



## Sobre la parametrización de cónicas con rotación (la manera fácil)

| On parameterization of conics with rotation (the easy way) |

 **Walter Mora Flores**

wmora2@gmail.com

Investigador independiente

Alajuela, Costa Rica

Recibido: 8 febrero de 2024

Aceptado: 10 mayo 2024

**Resumen:** Se presentan algunas parametrizaciones usuales (trigonométricas y racionales) de las cónicas en posición estándar y algunas aplicaciones. Para cónicas con rotación en la que solo interesa una parametrización trigonométrica o una racional, se presentan los métodos de diagonalización *no* ortogonal y parametrización usando un haz de rectas.

**Palabras Clave:** Rotaciones, cónicas, parametrización.

**Abstract:** Some usual parameterizations (trigonometric and rational) of conics in standard position and some applications are presented. For conics with rotation in which only a trigonometric or a rational parameterization is of interest, the methods of non-orthogonal diagonalization and parameterization using a bundle of lines are presented.

**Keywords:** Rotations, conics, parameterization.

### 1. Introducción

Una *parametrización* de una curva  $\mathbf{C}$  en  $\mathbb{R}^n$ , es una función  $\mathbf{r}$  de un intervalo  $I$  en  $\mathbb{R}^n$ , tal que el gráfico de  $\mathbf{r}$  está contenido en el gráfico de  $\mathbf{C}$ . Usualmente en las aplicaciones se piden cosas adicionales como inyectividad, sobreyectividad, continuidad, derivabilidad, etc.

Una cónica en el plano  $xy$  es un conjunto  $\mathbf{C} = \{(x, y) \mid \mathbf{F}(x, y) = 0\}$  donde

$$\mathbf{F}(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \tag{1}$$

donde no todos los coeficientes son cero. Para determinar si la ecuación (1) es la ecuación de una cónica “no degenerada” (es decir, si es una parábola, elipse o hipérbola), podemos usar el Teorema 2 (en el apéndice A).

---

<sup>1</sup>Walter Mora-Flores. Investigador independiente. Dirección postal: San Ramón, Alajuela, Costa Rica. Código postal: 20201. Correo electrónico: wmora2@gmail.com

Una *parametrización* de una cónica en el plano  $xy$  es una función  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  que satisface la ecuación  $\mathbf{F}(x, y) = 0$ , es decir,

$$\mathbf{F}(x(t), y(t)) = 0 \text{ para todo } t \in I$$

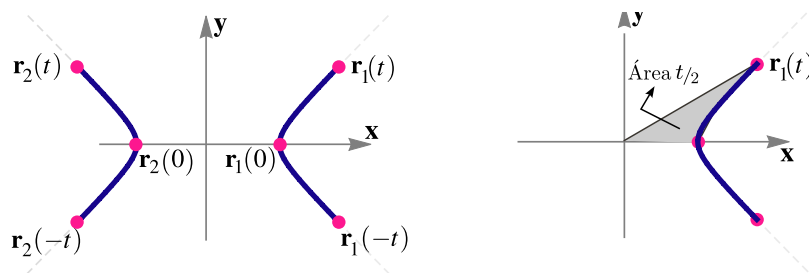
Una *parametrización racional* es una parametrización de la forma  $\mathbf{r}(t) = \left( \frac{p_1(t)}{q_1(t)}, \frac{p_2(t)}{q_2(t)} \right)$  donde  $p_i, q_i$  son polinomios. Un método para obtener parametrizaciones racionales de una cónica lo veremos en la sección 3.

En la tabla 1 se enumera algunas parametrizaciones usuales (trigonométricas y “racionales”) de las cónicas propias, en posición estándar.

**Tabla 1:** Algunas parametrizaciones usuales de las cónicas. Elaboración propia.

Parábola	Parametrización	
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$	$\mathbf{r}(t) = (pt^2 + h, 2pt + k),$	$t \in \mathbb{R}$
$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	$\mathbf{r}(t) = (2pt + h, pt^2 + k),$	$t \in \mathbb{R}$
<i>Elipse</i>		
$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1,$	$\mathbf{r}(t) = (h + a \cos t, k + b \sin t)$	$t \in [0, 2\pi[$
	$\mathbf{r}(t) = \left( a \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + h, b \frac{2t}{1 + t^2} + k \right),$	$t \in \mathbb{R}$
	$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathbf{r}(t) = (-a, 0)$	
<i>Hipérbola</i>		
$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1,$	$\mathbf{r}(t) = (h \pm a \cosh t, k + b \sinh t)$	$t \in \mathbb{R}$
	$\mathbf{r}(t) = \left( \pm a \frac{t^2 + 1}{2t} + h, b \frac{t^2 - 1}{2t} + k \right),$	$t > 0$
	$\mathbf{r}(t) = (h + a \sec t, k \pm b \tan t),$	$t \in [0, 2\pi] - \{\pi/2, 3\pi/2\}$
$\frac{(y - k)^2}{b^2} - \frac{(x - h)^2}{a^2} = 1,$	$\mathbf{r}(t) = (h + a \sinh t, k \pm b \cosh t)$	$t \in \mathbb{R}$
	$\mathbf{r}(t) = \left( \pm a \frac{t^2 - 1}{2t} + h, b \frac{t^2 + 1}{2t} + k \right),$	$t > 0$
	$\mathbf{r}(t) = (h \pm a \tan t, k + b \sec t),$	$t \in [0, 2\pi] - \{\pi/2, 3\pi/2\}$

La parametrización de la hipérbola usando las funciones hipérbolicas (ver apéndice B), no presentan singularidades y gozan de simetría. En este caso  $t$  no es un ángulo, más bien (en el caso de una hipérbola centrada en el origen) es dos veces el área (orientada) de la región entre la hipérbola, el eje focal y un rayo del origen al punto  $P = \mathbf{r}(t)$  (ver Figura 1).



**Figura 1:** Parametrización de la hipérbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  con  $\mathbf{r}(t) = (\pm a \cosh t, b \sinh t)$ . Elaboración propia.

Las parametrizaciones racionales se usan junto con las parametrizaciones trigonométricas en cambios de variables. También se usan en teoría de números, aplicaciones computacionales, etc. En el ejemplo 1 se muestra una aplicación: Una parametrización de una curva de intersección entre un cono y un plano.

### Ejemplo 1 Parametrización de una curva de intersección

Consideremos el problema de determinar una parametrización trigonométrica de la curva de intersección entre el cono  $S_1 : x^2 + y^2 = z^2$  y el plano  $S_2 : 2y - z = 2$  (ver figura 2).

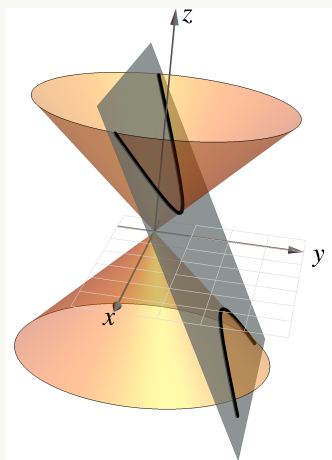


Figura 2:  $S_1 \cap S_2$ . Elaboración propia.

Una manera es parametrizar primero la *proyección* de la curva en plano  $xy$  y agregar después la coordenada  $z(t)$  (ver Figura 3).

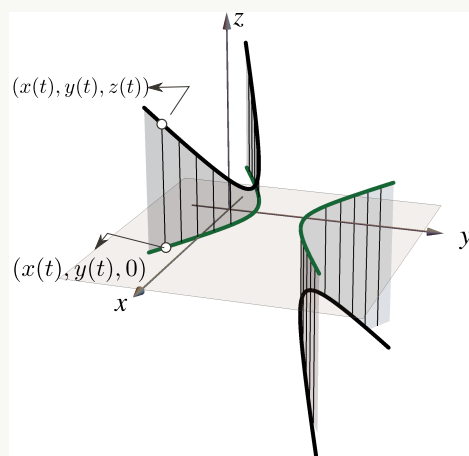


Figura 3: Proyección de la curva de intersección. Elaboración propia.

La proyección de la curva de intersección en el plano  $xy$  es una hipérbola. Su ecuación se obtiene sustituyendo  $2y - z = 2$  en  $x^2 + y^2 = z^2$ , se obtiene

$$x^2 + y^2 = (2 - 2y)^2$$

y completando cuadrados, armamos la ecuación canónica de esta hipérbola,

$$\frac{(y - 4/3)^2}{4/9} - \frac{x^2}{4/3} = 1$$

Una parametrización de la proyección de la curva de intersección en el plano  $xy$  es

$$\mathbf{c}(t) = (h + a \operatorname{senh}(t), k \pm b \operatorname{cosh}(t), 0) = \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{senh}(t), \frac{4}{3} \pm \frac{2}{3} \operatorname{cosh}(t), 0 \right)$$

Finalmente, como  $z(t) = 2 - 2y(t)$ , una parametrización de la curva de intersección es

$$\mathbf{r}(t) = (h + a \operatorname{senh}(t), k \pm b \operatorname{cosh}(t), z(t)) = \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{senh}(t), \frac{4}{3} \pm \frac{2}{3} \operatorname{cosh}(t), 2 - 2 \left( \frac{4}{3} \pm \frac{2}{3} \operatorname{cosh}(t) \right) \right)$$

El código en MATHEMATICA es

```
r1[t_] := {h + a Sinh[t], k + b Cosh[t], 2 - 2 (k + b Cosh[t])};
r2[t_] := {h + a Sinh[t], k - b Cosh[t], 2 - 2 (k - b Cosh[t])};
Graphics3D[{Cone[{{0, 0, -4}, {0, 0, 0}}, 4], Cone[{{0, 0, 4}, {0, 0, 0}}, 4],
(*Plano*)
First@ParametricPlot3D[{0, 0, 2}+t {1, 0, 0}+s {0, -1, 2}, {t, -5, 5}, {s, -3, 2},
  Mesh -> None, PlotStyle -> {Gray, Opacity[0.4]}],
(*Curva de intersección*)
First@ParametricPlot3D[{r1[t], r2[t]}, {t, -2, 2}, Mesh -> None,
  PlotStyle -> Directive[{Black, AbsoluteThickness[3],
    Black, AbsoluteThickness[3]}]}],
}, Boxed -> False, PlotRange -> All,
ViewPoint -> {3, 0.98, 1.18}, ViewVertical -> {0.25, 0.096, 2.032},
ImageSize -> 400, Method -> {"ShrinkWrap" -> True}]
```

Las parametrizaciones racionales tienen varias aplicaciones. En particular, podemos establecer si ciertas integrales se pueden calcular en términos de funciones elementales (las usuales en cálculo) y también podemos obtener una forma de las ternas pitagóricas. Esto se puede observar en los ejemplos 2 y 3.

### Ejemplo 2 ¿Cuáles primitivas se pueden calcular?

Si  $\mathbf{R}(t)$  es una función racional (un cociente de polinomios) entonces, siempre que se pueda factorizar y resolver las ecuaciones lineales involucradas, se puede calcular la integral

$$\int \mathbf{R}(t) dt$$

en términos de funciones elementales.

Una función  $y = y(x)$  es *algebraicamente dependiente de  $x$*  si existe un polinomio en dos variables  $\mathbf{F}$  tal que  $\mathbf{F}(x, y(x)) = 0$  (como es el caso de las cónicas). La pregunta ahora es,

$$\text{¿se puede calcular } \int \mathbf{R}(x, y(x)) dx ?$$

La respuesta es: A veces, y no depende de una buena adivinanza!. Depende de si podemos parametrizar racionalmente la curva  $\mathbf{C}$ .

Si una curva  $\mathbf{C}$ , de ecuación  $\mathbf{F}(x, y(x)) = 0$ , se puede parametrizar racionalmente por  $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  entonces

$$\int \mathbf{R}(x, y(x)) dt = \int \mathbf{R}(x_1(t), x_2(t)) x_2'(t) dt,$$

con lo cual la integral se puede calcular (porque el integrando es racional).

- $\int \mathbf{R}(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  se puede calcular<sup>a</sup>.

En este caso,  $y(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$  y  $\mathbf{F}(x, y) = y^2 - ax^2 - bx - c = 0$  es un cónica, y por tanto puede ser parametrizada racionalmente.

- $\int \mathbf{R}(\cos \theta, \sen \theta) dx$  se puede calcular.

Usamos una parametrización de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,

$$\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sen \theta = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad d\theta = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

- $\int \mathbf{R}(\cosh \theta, \sinh \theta) dx$  se puede calcular.

Usamos una parametrización de la hipérbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Sustituimos  $\cosh \theta$  y  $\sinh \theta$  por

$$x(t) = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}, \quad y(t) = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad d\theta = \frac{2dt}{1 - t^2}$$

- ¿Puede  $\int \sqrt{1 + x^3} dx$  se calculada (en términos funciones elementales)? No. Se puede probar que la curva de ecuación  $y^2 - x^3 - 1 = 0$  *no se puede* parametrizar racionalmente, así que no podemos usar las técnicas que hemos mencionado!. Estas integrales (integrando con una raíz cuadrada de un polinomio cúbico) son "integrales elípticas" y no son expresables en términos de funciones elementales.

En general, las curvas de ecuación  $\mathbf{F}(x, y) = 0$  con grado  $\geq 3$ , no pueden ser parametrizadas racionalmente (excepto algunos casos especiales). Y esto llevó al nacimiento de la Topología y de la (posiblemente complicada) Geometría Algebraica [5], [4].

<sup>a</sup>De aquí se deriva la conocida "sustitución de Euler", muy popular en los libros rusos.

### Ejemplo 3 (Ternas Pitágoricas)

Una parametrización racional de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  es

$$x(t) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y(t) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Las componentes racionales de la circunferencia se obtienen sustituyendo  $t = \frac{u}{v}$  con  $u, v$  ente-

ros. Sustituyendo en la parametrización racional, tenemos

$$x = \frac{v^2 - u^2}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{2uv}{u^2 + v^2}$$

Y como  $x^2 + y^2 = 1$ , obtenemos una suma de cuadrados de enteros:

$$(v^2 - u^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$$

Las ternas Pitagóricas son enteros  $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $x^2 + y^2 = z^2$  por lo que  $x = v^2 - u^2$ ,  $y = 2uv$  y  $z = u^2 + v^2$  son ternas Pitagóricas. En realidad todas las ternas Pitagóricas son de esta forma [1].

## 2. Parametrización de cónicas con rotación con diagonalización *no* ortogonal.

Los problemas de cónicas con rotación aparecen de manera natural en muchos contextos. Y si solo interesa una parametrización trigonométrica, podemos usar *diagonalización no ortogonal* para parametrizar “rapidamente”.

Considere el problema de determinar una parametrización trigonométrica de la curva de intersección entre:

- el cono  $S_1 : x^2 + y^2 = z^2$
- y el plano  $S_2 : 4z + y + 2x = 2$ .

Como antes, parametrizamos *la proyección* de la curva con  $(x(t), y(t), 0)$  y como  $z = \frac{2 - y - 2x}{4}$  entonces:

$$z(t) = \frac{2 - y(t) - 2x(t)}{4}.$$

La proyección de la curva en el plano  $xy$  es una curva  $C_{xy}$  (con rotación!) de ecuación

$$\frac{3x^2}{4} - \frac{xy}{4} + \frac{x}{2} + \frac{15y^2}{16} + \frac{y}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Según el Teorema 2 (en el apéndice A), esta curva corresponde a un elipse (ver figura 4).

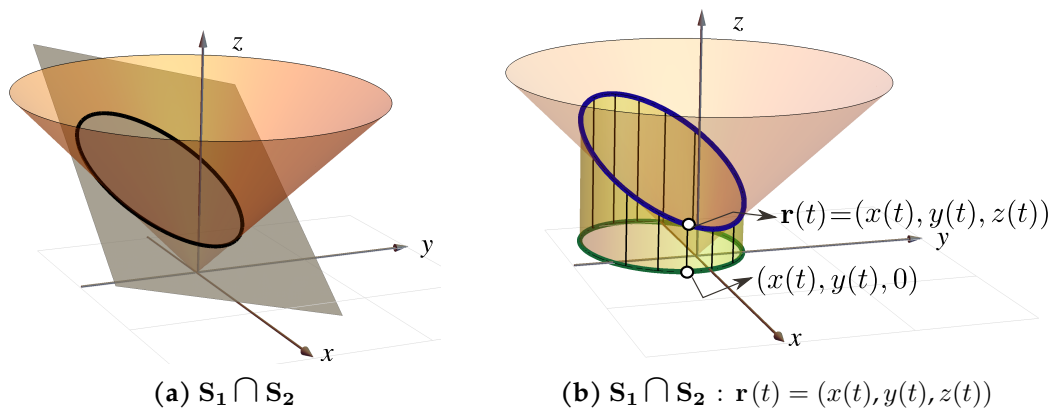


Figura 4: La proyección de la curva en el plano  $xy$  presenta rotación. Elaboración propia.

Necesitamos un cambio de variable que nos permite parametrizar la cónica  $C_{xy}$  usando una ecuación canónica (esto lo hacemos en el Ejemplo 8).

Los cambios de variable en realidad son transformaciones. En este caso necesitamos *transformaciones afines* que envían cónicas con rotación en cónicas de la misma clase, en posición estándar, aunque no necesariamente congruentes.

La forma matricial de una cónica es

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = [x \ y] \underbrace{\begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0 \quad \text{con } \mathbf{B} = [D \ E]$$

Necesitamos eliminar el producto “cruzado”  $Bxy$  en la ecuación. Este término *desaparece* si “eliminamos”, con un cambio de variable, la diagonal secundaria  $\begin{pmatrix} B/2 & B/2 \end{pmatrix}$ , es decir, si *diagonalizamos*  $\mathbf{A}$ . Este tipo de transformaciones envían cónicas en cónicas de la misma clase, aunque no necesariamente congruentes.

Es decir, debemos encontrar un *cambio de variable adecuado*  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  de tal manera que:

$$\begin{aligned} [x \ y] \underbrace{\begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0 &\implies [u \ v] \mathbf{C}^T \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \mathbf{C} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \mathbf{B} \mathbf{C} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + F = 0 \\ &\implies [u \ v] \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \mathbf{B} \mathbf{C} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + F = 0 \\ &\implies \underbrace{A'u^2 + C'v^2}_{\text{No hay producto cruzado } uv} + \mathbf{B} \mathbf{C} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + F = 0. \end{aligned}$$

La buena noticia es que la matriz  $\mathbf{A}$ , asociada a la cónica, es simétrica, por tanto podemos *diagonalizarla* (Ver teorema 1).

### Teorema 1

Si  $\mathbf{A}_{n \times n}$  es simétrica, entonces existe una matriz invertible  $\mathbf{C}$  tal queda  $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{D}$  donde  $\mathbf{D}$  es una matriz diagonal.

- La matriz  $\mathbf{C}$  *no es única*, una de estas matrices  $\mathbf{C}$  se puede obtener usando usando completación de cuadrados o también por operaciones elementales “acopladas” sobre  $\mathbf{A}$ , [3]. En este caso podemos obtener una parametrización de la cónica en el plano  $xy$  pero no mucha información adicional.
- También  $\mathbf{C}$  se puede obtener como una matriz ortogonal (unitaria), es decir, una matriz cuyas columnas son vectores propios de  $\mathbf{A}$ . Este último caso corresponde a la “diagonalización ortogonal” de  $\mathbf{A}$  y permite parametrizar la cónica en el plano  $xy$  y además recuperar, con el cambio de variable, foco(s), vértice(s), asíntotas, etc.

A continuación, se presenta el ejemplo 4 en donde se muestra la diagonalización no ortogonal.

**Ejemplo 4 (Diagonalización no ortogonal).**

Considere la cónica  $x^2 + xy + y^2 = 1$ .

- Forma matricial  $[x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 = 0$

- Un cambio de variable adecuado puede ser  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ , pues

$$[u \ v] \mathbf{C}^T \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{C} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - 1 = [u \ v] \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - 1 = 3u^2 + v^2 - 1 = 0$$

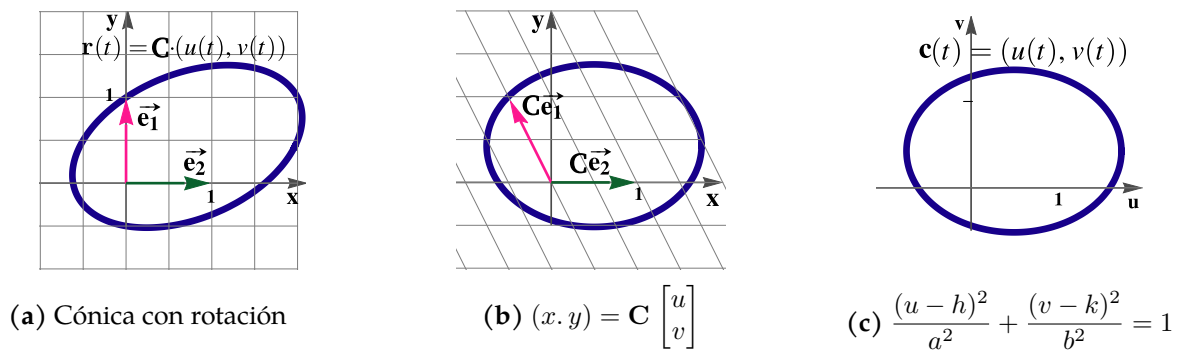
**Parametrización en el plano  $xy$**

Al aplicar un cambio de variable adecuado<sup>1</sup>  $(x, y) = \mathbf{C}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ , podemos obtener la ecuación canónica de la cónica en el plano  $uv$  y por tanto una parametrización  $\mathbf{c}(t) = (u(t), v(t))$  en este plano. Entonces una parametrización en el sistema  $xy$  es

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = \mathbf{C} \cdot \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

o también de manera más práctica, si  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$  son las columnas de  $\mathbf{C}$ , es decir,  $\mathbf{C} = (\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2)$ , entonces  $\mathbf{h}(t) = u(t)\mathbf{w}_1 + v(t)\mathbf{w}_2$ .

En la Figura 5 podemos ver el proceso del cambio de variable en el caso de una elipse.



**Figura 5:** Cambio de variable  $(x, y) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ . Elaboración propia.

**¿Como escoger el cambio de variable?.**

El cambio de variable depende del método de diagonalización que escogamos y depende de los coeficientes  $A, B$  y  $C$  de la cónica. Estos cambios de variable *no siempre son excluyentes*.

<sup>1</sup>Aquí estamos abusando del lenguaje: Recuerde que  $(x, y)$  lo identificamos con un vector columna



### Cambio de variable con diagonalización por completación de cuadrados.

Supongamos que la ecuación de la cónica propia, con rotación, es

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2}$$

Podemos completar cuadrados de varias maneras

- Si  $A = C$ ,

$$Ax^2 + Bxy + Ay^2 + Dx + Ey + F = (2A - B) \left( \frac{x - y}{2} \right)^2 + (2A + B) \left( \frac{x + y}{2} \right)^2 + Dx + Ey + F$$

- Si  $A \neq 0$ ,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = A \left( x + \frac{B}{2A}y \right)^2 + \left( C - \frac{B^2}{4A} \right) y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- Si  $C \neq 0$ ,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = x^2A - \frac{B^2}{4C} + C \frac{Bx}{2C} + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ahora, deducimos un cambio de variable  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  que diagonaliza la matriz asociada de la cónica: Nos queda una cónica del mismo tipo, pero no necesariamente congruente. Pero es suficiente para parametrizar la cónica original.

- 1.) Si  $A = C$ , la completación de cuadrados sugiere el cambio de variable  $u = \frac{x - y}{2}$  y  $v = \frac{x + y}{2}$ , es decir,  $x = u + v$  y  $y = u - v$ .

Si  $A = C$ , el cambio de variable es  $(x, y) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  con  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$Ax^2 + Bxy + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se transforma en

$$(2A + B)u^2 + (2A - B)v^2 + D(u + v) + E(u - v) + F = 0$$

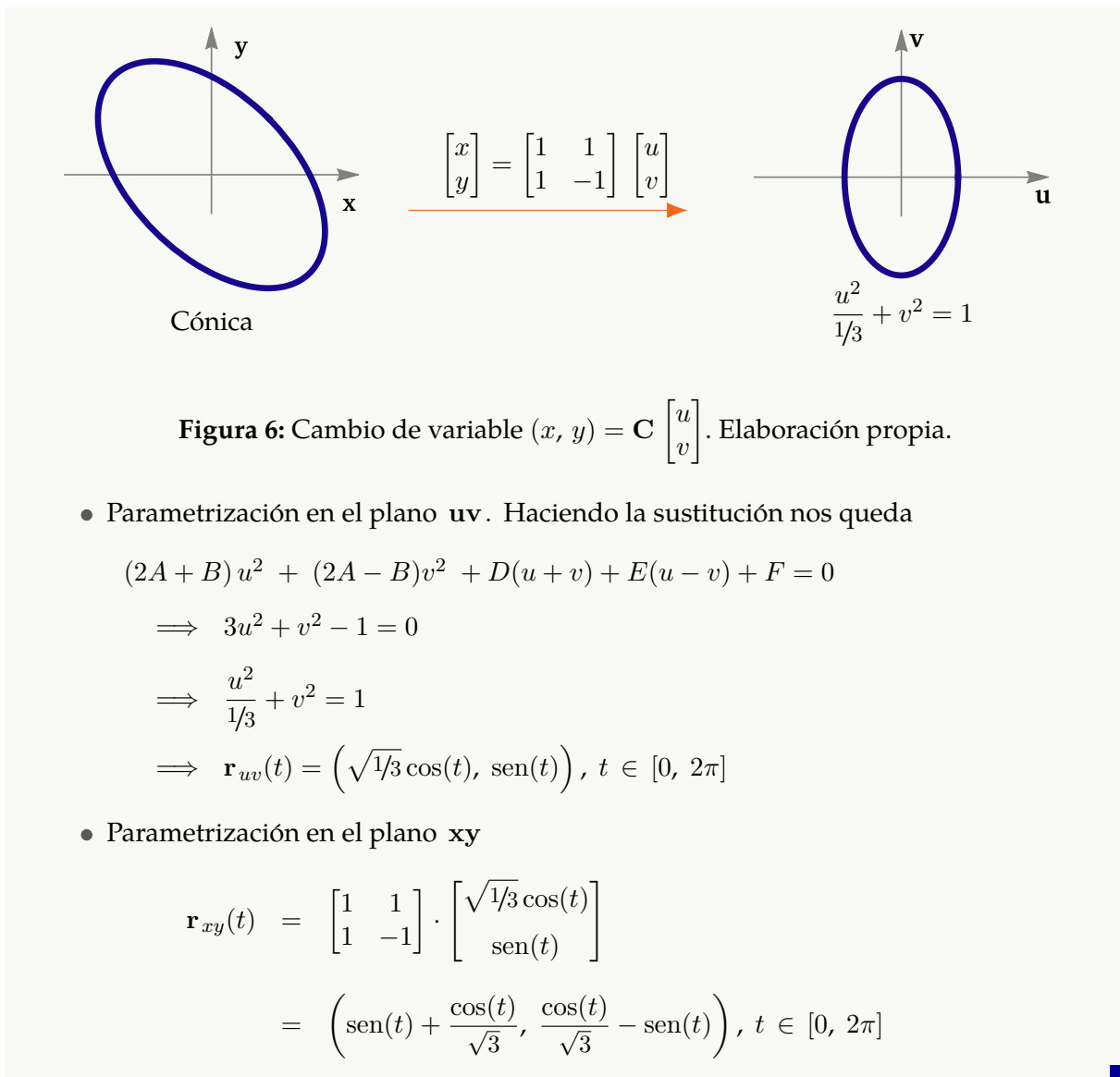
Ahora se puede verificar (en el caso de una cónica propia), que  $-4(2A + B)(2A - B)$  tiene el mismo signo que  $B^2 - 4AC$  o se anulan simultáneamente. Es decir, son cónicas del mismo tipo.

Una representación de este caso se puede observar en el ejemplo 5.

#### Ejemplo 5

Determine una parametrización trigonométrica para la cónica  $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ .

**Solución:** Como  $A = 1 = C$  y  $B = 1$ , podemos usar  $(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$



2.) Si  $A \neq 0$ , la completación de cuadrados sugiere la sustitución  $u = x + \frac{B}{2A}y$  y  $y = v$ , es decir,  $x = u - \frac{B}{2A}v$  y  $y = v$ .

Si  $A \neq 0$ , el cambio de variable es  $(x, y) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  con  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -B/2A \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$Ax^2 + Bxy + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se transforma en:

$$Au^2 + v^2 \left( C - \frac{B^2}{4A} \right) + Du + v \left( E - \frac{BD}{2A} \right) + F = 0.$$

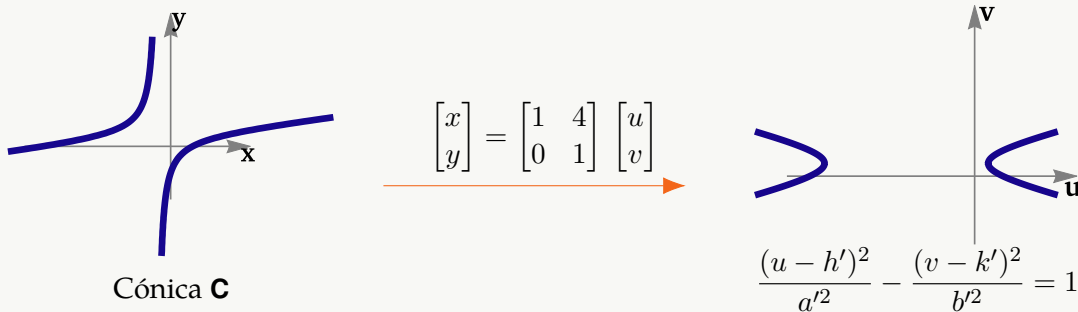
Ahora se puede verificar (en el caso de una cónica propia), que  $-4A \left( C - \frac{B^2}{4A} \right)$  tiene el mismo signo que  $B^2 - 4AC$  o se anulan simultáneamente. Es decir, son cónicas del mismo tipo.

Una representación de este caso se puede observar en el ejemplo 6.

**Ejemplo 6**

Determine una parametrización trigonométrica para la cónica  $\frac{x^2}{4} - 2xy + x - y - 1 = 0$ .

solu Como  $A = 1/4$  y  $B = -2 \neq 0$ , podemos usar  $(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$



**Figura 7:** Cambio de variable  $(x, y) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ . Elaboración propia.

- Parametrización en el plano  $uv$ . Haciendo la sustitución  $x = u + 4v$  y  $y = v$  nos queda

$$Au^2 + v^2 \left( C - \frac{B^2}{4A} \right) + Du + v \left( E - \frac{BD}{2A} \right) + F = 0$$

$$\implies \frac{u^2}{4} - 4v^2 + u + 3v - 1 = 0$$

$$\implies \frac{(u + 2)^2}{23/4} - \frac{(v - 3/8)^2}{23/64} = 1$$

$$\implies \begin{cases} \mathbf{r}_{uv1}(t) = \left( -2 + \sqrt{\frac{23}{4}} \cosh(t), \frac{3}{8} + \sqrt{\frac{23}{64}} \sinh(t) \right) \\ \mathbf{r}_{uv2}(t) = \left( -2 - \sqrt{\frac{23}{4}} \cosh(t), \frac{3}{8} + \sqrt{\frac{23}{64}} \sinh(t) \right) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- Parametrización en el plano  $xy$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{xy}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \pm \sqrt{\frac{23}{4}} \cosh(t) \\ 3/8 + \sqrt{\frac{23}{64}} \sinh(t) \end{bmatrix} \\ &= \left( -2 + \frac{\sqrt{23}}{2} \sinh(t) + 3/2 \pm \sqrt{23}/2 \cosh(t), \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{23}}{8} \sinh(t) \right), t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- 3.) Si  $C \neq 0$  la completación de cuadrados sugiere la sustitución  $u = x$  y  $v = y + \frac{B}{2C}x$ , es decir,  $x = u$  y  $y = v - \frac{B}{2C}u$

El cambio de variable es  $(x, y) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  con  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{B}{2C} & 1 \end{bmatrix}$

$$Ax^2 + Bxy + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se transforma en

$$\left(A - \frac{B^2}{4C}\right)u^2 + Cv^2 + u\left(D - \frac{BE}{2C}\right) + Ev + F = 0$$

Ahora se puede verificar (en el caso de una cónica propia), que  $-4\left(A - \frac{B^2}{4C}\right)C$  tiene el mismo signo que  $B^2 - 4AC$  o se anulan simultáneamente. Es decir, son cónicas del mismo tipo.

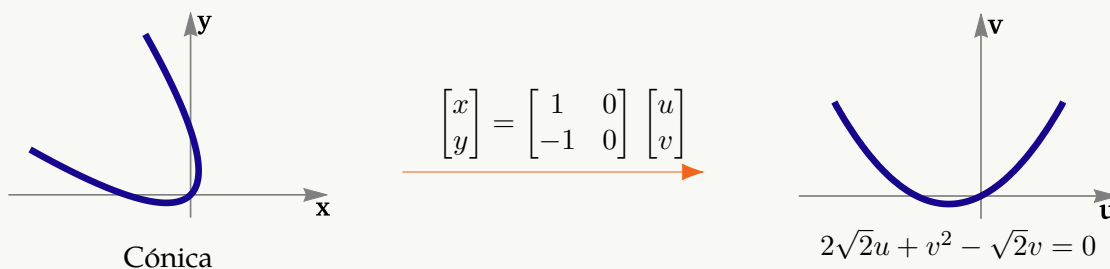
Una representación de este caso se puede observar en el ejemplo 7.

### Ejemplo 7

Determine una parametrización trigonométrica para la cónica de ecuación

$$x^2 + y^2 + 2xy + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$$

**Solución:** Aquí podemos usar el cambio de variable 1.) Pero lo haremos con el cambio de variable 3.). Como  $C = 1$  y  $B = 2$  podemos usar  $(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$



**Figura 8:** Cambio de variable  $(x, y) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ . Elaboración propia.

- Parametrización en el plano  $uv$ . Haciendo la sustitución  $x = u$  y  $y = v - u$ , en el plano  $uv$  nos queda

$$\left(A - \frac{B^2}{4C}\right)u^2 + Cv^2 + u\left(D - \frac{BE}{2C}\right) + Ev + F = 0$$

$$\implies v^2 + 2\sqrt{2}u - \sqrt{2}v = 0$$

despejamos  $u$  y tomamos  $t = v$

$$\implies \mathbf{r}_{uv}(t) = \left( \frac{\sqrt{2}t - t^2}{2\sqrt{2}}, t \right), t \in \mathbb{R}$$

- Parametrización en el plano  $xy$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{xy}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}t - t^2}{2\sqrt{2}} \\ t \end{bmatrix} \\ &= \left( \frac{\sqrt{2}t - t^2}{2\sqrt{2}}, t - \frac{\sqrt{2}t - t^2}{2\sqrt{2}} \right), t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

En el ejemplo 8 se presenta una forma para determinar una parametrización trigonométrica de la curva de intersección entre un cono y un plano. En este caso, la proyección de la curva de intersección presenta rotación, por lo que, como el propósito es solo parametrizar, podemos usar diagonalización no ortogonal.

### Ejemplo 8

Determinar una parametrización trigonométrica de la curva de intersección entre el cono  $S_1 : x^2 + y^2 = z^2$  y el plano  $S_2 : 4z + y + 2x = 2$ .

**Solución:** Como antes, parametrizamos la proyección de la curva con  $(x(t), y(t), 0)$  y como  $z = \frac{2 - y - 2x}{4}$  entonces  $z(t) = \frac{2 - y(t) - 2x(t)}{4}$

La proyección de la curva en el plano  $xy$  es una curva  $C_{xy}$  con ecuación

$$\frac{3x^2}{4} - \frac{xy}{4} + \frac{x}{2} + \frac{15y^2}{16} + \frac{y}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Según el Teorema 2 (en el apéndice A), esta curva corresponde a un elipse (ver figura 4).

Bien, como  $A = \frac{3}{4} \neq 0$  entonces podemos usar  $C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Aplicando el cambio de variable  $(x, y) = C \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  nos queda

$$Au^2 + v^2 \left( C - \frac{B^2}{4A} \right) + Du + v \left( E - \frac{BD}{2A} \right) + F = 0$$

$$\frac{3u^2}{4} + \frac{11v^2}{12} + \frac{u}{2} + \frac{v}{3} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{33}{16} \left( u + \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{121}{48} \left( v + \frac{2}{11} \right)^2 = 1$$

- Parametrización en el plano  $uv$ . Como  $h = -\frac{1}{3}$ ,  $k = -\frac{2}{11}$ ,  $a = \sqrt{\frac{16}{33}}$ , y  $b = \sqrt{\frac{48}{121}}$ , entonces

$$\mathbf{r}_{uv}(t) = (h + a \operatorname{sen} t, k + b \operatorname{cos} t)$$

- Parametrización en el plano  $xy$ . La parametrización de la proyección de la curva de intersección es

$$(x(t), y(t)) = C \begin{bmatrix} h + a \operatorname{sen} t \\ k + b \operatorname{cos} t \end{bmatrix}$$

- La parametrización de la curva de intersección escoger

$$\mathbf{r}(t) = \left( x(t), y(t), \frac{1}{4} (2 - y(t) - 2x(t)) \right)$$

El código en MATHEMATICA es

```
ClearAll[x, y, u, v, h, k, a, b, mC, h, k, a, b, rxy, r, cv, n,e1,e2]
mC = {{1, 1/6}, {0, 1}};
```

```

h = -1/3; k = -2/11; a = Sqrt[16/33]; b = Sqrt[48/121];
u[t_] := h + a Cos[t]; v[t_] := k + b Sin[t];
(*Parametrizaciones*)
cv[t_] := mC.{u[t], v[t]};
x[t_] := cv[t][[1]]; y[t_] := cv[t][[2]];
rxy[t_] := {x[t], y[t], 0};
r[t_] := {x[t], y[t], 1/4 (2 - y[t] - 2 x[t])};
(*Una base ortonormal del plano 4z+y+2x=2*)
n = {2, 1, 4};
{e1, e2} = Orthogonalize@{{0, n[[3]], -n[[2]]}, {-n[[3]], 0, n[[1]}}];

Graphics3D[{
  (*Proyección de la curva*)
  First@ParametricPlot3D[rxy[t], {t, 0, 2 Pi}, Mesh -> None,
    PlotStyle -> {Blue, AbsoluteThickness[2]}],
  (*Curva de intersección*)
  First@ParametricPlot3D[r[t], {t, 0, 2 Pi}, Mesh -> None,
    PlotStyle -> {Brown, AbsoluteThickness[2]}],
  (*Cono*)
  First@ContourPlot3D[x^2 + y^2 == z^2, {x, -2, 1.5}, {y, -2, 2}, {z, 0, 1.5},
    PlotPoints -> 40, Mesh -> None,
    ContourStyle ->
    Directive[Orange, Opacity[0.2], Specularity[White, 30]],
    PerformanceGoal -> "Quality"],
  (*Plano*)
  First@ParametricPlot3D[{0,0,1/2}+t*e1+s*e2,{t,-2, 2}, {s,-1,2},
    Mesh -> None, PlotStyle -> {Gray, Opacity[0.2]}]
}, Boxed -> False, PlotRange -> All, ImageSize -> 400,
  Method -> {"ShrinkWrap" -> True}]

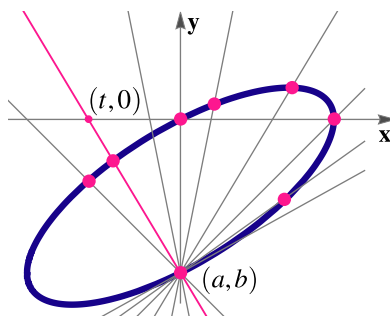
```

### 3. Parametrización racional de una cónica usando un “haz de rectas”.

Una “parametrización racional” de una curva es una parametrización en términos de cocientes de polinomios. Estas parametrizaciones son muy útiles en muchos contextos, como el de gráficos por computadora, modelado geométrico, ecuaciones diofánticas, cambios de variable en integración, etc. Las cónicas tienen la propiedad de que cada par de puntos en ella, se pueden obtener por intersección con una línea recta. La idea básica consiste en utilizar un “lápiz o haz de líneas rectas” que pasan por un punto  $(a, b)$  de la curva, de manera que al calcular el otro punto de intersección de cada recta genérica del “haz”, con la curva, se determina una parametrización de la curva (excepto por uno o dos puntos). Cada línea del “haz” depende de un parámetro  $t$  que será el parámetro de la parametrización de la curva (ver figura 9).

La idea general es como sigue:

- Tenemos una cónica  $\mathbf{C}$  (no degenerada) de ecuación  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  y  $(a, b) \in \mathbf{C}$
- El haz de rectas que pasan por  $(a, b)$  tienen ecuación general  $y = t(x - a) + b$  donde  $t$  es un parámetro que hace variar las rectas.
- Sustituimos en la ecuación de la cónica  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  y queda



**Figura 9:** Parametrización de una cónica con un "haz de rectas". Elaboración propia.

$$Ax^2 + Bx(t(x - a) + b) + C(t(x - a) + b)^2 + Dx + E(t(x - a) + b) + F = 0 .$$

Es decir, recolectando, queda una ecuación cuadrática  $\alpha(t)x^2 + \beta(t)x + \gamma(t) = 0$ .

- La ecuación  $\alpha(t)x^2 + \beta(t)x + \gamma(t) = 0$  tiene a lo sumo dos soluciones. Una de las soluciones es  $x = a$  pues el punto  $(a, b)$  satisface la ecuación de la cónica. Entonces el resultado de la división de la cuadrática por  $(x - a)$  tiene que ser un polinomio en  $x$  de grado 1, es decir,  $q(t)x - p(t)$

$$\begin{array}{r} \alpha(t)x^2 + \beta(t)x + \gamma(t) \quad | \quad x - a \\ \dots \qquad \qquad \qquad q(t)x - p(t) \\ \dots \\ \text{Residuo: } 0 \end{array}$$

$$\alpha(t)x^2 + \beta(t)x + \gamma(t) = (x - a)(q(t)x - p(t)) = 0$$

Por tanto las soluciones son  $x = a$  y  $x = \frac{p(t)}{q(t)}$  donde  $p(t)$  y  $q(t)$  son polinomios en  $t$  de grado a lo sumo 2.

- Sustituimos  $x(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$  en  $y = t(x - a) + b$  y obtenemos

$$\mathbf{C} : \mathbf{r}(t) = \left( \frac{p(t)}{q(t)}, \frac{p_1(t)}{q_1(t)} \right), t \in \mathbb{R} - \{ \text{ceros de } q(t) \text{ y } q_1(t) \}$$

Observe que si tomamos valores racionales de  $t$ , podemos obtener puntos con coordenadas racionales en la cónica.

En el ejemplo 9 se presenta una parametrización racional de una cónica usando un "haz de rectas".

**Ejemplo 9**

Determine una parametrización racional de la cónica  $\mathbf{C} : xy + y + 2 = 0$  usando el punto  $(-2, 2) \in \mathbf{C}$  (ver figura 10).





## 4. Bibliografía

---

- [1] David Angell. “Beginning algebraic number theory”. <https://web.maths.unsw.edu.au/~angell/articles/algnumtheory.pdf>
- [2] D. Marsh. (2005) “Applied Geometry for Computer Graphics and CAD”. 2nd ed. Springer.
- [3] Sergei Treil. “Linear Algebra Done Wrong”. <https://www.math.brown.edu/streil/papers/LADW/LADW-2014-09.pdf>. 2022.
- [4] Rick Miranda. (1983). “Integration: why you can and why you can’t”. Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 7, No. 9 (fall 1983), pp. 557-566. <https://www.math.colostate.edu/~miranda/preprints/IntegrationWhyYouCan-Can%27t.pdf>
- [5] Igor R. Shafarevich. (2013). “Basic Algebraic Geometry 1, Varieties in Projective Space”. Springer, 2013 edition.
- [6] John Stillwell. (2008). “Naive Lie theory” Springer, Springer; 2008a edition.

## Apéndice

---

### A. Clasificación de cónicas

---

Hay casos en los que esta ecuación general (1) no tiene soluciones (no hay lugar geométrico) o el conjunto solución es por ejemplo un punto o dos rectas. Estos casos especiales se llaman “cónicas degeneradas”.

Usando la teoría de formas cuadráticas podemos obtener un criterio para clasificar las cónicas a partir de su ecuación general, [2, pp. 112-114]

#### Teorema 2

Sea  $\mathbf{C}$  la cónica de ecuación  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ .

Si  $\Delta = 4ACF - AE^2 - B^2F + BDE - CD^2$ , entonces

- si  $B^2 - 4AC = 0$  y  $\Delta \neq 0$ ,  $\mathbf{C}$  es una parábola.
- si  $B^2 - 4AC < 0$  y  $\Delta \neq 0$ ,  $\mathbf{C}$  es una elipse.
- si  $B^2 - 4AC > 0$  y  $\Delta \neq 0$ ,  $\mathbf{C}$  es una hipérbola.

### B. Acerca del seno hipérbolico y el coseno hipérbolico.

---

**Identidades básicas.**

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\cosh(t) + \sinh(t) = e^t$$

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\cosh(t) - \sinh(t) = e^{-t}$$

$$\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}$$

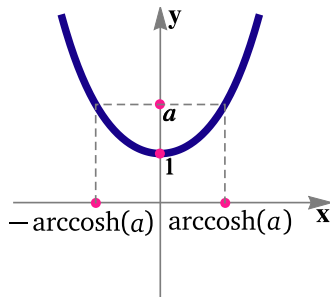
$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

Inversas

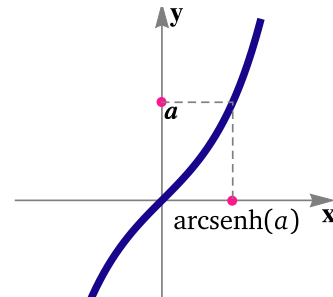
$$\operatorname{arsinh}(t) = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcosh}(t) = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}), t \geq 1$$

**Crecimiento y signo**



**Figura 11:** Representación de  $y = \cosh(t)$ .  
Elaboración propia.



**Figura 12:** Representación de  $y = \sinh(t)$ .  
Elaboración propia.

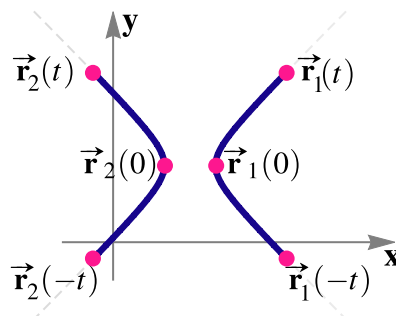
$\cosh(t) \geq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Además,  $\cosh(t) \downarrow$  si  $t \leq 0$  y  $\cosh(t) \uparrow$  si  $t \geq 0$

$\sinh(t)$  es creciente, además  $\sinh(t) \geq 0$  si  $t \geq 0$  y  $\sinh(t) \leq 0$  si  $t \leq 0$ .

**Ecuaciones.** Como se observa en la Figura 11 y la Figura 12, se usan inversas para obtener la o las soluciones de una ecuación.

$$\begin{cases} \cosh(t) = a \implies \begin{cases} t = \operatorname{acosh}(a) \\ t = -\operatorname{acosh}(a) \end{cases} & \text{si } a \geq 1 \\ \sinh(t) = a \implies t = \operatorname{asinh}(a) \end{cases}$$

**Simetría.** Usando la parametrizaciones  $r_1$  y  $r_2$  para cada rama,  $r_i(0)$  es el vértice respectivo y  $r_i(t)$  y  $r_i(-t)$  son simétricos respecto al eje focal (ver Figura 13).



**Figura 13:** Simetría. Elaboración propia.