profundo de estructuras matemáticas complejas, resulta relevante, especialmente desde una perspectiva pedagógica, considerar enfoques alternativos. La inclusión de recursos visuales como gráficos cobra relevancia al permitir la representación visual de conceptos y relaciones matemáticas, lo que enriquece significativamente la experiencia educativa.

Luna (2002) manifiesta que el concepto de número natural ha sido motivo de fuertes controversias filosóficas; Frege y Russell propusieron una definición para el número natural tres con la cual Henry Poincaré no estuvo de acuerdo objetando que para escribirla es necesario saber de antemano lo que significa tres. Russell, por su parte, replicó diciendo que no estaba interesado si las nociones lógicas son psicológicamente anteriores a las nociones aritméticas, sino en un sentido estrictamente lógico. En el mismo orden de ideas, Luque (2002) comenta que para Russell la aritmética es reducible a la lógica y la teoría de conjuntos, y que su definición era buena en el lenguaje de la lógica y la teoría de conjuntos.

Como se ve, la naturaleza de los números naturales, y en particular su relación con los conjuntos, es una cuestión que ha interesado tanto a las matemáticas como a la filosofía de las matemáticas. De hecho, la conceptualización actual es relativamente reciente (data de finales del siglo XIX y principios del XX).

Según Luque (2002), en 1889 Giuseppe Peano, en un folleto de unas treinta páginas, intitulado "Aritmetices principia, nova methodo exposita", que se traduce por "Nuevo método de exposición de los principios de la aritmética", deshace la controversia estableciendo que desde un punto de vista lógico no interesa qué es un número natural, sino la manera en como ellos se relacionan entre sí; es decir, son las reglas producto de sus interacciones las que determinan su naturaleza y no los objetos en sí; y esto condujo a Peano a establecer un sistema, conocido como el sistema de Peano, para el cual introduce un conjunto $\mathbb{N}$ (al que llama el conjunto de los Números Naturales, una relación que llama "sucesor de" (la cual fue su idea fundamental) y cinco axiomas que permiten definir las reglas que determinan como interactúan los elementos del conjunto $\mathbb{N}$.

Por otro lado, según Godino et al (2009) es importante distinguir entre el uso informal y el formal de los números para quienes se dedican a su enseñanza. Dichos autores mencionan que los números son herramientas esenciales en nuestra vida cotidiana y profesional, por lo cual constituyen un tema de estudio imprescindible en la escuela desde los primeros niveles y es fundamental que el maestro comprenda la utilidad de los números, los sistemas de numeración, los procedimientos de cálculo, así como el origen y naturaleza de los números. En consecuencia, Godino et al (2009) indican que es esencial (para cualquier estudiante o maestro) distinguir entre los usos prácticos e "informales" de los números (responder cuestiones tales como, ¿cuántos elementos hay? o ¿qué lugar ocupa un objeto?), y los usos "formales" (¿qué son los números? y ¿cómo se construyen los sistemas numéricos?); pero para ello lo primero que debe preguntarse es ¿qué son los números naturales?, y como respuesta no limitarse a recitar la sucesión $1, 2, 3, \cdots$, sino ser capaces de discernir entre el concepto, los símbolos, las palabras mediante los cuales se expresan; y por supuesto; ser capaces de dar una definición de la noción de "número natural", la cual es relativa a los fundamentos de la matemática como cuerpo organizado de conocimientos.

Cabe resaltar que para Mejía (2003), Dutari (1980), Burger (1965), Olivares (2017), los números naturales se pueden definir axiomáticamente a través de otro conjunto de axiomas que no sean los de Peano, pero como éstos son los que más corresponden al concepto intuitivo de contar (que se quiere formalizar), hacen que su estudio y comprensión sea esencial para quienes se están formando en el área de las matemáticas o se dedican a su enseñanza; por tanto, encontrar estrategias didácticas que faciliten su enseñanza y aprendizaje es realmente significativo.

Según Godino et al (2009) el aprendizaje de los fundamentos gramaticales del lenguaje matemático, en particular los axiomas de Peano son importantes en la enseñanza de la matemática, ya que por su simplicidad y elegancia en la manera como presentan dichos axiomas, se convierten en estrategias didácticas para el aprendizaje de estos axiomas.

En este trabajo se hace una introducción simple pero muy significativa de los axiomas de Peano, a través de la representación e interpretación geométrica, dándole significado a cada uno de estos axiomas y a una teoría que tiende a ser abstracta y difícil de comprender.

2. Axiomas de Peano: Interpretación Geométrica

En el **sistema de Peano** son dados como objetos no definidos o términos primitivos, un conjunto $\mathbb{N}$, al que llamamos el conjunto de los Números Naturales, y cuyos elementos son llamados "Números Naturales", un elemento llamado "uno", y una relación "sucesor de", los cuales, permiten definir axiomáticamente las reglas que determinan estos axiomas. En ésta construcción no se dice qué son los números o como son los objetos que están en el conjunto de números naturales; a cambio, se dice qué propiedades satisfacen esos objetos.

Axiomas de Peano. *Existe un conjunto, que se denota por $\mathbb{N}$ y que se llamará el conjunto de los números naturales, que satisface las siguientes propiedades:*

AP.1. *Existe un elemento al que se denotará por T, tal que $T \in \mathbb{N}$.*

AP.2. *Todo elemento $n \in \mathbb{N}$ tiene un único sucesor en $\mathbb{N}$, al que se denotará por $s(n)$.*

AP.3. *T no es el sucesor de ningún elemento de $\mathbb{N}$.*

AP.4. *Si hay dos elementos n y m con el mismo sucesor, entonces n y m son el mismo elemento.*

AP.5. *Si T pertenece a un subconjunto de elementos de $\mathbb{N}$, y dado un elemento cualquiera, el sucesor también pertenece al conjunto, entonces todos los elementos de $\mathbb{N}$ pertenecen a ese conjunto. Este último axioma se conoce como el principio de inducción matemática.*

En lo que sigue este modelo es llamado ***Sistema de Peano****.*

Teorema 1

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a. Si T pertenece a un subconjunto de elementos de $\mathbb{N}$, y dado un elemento cualquiera, el sucesor también pertenece al conjunto, entonces todos los elementos de $\mathbb{N}$ pertenecen a ese conjunto.

b. Sea $\mathbf{P}$ una propiedad referente a los números naturales tal que T la satisface, y cada vez que un natural n satisface dicha propiedad, se verifica que $s(n)$ también la satisface, entonces la propiedad $\mathbf{P}$ es válida para todos los números naturales.

Demostración. $a. \Rightarrow b.$ Sea $\mathbf{P}$ una propiedad referente a los números naturales tal que T la satisface, y cada vez que un natural n satisface dicha propiedad, se verifica que $s(n)$ también la satisface. Consideremos $X := \{n \in \mathbb{N} : n \ \ satisface \ \ la \ \ propiedad \ \ \mathbf{P}\}$. Por hipótesis T satisface la propiedad $\mathbf{P}$; por tanto, $T \in X$. Ahora, si $n \in X$, entonces n también satisface dicha propiedad; por tanto, $s(n)$ satisface la propiedad $\mathbf{P}$. Esto implica que $s(n) \in X$. Así, $X = \mathbb{N}$. En consecuencia, la propiedad $\mathbf{P}$ es válida para todos los números naturales.

$b. \Rightarrow a.$ Sea $X \subseteq \mathbb{N}$, el cual satisface que:

1. $T \in X$, y
2. si $n \in X$, entonces $s(n) \in X$.

Sea $\mathbf{P}$ la propiedad $n \in X$. Por 1, es claro que T satisface la propiedad $\mathbf{P}$. Note que 2 garantiza que cada vez que $n \in \mathbb{N}$ satisface la propiedad $\mathbf{P}$ se obtiene que $s(n)$ satisface la propiedad $\mathbf{P}$. En consecuencia, la propiedad $\mathbf{P}$ es válida para todos los números naturales; es decir, $X = \mathbb{N}$.

□

El teorema 1 demuestra que el quinto axioma de Peano es equivalente a la versión clásica del principio de inducción, lo que permite su aplicación en cualquiera de sus versiones sin que se tenga que resaltar cuál se está utilizando.

En los axiomas de Peano se establece que todo número natural tiene un sucesor, el cual es también un número natural. Esta idea se puede ilustrar mediante un gráfico o grafo, en el que cada número natural es representado por un punto, conocido como nodo, y su sucesor es representado por otro nodo, los cuales están conectados mediante una flecha con origen el nodo anterior; es decir, si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}$ tal que $s(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, esto se representa con una flecha, la cual es llamada **arista**, que tiene origen en $\mathbf{a}$ y llega a $\mathbf{b}$; a $\mathbf{a}$ se llama nodo inicial y $\mathbf{b}$ nodo final (ver Figura 1).

Figura 1: Representación donde se indica que $\mathbf{b}$ es el sucesor de $\mathbf{a}$. Elaboración propia.

Ahora, se hará una interpretación del significado de cada uno de los axiomas antes dados, con el objetivo de determinar la forma que puede tener el grafo asociado a un sistema de números naturales; para esto, en lo que sigue si $\mathbf{a} \in \mathbb{N}$ se denota por $\mathbf{a}'$ al sucesor de $\mathbf{a}$. Por tanto, por el axioma $AP.2$, si $\mathbf{a} \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathbf{a}' \in \mathbb{N}$. Note que al aplicar el sucesor a un número natural se obtiene otro número natural; de donde se observa que éste axioma permite construir un nuevo número natural a partir del anterior.

Como el axioma $AP.1$ garantiza la existencia de un elemento en el conjunto $\mathbb{N}$, denotado por T, este elemento se convertirá en el generador de los números naturales junto con la actuación del sucesor cuya existencia la garantiza el axioma $AP.2$.

Por lo antes expuesto el sucesor de T, se escribe T', el sucesor del sucesor de T será $(T')'$, el cual se denotará por $T^{(2)}$. De modo que, el sucesor del sucesor del sucesor de T, será $(T^{(2)})'$, y será denotado por $T^{(3)}$. En general, el sucesor de $T^{(n)}$ se denota por $T^{s(n)}$. En la Figura 2 se representa lo antes indicado.

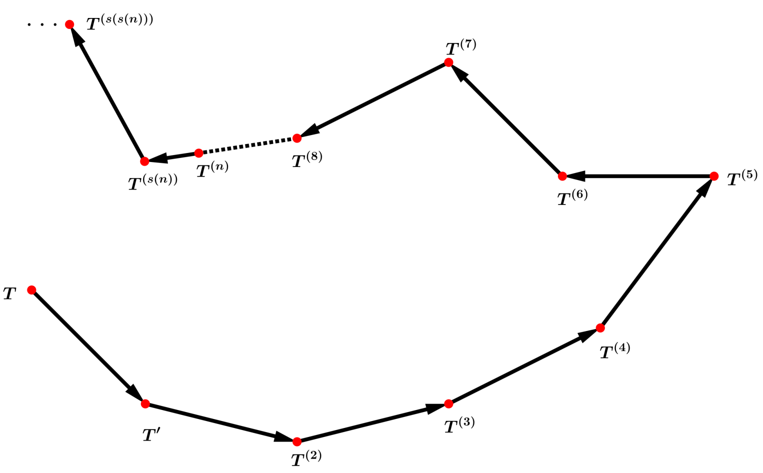

Figura 2: Representación de una secuencia de sucesores de sucesores. Elaboración propia.

Debido a la interpretación gráfica proporcionada, resulta pertinente investigar la posibilidad de que alguno de los siguientes escenarios pueda tener lugar:

Caso 1: En este caso T es sucesor del $T^{(7)}$, lo cual contradice el axioma $AP.3$. Por tanto, este caso no puede ocurrir (ver Figura 3).

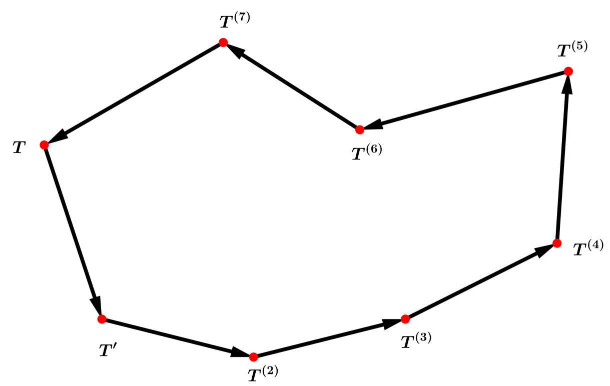

Figura 3: Forma de gráfico si T es sucesor de algún otro número natural. Elaboración propia.

Caso 2: En este caso no puede ocurrir ya que el elemento $T^{(6)}$ tiene dos sucesores distintos, es decir; $T^{(7)}$ y $T^{(8)}$, lo cual contradice al axioma $AP.2$ (ver Figura 4)

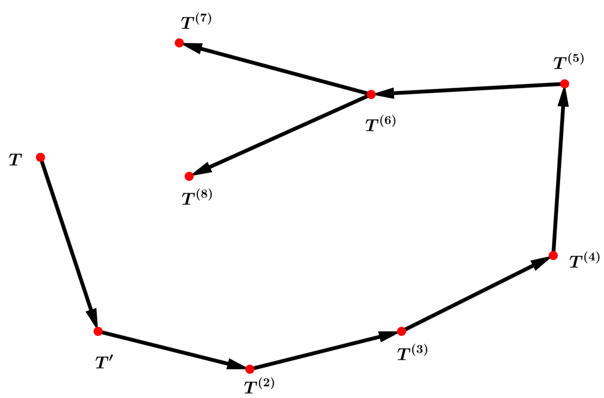

Figura 4: Forma del gráfico si algún elemento tiene dos sucesores distintos. Elaboración propia.

Caso 3: En el diagrama de la Figura 5 se puede notar que $s(T^{(2)}) = T^{(3)} = s(T^{(6)})$, lo cual implica, por el axioma $AP.4$, que $T^{(2)} = T^{(6)} = s(T^{(5)})$. Por tanto; el diagrama queda como en la **Figura 6**.

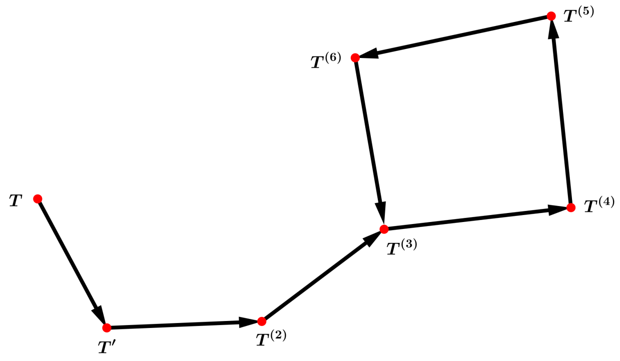

Figura 5: Forma del gráfico si $T^{(3)}$ es sucesor de algún otro número natural. Elaboración propia.

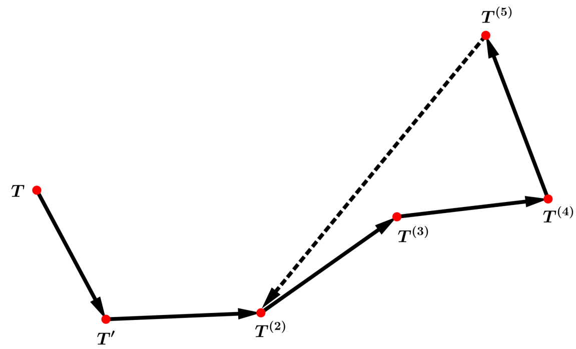

Figura 6: Como el caso anterior no puede ocurrir el gráfico debe tomar esta forma; es decir, $T^{(2)}$ sucesor de $T^{(5)}$. Elaboración propia.

Ahora, se tiene que $s(T') = T^{(2)} = s(T^{(5)})$, de donde se deduce, por el axioma $AP.4$, que $T' = T^{(5)}$. Como $T' = T^{(5)} = s(T^{(4)})$ el diagrama queda como en la Figura 7.

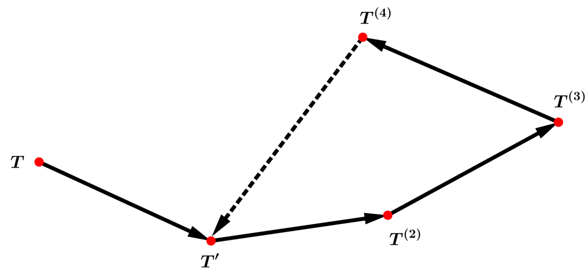

Figura 7: Forma del gráfico cuando $T' = s(T^{(4)})$. Elaboración propia.

Observe que haciendo un análisis análogo al caso anterior, se tiene que $s(T) = T' = s(T^{(4)})$; luego, por el axioma $AP.4$, $T = T^{(4)}$. Como $T = T^{(4)} = s(T^{(3)})$, se concluye que T es sucesor de otro número natural (ver Figura 8), lo cual contradice el axioma $AP.3$.

Cabe destacar que lo anterior no es una demostración de que el axioma $AP.4$ soluciona todos los problemas de este tipo. Sin embargo, para cualquier diagrama se puede seguir este método para llegar a una contradicción.

Pero entonces, ¿cómo se puede asegurar que ésta manera de razonar permite llevar a una contradicción cualquier diagrama que contenga un ciclo? Es decir, si dibujas un diagrama de cualquier tamaño con un ciclo en algún lugar, qué asegura que, haciendo el mismo razonamiento anterior, puedo llegar a una contradicción.

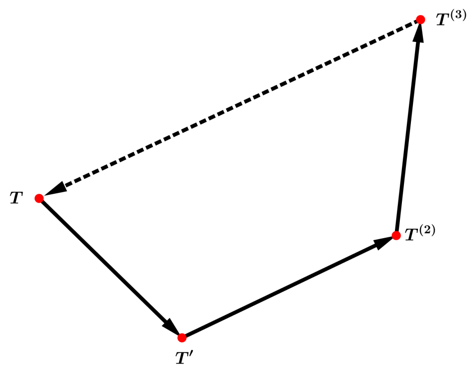

Figura 8: Este gráfico indica que el caso 3 no puede ocurrir ya que implicaría que T es sucesor de otro número natural. Elaboración propia.

Es de resaltar que se entiende por "**ciclo**" a una secuencia de eventos, acciones o etapas que se repiten en un patrón recurrente, regresando al punto de partida o a una etapa previamente experimentada. Por tanto, en lo que sigue, decir que un diagrama presenta **ciclos** significa que existe un nodo que es nodo final de al menos dos aristas distintas.

Caso 4: Se comienza considerando el caso en que el sucesor de T es sucesor de dos números naturales; es decir, ¿qué pasa si al sucesor de T llegan dos flechas?, ver Figura 9.

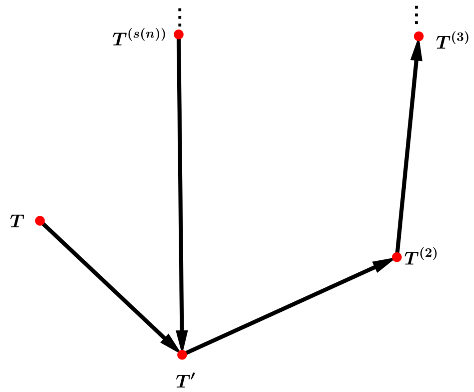

Figura 9: Este gráfico indica que si T' es sucesor de dos números naturales, entonces T es sucesor de otro natural, lo cual es una contradicción. Elaboración propia.

Razonando como en los casos anteriores, se tendría que $s(T) = s(T^{s(n)})$, luego; por el axioma $AP.4$, se infiere que $T = T^{s(n)}$, lo cual contradice el axioma $AP.3$ Por tanto, este caso no puede ocurrir.

Caso 4.1: Ahora, se plantea la pregunta: ¿qué pasa si a $T^{(2)}$llegan dos flechas o aristas? (ver Figura 10)

En este caso, se tiene que $s(T') = T^{(2)} = s(T^{s(n)})$; por tanto, $T' = T^{s(n)} = s(T^{(n)})$, lo que implicaría que se podría re-dibujar el diagrama anterior como en el **Caso 4**(ver Figura 11), con lo que nuevamente se estaría llegando a una contradicción con el axioma $AP.3$. Por tanto, este caso tampoco puede ocurrir.

Note que así se podría continuar estudiando cada caso y siempre, mediante el mismo razonamiento, llegar a una contradicción con el axioma $AP.3$. Entonces se puede plantear la pregunta ¿qué nos asegura que no ocurran ciclos en el diagrama?, la respuesta a esto la da el axioma $AP.5$. En efecto, ya se verificó que el diagrama no puede presentar ciclos en el sucesor de T y en el sucesor del sucesor de T, es decir; en $T^{(2)}$. Se supone que se ha verificado hasta el elemento $T^{(k)}$ que si el diagrama presenta un ciclo, entonces se llega a una contradicción con el axioma $AP.3$. Ahora, considere la Figura 12, donde se presenta un ciclo en el elemento $T^{s(k)} = s(T^{(k)})$:

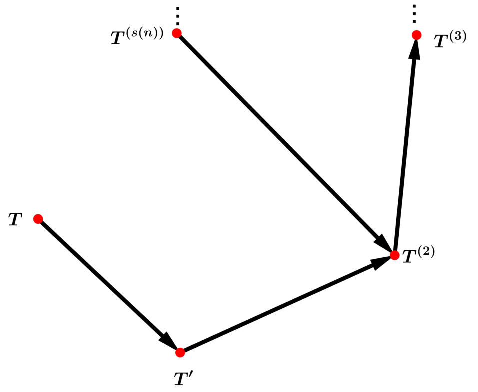

Figura 10: Este gráfico indica que si $T^{(2)}$ es sucesor de dos números naturales, entonces T' es sucesor de dos números naturales, lo cual por el caso anterior no puede ocurrir. Elaboración propia

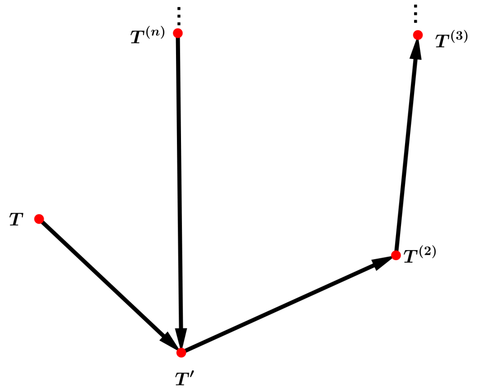

Figura 11: Forma que toma figura 10 si $T^{(2)}$ es sucesor de dos números naturales. Note que $T' = s(T^{(n)})$ si ocurre que $T^{(2)} = s(T^{s(n)})$. Lo que implica que este caso no puede ocurrir. Elaboración propia.

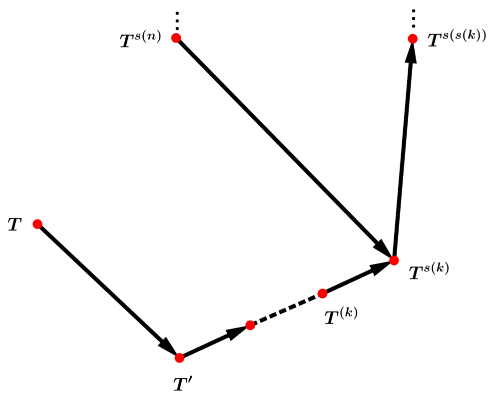

Figura 12: Forma del gráfico con un ciclo en el número entero $T^{s(k)}$. Elaboración propia.

Como $s(T^{(k)}) = T^{(s(k))} = s(T^{(s(n))})$, por el axioma $AP.3$, se tiene que $T^{(k)} = T^{(s(n))} = s(T^{(n)})$, por tanto; el diagrama queda con un ciclo en $T^{(k)}$, ver Figura 13.

Luego, por la hipótesis, se tiene que esto lleva a una contradicción con el axioma $AP.3$. Por tanto, por el axioma $AP.5$, se infiere que ningún diagrama puede tener ciclos.

De este modo, los números naturales pueden interpretares como un diagrama o grafo formado por conjuntos de puntos y aristas que contienen un nodo inicial que no es nodo final de ninguna arista,

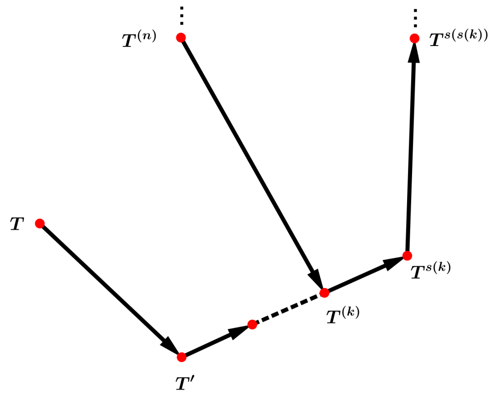

Figura 13: Forma que toma el gráfico en el caso que $s(T^{(k)}) = T^{(s(k))} = s(T^{(n)})$; es decir, en el caso que $T^{s(k)}$ sea sucesor de dos números naturales. Elaboración propia.

el cual es llamado origen, donde cada nodo distinto del origen es nodo final de una única arista en el grafo, y al mismo tiempo cada nodo es nodo inicial de una única arista.

Todo lo antes expuesto motiva la siguiente:

Definición 1

Diremos que un diagrama está asociado a un **sistema de Peano** si:

D.1 el diagrama tiene un origen;

D.2 para cada nodo existe una única arista para la cual dicho nodo es un nodo inicial;

D.3 para cada nodo distinto del origen existe una única arista para la cual dicho nodo es un nodo final.

Corolario 1 Si un diagrama está en correspondencia con un **sistema de Peano**, entonces no posee ciclos.

Demostración. Si el diagrama posee algún ciclo existe un nodo que es nodo final de al menos dos aristas distintas. Por definición, es claro que, este nodo no puede ser el origen. Ahora, si dicho nodo es distinto del origen contradice D.3.

□

3. Construcción Geométrica

A partir del análisis presentado en la sección anterior, se puede concluir que el axioma $AP.5$, es quien garantiza la infinitud de los números naturales. Además, que ninguna representación gráfica o geométrica de este conjunto puede tener ciclos o lazos; por tanto, cualquier representación gráfica de éste conjunto puede, intuitivamente, extenderse y superponerse en una línea recta.

Definición 2

El primer elemento T de $\mathbb{N}$ se denotará por el símbolo 1, y se llamará **uno**, al sucesor del 1 se denotará por el símbolo 2 y se llamará **dos**, al sucesor del 2 se denotará por el símbolo 3 y se llamará **tres**, al sucesor del 3 se denotará por el símbolo 4 y se llamará **cuatro**, al sucesor del 4 se denotará por el símbolo 5 y se llamará **cinco**, al sucesor del 5 se denotará por el símbolo 6 y se llamará **seis**, al sucesor del 6 se denotará por el símbolo 7 y se llamará **siete**, al sucesor del 7 se denotará por el símbolo 8 y se llamará **ocho**, y al sucesor del 8 se denotará por el símbolo 9 y se llamará **nueve**.

Por la definición anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} s(1) &:= 2 \\ s(2) &:= 3 \\ s(3) &:= 4 \\ s(4) &:= 5 \\ s(5) &:= 6 \\ s(6) &:= 7 \\ s(7) &:= 8 \\ s(8) &:= 9. \end{aligned}$$

Si bien es evidente que definir cada número natural de manera individual se torna imposible, es esencial reconocer que los números definidos son fundamentales para la representación de cada uno de ellos.

Intuitivamente el axioma $AP.5$, implica que todo número natural puede obtenerse a partir del 1, tomando su sucesor $s(1)$, el sucesor de éste, $s(s(1))$ y así en adelante. Observe que la expresión "así en adelante " carece de sentido o de rigor matemático, pero naturalmente es una expresión que deja implícito el uso o aplicabilidad del principio de inducción. Es importante resaltar que al utilizar esta expresión, da la impresión de que el concepto en cuestión está definido para todos los números naturales. Esta noción se expresa también mediante giros lingüísticos como "así sucesivamente," "así indefinidamente," " n veces," "tantas veces como deseemos," y similares, lo que implica un proceso recursivo. Asimismo, nos da la sensación de que esta lista podría continuar de manera ininterrumpida, y que no se requiere más especificaciones para tener una definición completa de la colección. En consecuencia, debido a su amplia aplicabilidad en la obtención de resultados de gran relevancia, es esencial subrayar que no es menos importante definir objetos de manera inductiva que demostrar proposiciones mediante el método de inducción. Este proceso es conocido como el ”Principio de Definición por Recurrencia”(también denominado método de inducción o recurrencia, principio de definición recursiva, principio de definición inductiva, principio de definición por inducción). Este principio nos habilita para definir conceptos tan esenciales como la adición y el producto en los números naturales. Es relevante destacar que el Principio de Definición por Recurrencia fundamenta de manera formal la impresión antes mencionada y establece que no se requiere nada adicional para tener una definición completa del concepto para todos los números naturales. En consecuencia, por el axioma $AP.5$ y la definición 2,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ..., n, s(n), ...\}$$

donde los puntos suspensivos indican que podemos continuar este proceso de manera recursiva tomando siempre el sucesor del número natural que acabamos de escribir.

Observación 1

(**Representación Geométrica de $\mathbb{N}$**)
Lo antes expuesto permite hacer una construcción geométrica del conjunto de los números naturales, ver Figura 14. Se toma una recta l y un segmento $\overline{OU}$ paralelo a l que no está contenido en dicha recta. Escoja un punto A cualquiera en la recta l. Se traza por U una recta paralela a la recta que pasa por O y A. Se denota por B el punto de corte de esta recta con la recta l. Se asigna a los puntos A y B los números naturales 1 y 2, respectivamente. Se traza por U una recta paralela a la recta que pasa por O y B. Se denota por C el punto de corte de esta recta con la recta l, y se asigna a este punto el número natural 3. Ahora, se traza por U una recta paralela a la recta que pasa por O y C. Se denota por D el punto de corte de esta recta con la recta l, y se asigna a este punto el número natural 4. Realizando de nuevo éste proceso, se puede trazar por U una recta paralela a la recta que pasa por los puntos O y D. Se denota por E el punto de corte de esta recta con la recta l, y se asigna a este punto el número natural 5. En general, se supone que el número natural n está asignado al punto G en l. Se traza por U una recta paralela a la recta que pasa por O y G. Se denota por H el punto de corte de esta recta con la recta l, y se asigna a este punto el número natural $s(n)$.
El axioma $AP.5$ asegura que se ha asociado a cada número natural un punto de la recta l, resultando la siguiente representación geométrica de los números naturales.

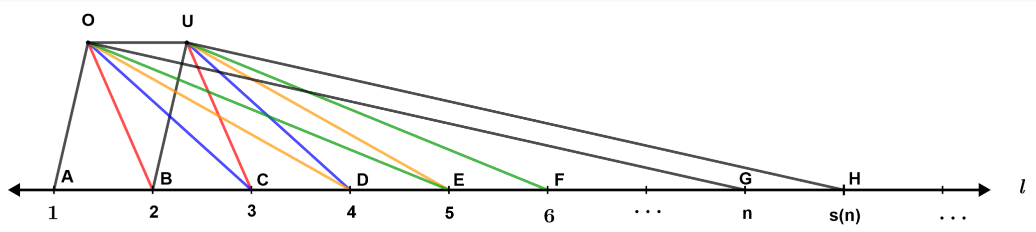

Figura 14: Construcción geométrica de un sistema de números naturales sobre una recta. Elaboración propia

Note que por cada unidad de medida fijada se obtiene un **sistema de Peano**, ya que la ubicación de los puntos en la recta que identificamos con cada número natural depende de dicha unidad de medida.

4. Formalización de conceptos

Desde el punto de vista de la interpretación, se ha realizado un análisis representativo y significativo de los axiomas de Peano, lo que ha permitido obtener una comprensión precisa de sus significados fundamentales. Por tanto, en lo que sigue, se procederá a formalizar y dotar de rigor matemático a todo lo que se ha expuesto anteriormente, con el fin de establecer una base sólida para el estudio y desarrollo de la aritmética de números naturales dentro del marco axiomático de Peano.
Para lograr este objetivo, es importante destacar que el axioma $AP.2$, garantiza que existe un función s de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, llamada sucesor; la cual, por el axioma $AP.4$, es inyectiva. Además, por los axiomas $AP.1$ y $AP.3$, se obtiene que $\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) = \{1\}$; mientras que el axioma $AP.5$ implica que todo número natural se puede obtener a partir del 1.

Como consecuencia de lo desarrollado previamente, los Axiomas de Peano, se pueden reescribir, haciendo uso de la notación y lenguaje matemático adecuado, de la siguiente forma:

Observación 2

Existe un conjunto $\mathbb{N}$, cuyos elementos son llamados números naturales, y una función $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, donde la imagen $s(n)$ de cada número natural n se llama el sucesor de n, tal que:

AP.1.1 s es inyectiva, es decir: si $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $s(n) = s(m)$, entonces $n = m$. En otras palabras: dos números naturales que tienen el mismo sucesor son iguales, o también se puede interpretar como que números naturales distintos tienen sucesores distintos.

AP.2.1 $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ consta de un único elemento, es decir; el 1 es el único número natural que no es sucesor de ningún otro número natural.

AP.3.1 Si $X \subseteq \mathbb{N}$ es tal que $1 \in X$ y, para todo $n \in X$, se tiene que $s(n) \in X$, entonces $X = \mathbb{N}$.

Denotamos por $(\mathbb{N}, s, 1)$ el modelo de un **sistema de Peano**.

Por otro lado, el siguiente resultado es quien da rigor y formalidad matemática a las expresiones que dejan implícitas el uso o aplicabilidad del principio de inducción.

Teorema 2

Dados un conjunto no vacío X, z un elemento fijo de X y una aplicación

$$\varphi : X \to X,$$

se tiene que existe una única aplicación

$$f : \mathbb{N} \to X$$

que satisface:

1. $f(1) = z$ (al 1 le corresponde z)
2. $f(s(n)) = \varphi(f(n))$ (el asociado de $s(n)$ se calcula a partir del que le corresponde al anterior, a través de φ).

Este teorema se conoce como **El Principio de Definición por Recurrencia**

La demostración de este teorema la puede consultar en [5].

El siguiente resultado es una consecuencia del principio de definición por recurrencia y es esencial para poder definir la suma en los números naturales.

Teorema 3

Sean X un conjunto no vacío, y $f : X \to X$ una función. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una única función $f^n : X \to X$ tal que:

F.1. $f^1 = f$;

F.2. $f^{s(n)} = f \circ f^n$.

Demostración. Sea $Y := \{g| \ \ g : X \to X \ \text{ es una función}\}$. Claramente $f \in Y$. Sea $\varphi : Y \to Y$ definida por $\varphi(g) = f \circ g$. Por definición de composición de funciones es claro que φ está bien definida. Por el Teorema 2 existe una única función $h : \mathbb{N} \to Y$ tal que:

a. $h(1) = f$;

b. $h(s(n)) = \varphi(h(n))$.

Denotando por $f^1 := h(1)$ y $f^{s(n)} := h(s(n))$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f^1, f^{s(n)} \in Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea

$$A := \{n \in \mathbb{N} : f^{s(n)} = f \circ f^n\}.$$

Por el Principio de Inducción, se concluye que $A = \mathbb{N}$; en efecto, dado que,

$$f^{s(1)} = \varphi(h(1)) = \varphi(f) = f \circ f = f \circ f^1,$$

es claro que, $1 \in A$.

Ahora, si $n \in A$, entonces $f^{s(n)} = f \circ f^n$. Como

$$f^{s(s(n))} = h(s(s(n)) = \varphi(h(s(n))) = \varphi(f^{s(n)}) = f \circ f^{s(n)},$$

se tiene que $s(n) \in A$.

Por último, de $b.$ y la unicidad de h, se deduce que las f^n son las únicas funciones en Y que satisfacen $F.2$. $\square$

Corolario 2 Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una única función $s^n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que:

S.1. $s^1 = s$; y

S.2. $s^{s(n)} = s \circ s^n$.

Demostración. Aplicando el Teorema 3, a la función s se obtiene el resultado.

$\square$

Lema 1 s^n es inyectiva para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, $s^n(\mathbb{N}) = \mathbb{N} - \{1, 2, \cdots, n\}$.

Demostración. Sea $A := \{n \in \mathbb{N} : s^n \ \ es \ \ inyectiva\}$. Como $s = s^1$, y s es inyectiva, se tiene que $1 \in A$. Supongamos que $n \in A$. Note que si $p, q \in \mathbb{N}$, satisfacen que $s^{s(n)}(p) = s^{s(n)}(q)$, entonces $s(s^n(q)) = s^{s(n)}(q) = s^{s(n)}(p) = s(s^n(p))$. Así, $s^n(q) = s^n(p)$, ya que s es inyectiva. Dado que $n \in A$, se obtiene que $q = p$. Por tanto, $s(n) \in A$. En consecuencia, por el principio de inducción, $A = \mathbb{N}$.
Por otro lado, observe que para $n = 1$ se satisface la igualdad. Supongamos que la igualdad es cierta para n; es decir, $s^n(\mathbb{N}) = \mathbb{N} - \{1, 2, \cdots, n\}$. Como s es inyectiva se cumple que

$$s(s^n(\mathbb{N})) = s(\mathbb{N}) - s(\{1, 2, \cdots, n\}) = (\mathbb{N} - \{1\}) - \{s(1), \cdots, s(n)\} = \mathbb{N} - \{1, 2, \cdots, n, s(n)\}.$$

$\square$

Corolario 3 Si $m, n \in \mathbb{N}$, con $m \neq n$, entonces $m \in s^n(\mathbb{N})$ o $n \in s^m(\mathbb{N})$

Demostración. Supongamos que $n \notin s^m(\mathbb{N})$. Como $\mathbb{N} = \{1, \cdots, m\} \cup s^m(\mathbb{N})$, entonces $n \in \{1, \cdots, m\}$, ya que $n \notin s^n(\mathbb{N})$. Dado que $n \neq m$, es claro que $m \in s^n(\mathbb{N})$. $\square$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, s^n es única, entonces a cada $m \in \mathbb{N}$, le corresponde el único número natural $s^n(m)$. Por tanto, $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $+(m,n) := s^n(m)$, está bien definida, es decir, $+$ es una operación interna sobre $\mathbb{N}$. Por conveniencia, en lo que sigue se escribe $m+n$ en lugar de $+(m,n)$; es decir, $+(m,n) := m+n$.

Definición 3

La función $+$ la llamaremos **adición**, y a $m+n$ lo leeremos m más n o la suma de m con n.

Corolario 4 La función sucesor satisface:

S1. $s(m) = m+1$;

S2. $s(m+n) = m + s(n)$.

Demostración. Claramente $s(m) = s^1(m) = m+1$. Por otro lado, $s(m+n) = s(s^n(m)) = (s \circ s^n)(m) = s^{s(n)}(m) = m + s(n)$.

□

Corolario 5 $s(n) = s^n(1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Si $n = 1$, la igualdad es clara. Si igualdad es cierta para n; es decir, $s^n(1) = s(n)$, entonces $s^{s(n)}(1) = s(s^n(1)) = s(s(n))$.

□

Teorema 4

Si $m, n, p \in \mathbb{N}$, entonces:

S3. $m + (n+1) = (m+n) + 1$;

S4. $m + (n+p) = (m+n) + p$; (Propiedad Asociativa de la suma.)

S5. $m + 1 = 1 + m$;

S6. $m + n = n + m$; (Propiedad Conmutativa de la suma.)

Demostración. S3. Note que :

$$\begin{aligned} m + (n+1) &= m + s(n) && \text{(por S1)} \\ &= s(m+n) && \text{(por S2)} \\ &= (m+n)+1 && \text{(por S1)} \end{aligned}$$

S4. Sea $A := \{q \in \mathbb{N} : (\forall m, n \in \mathbb{N})(m + (n+q) = (m+n)+q)\}$. Por S3, $1 \in A$. Ahora, si $p \in A$, entonces para todo $m, n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} m + (n + s(p)) &= m + s(n+p) && \text{(por S2)} \\ &= s(m + (n+p)) && \text{(por S2)} \\ &= s((m+n)+p) && \text{(ya que } p \in A\text{)} \\ &= (m+n) + s(p) && \text{(por S2)} \end{aligned}$$

Así, $s(p) \in A$. Por el Principio de Inducción, se tiene que $A = \mathbb{N}$.

S5. Sea $A := \{q \in \mathbb{N} : q + 1 = 1 + q\}$. Como s es una función, entonces $s(1)$ es único, por tanto, $1 + 1 = s(1) = 1 + 1$. Así, $1 \in A$. Supongamos que $m \in A$, es decir, $m + 1 = 1 + m$. Como

$$\begin{aligned} s(m) + 1 &= (m+1) + 1 && \text{(por S1)} \\ &= s(m+1) && \text{(por S1)} \\ &= s(1+m) && \text{(ya que } m \in A) \\ &= 1 + s(m) && \text{(por S2)} \end{aligned}$$

se tiene que $s(m) \in A$. Luego, por el Principio de Inducción, concluimos que $A = \mathbb{N}$.

S6. Sea $A := \{q \in \mathbb{N} : (\forall m \in \mathbb{N})(m + q = q + m)\}$. Por $S5$, es claro que $1 \in A$. Supongamos que $n \in A$, es decir, $m + n = n + m$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Como, para cada $m \in \mathbb{N}$, se satisface que

$$\begin{aligned} m + s(n) &= m + (n+1) && \text{(por S1)} \\ &= (m+n) + 1 && \text{(por S4)} \\ &= 1 + (m+n) && \text{(ya que } 1 \in A) \\ &= 1 + (n+m) && \text{(ya que } n \in A) \\ &= (1+n) + m && \text{(por S4)} \\ &= (n+1) + m && \text{(ya que } 1 \in A) \\ &= s(n) + m && \text{(por S1)} \end{aligned}$$

se tiene que $s(n) \in A$. Por tanto, por el Principio de Inducción, concluimos que $A = \mathbb{N}$.

$\square$

Definición 4

Diremos que $G := (V, A)$ es un grafo infinito orientado si $|V| = |\mathbb{N}|$ y $A \subset V \times V$

El siguiente resultado justifica la representación sobre una línea recta del conjunto de los números naturales.

Teorema 5

Un grafo infinito orientado $G := (V, A)$ está asociado a un sistema de Peano, si y solo si, existe una única función $f : \mathbb{N} \to V$ biyectiva tal que $A = \{(f(n), f(s(n)) : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. Supongamos que $G = (V, A)$ es un grafo infinito orientado asociado a un sistema de Peano. Por hipótesis para cada $v \in V$ existe una única arista en A tal que v es el nodo inicial de la misma; por tanto, existe un único nodo $w \in V$ que es nodo final de dicha arista. En consecuencia, $\phi : V \to V$ definida por $\phi(v) = w$ donde w es el nodo final de la única arista que existe que tiene a v como nodo inicial es una función. Denotando por v_1 el nodo origen del grafo, el principio de definición por recurrencia implica que, existe una única función $f : \mathbb{N} \to V$ satisfaciendo que $f(1) = v_1$ y $f(s(n)) = \phi(f(n))$. Tomando $v_{s(n)} := f(s(n))$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f(n) = v_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, por el teorema 3, $\phi^{s(n)}(v_1) = \phi(\phi^n(v_1))$; es decir, $\phi^{s(n)}(v_1)$ es el nodo final de la única arista que tiene a $\phi^n(v_1)$ como nodo inicial. En consecuencia,

$$V = \{v_1, \phi(v_1), \phi^2(v_1), \cdots, \phi^n(v_1), \cdots\}. \tag{1}$$

Por tanto, si $v \in V$ y $v \neq v_1$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^n(v_1) = v$

Afirmación 1: $\phi^n(v_1) = f(s(n)) = v_{s(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En efecto; como $v_2 = v_{s(1)} = f(s(1)) = \phi(f(1)) = \phi(v_1)$, es claro que la afirmación es cierta para $n = 1$. Ahora, si $\phi^n(v_1) = f(s(n)) = v_{s(n)}$, entonces $\phi^{s(n)}(v_1) = \phi(\phi^n(v_1)) = \phi(f(s(n))) = f(s(s(n))) = v_{s(s(n))}$. Esto demuestra la afirmación.

Luego, por (1) y la afirmación 1, se deduce que

$$V = \{f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots\}.$$

Esto demuestra que f es sobreyectiva.

Afirmación 2: ϕ^n es inyectiva para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que la afirmación es cierta para $n = 1$. Si $\phi(u) = \phi(w)$ y $u \neq w$, entonces $(u, \phi(u))$ y $(v, \phi(u))$ son aristas del grafo distintas con el mismo nodo final, lo cual contradice que G está asociado a un sistema de Peano. Suponga que ϕ^n es inyectiva. Si $\phi^{s(n)}(u) = \phi^{s(n)}(v)$, entonces $\phi(\phi^n(u)) = \phi^{s(n)}(u) = \phi^{s(n)}(v) = \phi(\phi^n(v))$, como ϕ es inyectiva se tiene que $\phi^n(u) = \phi^n(v)$; luego, por la hipótesis inductiva, $u = v$.

Por otro lado, como $\phi(V)$ es el conjunto de nodos que son nodo final de alguna arista, entonces $\phi(V) = V - \{v_1\}$. En consecuencia, $\phi^n(V) = V - \{v_1, \cdots, v_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 3: $\phi^{m+p}(v_1) = \phi^p(\phi^m(v_1))$ para todo $m, p \in \mathbb{N}$.

Primero veamos que la afirmación es cierta para $m = 1$. Observe que la igualdad es válida si $p = 1$, ya que $\phi^{1+1}(v_1) = \phi^{s(1)}(v_1) = \phi(\phi(v_1))$. Ahora, si $\phi^{1+p}(v_1) = \phi^p(\phi(v_1))$, entonces $\phi^{1+s(p)}(v_1) = \phi^{s(1+p)}(v_1) = \phi(\phi^{1+p}(v_1)) = \phi(\phi^p(\phi(v_1))) = \phi^{s(p)}(\phi(v_1))$.

Sea $p \in \mathbb{N}$ arbitrario y fijo. Si $\phi^{m+p}(v_1) = \phi^p(\phi^m(v_1))$, entonces $\phi^{s(m)+p}(v_1) = \phi^p(\phi^m(v_1))$ para todo $m, p \in \mathbb{N}$.

Afirmación 4: Si $n \neq m$, entonces $\phi^n(v_1) \neq \phi^m(v_1)$.

Si $m \neq n$, por el corolario 3, se tiene que $m \in s^n(\mathbb{N})$ o $n \in s^m(\mathbb{N})$. Si $m \in s^n(\mathbb{N})$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = s^n(p) = p + n$; por tanto, $s^m(v_1) = s^{p+n}(v_1) = s^n(s^p(v_1))$. Note que si $\phi^n(v_1) = \phi^m(v_1)$, por la afirmación 2, se tiene que $v_1 = \phi^p(v_1)$, lo cual contradice que v_1 es origen del grafo. En consecuencia, $\phi^n(v_1) \neq \phi^m(v_1)$.

De esto se deduce que f es inyectiva, ya que si $n \neq m$, por la afirmación 4, se tiene que $f(n) = \phi^n(v_1) \neq \phi^m(v_1) = f(m)$.

Asi, f es biyectiva.

Por construcción de f es claro que $A = \{(f(n), f(s(n))) : n \in \mathbb{N}\}$. El recíproco es inmediato.

$\square$

Corolario 6 Sean f y ϕ las funciones definidas en el teorema 5. Si $\phi(v) = w$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $w \in f(\mathbb{N})$;
2. $v \in f(\mathbb{N})$;
3. $\phi(w) \in f(\mathbb{N})$.

Demostración. Si $w \in f(\mathbb{N})$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = w = \phi(v)$. Como $w \neq v_1$, es claro que $n \neq 1$, lo que implica que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $s(k) = n$. Por tanto, $\phi(v) = f(n) = f(s(k)) = \phi(f(k))$, y por la inyectividad de ϕ se tiene que $f(k) = v$. Lo que demuestra que 1 implica 2.

Por otro lado, si $v \in f(\mathbb{N})$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $v = f(n)$. Como $w = \phi(v) = \phi(f(n)) = f(s(n))$, se tiene que $w \in f(\mathbb{N})$. Así, 2 implica 3.

Por último, si $\phi(w) \in f(\mathbb{N})$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = \phi(w)$. Como $\phi(w) \neq v_1$, se tiene que $n = s(k)$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Así, $\phi(w) = f(s(k)) = \phi(f(k))$. En consecuencia, por la inyectividad de ϕ, $w = f(k)$. Esto demuestra que 3 implica 1.

$\square$

Corolario 7 Si $A := \{(n, s(n)) : n \in \mathbb{N}\}$, entonces el grafo orientado $G := (\mathbb{N}, A)$ es un grafo asociado a un sistema de Peano.

Demostración. Claramente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n$ satisface lo pedido.

$\square$

Corolario 8 Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $s(n) \neq n$.

Demostración. Si para algún $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $s(n) = n$, entonces el grafo asociado tiene un ciclo en n, lo cual es una contradicción.

$\square$

Observe que los resultados previos dejan implícitos un orden en cualquier sistema de Peano motivado por el grafo orientado.

Definición 5

Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Se dice que m es menor que n, y se escribe $m < n$, si $n \in s^m(\mathbb{N})$; es decir, si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

5. Conclusión

Los cinco axiomas son proposiciones que caracterizan esencialmente la llamada sucesión numérica natural, o conjunto ordenado de los números naturales, y pueden tomarse como definición implícita de los mismos. El sistema $(\mathbb{N}, s, 1)$ es conocido como un modelo del sistema de axiomas de Peano.

Según Antezana (2019) la enseñanza de los axiomas de Peano indudablemente refuerzan la enseñanza de estructuras del lenguaje matemático que son la columna vertebral del aprendizaje significativo en matemáticas.

El lenguaje matemático, como cualquier otro lenguaje, tiene una estructura gramatical con su alfabeto y reglas propias como cualquier otro idioma y por supuesto no es tarea fácil su aprendizaje. Entender los axiomas de Peano supone tener un dominio básico de dicho lenguaje y muchas veces se convierte en un obstáculo epistemológico que dificulta la comprensión de los números naturales. En los axiomas de Peano aparecen objetos matemáticos como conjuntos y funciones que permiten entender el concepto de sucesor y el axioma de inducción, por lo que para su aprendizaje, cualquier estrategia alternativa que refuerce dicho conocimiento, es importante.

En este trabajo, se muestra una propuesta geométrica que ayuda a la comprensión de dichos axiomas. Se utiliza una estrategia visual por medio de un modelo gráfico, que ayuda a comprender el modelo axiomático de Peano haciendo énfasis en el concepto de sucesor utilizando diagramas de flechas. Con esta propuesta gráfica se busca que el estudiante tenga alternativas que le permitan entender mejor el lenguaje matemático y en este caso concreto entender los axiomas de Peano.

Contribución de las personas autoras: Conceptualización: J.R.G., D.A.M.P, P.L.P.D. Análisis Formal: J.R.G., D.A.M.P, P.L.P.D. Investigación: J.R.G., D.A.M.P, P.L.P.D. Metodología: J.R.G., D.A.M.P, P.L.P.D. Software: J.R.G.R. Supervisión: J.R.G., D.A.M.P, P.L.P.D. Validación: J.R.G., D.A.M.P, P.L.P.D. Visualización: J.R.G., D.A.M.P, P.L.P.D. Escritura - borrador original: J.R.G.R. Escritura - revisión y edición: J.R.G., D.A.M.P, P.L.P.D.

Accesibilidad de datos: No aplica.

6. Bibliografía

[1] Antezana, I. R. (2019). Demostración de teoremas de números naturales en el sistema axiomático de Giuseppe Peano. Horizonte de la Ciencia, vol. 9, núm. 16. https://doi.org/10.264/uncp.horizonteciencia.2019.16.473.

[2] Burguer, E. (1965). La axiomatización y los números naturales II. Revista colombiana de Matemáticas, 7(2), 20-31.

[3] Dutari, N. C. (1980). Análisis matemático de la axiomática de los números naturales. Revista El Basilisco, (11), 24-26.

[4] Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., Arrieche, M. J. (2009). ¿ Alguien sabe qué es el número?. Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 19, 34-46.

[5] Hrbacek, K., Jech, T. (1999). Introduction to Set Theory (3rd ed.). Marcel Dekker.

[6] Luna, J. (2002). El concepto de número según Bertrand Russell. En Luque, Carlos Julio (Ed.), Memorias XIII Encuentro de Geometría y I de Aritmética (pp. 35-44). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

[7] Luque, C. J. (2002). El concepto de número natural según Giusseppe Peano. En Luque, Carlos Julio (Ed.), Memorias XIII Encuentro de Geometría y I de Aritmética (pp. 45-85). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

[8] Mejía, L. M. (2003). Peano, Lawvere, Pierce: Tres axiomatizaciones de los números naturales [Tesis de pregrado no publicada] Universidad del Tolima.

[9] Olivares, j. T. (2017). El sistema de números naturales $\mathbb{N}$. Construcción de $\mathbb{N}$. por teoría de clases. Sistemas axiomáticos de Peano y por la axiomática actual. Operaciones básicas. Orden en N. Principio de inducción. Educación con especialidad de matemáticas. Disponible en http://repositorio.une.edu.pe/handle/20.500.14039/2990.