



Sesgos en la resolución de tareas probabilísticas por estudiantes costarricenses de educación primaria

| Biases in probabilistic tasks solving by Costa Rican primary school students |

 Luis A. Hernández-Solís

lhernandez@uned.ac.cr
Universidad Estatal a Distancia
Costa Rica

Recibido: 14 febrero 2022

Aceptado: 5 setiembre 2022

Resumen: Este estudio expone algunos sesgos y creencias subjetivas encontradas en las respuestas a tres tareas probabilísticas en una muestra de estudiantes de 6^o curso de educación primaria costarricense. Se presenta el porcentaje de respuestas correctas a cada ítem y de elección de diferentes distractores, y se muestran algunas similitudes y diferencias con los resultados obtenidos en estudios previos. El análisis de las estrategias de resolución revela la presencia del sesgo de equiprobabilidad, enfoque en el resultado, recencia positiva y negativa, creencia en factores físicos que influyen en la probabilidad y consideración de poca diferencia entre casos favorables y posibles como equiprobabilidad.

Palabras Clave: tareas de probabilidad, sesgos de razonamiento, evaluación, educación primaria.

Abstract: This study presents some biases and subjective beliefs found in the responses to three probabilistic tasks in a sample of Costa Rican 6th grade primary school students. The percentage of correct responses to each item and the choice of different distractors are presented, and some similarities and differences with the results obtained in previous studies are shown. The analysis of the resolution strategies reveals the presence of equiprobability bias, outcome approach, positive and negative recency, belief in physical factors that influence probability, and consideration of little difference between favourable and possible cases as equiprobability.

Keywords: probability tasks, reasoning biases, assessment, primary education.

1. Introducción

En la actualidad se le da mayor importancia al estudio de la probabilidad en los currículos de diversos países (ej., ACARA, 2013; MECD, 2014). Siguiendo esta tendencia, en los programas de Matemática del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP, 2012) ha habido un aumento de contenidos probabilísticos, lo que representa un reto para los docentes, que precisan reforzar su conocimiento disciplinar y didáctico en estos tópicos para lograr éxito en su enseñanza (Alpízar et al., 2012; Alpízar

et al., 2015). En consecuencia, surge la necesidad de estudios que puedan apoyar con sus resultados los procesos de implementación curricular, capacitación docente y formación de futuros docentes; pero hay pocos trabajos de investigación sobre la presencia de sesgos y creencias subjetivas al resolver tareas probabilísticas con estudiantes costarricenses, según revisión en bases de datos Scielo y Google Scholar, principales revistas y actas de congresos que tratan temas de educación estadística.

Estas consideraciones han sido el origen de este trabajo, cuyo objetivo se describe a continuación.

2. Planteamiento del problema

Al planificar la enseñanza de contenidos probabilísticos, los estudiantes, incluso con instrucción, pueden verse afectados por creencias sesgadas que llevan a distorsionar la información que se les presenta y provocar errores sistemáticos en la resolución de problemas probabilísticos (Jones y Thornton, 2005). Según indica Chaves (2016, p. 30) “resulta de fundamental importancia que el docente valore aspectos de carácter emotivo (creencias, intuiciones y actitudes) que puedan afectar el aprendizaje de los conocimientos disciplinares”. Por lo tanto, es necesario que el docente considere las intuiciones previas de los estudiantes, algunas de las cuales, según Fischbein (1987), pueden ser incorrectas y generar obstáculos en su aprendizaje. Se debe ayudar a distinguir sus creencias intuitivas sesgadas de los razonamientos correctos, que pueden ser reforzados con la enseñanza, mediante la cual se adquiere un sustento teórico.

En consecuencia, el objetivo de este trabajo fue identificar la existencia de sesgos y creencias subjetivas sobre probabilidad en una muestra de estudiantes de 6° curso de educación primaria costarricense.

En lo que sigue se describe el marco teórico y metodológico, se presentan y discuten los resultados y se exponen las conclusiones obtenidas.

3. Marco teórico

3.1. Intuición probabilística

A pesar de la complejidad de los fenómenos aleatorios, debido a su falta de reversibilidad, los niños y niñas desarrollan ideas intuitivas respecto al azar desde edades muy tempranas (Batanero, Álvarez-Arroyo, Hernández-Solís y Gea, 2021). Fischbein (1975) describió las ideas intuitivas de probabilidad de los niños y niñas que les permiten resolver diferentes tareas, como asignar o comparar probabilidades de manera informal en situaciones que se presentan en su cotidianidad. Por otro lado, Fischbein (1987) indica que las intuiciones erróneas son difíciles de modificar y pueden convertirse en obstáculos en el aprendizaje de la probabilidad.

Considerando lo anterior, este estudio se sustentó en el concepto de intuición, que Fischbein (1987) considera parte de la conducta inteligente, porque interviene en las acciones prácticas y en el razonamiento. Este autor define el conocimiento intuitivo como “una clase de conocimiento que no está basado en la evidencia empírica o en argumentos lógicos rigurosos y, que, a pesar de ello, se tiende a aceptar como cierto y evidente” (Fischbein, 1987, p. 26). Lo considera un tipo de cognición y le asigna las siguientes características: auto-evidencia, certeza intrínseca, perseverancia, coercitividad, categoría teórica, capacidad extrapolatoria, globalidad y carácter implícito.

Estas intuiciones, según Fischbein (1987) pueden ser primarias y secundarias. Las *intuiciones primarias* se adquieren directamente con la experiencia, sin necesidad de instrucción sistemática, mientras que las *intuiciones secundarias* se forman como consecuencia de la educación, principalmente en la escuela.

Batanero (2013) señala que una intuición secundaria no se forma a partir de la lectura o de una explicación teórica, sino de una información que el alumno utiliza en sus propias acciones y predicciones a lo largo de su vida; tampoco se reduce a una fórmula aceptada o utilizada automáticamente, sino que se transforma en convicción. Por ejemplo, una intuición primaria correcta sería la equiprobabilidad de las caras en una moneda, y una intuición secundaria errónea sería esperar una corona al lanzar una moneda una serie de veces y haber obtenido siempre escudo.

Además, Fischbein (1975) sostiene que la distinción entre fenómenos impredecibles y situaciones deducibles y controlables no es automática, y tampoco se interioriza completamente al nivel de las operaciones formales (11-15 años, según Piaget e Inhelder, 1951). Al contrario, Fischbein (1975) encontró que los adolescentes tienden a buscar dependencias causales que reduzcan la incertidumbre en situaciones aleatorias. Al respecto Batanero (2013) señala que las ideas asociadas a la probabilidad son bastante abstractas y no tan ligadas a la experiencia directa del niño como otros conceptos geométricos o numéricos.

3.2. Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico

Entre los años 1980 a 1990 varios investigadores se interesaron por el razonamiento probabilístico requerido cuando se toman decisiones. Una escuela reconocida en este programa de investigación fue la de Kahneman y sus colaboradores, algunos de cuyos trabajos principales se resumen en Kahneman et al. (1982). De las conclusiones de esta escuela se destaca la definición de heurísticas, o “mecanismos por los que reducimos la incertidumbre que produce nuestra limitación para enfrentarnos a la complejidad de estímulos ambientales” (Pérez-Echeverría, 1990, p. 51). La heurística más conocida, entre las descritas por los autores, es la de *representatividad*, la cual consiste en evaluar la probabilidad de un suceso, teniendo únicamente en consideración su representatividad respecto a la población de la que forma parte; se considera que cualquier muestra, incluso pequeña debe ser similar en todas sus características a la población.

Estas heurísticas suelen funcionar bien y simplifican los problemas de probabilidad; pero en ocasiones llevan a conclusiones sesgadas. Uno de los sesgos asociados a la heurística de la representatividad es la *creencia en la ley de los pequeños números* por la que se espera la similitud de la frecuencia relativa de un suceso a su probabilidad, incluso en muestras muy pequeñas (Tversky y Kahneman, 1971). Dicha creencia había sido descrita bastante antes, por ejemplo, por Atkinson (1954) y Cohen (1957) y está relacionada con la falta de comprensión de la noción de independencia de sucesos en fenómenos aleatorios, pues se cree erróneamente que los sucesos pasados afectan a los futuros. Fischbein (1975) estudió esta creencia y la denominó *recencia negativa*, debido a que sucede cuando la persona considera más probable el suceso contrario al que ya ha ocurrido. También describió la *recencia positiva*, que consiste en pensar que se continuará la serie anterior de resultados.

Un sesgo de razonamiento diferente es denominado por Konold (1989) *enfoque en el resultado* y se relaciona con la forma en que las personas comprenden las preguntas sobre la probabilidad. Muchos estudiantes interpretan estas preguntas de forma no probabilística, pensando que, cuando se les pide una probabilidad, se les está demandando realizar una predicción de lo que ocurrirá en un experimento aleatorio. Además, no relacionan cada realización de un experimento aleatorio con las anteriores o siguientes, por lo que tienen dificultades para comprender el significado frecuencial de la probabilidad.

Otro sesgo bien conocido es el denominado *sesgo de equiprobabilidad*, descrito por Lecoutre (1992) y Lecoutre et al. (1990), que consiste en la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio, incluso en aquellos en que no hay una simetría física o hay más casos favorables a un suceso que a otro. Los autores suponen que esta creencia se produce incluso en sujetos con suficiente razonamiento combinatorio, por una interpretación incorrecta del azar.

Fischbein y Gazit (1984) identificaron otras creencias infundadas sobre factores que influyen en el azar, por ejemplo, supersticiones como “empezar con el pie derecho”, o “pasar por debajo de una escalera”. Amir y Williams (1994) describieron este tipo de creencias y otras asociadas a factores físicos; así los estudiantes usan la alternabilidad o no de sectores en una ruleta, la posición de aguja, la fuerza con que se le hace girar, o bien la disposición de una bola o ficha en la urna para asignar probabilidades.

3.3. Antecedentes

Algunas investigaciones han tratado de evaluar la existencia de los anteriores sesgos de razonamiento en estudiantes de diversas edades. Así, Cañizares (1997) en un trabajo con 251 niños españoles de 10 a 14 años, replicó un estudio de Green (1982), quien aplicó un cuestionario a unos 3000 niños ingleses de 11 a 16 años para estudiar su nivel de razonamiento probabilístico y la relación del mismo con la edad. Cañizares evidenció algunos sesgos de razonamiento entre los que destacan la recencia positiva o negativa (un tercio de los estudiantes la mostró en uno de los problemas planteados). También encontró creencias en el efecto de elementos físicos, descritas por Amir y Williams (1994); por ejemplo, algunos niños sugirieron que la disposición física de los sectores en una ruleta (como el hecho de estar separados o contiguos) podría modificar las probabilidades de los sucesos.

Posteriormente, la autora realizó un segundo estudio con 130 niños y un nuevo cuestionario sobre comparación de probabilidades construido por la autora; donde encontró niños que se negaron a comparar la probabilidad de dos sucesos, manifestando que es imposible saber cuál es el suceso que ocurrirá; es decir, razonaron según el *enfoque en el resultado* (Konold, 1989). También se encontró niños que supusieron que todos los sucesos aleatorios son equiprobables por naturaleza, es decir, generalizaron indebidamente la regla de Laplace, mostrando el *sesgo de equiprobabilidad* (Lecoutre, 1992).

Por otro lado, Maury (1984) investigó los sesgos de 80 estudiantes de educación secundaria (15-16 años) en problemas de comparación de probabilidades observando que el contexto del problema influye en los razonamientos de los alumnos. La creencia en la influencia de la disposición de sectores que corresponden a casos favorables dentro de la ruleta sobre la probabilidad fue el sesgo más frecuente en el contexto de ruletas, y la creencia en el efecto de la disposición física de casos favorables y desfavorables sobre la probabilidad, lo más común en el contexto de urnas con bolas.

Este tipo de sesgos también se han descrito en estudiantes adultos, por ejemplo, por Serrano et al. (1998) y con menor incidencia en futuros profesores (Batanero, Begué, Álvarez-Arroyo y Valenzuela-Ruiz, 2021). Este trabajo buscó identificar la existencia de algunos de los siguientes sesgos en los estudiantes de la muestra: sesgo de equiprobabilidad, enfoque en el resultado, recencia positiva o negativa y creencia en el efecto de la disposición de números en un trompo sobre la probabilidad. Se busca con esto informar a los profesores, que podrían no ser conscientes de este hecho e incluso presentar ellos mismos algunos de estos sesgos.

4. Marco metodológico

4.1. Concepción metodológica de la investigación

Con la intención de generar resultados de investigación que pudieran ser útiles a los docentes en formación y en ejercicio, se realizó un estudio con estudiantes costarricenses de último año de Educación Primaria (11 y 12 años), donde se pretendió explorar y describir el razonamiento probabilístico a partir de la resolución de diferentes problemas.

Considerando que los niños y niñas poseen intuiciones o ideas que asumen como verdaderas y que

pueden incidir en sus respuestas, y teniendo en cuenta los resultados de investigaciones previas, se conjeturó que era posible encontrar ejemplos de respuestas y argumentos utilizados en la resolución de problemas que hubiesen podido ser influenciados por sesgos o creencias de tipo subjetivo. Hay que señalar que al tratarse de un estudio exploratorio no se pretendía contrastar de modo estadístico o formal esta conjetura.

4.2. Descripción de la muestra

La muestra o grupo de estudio estuvo compuesto por 55 estudiantes (27 mujeres y 28 hombres) de 6° curso de educación primaria, 40 de ellos con 11 años y 15 con 12 años. Las docentes encargadas de los cursos informaron que los estudiantes habían tenido instrucción a partir de los contenidos sugeridos en los Programas de Estudio MEP (2012), donde se establece que en el primer ciclo de Educación General Básica, EGB (7-9 años) los niños y niñas comiencen a identificar las situaciones aleatorias y las diferencien de las deterministas utilizando juegos con monedas, dados, ruletas y otros dispositivos y situaciones cotidianas vinculadas a la incertidumbre. En segundo ciclo (10-12 años) se da un salto cualitativo en la enseñanza, donde se parte de ideas intuitivas, llegando en el último curso a calcular probabilidades según la regla de Laplace. En el proceso de enseñanza se utilizó un libro de texto que sigue estas orientaciones, dándole gran relevancia a este recurso y a las actividades de “lápiz y papel”. El tiempo previsto para el estudio del área de estadística y probabilidad en el currículo (MEP, 2012, p. 49) es aproximadamente del 10 % del dedicado a la asignatura de Matemática en cada uno de los cursos del 1° a 6° de EGB, lo que corresponde, alrededor de 3 semanas cada curso.

4.3. Cuestionario utilizado

A dicha muestra se aplicó un cuestionario con tres ítems de contenido probabilístico (Ver anexo A), que habían sido empleados tanto por Green (1982), como por Cañizares (1997), aunque dichos autores no se centraron específicamente en identificar sesgos de razonamiento probabilístico, sino en estudiar la relación del razonamiento probabilístico con la edad. El propósito de tomar estos ítems fue, primero, utilizar tareas ya validadas, y segundo, poder explorar similitudes y diferencias en la resolución de estas tareas por parte de la muestra de este estudio, respecto a lo informado en estas investigaciones para niños y niñas de la misma edad. Estos ítems son de opción múltiple y en cada uno se pide, además, justificar la respuesta.

En el ítem 1 se pide comparar las probabilidades de los sucesos elementales en un experimento aleatorio simple con dos resultados no equiprobables, ya que extraer el nombre de una niña (16/29) es más probable que sacar el de un niño (13/29). Para resolverlo, no se requiere razonamiento proporcional, pues la respuesta correcta se puede obtener comparando los casos favorables a los dos sucesos. Además, el niño debe haber interiorizado la operación disyunción y tener claro que existe una complementariedad entre los dos eventos. La respuesta correcta es la opción (B) “Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño”. Algunos sesgos de razonamiento que podrían aparecer son el enfoque en el resultado (Konold, 1989) o el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) si el estudiante elige la opción (C), dependiendo de su argumento.

El ítem 2 solicita determinar el evento más probable en un intento, luego de extraer sin remplazo tres bolas de una urna. Es decir, se pregunta por el evento más probable en el espacio muestral “ $E_2 = \{r, r, a, a, v, v\}$ ”, resultante de extraer tres elementos del espacio muestral “ $E_1 = \{r, r, r, r, a, a, a, a, v, v\}$ ”. Se requiere que el niño visualice el espacio muestral resultante E_2 una vez realizada la primera extracción de E_1 . En este caso, tampoco se precisa razonamiento proporcional, pues basta con comparar el número de casos favorables a cada evento del nuevo espacio muestral E_2 . La respuesta correcta es la opción (B) “El azul tiene mayor probabilidad”. En este ítem, además de argumentos asociados al enfoque en el resultado (Konold, 1989) y sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), relacionados a la opción (D), la extracción de 2 bolas rojas y 1 azul podría afectar las respuestas de

los estudiantes, generando argumentos que se asocian al efecto de recencia (Fischbein, 1975). Si el estudiante selecciona la opción (A) podría presentar una justificación asociada a la recencia positiva y si elige la opción (C), a la recencia negativa.

Por último, en el ítem 3 se muestran dos trompos con forma de hexágono regular, divididos en seis triángulos congruentes (misma área), tres de los cuales corresponden al número 1 (casos desfavorables) y otros tres al número 2 (casos favorables). Por tanto, la probabilidad de obtener un 2 es la misma en ambos trompos, resultado al que se llega, al establecer una correspondencia entre los casos favorables y desfavorables en cada trompo (por cada caso favorable hay otro desfavorable). La respuesta correcta es la (C) “Ambos trompos dan la misma posibilidad”.

En este ítem el orden en que están situados los triángulos numerados con 1 y 2 en cada trompo es diferente (en el trompo amarillo se van alternando los números, mientras que en el rojo son consecutivos los triángulos con el mismo número). Por ello puede aparecer un sesgo, según Maury (1984). Si el estudiante elige la opción (A) posiblemente piense que la alternabilidad de los números genera mayor probabilidad de obtener un 2, y si elige la opción (B) que haya mayor probabilidad de obtener un 2, si estos están juntos.

4.4. Técnicas de procesamiento y análisis de datos

A partir de un análisis cuantitativo y cualitativo de las respuestas al cuestionario, se evaluó el razonamiento probabilístico presente en las prácticas de los niños y niñas, describiendo los significados personales que asignan a las nociones de probabilidad los estudiantes seleccionados. Más concretamente, se realizó un análisis de contenido (Zapico, 2007) para averiguar la naturaleza de las respuestas. Según Krippendorff (2013) este método permite establecer categorías de análisis que emergen de modo objetivo como resultado del análisis sistemático realizado.

5. Análisis de resultados

En la Tabla 1 se presentan las frecuencias absolutas y porcentajes de respuestas correctas obtenidas en los ítems del cuestionario.

Tabla 1: Frecuencia absoluta y porcentaje de respuestas correctas en los ítems 1 a 3. Elaboración propia.

Ítem N°	Frecuencia absoluta	Porcentaje
1	35	63,6
2	28	50,9
3	28	50,9

El ítem 1 tuvo un porcentaje un poco mayor de respuestas correctas respecto a los ítems 2 y 3, siendo los resultados buenos en todos ellos, puesto que más de la mitad de respuestas fueron correctas en los tres ítems.

Al comparar los resultados en los tres ítems con los de investigaciones anteriores con estudiantes de la misma edad (Cañizares, 1997 y Green, 1982) los porcentajes de respuestas correctas fueron similares o incluso inferiores a los obtenidos en este trabajo con estudiantes costarricenses (63,7%, 47,3% y 51,3% en el estudio de Cañizares y 38%, 40% y 49% en el de Green, en los ítems 1, 2 y 3 respectivamente). Aunque los resultados del presente estudio no se pueden generalizar por ser de tamaño moderado, hay que resaltar el hecho de que en las investigaciones de Cañizares (1997) y Green (1982) los niños y niñas no habían tenido ninguna instrucción en probabilidad.

5.1. Porcentajes de elección de las diferentes opciones de los ítems

En la Tabla 2, se presentan las frecuencias absolutas y los porcentajes de estudiantes que eligen las diferentes opciones del ítem 1.

Tabla 2: Frecuencia absoluta y porcentaje de opciones elegidas en el ítem 1. Elaboración propia.

Respuestas	Frecuencia absoluta	Porcentaje
(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña.	4	7,3
(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño. (Respuesta correcta)	35	63,6
(C) Es igual de probable que sea de un niño que de una niña.	15	27,3
(E) No lo sé.	1	1,8

Se puede apreciar que una proporción importante de estudiantes elige el distractor (C), a pesar de que la solución correcta no requería comparar fracciones. Ello hace pensar que esta selección es producto de una indebida asociación intuitiva entre aleatoriedad y equiprobabilidad, asociada al “sesgo de equiprobabilidad” (Lecoutre, 1992). Los resultados fueron muy semejantes a los obtenidos por Cañizares en este ítem con niños y niñas de igual edad; sus porcentajes en la selección de opciones fueron (A= 7,7 %, B= 63,7 %, C= 26,4 %, D= 1,1 %, No respuesta= 1,1 %). Por otro lado, se encuentran diferencias con el estudio de Green (1982), en que los estudiantes tuvieron una fuerte influencia del distractor (C), 53,0% eligieron esta opción, que puede indicar uno de los sesgos *enfoque en el resultado* o el *sesgo de equiprobabilidad*.

En la Tabla 3, se muestran las frecuencias absolutas y los porcentajes de la opción seleccionada en el ítem 2.

Tabla 3: Frecuencia absoluta y porcentaje de respuestas de opciones elegidas en el ítem 2. Elaboración propia.

Respuestas	Frecuencia absoluta	Porcentaje
(A) El rojo tiene mayor probabilidad	10	18,2
(B) El azul tiene mayor probabilidad (Respuesta correcta)	28	50,9
(C) El verde tiene mayor probabilidad	2	3,6
(D) Todos los colores tienen la misma probabilidad	11	20,0
(E) No lo sé	4	7,3

En este ítem el distractor (A), asociado al efecto de “recencia positiva” fue elegido por casi la quinta parte de la muestra. Estos estudiantes consideraron que era más probable que el evento que más había ocurrido volviera a repetirse, sin considerar la independencia de cada experimento ni la composición

del espacio muestral. En un porcentaje similar, los estudiantes eligieron el distractor (D), que puede estar asociado al enfoque en el resultado o al sesgo de equiprobabilidad; esto hace que casi el 40 % de la muestra presentaran alguno de estos sesgos en este ítem.

En este ítem se encuentra cierta similitud con los porcentajes obtenidos para cada opción en los estudios de Green y Cañizares; por ejemplo, si se suman los porcentajes de las opciones (A) y (C) que indican un posible argumento asociado al efecto de “recencia” (positiva y negativa, respectivamente) en este estudio se obtiene 21,8 % de respuestas y en Cañizares (1997) y Green (1982), respectivamente 19,0 % y 17,6 %. Sin embargo, en el presente estudio se obtiene un menor porcentaje (20,0 %) en el distractor (D), asociado al *enfoque en el resultado* o al *sesgo de equiprobabilidad*, respecto al obtenido por Green (1982), el cual fue 38,0 %.

En la Tabla 4, se muestran las frecuencias absolutas y los porcentajes de diferentes opciones seleccionadas en el ítem 3.

Tabla 4: Frecuencia absoluta y porcentaje de opciones elegidas en el ítem 3. Elaboración propia.

Respuestas	Frecuencia absoluta	Porcentaje
(A) El amarillo es mejor para obtener un 2	12	21,8
(B) El rojo es mejor para obtener un 2	14	25,5
(C) Ambos trompos dan la misma posibilidad (Respuesta correcta)	38	50,9
(D) No lo sé	1	1,8

En este ítem se puede notar que los estudiantes eligieron con aproximadamente la misma frecuencia las opciones (A) y (B), asociadas a la creencia de que la alternabilidad de los casos favorables y posibles refiere mayor o menor probabilidad (Maury, 1984); lo cual indica que el 47,3 % de las respuestas pudieron estar influenciadas por este sesgo.

En los estudios de Cañizares (1997) y Green (1982) con niños y niñas de la misma edad hubo en este ítem un porcentaje mayor en la elección de la opción (B), respectivamente 31,9 % y 29,0 %; asociado a la creencia de que al estar juntos los sectores del mismo evento, habría mayor probabilidad de ocurrencia que si estuvieran alternados.

Cabe señalar que este tipo de tareas, especialmente el ítem 1, se aproximan más al tipo de problemas que pueden haber estudiado los niños y niñas en los cursos anteriores, de acuerdo a las conversaciones realizadas con las docentes acerca del proceso de enseñanza de la probabilidad desarrollado previamente con los estudiantes.

5.2. Estrategias empleadas para comparar probabilidades

En la Tabla 5 se clasifican las estrategias de los estudiantes para comparar las dos probabilidades pedidas en los enunciados de los diferentes ítems, tomando como base las categorías descritas en Cañizares (1997) y Cañizares y Batanero (1997) y agregando otras categorías que surgieron en las respuestas. Estas estrategias van a depender, por un lado, del enunciado del ítem, y por otro, del nivel de razonamiento proporcional de los estudiantes.

A continuación, se transcriben algunos argumentos empleados por los estudiantes para justificar la

Tabla 5: Porcentaje de estrategias en los ítems 1, 2 y 3. Elaboración propia.

Estrategia	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3
1. Comparar casos favorables o posibles			<u>12,7</u>
2. Comparar casos favorables y desfavorables	<u>65,5</u>	<u>50,9</u>	<u>25,5</u>
3. Comparar porcentajes de casos favorables respecto a posibles	<u>3,6</u>		
4. Enfoque en el resultado	7,3	7,3	
5. Recencia positiva o negativa		10,9	
6. Poca diferencia entre casos favorables	7,3	1,8	
7. Sesgo de equiprobabilidad	12,7	14,5	5,5
8. Consideraciones físicas			54,5
9. No considera la primera extracción		9,1	
10. Errores aritméticos	3,6	5,5	
No sabe			1,8

Nota: Se subrayan las estrategias correctas para cada ítem.

elección hecha en cada ítem. Para hacer referencia a estos, se denotan con la letra "A" (argumento) seguido de un numeral, por ejemplo, "A1" significa "Argumento 1".

Entre las estrategias correctas en los ítems 1 y 2, que utiliza el contexto de extracción de bolas en urnas, un alto porcentaje de los estudiantes optaron por comparar casos favorables y casos desfavorables (65,5 % y 50,9 %, respectivamente), por lo que consideraron la relación "parte-parte", al comparar dos razones (Ver A1 y A2). Por otro lado, en este estudio se dio un mayor porcentaje de estrategias correctas en los ítems 1 y 2, respecto al de Green (1982) y al de Cañizares (1997), ya que en el ítem 1 estas investigaciones tuvieron 42,0 % y 44,0 % estrategias correctas, respectivamente; y en el ítem 2 en Green (1982) apenas se alcanzó el 26,1 % de estrategias correctas y en Cañizares (1997) solo el 22,0 %.

A1

Porque hay 3 niñas más que niños (respuesta B, ítem 1).

A2

Porque hay 3 azules y verdes y rojas solo hay 2 (respuesta B, ítem 2).

Sin embargo, hubo algunos estudiantes que, además de comparar los casos favorables y desfavorables, también analizaron la razón del número de casos favorables con el de casos posibles (relación "parte-todo") aproximando su porcentaje (Ver A3). Este tipo de estrategias, según Piaget e Inhelder (1951), son desarrolladas en el período de las operaciones formales; y aunque los porcentajes calculados no son exactos, el razonamiento seguido requiere del dominio del cálculo con fracciones.

A3

Porque, hay más niñas en la clase que niños, por lo tanto aumenta la probabilidad de las niñas a un 60 o 65 % (aprox) y el de los niños a 40 o 38 % (aprox) (respuesta B, ítem 1).

En el ítem 3 son correctas tanto la comparación de casos favorables (utilizada por A4), como la comparación de casos favorables y desfavorables (Ver A5), y alrededor del 40 % de estudiantes utilizó una de las dos. En el caso de Green (1982), el 36 % utiliza estrategias correctas, y en la investigación de Cañizares (1997) el 31,9 % en este ítem.

A4

Porque en las dos hay tres dosis (respuesta C, ítem 3).

A5

Tienen 3 veces 2 y 3 veces 1 (respuesta C, ítem 3).

5.3. Sesgos identificados en los argumentos de los estudiantes

En los tres ítems se encontraron argumentos asociados a sesgos o creencias subjetivas, que han sido documentadas en estudios previos y han sido descritas en el marco teórico y antecedentes. En síntesis, en el ítem 1 se encontró 27,3 % de respuestas con sesgos de razonamiento, en el ítem 2 se identificó un 34,5 % y en el ítem 3 un porcentaje superior (60,0 %). A continuación, se ejemplificarán los tipos de sesgos que se encontraron en estas respuestas a los ítems del cuestionario.

5.3.1. Sesgo de equiprobabilidad

Algunos estudiantes en su respuesta interpretaron incorrectamente la Regla de Laplace, asignando equiprobabilidad a eventos con distinta probabilidad, ya que suponen que todos los sucesos aleatorios son equiprobables por naturaleza sin considerar el espacio muestral, mostrando el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992). En los ejemplos A6 y A7 ambos estudiantes seleccionaron el distractor que fue predestinado para evaluar este sesgo.

A6

Porque, aunque haya más niñas que niños hay la misma probabilidad de que salga un trozo de papel con el nombre de un niño que un trozo de papel con el nombre de una niña (respuesta C, ítem 1).

A7

Porque las están revolviendo sin ningún color específico (respuesta D, ítem 2).

5.3.2. Poca diferencia entre casos favorables

Algunos estudiantes asociaron la equiprobabilidad al hecho de que la diferencia de casos favorables entre un evento y otro sea pequeña. Este tipo de razonamiento se ha encontrado en Cañizares (1997) y en este estudio se denominó *Poca diferencia entre casos favorables*. Sería una confusión similar a suponer los sucesos muy probables como seguros o los poco probables como imposibles (Hernández et al., 2021). Generalmente, estos estudiantes eligen la opción (C) en el ítem 1 y la (D) en el ítem 2. Los siguientes son algunos ejemplos (A8 y A9).

A8

Porque, la cantidad de niños y niñas no tienen mucha diferencia (respuesta C, ítem 1).

A9

Porque hay 2 verdes, 3 azules y 2 rojas entonces puede salir cualquiera. (respuesta D, ítem 2).

Debido a que los ítems 1 y 2 no requieren razonamiento proporcional, sino una comparación de casos favorables, una indebida asociación intuitiva entre aleatoriedad y equiprobabilidad puede incidir en este tipo de argumentos. Cañizares (1997) encontró que en el ítem 2 solo 8,4% de los estudiantes de la muestra indicaban equiprobabilidad, debido a que la diferencia entre las cantidades de bolas es muy pequeña, y por tanto no influye significativamente en la comparación de probabilidades. En este estudio solo cuatro estudiantes presentaron este sesgo en el ítem 1 y sólo uno en el ítem 2; sin embargo, es necesario que el docente considere este aspecto a la hora de proponer tareas donde la cantidad de casos favorables entre eventos sea parecida.

5.3.3. Enfoque en el resultado

Algunos estudiantes no interpretan el problema de forma probabilística, sino determinista, pensando que se les pide predecir cuál será el resultado en un experimento aleatorio. Esta interpretación es incorrecta, ya que el hecho de que los sucesos aleatorios sean impredecibles, hace que se piense que es imposible estimar una probabilidad para los mismos. Los siguientes (A10 y A11) son ejemplos de argumentos asociados al *enfoque en el resultado* (Konold, 1989), que solo se evidenciaron en los ítems 1 y 2:

A10

Porque una persona no puede adivinar si es un niño o una niña (respuesta C, ítem 1).

A11

Porque uno no sabe si le sale verde o azul, rojo, etc. Es solo suerte que salga cualquier color (respuesta D, ítem 2).

También se encontraron argumentos que combinan el sesgo de equiprobabilidad con el enfoque en el resultado, en A12 se muestra un ejemplo de esto.

A12

Porque como están revueltos tienen igual probabilidad, porque también uno no sabe de qué lado va a sacar ni cual nombre (respuesta C, ítem 1).

Otro estudiante utilizó un argumento en donde existe cierta contradicción entre su intuición de lo imprevisible y su tendencia a la cuantificación de los datos presentados. En A13 se muestra un ejemplo.

A13

Porque es al azar puede salir de un niño o de una niña, pero es más probable de las niñas porque son más (respuesta C, ítem 1).

5.3.4. Recencia positiva o negativa

A priori, se esperaba que en el ítem 2 se obtuviera algún porcentaje de argumentos en el que los niños y niñas asociaran la mayor cantidad de bolas rojas en la primera extracción con una mayor (o menor)

probabilidad en la segunda; lo cual puede estar ligado al efecto de recencia positiva o negativa (Fischbein, 1975). Cañizares (1997) señala que el informar sobre el resultado de varias extracciones previas sin reemplazo podría influir en las respuestas de los estudiantes, considerando el nuevo evento como dependiente de los anteriores.

Precisamente en este ítem, se identificaron seis argumentos asociados a este sesgo. Por ejemplo, A14 se asocia a la recencia positiva porque optan por responder que es la bola roja por ser la que más ha salido, y de A15 al efecto de recencia negativa ya que tendría mayor probabilidad de salir la que aún no lo ha hecho (bola de color verde). En los siguientes argumentos se muestra que los niños no consideran como independientes las extracciones, sino creen que los sucesos pasados afectan a los futuros.

A14

Porque ha salido más veces el rojo que los demás y el azul y el verde ha salido menos veces (respuesta A, ítem 2).

A15

Porque no creo que vaya a salir otro porque es de color que no han sacado (respuesta C, ítem 2).

5.3.5. Consideraciones físicas

En el contexto de urnas, solo se dio un argumento asociado a consideraciones físicas (además de estar asociado al sesgo de equiprobabilidad y al enfoque en el resultado), A12, que hace referencia a la disposición física de los trozos de papel (con el nombre de estudiantes) en el sombrero.

Fue en el ítem 3 donde se generaron gran proporción de argumentos incorrectos (54,5 %) asociados a consideraciones físicas irrelevantes (colocación de los sectores numerados de los trompos), mientras que en el trabajo de Cañizares (1997) supone solo el 38,5 % utilizó estos argumentos. En su caso la referencia a la suerte o equiprobabilidad fue un poco mayor (6,6 %) en este ítem que en el presente estudio. Por ejemplo, en A16 el estudiante cree que el hecho de que estén los números de forma alternada hace que el trompo tenga mayor probabilidad de obtener un 2; en cambio, en A17 se tiene la creencia de que en el trompo sin alternancia de números es más probable obtener un 2, incluso cuando las áreas correspondientes a los casos favorables y posibles sean la misma.

A16

El amarillo, porque está más distribuido (respuesta A, ítem 3).

A17

Porque los dos están de un solo lado es decir que si pasa la línea del medio tengo más oportunidad (respuesta B, ítem 3).

Por otro lado, se encontraron respuestas que revelan una preferencia por el posible resultado según ubicación. Un ejemplo de esto se puede observar en A18.

A18

Porque seguramente cae en las esquinas (respuesta A, ítem 3).

6. Conclusiones

En este estudio se ha informado de la existencia de algunos sesgos de razonamiento en la resolución de tareas probabilísticas por estudiantes costarricenses de educación primaria. De este modo, se brinda conocimiento que puede incidir en la comprensión de los conceptos probabilísticos elementales que se habrían de desarrollar en este nivel educativo, según el currículo costarricense actual (MEP, 2012). La relevancia de este trabajo se justifica por la falta de investigaciones sobre la influencia de factores subjetivos en la resolución de tareas probabilísticas con estudiantes costarricenses.

A lo largo del trabajo se han analizado ejemplos de argumentos que pudieron ser influenciados por estos sesgos o creencias de tipo subjetivo, confirmando las expectativas que se plantearon a priori. Aunque el porcentaje de sesgos fue pequeño en dos de los ítems de contexto discreto, fue mayor en el relacionado con dispositivos continuos. En el contexto de urnas se evidenciaron el sesgo de equiprobabilidad, enfoque en el resultado y la disposición de las fichas; y específicamente en el ítem 2, algunos argumentos estuvieron asociados con el efecto de recencia (Fischbein, 1975). Un aspecto a señalar, fue la respuesta al ítem 1 de cinco estudiantes que consideraron que había equiprobabilidad entre dos eventos por no tener una diferencia, para ellos significativa, entre los casos favorables. En el ítem 3, sobresale un alto porcentaje de argumentos relacionados a consideraciones físicas irrelevantes, en particular el orden de colocación de los números en los sectores del trompo.

Por último, los argumentos incorrectos mostrados como ejemplos, pueden servir a formadores de profesores para el diseño de procesos de capacitación docente y cursos de formación del profesorado; donde se reflexione colectivamente sobre las creencias e intuiciones primarias que traen los niños y niñas, y de cómo estos elementos deben considerarse en la planificación educativa. Se coincide con Borovcnik y Peard (1996) de que los conceptos probabilísticos y la intuición están fuertemente relacionados y esto quedó mostrado en los ejemplos de argumentos expuestos en este trabajo, lo que hace ver que una instrucción teórica en contenidos probabilísticos y de resolución de ejercicios a lápiz y papel no es suficiente para confrontar estas ideas equivocadas que traen los niños y niñas. Muchos de estos sesgos o intuiciones incorrectas, pueden corregirse paulatinamente realizando simulaciones físicas o computacionales de los experimentos aleatorios que se plantean en los problemas.

7. Recomendaciones

En una futura investigación se sugiere caracterizar y profundizar más en la instrucción previa que tuvieron los estudiantes; ya que aunque en este estudio se sabía que el currículo de matemática se ha estado implementando de manera completa desde 2015 y las entrevistas con los docentes encargados indican que hubo enseñanza en probabilidad, no queda claro cuál fue la metodología de enseñanza, ni la profundidad con que se desarrollaron los temas. Otro aspecto que podría generar más información es la entrevista más detalladamente a los docentes encargados, para conocer un poco más acerca de su conocimiento disciplinar y didáctico en probabilidad; así como poder entrevistar a aquellos estudiantes cuyas respuestas se vieron influenciadas por factores subjetivos. Por lo tanto, hay que señalar que este trabajo es apenas un primer paso que puede motivar nuevos estudios sobre el tema, con muestras más grandes de estudiantes que, además, consideren diferentes niveles educativos.

8. Agradecimiento

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

9. Bibliografía

- [1] Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (2013). *Australian Curriculum*. ACARA.
- [2] Alpízar, M., Barrantes, J., Bolaños, H., Céspedes, M., Delgado, E., Freer, D., Padilla, E., y Viquez, M. (2012). Aspectos relevantes sobre la formación docente en I y II ciclos en los temas Probabilidad y Estadística. *EDUCARE*, 16(2), 113-129.
- [3] Alpízar, M., Chavarría, L. y Oviedo, K. (2015). Percepción de un grupo de docentes de I y II ciclo de educación general básica de escuelas públicas de Heredia sobre los temas de estadística y probabilidad. *Actualidades Investigativas en Educación*, 15(1), 1-23. <https://doi.org/10.15517/aie.v15i1.17728>
- [4] Amir, G. y Williams, J. (1994). The influence of children's culture on their probabilistic thinking. En J. P. Pontes y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v2, pp. 24-31). Universidad de Lisboa.
- [5] Atkinson, R. F. (1954). A note on the "gambler's fallacy". *Analysis*, 14(6), 149-150. <https://doi.org/10.1093/analys/14.6.149>
- [6] Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿Qué podemos aprender de la investigación? En J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, y F. Viseu, (eds.) (2013). *Atas do III Encontro de probabilidades e estatística na escola*. Braga: Centro de Investigação em educação da Universidade do Minho.
- [7] Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R. Hernández-Solís, L. A. y Gea, M.M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en la educación infantil. *PNA*, 15(4), 267-288. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349>.
- [8] Batanero, C., Begué, N., Álvarez-Arroyo, R. y Valenzuela-Ruiz, S. M. (2021). Prospective mathematics teachers understanding of classical and frequentist probability. *Mathematics*, 9(19), 2526. <https://doi.org/10.3390/math9192526>
- [9] Borovcnik, M., Peard, R. (1996). Probability. En A. Bishop, e.a. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (239–288). Dordrecht: Kluwer.
- [10] Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- [11] Cañizares, M. y Batanero, C. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO*, 14, 99-114.
- [12] Chaves, E. (2016). La enseñanza de la estadística y la probabilidad, más allá de procedimientos y técnicas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11(15), 21-31. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23880>
- [13] Cohen, J. (1957). Subjective probability. *Scientific American*, 197, 128-138.
- [14] Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- [15] Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel.
- [16] Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 1-24.
- [17] Green, D. R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11-16 years*. Tesis doctoral. University of Loughborough

- [18] Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M.M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021). Construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos: un estudio exploratorio con estudiantes de Educación Primaria. *Educación Matemática*, 33(1), 181-207. <http://dx.doi.org/10.24844/EM3301.07>.
- [19] Jones, G. y Thornton, C. (2005) An overview of research into the teaching and learning of probability. En Jones, G. (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning*. (pp. 65-92). Nueva York: Springer.
- [20] Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press.
- [21] Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59- 98.
- [22] Krippendorff, K. (2013). *Content analysis: an introduction to its methodology*. London, Sage.
- [23] Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23(6), 557-568.
- [24] Lecoutre, M. P., Durand, J. L., y Cordier, J. (1990). A study of two biases in probabilistic judgments: Representativeness and equiprobability. *Advances in Psychology*, 68, 563-575.
- [25] Maury, S. (1984). La quantification des probabilités: analyse des arguments utilisés par les élèves de classe de seconde. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 5(2), 187-215.
- [26] Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. MECD.
- [27] Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I, II Y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. MEP.
- [28] Pérez-Echeverría, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Universidad Autónoma de Madrid.
- [29] Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. Presses Universitaires de France.
- [30] Serrano, L., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, 10(01), 7-25.
- [31] Tversky, A., & Kahneman, D. (1971). Belief in the law of small numbers. *Psychological bulletin*, 76(2), 105. <https://doi.org/10.1037/h0031322>
- [32] Zapico, M. (2007). Interrogantes acerca de análisis de contenido y del discurso en los textos escolares. En MINEDUC (Ed.), *Primer Seminario Internacional de Textos Escolares (SITE 2006)* (pp. 149-155). Santiago: MINEDUC.

A. Apéndice. Cuestionario

Ítem 1. Una clase de sexto año de una escuela tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

- (A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña
- (B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño
- (C) Es igual de probable que sea de un niño que de una niña
- (D) No lo sé

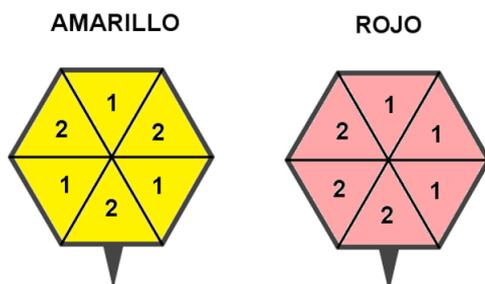
¿Por qué?

Ítem 2. En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se revuelven. Se sacan tres bolas fuera, resultando 2 rojas y 1 azul. A continuación, sacamos otra bola sin echar las anteriores a la bolsa. ¿De qué color es más probable que sea?

- (A) El rojo tiene mayor probabilidad
- (B) El azul tiene mayor probabilidad
- (C) El verde tiene mayor probabilidad
- (D) Todos los colores tienen la misma probabilidad
- (E) No lo sé

¿Por qué?

Ítem 3. Dos trompos de seis lados están marcados con unos y doses, como se indica en el siguiente dibujo representativo:



¿Qué trompo te da mejor oportunidad de obtener un 2 cuando se lanza? ¿O, dan la misma posibilidad?

- (A) El amarillo es mejor para obtener un 2
- (B) El rojo es mejor para obtener un 2
- (C) Ambos trompos dan la misma posibilidad
- (D) No lo sé

¿Por qué?