Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 23, No 2. Marzo, 2023 – Agosto, 2023
ISSN 1659 -0643

Descripción de algunos métodos de solución de ecuaciones algebraicas de tercer y cuarto grado en una variable: una reseña histórica

| Description of Some Methods of Solving Third and Fourth Degree Algebraic Equations in One Variable: a historical review |

Héctor Barrantes González
hector.barrantes@ucr.ac.cr
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

Recibido: 19 abril 2021 Aceptado: 6 octubre 2022

Resumen: El objetivo del presente trabajo es realizar una exposición detallada de la resolución por radicales de las ecuaciones de grado tres y cuatro en una variable, utilizando diversos métodos. En el caso de la ecuación de tercer grado, se describen los métodos de Niccolo Fontana (Tartaglia) y Girolamo Cardano, quienes fueron los que dieron la solución de dicha ecuación, con coeficientes positivos. También se analiza la ecuación general de tercer grado es decir, con coeficientes reales y se detalla el método para hallar todas las soluciones reales y complejas. Se describe además el método de François Viète, para un caso particular de la ecuación de grado tres. Para la ecuación de cuarto grado con coeficientes reales, se describe el métodos de Ludovico Ferrari y el método de René Descartes. Además, se ilustran los métodos con ejemplos detallados.

Palabras Clave: ecuación de grado tres, ecuación de grado cuatro, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Descartes.

Abstract: The aim of the present work is to make a detailed exposition of the solution by radicals of equations of degree three and four in one variable, using different methods. In the case of the third degree equation, the methods of Niccolo Fontana (Tartaglia) and Girolamo Cardano are described, who were the ones who gave the solution of this equation, with positive coefficients. The general equation of third degree equation, i.e. with real coefficients, is also given and the method for finding all the real and complex solutions is detailed. The method of François Viète, for a particular case of the equation of degree three, is also described. For the fourth degree equation with real coefficients, the method of Ludovico Ferrari and the method of René Descartes are described. In addition, the methods are illustrated with detailed examples.

Keywords: third degree equation, fourth degree equation, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Descartes.

1. Introducción

La resolución de ecuaciones en una variable de primer y segundo grado data desde civilizacionas antiguas tales como Babilonia, Egipto, Grecia, entre otras. Los matemáticos pertenecientes a estas civilizaciones trabajaron problemas de álgebra, en particular la solución de ecuaciones, solamente en casos concretos aplicados a resolver problemas de la vida cotidiana. Según Burton, D. (2011), no fue hasta el Siglo XVI que las ecuaciones comienzan a tratarse de manera abstracta. Se le atribuye al gran matemático francés *François Viète* (1540-1603), conocido como Vieta, el introducir las consonantes para representar cantidades y vocales conocidas para las incógnitas. Este paso marcó un cambio decisivo, no sólo en la conveniencia de la notación, sino también en la abstracción del pensamiento matemático. Al pasar de ejemplos específicos como $3x^2 + 5x + 10 = 0$, a la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$, toda una clase de ecuaciones podría considerarse de una vez, de modo que una solución a la ecuación abstracta resolvería todos las ecuaciones específicas.

La ecuación de grado 2 fue tratada en la Grecia antigua por Diofanto de Alejandría alrededor de los siglos II y III (Burton, D. 2011) y más recientemente por varios matemáticos, como por ejemplo los matemáticos indios Brahmagupta (ca. 598) Sridhara (ca. 900), Mahavira (ca. 850), Bhaskara II (ca. 1114) (Ruiz, A. 2003) el matemático árabe Al-Khwarizmi (780-850) y el ya mencionado matemático frances François Viète (Burton, D. 2011). Con este, termina de resolverse la ecuación de segundo grado, con coeficientes positivos.

2. La ecuación de grado 3

De acuerdo con Burton, D. (2011), el problema de resolver la ecuación de grado 3, en una variable se remonta a la antigüedad, específicamente al problema de la duplicación del cubo, también llamado *problema de Delian*. Dado un cubo cuyo lado tiene longitud a, este problema consiste en encontrar dos medias proporcionales entre a y $2a$; es decir, hallar x, y tales que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

lo cual requiere la solución de la ecuación cúbica

$$x^3 = 2a^3.$$

Otro ejemplo se puede hallar en la obra *Aritmética* de Diophanto de Alejandría (ca 250), en la cual se encuentra el siguiente problema:

"Encuentra un triángulo rectángulo tal que el área añadida a la hipotenusa da un cuadrado, mientras que el perímetro es un cubo".

Este problema lleva a la ecuación

$$x^3 + x = 4x^2 + 4.$$

En el siglo XIII, Juan de Palermo, le propuso como desafío a Leonardo de Pisa (siglo XII), mejor conocido como Fibonacci, el problema de resolver la ecuación

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Fibonacci demostró por métodos geométricos que esta ecuación no tiene soluciones racionales y dio una aproximación numérica para una de las raíces.

Durante varios cientos de años, los matemáticos buscaron una "fórmula cúbica" que pudiera ser usada para resolver la ecuación cúbica de la misma manera que la fórmula cuadrática se utilizó para las ecuaciones cuadráticas. El mérito de haber descubierto finalmente tal fórmula pertenece a las matemáticas desarrolladas en la escuela de Bolonia, Italia, durante el siglo XVI.

La solución de las ecuaciones de tercer grado en una variable se debe a cinco matemáticos italianos del siglo XVI: Scipione del Ferro, Niccolo Tartaglia, Gerolamo Cardano, Ludovico Ferrari y Rafael Bombelli. También a ellos se debe la solución de la ecuación $x^4 + bx^2 + c = 0$. Esto condujo a una comprensión más amplia de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, lo cual supuso un paso fundamental en la teoría de ecuaciones.

A principios del siglo XVI, Scipione del Ferro (ca. 1465-1526), profesor de Matemáticas de la Universidad de Bolonia, encontró una fórmula para resolver la ecuación

$$x^3 + px = q, \text{ con } p > 0, \; q > 0.$$

Sin embargo, no hizo público su descubrimiento. Pero por fortuna, poco antes de su muerte le confió la solución de dicha ecuación a su discípulo Antonio María del Fiore.

En 1535, Niccolo Fontana (1500-1557), mejor conocido como Tartaglia, anunció que había descubierto la manera de resolver ecuaciones de la forma

$$x^3 + px = q, \qquad x^3 + px^2 = q,$$

con $p > 0$ y $q > 0$. Fiore, creyendo que Tartaglia no decía la verdad, lo desafió a una concurso público de resolución de problemas, en el que cada uno propondría al otro, 30 problemas que debían resolver al cabo de 50 días. El vencedor sería el que lograra resolver la mayor cantidad de problemas. Los problemas que Fiore propuso a tartaglia eran casos particulares de la ecuación $x^3 + px = q$, por lo que este conocía la forma de resolverlos. Por su parte, Tartaglia propuso a Fiore, 30 problemas que conducían a casos particulares de la ecuación $x^3 + px^2 = q$, de los cuales Fiore no pudo resolver ninguno.

2.1. Método de Tartaglia para la solución de $x^3 + px = q$, con $p > 0$, $q > 0$

Considérese la ecuación

$$x^3 + px = q. \tag{1}$$

donde $p > 0$, $q > 0$. Nótese que para cualesquiera dos números (reales) u, v se cumple la identidad

$$(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3.$$

El método de Tartaglia consiste en hacer las sustituciones

$$x := u - v, \qquad p := 3uv, \qquad q := u^3 - v^3. \tag{2}$$

Como $p = 3uv$, entonces $p^3 = 27u^3v^3$, por lo que

$$u^3v^3 = \frac{p^3}{27}. \tag{3}$$

Por otro lado, elevando al cuadrado ambos lados de la tercera expresión en (2) se tiene

$$u^6 - 2u^3v^3 + v^6 = q^2.$$

Sumando $4u^3v^3$ a ambos lados de la ecuación anterior se obtiene

$$4u^3v^3 + q^2 = u^6 + 2u^3v^3 + v^6,$$

lo cual es equivalente a

$$\left(u^3 + v^3\right)^2 = q^2 + 4u^3v^3,$$

usando la igualdad (3) se obtiene

$$\left(u^3+v^3\right)^2 = q^2 + \frac{4p^3}{27},$$

por lo que

$$u^3+v^3 = \sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}.$$

De lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} u^3 - v^3 &= q \\ u^3 + v^3 &= \sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}} \end{aligned}$$

Nótese que se escribe el lado izquierdo de la expresión anterior sin valor absoluto, puesto que Tartaglia desarrolló su método antes de la aceptación de los números negativos y por lo tanto, antes de la definición formal de valor absoluto.

Ahora bien, sumando estas dos ecuaciones se tiene la ecuación

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

Similarmente

$$v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

por lo tanto

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

y

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Ahora, como $x = u - v$, entonces

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \tag{4}$$

2.2. Método de Cardano para la solución de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, con $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Girolamo Cardano (1501-1576) fue profesor de matemáticas en las universidades de Milán, Pavía y Bolonia. Cuando se enteró del concurso matemático entre Fiore y Tartaglia, Cardano le rogó a Tartaglia que le compartiera el método de solución de la ecuación cúbica que éste había descubierto, con el fin de incluirlo en su libro *Practica Arithmeticae* (1539) y comprometiéndose a respetar la autoría de Tartaglia. Tartaglia se negó puesto que él mismo planeaba publicar su propio texto sobre álgebra. Después de mucha insistencia por parte de Cardano, Tartaglia reveló su método de solución, pero haciendo jurar a Cardano que no lo publicaría (Burton, D. 2011).

Sin embargo, en 1542, al estudiar los documentos de Scipione del Ferro, Cardano se enteró de que este había sido el primero en obtener la solución de la ecuación cúbica. Por lo tanto, Cardano consideró que podía publicar el método de solución de Tartaglia sin incumplir la promesa hecha y procedió a publicarlo en su *Ars Magna* de 1545 (Soto y Mosquera 2018).

En el texto, Cardano reconoció la autoría de Tartaglia, y afirmaba que este le había confiado el método para resolver la ecuación cúbica, sin embargo también afirmaba que él mismo había llegado a la solución por sus propios métodos. Por su parte, Tartaglia acusó a Cardano de mentir y de esta forma inició una enemistad que perduró durante años. Ya en el siglo XVI, los números negativos se conocían en Europa, en parte gracias a la influencia de las matemáticas árabes. No obstante, estos números no eran aceptados como tales, y el mismo Cardano los llamó números "ficticios". Cardano fue uno de los primeros en reconocer que una ecuación cúbica podía tener soluciones negativas y uno de los primeros también en darse cuenta de que una ecuación cúbica podía tener tres soluciones distintas (Burton, D. 2011).

Dada la ecuación

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \tag{5}$$

donde $a, b, c > 0$, el método de Cardano consiste hacer el cambio de variable

$$x := y - \frac{a}{3}$$

esto con el fin de reducir la ecuación anterior a una que no contenga exponentes cuadrados. Ahora, sustituyendo en la ecuación (5) se tiene

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0.$$

Desarrollando los paréntesis se obtiene

$$y^3 - 3y^2\left(\frac{a}{3}\right) + 3y\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y^2 - 2y\frac{a}{3} + \left(\frac{a}{3}\right)^2\right) + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

esta ecuación es equivalente a

$$y^3 - y^2a + \frac{ya^2}{3} - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2}{3}ya^2 + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ba}{3} + c = 0$$

Sumando términos semejantes se obtiene

$$y^3 - \frac{ya^2}{3} + \frac{2}{27}a^3 + by - \frac{ba}{3} + c = 0$$

la ecuación anterior es equivalente a

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\right) = 0 \tag{6}$$

Ahora se hace

$$p := b - \frac{a^2}{3}, \qquad q := -\left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\right)$$

entonces la ecuación (6) se reescribe como

$$y^3 + py = q. \tag{7}$$

Se puede observar que esta tiene la misma forma que la ecuación que resolvió Tartaglia.

Entonces, siguiendo el método de Tartaglia visto anteriomente, se llega a la solución de la ecuación (7)

$$y=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Y como $x=y-\frac{a}{3}$, entonces, solución de la ecuación cúbica (7) es

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\frac{a}{3} \tag{8}$$

Esta solución, se conoce como la *solución de Cardano* para la ecuación (7) o simplemente como la *fórmula de Cardano*.

3. Solución general de la ecuación cúbica $x^3+ax^2+bx+c=0$

Según Burton, D. (2011), debido a la poca o nula aceptación de los números negativos en el siglo XVI, Cardano se vio obligado a tratar una lista de 13 distintos tipos de ecuaciones de grado tres, de manera que cada ecuación tuviera solamente coeficientes positivos. Esto sin duda dificultó la generalidad de las soluciones de Cardano, puesto que para cada ecuación Cardano propuso un procedimiento distinto. Por ejemplo, al resolver la ecuación

$$x^3=px+q, \quad p>0,\ q>0.$$

Cardano utilizó el argumento correspondiente a la fórmula

$$(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v),$$

con lo cual se llega a la solución

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}. \tag{9}$$

Se puede observar que cuando

$$\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}<0,$$

la fórmula (9) lleva inevitablemente a raíces cuadradas de números negativos, lo cual fue una dificultad que Cardano no pudo resolver.

Uno de los primeros en aceptar la existencia de los números imaginarios y aplicarlos a la resolución de ecuaciones, fue el matemático italiano *Rafael Bombelli* (1526-1572). En su libro *Álgebra* (1572), sucesor del *Ars Magna* de Cardano, Bombelli aplicó dichos números a la fórmula de Cardano, incluso en el caso irreducible (todas las raíces son reales) de la ecuación cúbica. Específicamente, Bombelli aplicó el método de Tartaglia-Cardano al estudio la ecuación.

$$x^3=15x+4, \tag{10}$$

obteniendo la solución

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}. \tag{11}$$

Esta expresión parece ser, a primera vista, imaginaria debido a la presencia de $\sqrt{-121}$, sin embargo, Bombelli sabía que la ecuación (10) tenía las siguientes soluciones reales

$$4, \qquad -2+\sqrt{3}, \qquad -2-\sqrt{3}.$$

Bombelli demostró que la solución (11), aparentemente imaginaria, es un número real. Para ello, supuso que las raíces cúbicas de (11) tenían la siguiente forma

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} &= a + b\sqrt{-1}, \\ \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} &= a - b\sqrt{-1} \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} 2+\sqrt{-121} &= (a + b\sqrt{-1})^3 \\ 2-\sqrt{-121} &= (a - b\sqrt{-1})^3 \end{aligned} \tag{12}$$

donde $a > 0$, $b > 0$ son constantes que hay que determinar.

Ahora bien, la ecuación

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$$

implica

$$\begin{aligned} 2+\sqrt{-121} &= \left(a + b\sqrt{-1}\right)^3 \\ &= a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} + 3ab^2\left(\sqrt{-1}\right)^2 + b^3\left(\sqrt{-1}\right)^3 \\ &= a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} - 3ab^2 - b^3\sqrt{-1} \\ &= a^3 - 3ab^2 + \left(3a^2b - b^3\right)\sqrt{-1} \\ &= a(a^2 - 3b^2) + b\left(3a^2 - b^2\right)\sqrt{-1} \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene

$$2 + 11\sqrt{-1} = a(a^2 - 3b^2) + b\left(3a^2 - b^2\right)\sqrt{-1},$$

igualando "coeficientes" se obtiene

$$2 = a\left(a^2 - 3b^2\right) \tag{13}$$

$$11 = b\left(3a^2 - b^2\right) \tag{14}$$

Suponiendo que las soluciones son enteras, los factores a la derecha de la ecuación (13) sólo pueden tomar los valores 1 o 2, en particular se tiene que $a = 1$ o $a = 2$. Asímismo, de la ecuación (14) se tiene $b = 1$ o $b = 11$. Pero solamente la elección $a = 2$ y $b = 1$ satisfacen (13) y (14) simultáneamente. Entonces, sustituyendo $a = 2$ y $b = 1$ en (12) se tiene

$$\begin{aligned} 2+\sqrt{-121} &= (2 + \sqrt{-1})^3 \\ 2-\sqrt{-121} &= (2 - \sqrt{-1})^3 \end{aligned}$$

Bombelli concluyó que una solución de la ecuación cúbica $x^3 = 15x + 4$ es

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{(2+\sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{-1})^3} \\ &= (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Al probar que las raíces de $x^3 = 15x + 4$ son reales, Bombelli demostró el hecho extraordinario de que los números reales podrían ser obtenidos a partir de números imaginarios.

3.1. Análisis de las soluciones de Tartaglia-Cardano.

Como se vió en las secciones anteriores, haciendo un cambio de variable adecuado la ecuación de grado tres (5) se reduce a una ecuación de la forma

$$y^3 + py = q,$$

la cual es la ecuación que resolvió Tartaglia. Sin embargo, en este caso p y q pueden tomar valores negativos; es decir, $p, q \in \mathbb{R}$. Siguiendo ideas análogas a las expuestas por Uspensky J. (1995), en esta sección se analizan la soluciones de la ecuación (5) dada por

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \tag{15}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se puede observar que la solución de la ecuación (15) (dada en (8))

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{a}{3},$$

contiene la raíz cuadrada $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, por lo que dicha solución depende del signo de la expresión $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$.

Se procede entonces a analizar lo que sucede con las soluciones cuando esta expresión cambia de signo.

Caso 1

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0.$$

Se denota

$$A := \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \qquad B := -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Con esta notación se tienen las siguientes expresiones para u y v:

$$u = \sqrt[3]{A}, \quad v = \sqrt[3]{B}.$$

Esto significa que u y v son raíces cúbicas de A y B respectivamente. A continuación se analizará el comportamiento de las soluciones, de acuerdo con el signo de A. El análisis de acuerdo con el signo de B es equivalente.

Primero se hallan las tres raíces cúbicas de A, denotadas por u_1, u_2, u_3, y luego se escogen las raíces de B, denotadas v_1, v_2, v_3, de modo que se cumplan las igualdades $u_1v_1 = u_2v_2 = u_3v_3 = \frac{p}{3}$ como en (2). Esto significa que la escogencia de las raíces de B depende de las raíces de A.

Si $A > 0$, el ángulo θ entre A y el eje real es 0. Recuérdese que las raíces cúbicas de A están dadas por

$$u_k = \sqrt[3]{|A|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2(k-1)\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2(k-1)\pi}{3}\right)\right),$$

con $k = 1, 2, 3$. Explícitamente, las tres raíces cúbicas de A son las siguientes

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sqrt[3]{A},\\
u_2 &= \sqrt[3]{A}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{A}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\\
u_3 &= \sqrt[3]{A}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{A}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Ahora, se escogen las tres raíces cúbicas v_1, v_2 y v_3 de B, de manera que se satisfagan las ecuaciones

$$u_1 v_1 = u_2 v_2 = u_3 v_3 = \frac{p}{3} \quad \text{en (2)}.$$

Estas raíces cúbicas son

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt[3]{B}, \\ v_2 &= \sqrt[3]{B}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ v_3 &= \sqrt[3]{B}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Observe que se cumplen las ecuaciones $u_1 v_1 = u_2 v_2 = u_3 v_3 = \frac{p}{3}$ en (2), pues

$$\begin{aligned} u_1 v_1 &= \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} = \frac{p}{3}, \\ u_2 v_2 &= \sqrt[3]{A}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{B}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{p}{3}, \\ u_3 v_3 &= \sqrt[3]{A}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{B}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{p}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las tres soluciones de la ecuación (15) están dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 - v_1 - \frac{a}{3} \\ &= \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} - \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= u_2 - v_2 - \frac{a}{3} \\ &= \sqrt[3]{A}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt[3]{B}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{a}{3} \\ &= -\frac{\sqrt[3]{A}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{A} + \frac{\sqrt[3]{B}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{B} - \frac{a}{3} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) - \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= u_3 - v_3 - \frac{a}{3} \\ &= \sqrt[3]{A}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt[3]{B}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{a}{3} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) - \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

Observación 1

De acuerdo con lo anterior, si $B > 0$ las soluciones de la ecuación $x^3 + px = q$, con $p, q \in \mathbb{R}$, sólo difieren en el término $-\frac{a}{3}$.

Explícitamente, las soluciones de la ecuación anterior están dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}, \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right), \\ x_3 &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Ahora se analiza el caso $A < 0$.

Si $A < 0$ el ángulo entre A y el eje real es π. Entonces, en este caso, las tres raíces cúbicas de A están dadas por

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[3]{|A|}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\sqrt[3]{A}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt[3]{A}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ u_2 &= \sqrt[3]{|A|}\left(\cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi)\right) = \sqrt[3]{A}, \\ u_3 &= \sqrt[3]{|A|}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = -\sqrt[3]{A}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt[3]{A}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Ahora, se escogen tres raíces cúbicas v_1, v_2 y v_3 de B, que satisfagan la ecuación $u_1v_1 = u_2v_2 = u_3v_3 = \frac{p}{3}$ en (2). De manera análoga al caso $A > 0$, estas raíces cúbicas son

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt[3]{B}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ v_2 &= \sqrt[3]{B}, \\ v_3 &= \sqrt[3]{B}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} u_1v_1 &= \sqrt[3]{A}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{B}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{p}{3}, \\ u_2v_2 &= \sqrt[3]{A}\,\sqrt[3]{B} = \frac{p}{3}, \\ u_3v_3 &= \sqrt[3]{A}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{B}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{p}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las tres soluciones de la ecuación (15) están dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 - v_1 - \frac{a}{3} \\ &= \sqrt[3]{A}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt[3]{B}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{a}{3} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) - \frac{a}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= u_2 - v_2 - \frac{a}{3} \\ &= \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} - \frac{a}{3}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= u_3 - v_3 - \frac{a}{3}, \\
&= \sqrt[3]{A}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt[3]{B}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{a}{3} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) - \frac{a}{3}.
\end{aligned}
$$

Observación 2

De manera análoga al caso anterior, la ecuación

$$x^3 + px = q,$$

con $p, q \in \mathbb{R}$ y $A < 0$, tiene las siguiente soluciones

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right), \\
x_2 &= \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}, \\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Caso 2

Si $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} < 0,$ entonces $-\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27} > 0.$

Denótese

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\left(-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right),$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \\
&= \frac{q}{2} + \sqrt{-\left(-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)} \\
&= \frac{q}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} \\
&= \frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}.
\end{aligned}
$$

Similarmente

$$B = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}.$$

En el siguiente teorema se muestra que en este caso, la ecuación (7) tiene tres raíces reales distintas. Para simplificar la lectura, se escribe en el enunciado la ecuación (1)

Teorema 1

Si $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}<0$ entonces la ecuación (1)

$$y^3+py=q,$$

donde $p,q\in\mathbb{R}$, tiene tres soluciones reales distintas.

Demostración. Se tiene que

$$A:=\frac{q}{2}+i\sqrt{\frac{-q^2}{4}-\frac{p^3}{27}},\qquad B:=-\frac{q}{2}+i\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}.$$

Se procede a denotar por $\sqrt[3]{A}:=a+ib$ una de las raíces cúbicas de A, con $a,b,\in\mathbb{R}$. Entonces

$$A=(a+ib)^3.$$

por lo que

$$\overline{A}=\overline{(a+ib)^3}=\left(\overline{a+ib}\right)^3=(a-ib)^3.$$

Por otro lado

$$\overline{A}\;=\;\frac{q}{2}-i\sqrt{\frac{-q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\;=\;-B,$$

se puede entonces, concluir que una de las raíces cúbicas de $-B$ es

$$\sqrt[3]{-B}=\sqrt[3]{\overline{A}}=a-ib.$$

De las fórmula de Tartaglia (4) y las fórmulas (16) se obtiene que

$$\begin{aligned}
y_1&=\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\\
&=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{-B}\\
&=a+bi+(a-bi)\\
&=2a.
\end{aligned}$$

Y como $2a\in\mathbb{R}$, se concluye que $y_1\in\mathbb{R}$.
Similarmente

$$\begin{aligned}
y_2&=\frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)+\frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{-B}\right)+\frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{-B}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(-(a+bi)-(a-bi)\right)+\frac{i\sqrt{3}}{2}\left(a+bi-(a-bi)\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(-2a)\right)+\frac{i\sqrt{3}}{2}\left(2bi\right)\\
&=-a-\sqrt{3}b.
\end{aligned}$$

Y dado que $a,b\in\mathbb{R}$, se sigue que $y_2\in\mathbb{R}$.
Finalmente

$$\begin{aligned}
y_3&=\frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)-\frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{-B}\right)-\frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{-B}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(-(a+ib)-(a-ib)\right)-\frac{i\sqrt{3}}{2}\left(a+ib-(a-ib)\right)\\
&=-a+\sqrt{3}b.
\end{aligned}$$

Como $a, b \in \mathbb{R}$, se obtiene que $y_3 \in \mathbb{R}$. $\square$

Observación 3

Para la demostración anterior, se utilizaron las fórmulas (16). El resultado es equivalente si se utilizan las fórmulas (17).

Ejemplo 1

Resolver la ecuación

$$y^3 - 3y = 1. \tag{18}$$

Solución. En este caso la ecuación no tiene término de grado 2, es decir, está escrita en la forma $y^3 + py = q$ con $p = -3$ y $q = 1$. Nótese además que

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{1^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27} = -\frac{3}{4} < 0.$$

Entonces

$$A = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$B = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Las soluciones de (18) están dadas por

$$y_1 = \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) + \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) - \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) - \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right). \end{aligned}$$

$\square$

Observación 4

De acuerdo con el teorema (1), las tres raíces que acabamos de calcular son reales. Sin embargo, debido a la presencia de raíces cúbicas de números imaginarios, no es posible encontrar explícitamente el valor real de estas raíces (Uspensky J. 1995). Es decir, no se puede calcular explícitamente los valores de a y b del teorema (1).

Por ejemplo, de manera análoga a la prueba del teorema (1), supóngase que

$$\sqrt[3]{A} = a + bi,$$

y trátese de hallar explícitamente y_1. Primero, nótese lo siguiente:

Como $\sqrt[3]{A} = a + bi$ entonces

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = A = (a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2 - b^3)i,$$

igualando las partes real e imaginaria se tienen las ecuaciones

$$a^3 - 3ab^2 = \frac{1}{2}, \tag{19}$$

$$b(3a^2 - b^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{20}$$

Despejando b^2 de la ecuación (19) se tiene

$$b^2 = \frac{-1 + 2a^3}{6a}. \tag{21}$$

Sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación (20) se obtiene

$$b = \frac{3\sqrt{3}a}{16a^3 + 1},$$

y por lo tanto

$$b^2 = \frac{27a^2}{(16a^3+1)^2}. \tag{22}$$

Ahora, igualando las expresiones de b^2 de (21) y (22)

$$\frac{-1+2a^3}{6a} = \frac{27a^2}{(16a^3+1)^2},$$
$$(16a^3+1)^2(-1+2a^3) = (27a^2)(6a).$$

Desarrollando el lado izquierdo y sumando términos semejantes, se tiene

$$512a^9 - 192a^6 - 192a^3 - 1 = 0.$$

Esta expresión se puede reescribir como

$$(2a)^9 - 3(2a)^6 - 24(2a)^3 - 1 = 0,$$

y esta, a su vez, se puede reescribir de la siguiente manera

$$\left((2a)^3\right)^3 - 3\left((2a)^3\right)^2 - 24\,(2a)^3 - 1 = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $w = (2a)^3$ se obtiene

$$w^3 + w^2 - 24w + 1 = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $w = z + 1$ se obtiene

$$z^3 - 27z - 27 = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $z = 3t$ se obtiene

$$t^3 - 3t - 1 = 0.$$

Observe que esta es la misma ecuación que se quiere resolver, por lo que no se ha avanzado en la búsqueda de los valores de a y b.

No obstante, hay una manera de hallar las soluciones de la ecuación anterior, expresadas como números que no involucran números imaginarios, la cual se da en el siguiente teorema.

Teorema 2

Si $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} < 0$, entonces las soluciones de la ecuación (1)

$$y^3 + py = q$$

con $p, q \in \mathbb{R}$, están dadas por

$$\begin{aligned}
y_1 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right),\\
y_2 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right),\\
y_3 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

donde θ es el ángulo entre A y el eje real.

Demostración. Sea θ el ángulo entre A y el eje real. Primero se calcula el módulo de A.

$$|A|^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right)^2 = -\frac{p^3}{27},$$

y de manera análoga

$$|B|^2 = \frac{-p^3}{27}.$$

De lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{A} &= \sqrt[3]{|A|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)\\
&= \sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)\right).
\end{aligned}$$

y de manera análoga

$$\sqrt[3]{B} = \sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)\right).$$

De acuerdo con el teorema (1) la solución y_1 de la ecuación (1) está dada por,

$$y_1 = 2a = \sqrt[3]{|A|}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right).$$

Similarmente, la solución y_2 de (1) está dada por

$$\begin{aligned} y_2 &= -a - b\sqrt{3} \\ &= -\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \sqrt{\frac{-p}{3}}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)\sqrt{3} \\ &= -\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)\sqrt{3}\right) \\ &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Finalmente, la solución y_3 de (1) está dada por

$$\begin{aligned} y_3 &= -a + b\sqrt{3} \\ &= -\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sqrt{\frac{-p}{3}}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)\sqrt{3} \\ &= -\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)\sqrt{3}\right) \\ &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

□

Corolario 1 Si $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, entonces las soluciones de la ecuación (5)

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, están dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{a}{3}, \\ x_2 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) - \frac{a}{3}, \\ x_3 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) - \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

donde θ es el ángulo entre A y el eje real.

Demostración. Ya se vio que haciendo el cambio de variable $x = y - \frac{a}{3}$, la ecuación (5) dada por

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, se transforma en la ecuación (1) dada por

$$y^3 + py = q,$$

con $p, q \in \mathbb{R}$. Por el teorema (2), las soluciones de la ecuación anterior se obtienen mediante las fórmulas

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right),$$
$$y_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right),$$
$$y_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right).$$

Y como $x_i = y_i - \frac{a}{3}$, para $i = 1, 2, 3$, se tiene

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{a}{3}$$
$$x_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) - \frac{a}{3}$$
$$x_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) - \frac{a}{3}$$

□

Ejemplo 2

Considérese nuevamente la ecuación del ejemplo (1)

$$x^3 - 3x = 1. \tag{23}$$

Determine sus soluciones.

Solución. En este caso $a = 0$, $p = -3$ y $q = 1$. Entonces

$$A = \frac{1}{2} + i\sqrt{-\frac{1^2}{4} - \frac{(-3)^3}{27}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

El ángulo entre A y el eje real es

$$\theta := \frac{\pi}{3}.$$

Entonces, las soluciones de la ecuación (23) están dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{a}{3} \\ &= 2\sqrt{\frac{-(-3)}{3}}\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{3}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) - \frac{a}{3} \\ &= 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{3}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) - \frac{a}{3}\\
&= 2\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{3}\right)\\
&= 2\cos\left(\frac{13\pi}{9}\right).
\end{aligned}
$$

□

3.2. Método de Viéta para la solución de $x^3 + px = q$, con $p > 0$, $q > 0$

En esta sección se describe el siguiente método de Vièta (1540-1603), para resolver ecuaciones cúbicas de la forma

$$x^3 + px = q, \; p > 0, q > 0 \tag{24}$$

Este método parte de hacer el cambio de variable

$$x = \frac{p}{3y} - y.$$

Sustituyendo en (24) se tiene la ecuación

$$\left(\frac{p}{3y} - y\right)^3 + p\left(\frac{p}{3y} - y\right) = q,$$

desarrollando el lado izquierdo y agrupando términos semejantes se llega a la ecuación

$$\frac{p^3}{27y^3} - y^3 = q,$$

multiplicando por y^3 se obtiene,

$$y^6 + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0,$$

la cual es una ecuación cuadrática en la variable y^3.

Ejemplo 3

Se utilizará el método de Vièta para resolver la ecuación

$$x^3 + 81x = 702. \tag{25}$$

Solución. Obsérvese que en este caso $p = 81$ y $q = 702$. Se hace el cambio de variable

$$x = \frac{p}{3y} - y = \frac{81}{3y} - y = \frac{27}{y} - y.$$

Sustituyendo en (25) se obtiene la ecuación

$$y^6 + 702y^3 - \frac{81^3}{27} = 0$$

o equivalentemente

$$(y^3)^2 + 702y^3 - \frac{81^3}{27} = 0.$$

Nótese que esta es una ecuación cuadrática en y^3. Por lo que

$$y^3 = \frac{-702 \pm \sqrt{702^2 - 4 \cdot 27^3}}{2} = \frac{-702 \pm 756}{2}$$

Es necesario analizar dos casos:

Si $y^3 = \dfrac{-702+756}{2} = 27$, entonces $y = 3$.

Si $y^3 = \dfrac{-702-756}{2} = -729$, entonces $y = -9$.

Regresando a la variable x se obtiene que

a) si $y = 3$ entonces

$$x = \frac{27}{y} - y = \frac{27}{3} - 3 = 6.$$

b) si $y = -9$ entonces

$$x = \frac{27}{y} - y = \frac{27}{-9} - -9 = 6.$$

Nótese que en este caso, solamente se pudo encontrar una solución de la ecuación (25). □

4. La ecuación de grado cuatro.

De acuerdo con Burton, D. (2011) una vez que fue resuelta la ecuación de tercer grado, los matemáticos, como era de esperar, se dedicaron a resolver la ecuación de grado cuatro

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

En 1540 le fue propuesto a Cardano el problema de dividir el número 10 en tres partes proporcionales tales que el producto de la primera y segunda parte es 6. Si los números se llaman $\dfrac{6}{x}$, x y $\dfrac{x^3}{6}$ el problema conduce a la ecuación

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x.$$

Cardano fracasó en el intento, pero su discípulo *Ludovico Ferrari* (1522-1565) tuvo éxito al intentar resolver el problema. Cardano incluyó el método de Ferrari en el *Ars Magna*, con el debido crédito dado a Ferrari.

4.1. La solución de la ecuación de grado cuatro de Ferrari.

A continuación se describe el método de Ferrari para resolver la ecuación de cuarto grado. Considérese la ecuación

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{26}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. La idea de Ferrari consiste en hacer el cambio de variable $x = y - \frac{a}{4}$ y convertir la ecuación (26) en una ecuación en la que no aparece el término de grado 3. Para ello se sustituye $x = y - \frac{a}{4}$ en la ecuación (26)

$$\left(y - \frac{a}{4}\right)^4 + a\left(y - \frac{a}{4}\right)^3 + b\left(y - \frac{a}{4}\right)^2 + c\left(y - \frac{a}{4}\right) + d = 0.$$

Desarrollando el lado izquierdo de la ecuación anterior, se obtiene

$$y^4 + ry^2 + sy + t = 0, \tag{27}$$

donde $r, s, t \in \mathbb{R}$. La ecuación anterior es equivalente a

$$y^4 + ry^2 = -sy - t. \tag{28}$$

Sumando $r^2 + ry^2$ a ambos lados de la ecuación anterior se obtiene

$$y^4 + 2ry^2 + r^2 = r^2 + ry^2 - sy - t,$$

es decir

$$(y^2 + r)^2 = r^2 + ry^2 - sy - t. \tag{29}$$

Se introduce una nueva incógnita z, con el fin de convertir el lado izquierdo de (29) en el cuadrado perfecto

$$(y^2 + r + z)^2.$$

Para ello se suma $2(y^2 + r)z + z^2$ a ambos lados de (29)

$$(y^2 + r)^2 + 2(y^2 + r)z + z^2 = r^2 + ry^2 - sy - t + 2(y^2 + r)z + z^2,$$

equivalentemente

$$(y^2 + r + z)^2 = (r + 2z)y^2 - sy + (r^2 - t + 2rz + z^2). \tag{30}$$

El problema se reduce a encontrar un valor de z para el cual, el lado derecho de la ecuación (30) sea un cuadrado perfecto. Pero esto sucede si la ecuación cuadrática en la variable y

$$(r + 2z)y^2 - sy + (r^2 - t + 2rz + z^2) = 0,$$

tiene una única solución.

En otras palabras, el lado derecho de (30) es un cuadrado perfecto si el discriminante de la ecuación anterior, es cero. Es decir, si

$$s^2 - 4(r + 2z)(r^2 - t + 2rz + z^2) = 0.$$

Desarrollando el lado izquierdo de la ecuación anterior se tiene

$$8z^3 + 20rz^2 + (16r^2 - 8t)z + (4r^3 - 4rt - s^2) = 0. \tag{31}$$

Obsérvese que esta es una ecuación cúbica en la variable z, que tiene al menos una solución real. La ecuación (31) se llama *ecuación cúbica resolvente* de la ecuación (26).

Una vez que se tiene una solución z_0 de la ecuación (31), se sustituye en la ecuación (30) y se tiene una ecuación cuadrática en la variable y^2 (recuérdese que r, s, t son constantes conocidas), lo cual da las cuatro soluciones de la ecuación (27) y por lo tanto, se obtienen las cuatro soluciones de la ecuación (26).

Ejemplo 4

Considérese la ecuación

$$x^4 + 4x - 1 = 0. \tag{32}$$

Determine sus soluciones.

Solución. Nótese que, de acuerdo con la notación en la ecuación (26) se tiene $a = 0$, $b = 0$, $c = 4$, $d = -1$.

Con el fin de aplicar el procedimiento anterior, se escribe la ecuación (32) como

$$x^4 + 0x^2 + 4x - 1 = 0.$$

Entonces, $r = 0$, $s = 4$, $t = -1$. Obsérvese que esta ecuación no tiene término de grado 3, por lo que no es necesario hacer la sustitución $x = y - \dfrac{a}{4}$.

Se procede a escribir la ecuación (32) como

$$x^4 = -4x + 1. \tag{33}$$

Nótese que el sumar $rx^2 + r^2$ a ambos lados en este caso no se afecta la ecuación, pues $r = 0$.

Ahora se introduce la incógnita z y se suma $2x^2z + z^2$ a ambos lados de (33)

$$x^4 + 2x^2z + z^2 = 2x^2z + z^2 - 4x + 1,$$

Esta ecuación es equivalente a

$$(x^2 + z)^2 = (2z)x^2 - 4x + (z^2 + 1). \tag{34}$$

El lado derecho de (34) es un cuadrado perfecto si la ecuación

$$(2z)x^2 - 4x + (z^2 + 1) = 0$$

tiene solución única. Es decir, si

$$(-4)^2 - 4(2z)(z^2 + 1) = 0.$$

Desarrollando el lado izquierdo se obtiene la *ecuación cúbica resolvente*

$$z^3 + z - 2 = 0.$$

Nótese que $z = 1$ es una solución de esta ecuación. Sustituyendo en (34) se obtiene

$$(x^2 + 1)^2 = 2x^2 - 4x + 2.$$

Obsérvese que la ecuación anterior es una ecuación cuadrática en la variable x^2. Esta es equivalente a

$$(x^2 + 1)^2 = 2(x^2 - 2x + 1)$$

o bien

$$(x^2 + 1)^2 = 2(x - 1)^2.$$

De la ecuación anterior surgen las ecuaciones cuadráticas

$$x^2 + 1 = \sqrt{2}(x - 1), \qquad x^2 + 1 = -\sqrt{2}(x - 1).$$

Caso: 1

Se analiza la ecuación

$$x^2+1=\sqrt{2}(x-1), \tag{35}$$

es decir

$$x^2-\sqrt{2}x+\sqrt{2}+1=0.$$

Usando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas, se sigue que las soluciones de la ecuación (35) están dadas por

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4(\sqrt{2}+1)}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2(1-2(\sqrt{2}+1))}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-1-2\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2\sqrt{2}}\,i. \end{aligned}$$

Nótese que las dos soluciones anteriores son complejas (con parte imaginaria no nula).

Caso: 2

Ahora se analiza la ecuación

$$x^2+1=-\sqrt{2}(x-1). \tag{36}$$

Reordenando términos se tiene la ecuación cuadrática

$$x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}=0.$$

En este caso las soluciones de (36) están dadas por

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4(1-\sqrt{2})}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2(1-2(1-\sqrt{2}))}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-1} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\sqrt{2}-1}\,. \end{aligned}$$

Obsérvese que en este caso, las dos soluciones son reales. De lo anterior se concluye que las soluciones de la ecuación (32) son las siguientes:

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2\sqrt{2}}\,i,$$

$$x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2\sqrt{2}}\,i,$$

$$x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\sqrt{2}-1}\,,$$

$$x_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\sqrt{2}-1}\,.$$

□

Ejemplo 5

En este ejemplo se utilizará el método de Ferrari para mostrar que la ecuación

$$x^4 + 9 = 4x^3 + 6x^2 + 12x, \tag{37}$$

tiene las cuatro soluciones $3+\sqrt{6}$, $3-\sqrt{6}$, $-1+\sqrt{2}i$, $-1-\sqrt{2}i$.

Solución. La ecuación (37) es equivalente a

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 12x + 9 = 0. \tag{38}$$

Obsérvese que en este caso $a=-4$, $b=-6$, $c=-12$, $d=9$. Se hace el cambio de variable

$$x = y - \frac{a}{4} = y - \frac{-4}{4} = y + 1,$$

sustituyendo en la ecuación (38) se obtiene la ecuación

$$y^4 - 12y^2 - 32y - 12 = 0. \tag{39}$$

Nótese que esta es una ecuación de grado cuatro que no tiene términos de grado tres. Esta ecuación se reescribe en la forma de la ecuación (28) obteniéndose

$$y^4 - 12y^2 = 32y + 12. \tag{40}$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación (28), en este caso $r=-12$, $s=-32$, $t=-12$. Se suma $r^2 + ry^2 = 144 - 12y^2$ a ambos lados de (40)

$$y^4 - 24y^2 + 144 = 32y + 12 + 144 - 12y^2.$$

Ahora se escribe el lado izquierdo de la ecuación anterior como un cuadrado

$$(y^2 - 12)^2 = -12y^2 + 32y + 156. \tag{41}$$

Se introduce una nueva variable z y se suma $2(y^2-12)z + z^2$ a ambos lados de (41) y se obtiene

$$(y^2-12)^2 + 2(y^2-12)z + z^2 = -12y^2 + 32y + 156 + +2(y^2-12)z + z^2,$$

o equivalentemente

$$(y^2 - 12 + z)^2 = (-12+2z)y^2 + 32y + 156 + z^2 - 24z + 156, \tag{42}$$

puesto que el lado izquierdo de la ecuación (42) es un cuadrado perfecto, el lado derecho también lo es y esto se cumple si y solo si la ecuación cuadrática en la variable y

$$(-12+2z)y^2 + 32y + 156 + z^2 - 24z + 156 = 0,$$

tiene única solución. Esto se cumple si y sólo si el discriminante es cero, es decir

$$32^2 - 4(-12 + 2z)(z^2 - 24z + 156) = 0.$$

Desarrollando la ecuación anterior se obtiene la ecuación cúbica resolvente

$$z^3 - 30z^2 + 300z - 1064 = 0. \tag{43}$$

Haciendo ahora el cambio de variable $z = w - \dfrac{-30}{3} = w + 10$ y sustituyendo en (43) se obtiene

$$w^3 - 64 = 0.$$

Obsérvese que $w = 4$ es una solución de la ecuación anterior, por lo que $z = 14$ es una solución de la ecuación (43).

Sustituyendo $z = 14$ en la ecuación (42) se obtiene la ecuación en la variable y^2

$$(y^2 + 2)^2 = 16(y + 1)^2,$$

de esta ecuación surgen dos casos:

Caso: 1

Si $\quad y^2 + 2 = 4(y + 1) \quad$ entonces

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2} = 2 \pm \sqrt{6},$$

Caso: 2

Si $\quad y^2 + 2 = -4(y + 1), \quad$ entonces

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{2} = -2 \pm i\sqrt{2}.$$

De lo anterior se tiene que las soluciones de la ecuación (39) son

$$y_1 = 2 + \sqrt{6}, \qquad y_2 = 2 - \sqrt{6}, \qquad y_3 = -2 + i\sqrt{2}, \qquad y_4 = -2 - i\sqrt{2}.$$

Finalmente, como $x = y + 1$ las soluciones de la ecuación (37) son

$$y_1 = 3 + \sqrt{6}, \qquad y_2 = 3 - \sqrt{6}, \qquad y_3 = -1 + \sqrt{2}i, \qquad y_4 = -1 - \sqrt{2}i.$$

□

4.2. Método de Descartes

En el tercer tomo de su libro *Géométrie* de 1637, el matemático frances *René Descartes* (1596-1650) publicó su método para resolver ecuaciones de grado cuatro (Burton, D. 2011). A continuación, se describirá dicho método.

Considérese la ecuación

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se sabe que haciendo el cambio de variable $x := y - \dfrac{a}{4}$ se obtiene una ecuación de la forma

$$y^4 + sy^2 + ty + r = 0. \tag{44}$$

El método de Descartes, consiste en suponer que el lado izquierdo de la ecuación (44) se puede escribir como el producto de dos factores de grado 2, de la siguiente forma

$$(y^2 + ky + m)(y^2 - ky + n) = y^4 + sy^2 + ty + r. \tag{45}$$

Desarrollando el lado izquierdo se obtiene

$$y^4 + (n - k^2 + m)y^2 + (kn - km)y + mn = y^4 + sy^2 + ty + r.$$

Igualando coeficientes se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} n - k^2 + m &= s, \\ kn - km &= t, \\ mn &= r. \end{aligned} \tag{46}$$

Si $k \neq 0$, de las dos primeras ecuaciones de (46) se tiene

$$\begin{aligned} n + m &= s + k^2, \\ n - m &= \frac{t}{k}. \end{aligned} \tag{47}$$

Sumando las ecuaciones en (47) se obtiene

$$n = \frac{1}{2}\left(s + k^2 + \frac{t}{k}\right).$$

Restando la segunda ecuación de (47) a la primera, se sigue que

$$m = \frac{1}{2}\left(s + k^2 - \frac{t}{k}\right).$$

Ahora sustituimos las expresiones de m y n en la ecuación $mn = r$ de (46),

$$\left(s + k^2 + \frac{t}{k}\right)\left(s + k^2 - \frac{t}{k}\right) = 4r,$$

desarrollando el lado izquierdo y agrupando términos semejantes, se obtiene la ecuación cúbica en la variable k^2

$$k^6 + 2sk^4 + (s^2 - 4r)k^2 - t^2 = 0.$$

Supóngase que $k_0 \neq 0$ es una solución de la ecuación anterior. Sustituyendo k_0 en las expresiones de m y n se sigue que

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2}\left(s + k_0^2 + \frac{t}{k_0}\right). \\ m &= \frac{1}{2}\left(s + k_0^2 - \frac{t}{k_0}\right). \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en el lado izquierdo de la ecuación (45) e igualando a cero, se obtienen las siguientes ecuaciones cuadráticas en la variable y

$$\begin{aligned} y^2 + k_0 y + \frac{1}{2}\left(s + k_0^2 - \frac{t}{k_0}\right) &= 0, \\ y^2 - k_0 y + \frac{1}{2}\left(s + k_0^2 - \frac{t}{k_0}\right) &= 0. \end{aligned}$$

A partir de esta ecuaciones se hallan los valores de y y por lo tanto los valores de x.

Ejemplo 6

Considérese la ecuación

$$y^4 - 17y^2 - 20y - 6 = 0. \tag{48}$$

Encuentre las soluciones de esta ecuación, siguiendo el método descrito anteriormente.

Solución. Supóngase que el lado izquierdo de la ecuación (48) se puede escribir como el producto de dos factores de grado 2

$$(y^2 + ky + m)(y^2 - ky + n) = y^4 + sy^2 + ty + r.$$

Nótese que la ecuación (48) no tiene términos de grado 3, por lo que, en este caso $s = -17$, $t = -20$, $r = -6$. Entonces la ecuación (48) se convierte en:

$$(y^2 + ky + m)(y^2 - ky + n) = y^4 - 17y^2 + -20y - 6. \tag{49}$$

Desarrollando el lado izquierdo se tiene

$$y^4 + (n - k^2 + m)y^2 + (kn - km)y + mn = y^4 - 17y^2 + -20y - 6.$$

Igualando coeficientes se sigue que

$$\begin{aligned} n - k^2 + m &= -17, \\ kn - km &= -20, \\ mn &= -6. \end{aligned} \tag{50}$$

Supóngase que $k \neq 0$. Entonces, de las dos primeras ecuaciones de (50) se tiene

$$\begin{aligned} n + m &= -17 + k^2, \\ n - m &= \frac{-20}{k}. \end{aligned} \tag{51}$$

Sumando las ecuaciones en (51) se obtiene

$$n = \frac{1}{2}\left(s + k^2 + \frac{t}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(-17 + k^2 + \frac{-20}{k}\right).$$

Restando la segunda ecuación de (51) a la primera, se obtiene

$$m = \frac{1}{2}\left(s + k^2 - \frac{t}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(-17 + k^2 - \frac{-20}{k}\right)$$

Ahora sustituimos estas expresiones de m y n en la ecuación $mn = -6$ de (50)

$$\frac{1}{4}\left(-17 + k^2 - \frac{-20}{k}\right)\left(-17 + k^2 + \frac{-20}{k}\right) = -6.$$

Desarrollando el lado izquierdo y agrupando términos semejantes se obtiene la ecuación

$$k^6 - 34k^4 + 313k^2 - 400 = 0.$$

Obsérvese que $k = 4$ es una solución de esta ecuación. Entonces

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2}\left(-17 + 4^2 + \frac{-20}{4}\right) = -3, \\ m &= \frac{1}{2}\left(-17 + 4^2 - \frac{-20}{4}\right) = 2. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en el lado izquierdo de la ecuación (49) e igualando la expresión resultante a cero, se obtiene

$$(y^2 + 4y - 3)(y^2 - 4y + 2) = 0.$$

De esta ecuación se tienen las ecuaciones cuadráticas

$$\begin{aligned} &y^2 + 4y + 2 = 0, \\ &y^2 - 4y - 3 = 0. \end{aligned} \tag{52}$$

Usando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas se sigue que las soluciones de la ecuación (48) son las siguientes

$$2 + \sqrt{7}, \quad 2 - \sqrt{7}, \quad -2 + \sqrt{2}, \quad -2 - \sqrt{2}$$

□

5. Conclusión

Se analizó el método introducido por Tartaglia para resolver ecuaciones de la forma

$$x^3 + px = q,$$

con $p, q > 0$. Y se realizó una reseña histórica de los sucesos alrededor de la resolución de esta ecuación, en los que se vieron envueltos Antonio Maria del Fiore y Niccolo Fontana (Tartaglia).

Se abordó también el método de Cardano para la resolución de la ecuación

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

con $a > 0, b > 0, c > 0$. Este método se basa en hacer un cambio de variable y llevar la ecuación anterior a una ecuación que no tiene términos de segundo grado, para la cual ya se conocía la solución, gracias a Tartaglia. Un aspecto de suma importancia en el método de Cardano, es que este puede arrojar soluciones con números imaginarios, las cuales fueron abordadas por Rafael Bombelli.

También se estudió la ecuación anterior de forma general, es decir cuando los coeficientes a, b, c son números reales. Las soluciones del método de Cardano dependen de la expresión $\sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$, por lo que dichas soluciones pueden ser reales o complejas. Se observó que en el caso en que $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} > 0$, las soluciones pueden ser reales o complejas, mientras que en el caso $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} < 0$ todas las soluciones son reales. En ambos casos, se dan explícitamente todas las soluciones, utilizando para ello la fórmula de las raíces n-ésimas, usada en variable compleja.

Después de que Tartaglia y Cardano presentaran sus métodos de solución de la ecuación cúbica, otros matemáticos contribuyeron con sus propios métodos originales. Entre ellos podemos citar a Leonard Euler, Omar Khayyam, Francois Vieta, Thomas Harriot, Walther Von Tschirnhaus, Étienne Bezout, Joseph-Louis Lagrange, René Descartes. En este trabajo se describió el método de Vieta.

Se estudió también el método de Ferrari para la resolución de la ecuación de grado cuatro

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Dicho método se basa en hacer un cambio de variable y llevar la ecuación anterior a una ecuación que no tiene términos de tercer grado. También se analizó el método de Descartes para la resolución de la ecuación de cuarto grado. Este método se basa en suponer que el lado izquierdo es producto de dos ecuaciones de segundo grado, cuyos coeficientes son incógnitas que hay que encontrar. En ambos casos, se dan explícitamente todas las soluciones.

Es importante resaltar la importancia de entender el contexto socio-histórico en que se desarrolló la teoría moderna de ecuaciones algebraicas. En el siglo XVI, en el cual se resolvieron las ecuaciones de grado tres y cuatro, no eran aceptados ni los números negativos ni los números complejos, por lo que la aceptación de soluciones en las que aparecían estos números, significó un problema para los matemáticos de la época. Similarmente, tampoco se conocía el Teorema fundamental del álgebra, que sería demostrado por Gauss a principios del siglo XIX, por lo que no se sabía cuántas soluciones tenía una ecuación dada.

Además de dar un punto de vista histórico sobre la resolución de ecuaciones, los métodos aquí expuestos, permiten obtener todas las soluciones de las ecuaciones de grado tres y cuatro con coeficientes reales, lo cual no sucede con los métodos usuales como la división sintética, la división de polinomios, o el teorema del factor. Esto aporta una visión más general y profunda sobre la resolución de ecuaciones de tercer y cuarto grado, lo cual es parte fundamental del conocimiento que docentes y estudiantes de matemática y educación matemática deben poseer.

6. Bibliografía

[1] Burton, D. 2011. *The History of Mathematics*, Sétima edición, McGraw-Hill, New York, USA.

[2] Cajori, F. 1894. *A History of Mathematics* New York, The Macmillan company; London, Macmillan & co, ltd.

[3] Ochoviet, C. 2007. *De la Resolución de Ecuaciones Polinómicas al Álgebra Abstracta: un Paseo a Través de la Historia* Revista digital Matemática, Educación e Internet. Vol. 8, No 1 (https://doi.org/10.18845/rdmei.v8i1.2049).

[4] Oostra, A. 2008. *Sobre la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado* Revista Tumbaga. 3, 174-186.

[5] Soto O y Mosquera L. 2018. *Del Ferro, Tartaglia, Cardano y la solución de la ecuación cúbica* Revista Sigma. Vol 14, No 2. Pag. 14. http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulosXIV/2.

[6] Ruiz, A. 2003. *Historia Y Filosofía de Las Matemáticas*, EUNED.

[7] Uspensky, J.V. 1995. *Teoría de ecuaciones*, Editorial Limusa S.A. México.