Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 23, No 1. Agosto, 2022 – Febrero, 2023 ISSN 1659 -0643

Números primos gemelos y primos gemelos de Germain

Germain's Twin Prime and Twin Prime Numbers

Gerardo Miramontes de León
gmiram@ieee.org
Universidad Autónoma de Zacatecas
México

Diego Miramontes de León
dmiram@uaz.edu.mx
Universidad Autónoma de Zacatecas
México

Recibido: 16 setiembre 2021 Aceptado: 5 Marzo 2022

Resumen: La cardinalidad de los números primos de Germain, es decir, aquellos primos p tales que 2p + 1 también es primo, siempre ha sido un tema de gran interés, ya que tenemos la conjetura sobre la infinitud de esos números primos. Se presentan varios resultados interesantes, primero se revisa la relación entre la cardinalidad de los números primos y los primos de Germain. Más adelante, se presentan las cadenas de Cunningham y los números primos gemelos. Dentro de los primos gemelos, en este trabajo, se definen los primos gemelos de Germain. Se respalda numéricamente la conjetura de que la cardinalidad de los primos de Germain es aproximadamente la mitad de la cardinalidad de los primos gemelos. Al final, se calcula su cardinalidad por medio de una modificación a la estimación propuesta por Hardy y Littlewood.

Palabras Clave: números primos, primos gemelos, primos de Germain

Abstract: The cardinality of Germain's prime numbers, i.e., those primes p for which 2p + 1 is also prime, has always been a topic of great interest, since we have the conjecture about the infinity of those prime numbers. Several interesting results are presented, first the relationship between the cardinality of prime numbers and Germain's primes is reviewed. Later, Cunningham chains and twin prime numbers are presented. Within the twin primes, in this work, Germain's twin primes are defined. The conjecture that the cardinality of Germain's primes is about half the cardinality of twin primes is supported numerically. In the end, its cardinality is calculated by modifying the estimate proposed by Hardy and Littlewood.

Keywords: prime numbers, twin primes, Germain's primes

1. Introducción

La idea de relacionar la cardinalidad de los números primos de Germain con la de los números primos gemelos[1] no es nueva [1]. En este trabajo se definen los números primos gemelos de Germain y se muestra que después del primer par de primos gemelos (3,5), nunca son ambos primos de Germain.

[1] Ambos se definen más adelante.

Las próximas secciones de este trabajo están organizadas de la siguiente manera, se calculan los números primos de Germain, para p pequeña, es decir, $p < 10^9$, de modo que van apareciendo otros conceptos como las cadenas de Cunningham. Posteriormente, se revisan brevemente los números primos gemelos, para definir el número primo gemelo de Germain. Con el cálculo de la cardinalidad de estos números primos, se revisa qué proporción existe entre las diferentes cardinalidades.

1.1. Los números primos de Germain

Probablemente, entre la primera y la segunda década de los años 1800, Sophie Germain, una matemática autodidacta, se enfocó en el estudio de algunos números primos, que ahora llevan su nombre, bajo la siguiente definición [2]:

Definición 1 Número primo de Germain

Un número primo p es un número primo de Sophie Germain, si $2p + 1$ también es primo.

Siguiendo una forma generalizada, al número p que tiene esta propiedad se le llama número primo de Germain, el cual será designado como p_G, y al resultado $2p+1$ se le llamará número primo seguro de Germain (aquí designado como p_{sG}). Esta nomenclatura será útil dado que se repite frecuentemente el nombre "número primo de Germain", así que usará la forma abreviada p_G cuando parezca ser más conveniente.

Tenemos que si $p = 2$ se obtiene $2p + 1 = 5$, el cual es número primo; entonces el primer número primo de Germain es $p_G = 2$ y el primer primo seguro de Germain es $p_{sG} = 5$. Con $p = 3$, se obtiene $2p+1 = 7$, que también es primo, así que el segundo número primo de Germain es $p_G = 3$, y el segundo número primo seguro de Germain será $p_{sG} = 7$. Con $p = 5$ también se cumple la condición que el resultado es primo, es decir 11. Sin embargo con $p = 7$ se obtiene $2p + 1 = 15$ el cual no es primo, por lo tanto 7 no es p_G. El siguiente aspecto interesante es saber cuántos de los números primos p son números p_G y cómo van apareciendo cuando p aumenta. A menos que estemos interesados en números gigantes, de millones de dígitos, la pregunta sería cuáles de esos números son p_G, pero eso se deja fuera del alcance de este trabajo, es decir, interesa más saber cuántos son y no cuáles son.

1.2. Objetivos

En este trabajo se abordan diferentes aspectos relacionados con los números primos de Germain, p_G. Se inicia mostrando la proporción de la cardinalidad de números p_G con respecto a la cardinalidad de números primos, para una $p \leqslant n$ dada, es decir, con respecto a la función contadora de números primos $\pi(n)$, cuya definición se recuerda más adelante. El objetivo principal es presentar la interrelación de varios temas, es decir, la función $\pi(n)$, los números primos de Germain, las cadenas de Cunningham y los números primos gemelos.

Un segundo objetivo es destacar otros números también relacionados con los p_G, es decir, los primos gemelos y se concluye con una razón que relaciona la cardinalidad de varios de ellos. Cabe aclarar que no se pretende demostrar la conjetura sobre la infinitud de los primos de Germain, si no de presentar, en una contribución modesta, la relación que guarda esta conjetura con las otras que existen sobre los números primos. Se deja al lector abierta la posibilidad de probar o rechazar tales conjeturas.

2. Sobre los primeros números p_G

Se pueden calcular varios números primos de Germain, probando uno a uno los números primos p, como se muestra en la Tabla 1. De los doce primeros números primos, encontramos que sólo seis de ellos son primos de Germain. Esto da una primera idea en qué proporción aparecen los primos de Germain respecto a la cantidad de números primos p. Esta diferencia resulta interesante, dada la conjetura sobre la infinitud de los números primos y por el hecho de que estos se van haciendo cada vez menos frecuentes cuando n se hace muy grande. Se puede ver que los primos de Germain deben ser todavía menos frecuentes que los números primos.

La cantidad de números primos p menores o iguales a n está dada por $\pi(n)$, cuya notación se atribuye a Edmund Landau en 1907 [3], según la siguiente definición:

Definición 2 Función contadora de números primos

La función contadora de números primos es la función $\pi(n)$ definida como $\pi(n) := |p \in \mathbb{N}$ tal que p es un número primo y $p \leqslant n|$, donde $|\,|$ denota su cardinalidad.

De acuerdo al teorema de los números primos [4], $\pi(n)$ se puede aproximar como

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\log(n)}. \tag{1}$$

Esta aproximación a $\pi(n)$ será la base para una expresión similar para la función contadora de primos de Germain, que será denotada por $\pi_G(n)$.

Tabla 1: Números primos de Germain.

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	$\cdots$
$2p+1$	5	7	11	15	23	27	35	39	47	59	63	75	$\cdots$
¿$p = p_G$? Sí=1, No=0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	$\cdots$

Extrayendo los números de la Tabla 1 y continuando hasta los primeros p_G menores a 100 tenemos que los primeros p_G son: 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, y sus p_{sG} resultantes son: 5, 7, 11, 23, 47, 59, 83, 107, 167, 179. En total para $p \leqslant 100$ se obtienen 10 números p_G. Con $n = 100$, $\pi(100) = 25$. De aquí se obtiene que la razón de la cantidad de números p_G, es decir, $\pi_G(n)$, a la cantidad de números primos para $n = 100$ es:

$$\left.\frac{\pi_G(n)}{\pi(n)}\right|_{n=100} = \frac{10}{25} = 0.40,$$

donde $\pi_G(n)$ indica la cardinalidad de p_G para $p \leqslant n$. Se tiene que menos del 50 % de los números primos p, son p_G.

2.1. Razón entre la cardinalidad de números primos $\pi(n)$ y la cardinalidad de primos de Germain $\pi_G(n)$

Se puede ver que la cantidad de primos de Germain es notablemente menor a la cantidad de números primos, pero además, la relación entre ellos disminuye en tanto n se hace más grande, de modo que, según se observa, habrá un comportamiento asintótico hacia cero. En la Figura 1 se muestra ese

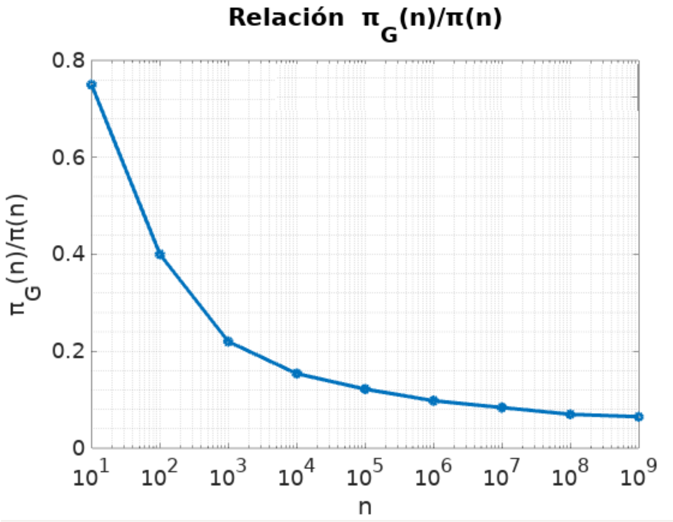


Figura 1: Disminución de $\pi_G(n)$ respecto a $\pi(n)$. (Elaboración propia).

comportamiento asintótico de la razón $\pi_G(n)/\pi(n)$, para $n = 10, 10^2, \ldots, 10^9$. La razón disminuye, es decir, hay cada vez menos números p_G en proporción a $\pi(n)$.

Aunque la cantidad de números primos de Germain disminuye de manera importante al aumentar n, se tiene la conjetura de que existen infinitos números p_G, la cuál aún no se ha demostrado. Investigar formas de demostrar esta conjetura seguirá siendo de mucho interés y se deben tomar diferentes enfoques.

En la Tabla 2 se muestran los valores de cardinalidad $\pi(n)$ y $\pi_G(n)$ para diferentes valores de n y en la cuarta columna la razón $\pi_G(n)/\pi(n)$.

Tabla 2: Cardinalidades $\pi(n)$ contra $\pi_G(n)$.

n	$\pi(n)$	$\pi_G(n)$	$\pi_G(n)/\pi(n)$
10	4	3	0.750
10^2	25	10	0.400
10^3	168	37	0.220
10^4	1229	190	0.154
10^5	9592	1171	0.122
10^6	78498	7746	0.098
10^7	664579	56032	0.084
10^8	5761455	423140	0.070
10^9	50847534	3308859	0.065

2.2. p_G y p_{sG} en un mismo p

Se plantea la siguiente cuestión: ¿un número primo de Germain puede ser, a su vez, un número primo seguro de Germain? Por ejemplo, $p = 5$ es un número primo de Germain p_G, ya que $2 \times 5 + 1 = 11$, el cual es también primo y por lo tanto el 11 será número p_{sG}, pero a su vez, $p = 5$ se puede obtener de $p = 2$, como $2 \times 2 + 1 = 5$, entonces $p = 5$ es número p_{sG} de $p = 2$. Pero se puede continuar y de la misma manera el $p_{sG} = 11$, es a su vez un p_G ya que $11 \times 2 + 1 = 23$, el cual es número primo, así que el 11 es tanto p_{sG} como p_G.

Para saber si p es un número p_{sG}, procedemos en sentido contrario, $(p_{sG} - 1)/2$, el cual debe ser número primo; así que $(5 - 1)/2 = 2$, donde 2 es número primo. Tenemos pues la posibilidad de obtener números primos de Germain en sentido hacia atrás y en sentido hacia adelante.

Ahora bien, no todos los números p_G se obtienen de otro número p_G. Designemos como P_{Gb} al número p_G que se obtiene hacia atrás y p_{Gf} al número p_G que se obtiene hacia adelante. Partiendo de un número primo p, en la Tabla 3 se muestran algunos casos.

Tabla 3: Primos de Germain en ambos sentidos.

$p_{Gb} = (p-1)/2$	p	$p_{Gf} = 2p+1$	p es:
-	2	5	p_G
-	3	7	p_G
2	5	11	p_{sG} y p_G
5	11	23	p_{sG} y p_G
11	23	47	p_{sG} y p_G
-	29	59	p_G
-	41	83	p_G
-	53	107	p_G
41	83	167	p_{sG} y p_G
-	89	179	p_G

Hay algunos casos en que un p_G no se obtiene, a su vez, de otro p_G, como con 2, 3, 29, 41, 53 y 89. La Tabla 3 podrá extenderse tanto como se desee, con el fin de encontrar algún patrón y podría dar pie a un trabajo futuro.

A partir de los datos de la Tabla 3, cabe preguntarse si dado un primer número primo p, este se puede convertir en p_G de manera sucesiva, y hasta cuántas veces se mantiene la propiedad de ser número primo de Germain. Por ejemplo, con $p = 2$ (p_G en realidad) se obtiene $p_{sG} = 5$, de este se obtiene $p_{sG} = 11$, de este último se obtiene ahora $p_{sG} = 23$, y así se puede continuar hasta que no se obtenga un número primo. Como la propiedad de ser primo de Germain se comparte con el siguiente número primo de Germain, a estos números se les llama, en este trabajo, generaciones.

Sea p un número primo inicial, que corresponde a la generación 0, entonces se observa, el siguiente desarrollo:

$$\cdots \quad \underbrace{2[\underbrace{2(\underbrace{2(\underbrace{2p+1}_{1^a\text{ gen}})+1}_{2^a\text{ gen}})+1}_{3^a\text{ gen}})]+1}_{4^a\text{ gen}} \quad \cdots$$

Llamamos k-generación a cada nuevo primo seguro de Germain hasta que se obtenga un número que no es primo. Esto se conoce como la cadena de Cunningham [5], de la cual se conjetura que hay infinitas secuencias y que estas pueden ser muy largas. A estas cadenas también se les conoce como secuencias de primos casi dobles [6], y citando al mismo autor [6], "no se sabe si existen cadenas arbitrariamente largas." En otros casos se buscan cadenas que, aunque no sean tan largas, contengan números primos gigantes, es decir con un gran número de dígitos. Las cadenas de primera clase más largas conocidas a la fecha son apenas de $k = 17$ (generación 16 en nuestro caso) [7].

Definición 3 Cadena de Cunningham de primera clase

Es una secuencia

$$(p, 2p+1, 2(2p+1)+1, \ldots) = (p_1, p_2, \ldots, p_n) = p_{i+1} = 2p_i + 1, \text{ donde } 1 \leqslant i < n \qquad (2)$$

en la cual todos los términos, excepto el último, son primos de Germain.

Más aún, en esa secuencia, los términos de p_2 a p_{n-1} son todos, a su vez, p_{sG} y p_G.

Una cadena de Cunningham (de primera clase) también se puede expresar de la siguiente manera, dado un primer número primo p_1 se tiene la secuencia:

$$\begin{aligned} p_2 &= 2p_1 + 1 \\ p_3 &= 2p_2 + 1 = 4p_1 + 3 \\ p_4 &= 2p_3 + 1 = 8p_1 + 7 \\ &\vdots \\ p_i &= 2^{i-1}p_1 + (2^{i-1} - 1). \end{aligned} \qquad (3)$$

En la Figura 2 se muestran los números primos para $p \leqslant n$, con $n = 100$ y en cada caso, el número de generaciones que contiene cada número p. Cabe hacer notar que, a diferencia de las cadenas de Cunningham, donde $k = 1$ es el número p inicial [6], en este trabajo, cuando aparece $k = 0$ (indica generación 0), corresponde al p inicial y si en la gráfica aparece $k = 0$, se tiene que ese número primo no es p_G. Si $k \neq 0$, el número es p_G y el valor de k corresponde a la longitud-1 de la cadena de Cunningham. Esto es útil para relacionar los números que no generan cadenas de Cunningham con los números primos que no son primos de Germain.

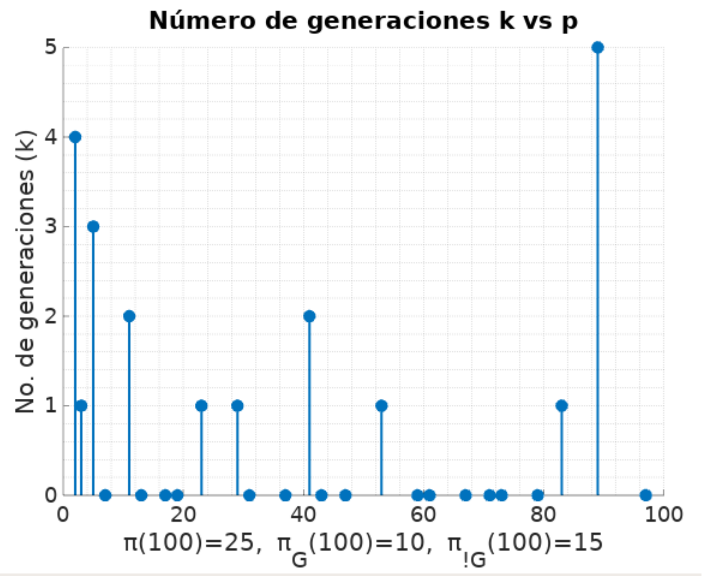


Figura 2: Número k para los primeros 100 números. (Elaboración propia).

Para el primer número primo, el 2, se tiene la cadena: $\{2, 5, 11, 23, 47\}$, es decir, sólo cuatro generaciones ($k = 4$) antes de que se corte la cadena, ya que el último número, 47, aunque sea primo, ya no es número primo de Germain y no puede generar otro número primo seguro de Germain. El siguiente número primo, el 3, sólo produce una generación, el 7, el cual, aunque sea número primo, no es primo de Germain. El 5 produce 3 generaciones. Al continuar con el 7, ahí no se produce ninguna generación, por lo que se muestra su valor en cero (el 7 no es un p_G y corresponde al primer punto de la gráfica en cero). Para estos números primos menores a 100, se encuentra que la cadena más larga es de cinco generaciones.

La gráfica permite obtener los siguientes datos, el número de generaciones (k) posibles para cada número primo p, cuántos son primos de Germain p_G, y cuántos no son primos p_G. La gráfica no muestra los números que forman cada cadena, eso se muestra más adelante en forma de tabla. Además se muestra, al pie de la figura, $\pi(n)$, es decir, la cardinalidad de números primos para $p \leqslant n$, la cardinalidad de los números que no son p_G como[2] $\pi_{!G}(n)$, y la cardinalidad de los que sí son como $\pi_G(n)$. De aquí podemos calcular

$$\left.\frac{\pi_{!G}(n)}{\pi(n)}\right|_{n=100} = \frac{15}{25} = 0.60$$
$$\left.\frac{\pi_{G}(n)}{\pi(n)}\right|_{n=100} = \frac{10}{25} = 0.40$$

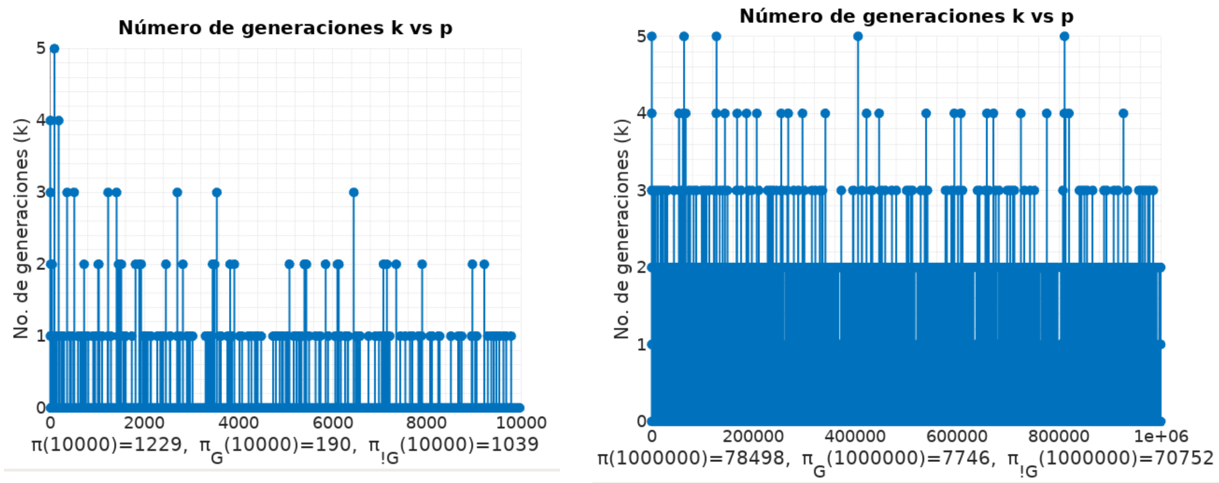
una de las cuales ya se había encontrado.

Revisando los cálculos, en la Tabla 4 se muestra la longitud de las cadenas para cada número primo $p \leqslant 100$. La tabla resalta los valores $k = 0$, lo que signfica que ahí $p \neq p_G$. La Tabla 5 muestra los términos que componen cada cadena o secuencia de Cunningham.

Tabla 4: k-generaciones para $p \leqslant 100$.

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
k	4	1	3	0	2	0	0	0	1	1	0	0	2
p	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	
k	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	5	0	

La Figura 3 muestra dos casos más. La Figura 3a presenta el caso k vs $p \leqslant 10^4$, mientras que la Figura 3b corresponde al caso k vs $p \leqslant 10^6$. Para números más grandes se vuelve poco práctico mostrar estos resultados de forma gráfica.



(**a**) Número k para $p \leqslant 10^4$

(**b**) Número k para $p \leqslant 10^6$

Figura 3: Número k para diferentes $p \leqslant n$. (Elaboración propia).

Para $p \leqslant 10^4$ se tienen solamente 190 números p_G, contra un total de 1229 números primos. Eso da una proporción $\pi_G(10^4)/\pi(10^4) = 190/1229 = 0.1545$. Para el caso $n = 10^6$, la proporción es

[2]Por comodidad, se usa el estilo de los lenguajes de programación, donde "! =" indica "$\neq$", así !G es $\neq$ G

Tabla 5: Las diez cadenas de Cunningham para $p \leqslant 100$.

p	k	Cadena $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$
2	4	$\{2, 5, 11, 23, 47\}$
3	1	$\{3, 7\}$
5	3	$\{5, 11, 23, 4, 7\}$
7	0	
11	2	$\{11, 23, 47\}$
13	0	
17	0	
19	0	
23	1	$\{23, 47\}$
29	1	$\{29, 59\}$
31	0	
37	0	
41	2	$\{41, 83, 167\}$
43	0	
47	0	
53	1	$\{53, 107\}$
59	0	
61	0	
67	0	
71	0	
73	0	
79	0	
83	1	$\{83, 167\}$
89	5	$\{89, 179, 359, 719, 1439, 2879\}$
97	0	

$\pi_G(10^6)/\pi(10^6) = 7746/78498 = 0.0986$. Puede observarse que la densidad de números p_G disminuye a medida que n aumenta.

Las cadenas de Cunningham tienen una longitud variable, y al igual que la aparación de los números primos, los primos de Germain y los primos de Mersenne (los cuales se suponían fáciles de encontrar), su longitud sólo se descubre hasta que se realizan los cálculos. Algunos ejemplos con números pequeños se muestran en las Tablas 6, 7 y 8, en cada caso se indica el valor de p inicial, tomado de [8]. Si las cadenas de Cunningham aparecen infinitas veces, como dice la conjetura, entonces podría decirse que por consecuencia, los primos de Germain también son infinitos.

Tabla 6: Cadenas de Cunningham, p inicial igual a 89.

Generación k	$2p+1$
1	179
2	359
3	719
4	1439
5	2879

Tabla 7: Cadenas de Cunningham, p inicial igual a 665043081119.

Generación k	2p + 1
1	1330086162239
2	2660172324479
3	5320344648959
4	10640689297919
5	21281378595839
6	42562757191679
7	85125514383359
8	170251028766719
9	340502057533439
10	681004115066879

Tabla 8: Cadenas de Cunningham, p inicial igual a 554688278429.

Generación k	2p + 1
1	1109376556859
2	2218753113719
3	4437506227439
4	8875012454879
5	17750024909759
6	35500049819519
7	71000099639039
8	142000199278079
9	284000398556159
10	568000797112319
11	1136001594224639

3. Primos gemelos de Germain

Otra observación posible en la Tabla 4, es la aparición de primos gemelos. El primero en llamar gemelos a estos pares de números primos fue Pauel Stäckel (1916) en «Die Darstellung der geraden Zahlen als Summen von zwei Primzahlen», *La representación de los números pares como sumas de dos números primos*, en Informes de reuniones de la Academia de Ciencias de Heidelberg, clase de matemáticas y ciencias [9]. Los primos gemelos son aquellos números primos cuya diferencia numérica entre ellos es igual a 2, es decir, si p_{T1} es un número primo, y $p_{T2} = p_{T1} + 2$ también es primo, se les llama primos gemelos y forman un par (p_{T1}, p_{T2}). Se emplea el subíndice T, de la palabra inglesa *twin*. Las parejas de primos gemelos que se observan en la Tabla 4 son (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (41,43), y (71,73).

Establezcamos la siguiente definición:

Definición 4 Primo gemelo de Germain

Si un número primo gemelo p_T es tal que $2p_T + 1$ también es primo, se le llamará primo gemelo de Germain, p_{TG}.

Además se tiene la siguiente conjetura, atribuida a Euclides:

Conjetura 1 Infinitos primos gemelos

Existe un número infinito de primos p tales que $p+2$ también es primo.

Como se demuestra en la siguiente sección, la única pareja de primos gemelos en la que ambos son p_G es $(3,5)$. Sustituyendo ese par en $2p+1$ tenemos: $2\times3+1=7$, sí es primo; $5\times2+1=11$, sí es primo. Pero con (5,7), tenemos $7\times2+1=15$ que no es primo. Al observar el comportamiento de los primos gemelos, vemos que, después del par $(3,5)$, los pares de primos gemelos siempre tienen al menos uno de ellos que no es primo de Germain, es decir, el resultado de $2p_T+1$ con ese primo gemelo no es primo. Se puede demostrar que, de ahí en adelante, en ninguna pareja de primos gemelos, ambos son p_G. Consecuentemente, como se remarca en este trabajo, la cardinalidad de los primos de Germain es aproximadamente $1/2$ de la cardinalidad de los primos gemelos, y aproximadamente igual al número de parejas de primos gemelos.

Además, cuando uno de los primos gemelos es primo de Germain, es el menor del par (p_{T1},p_{T2}), mientras que el mayor nunca es primo de Germain. Por ejemplo, con el par $(5,7)$, el 5 sí es número p_G, pero el 7 no lo es. Con $(11,13)$, nuevamente, 11 sí es p_G pero el 13 no. Ahora con $(17,19)$, en este caso, ninguno de los dos primos gemelos es primo de Germain. Esto nos sugiere que del número de primos gemelos, menos de la mitad de ellos son primos gemelos de Germain, lo cual se confirma en la siguiente sección.

3.1. La forma $6m\pm1$ de los números primos

Se comienza con el siguiente lema:

Lema 1 Todo número primo $p>3$ se puede escribir como $p=6m\pm1$, donde m es un entero positivo.

Demostración. Todo entero positivo $n\geqslant6$ se puede expresar como $6m+k$, donde $k=0,1,...5$, y $m\geqslant1$. Los números $6m$, $6m+2$, $6m+3$ y $6m+4$ son compuestos ya que son divisibles entre 2, entre 3 o ambos, es decir, $6m=2\times3m$, $6m+2=2(3m+1)$, $6m+3=3(2m+1)$, $6m+4=2(3m+2)$. Mientras que $6m+1$ y $6m+5$ son, ya sea primos (por ejemplo $6\times1+1=7$, $6\times2-1=11$) o compuestos (por ejemplo $6m+5$ es divisible por 5 si m es múltiplo de 5, $6m+1$ es divisible por 3 si la suma de dígitos decimales es divisible por 3). Por otro lado, $6m+5$ se puede escribir como $6(m+1)-1$. Todos los primos menores que 5, es decir el 2 y 3, no se pueden expresar como $p=6m\pm1$ donde m es un entero positivo. Esto significa que todo número primo $p\geqslant5$ puede ser expresado como $p=6m\pm1$, donde $m\in\mathbb{N}$ [10]. ■

Observación 1

Si hacemos $m=4$, $6m+1=25$, el cual no es número primo. Entonces, debe entenderse que $6m\pm1$ no es una fórmula para generar números primos, es la forma en que un número primo se puede expresar, y siempre funciona para algunos valores de m. Por ejemplo, el número primo $p=5$ se puede expresar como $6m-1$, con $m=1$, mientras que $p=7$ se puede expresar como $6m+1$ con $m=1$.

Además de lo anterior, como consecuencia del Lema 1, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1 Todo par de primos gemelos diferente del par (3,5) se puede expresar como

$$(p_{T1},p_{T2})=(6m-1,6m+1), \tag{4}$$

donde $p_{T1} = 6m - 1$ es el primo gemelo menor y $p_{T2} = 6m + 1$ es el primo gemelo mayor de ese par.

Ahora, conjeturamos que en un par de primos gemelos no todos son primos de Germain mediante la siguiente proposición:

Proposición 1

En un par de primos gemelos diferente al par (3,5), el primo gemelo mayor $p_{T2} = 6m + 1$ no puede ser primo de Germain.

Demostración. Se puede verificar, en pares gemelos diferentes a (3,5), que $p_{T2} = 6m + 1$ no puede ser primo de Germain, ya que $2p_{T2} + 1 = 2(6m + 1) + 1 = 12m + 3 = 3(4m + 1)$, el cual será un número compuesto divisible entre 3. ■

Esto explica lo que se encuentra en la Figura 4, donde se muestran sólo los pares de primos gemelos para $p \leqslant n$ con $n = 100$, que son primos de Germain. En la ordenada se representa el valor de cada número p_T y en la abcisa se muestra ese valor como la separación entre primos gemelos de Germain. De los 8 pares de primos gemelos, sólo 5 de ellos contienen al menos uno que es número p_G. La cantidad total de números primos gemelos es 16, designando su cardinalidad como $\pi_T(n)$, mientras que la cantidad de primos gemelos de Germain es $\pi_{TG}(100) = 5$.

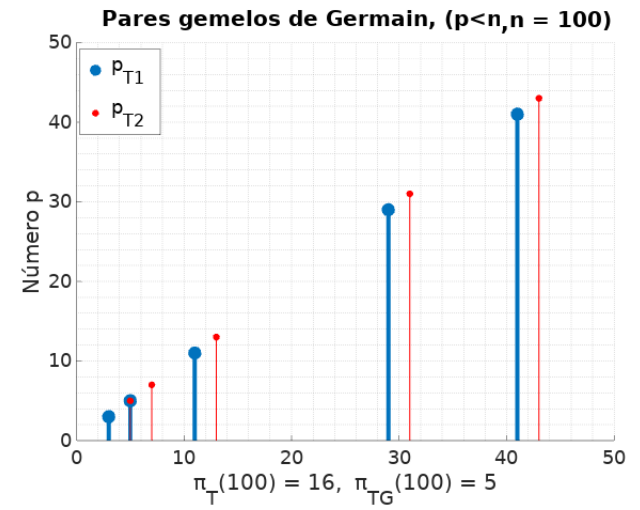


Figura 4: Pares de primos gemelos con $p \leqslant n$, y $n = 100$. (Elaboración propia).

Para $p \leqslant 10^4$, en la Figura 5, se muestran los pares de primos gemelos; de los 205 pares, 204 tienen al menos un $p_T \neq p_G$. En total, sólo se tienen 54 números primos gemelos de Germain, es decir $\pi_{TG}(10^4) = 54$.

Se puede agregar la siguiente conjetura:

Conjetura 2

Cuando el primo gemelo menor, p_{T1}, termina en 7, este no será p_G.

Esta Conjetura se deja abierta a ser comprobada por el lector. En su lugar, numéricamente se muestran algunos ejemplos: el 17, 107, 137, etc., no son primos de Germain porque al hacer $2p_T + 1$ se obtiene un número compuesto divisible entre 5, es decir, $17 \times 2 + 1 = 35$, y 35/5=7; $107 \times 2 + 1 = 215$, y 215/5=43;

$137 \times 2 + 1 = 275$, y 275/5=55. Estas pruebas heurísticas apoyan la conjetura de que hay más primos gemelos que primos gemelos de Germain.

Para valores de p más grandes, ya es difícil observar de manera gráfica la presencia de cada par de primos gemelos, como sí se observó en la Figura 4. Note que en la Figura 5, debido a la escala, se empalma el trazo, en color rojo, de los primos gemelos mayores sobre el trazo de los menores, en color azul.

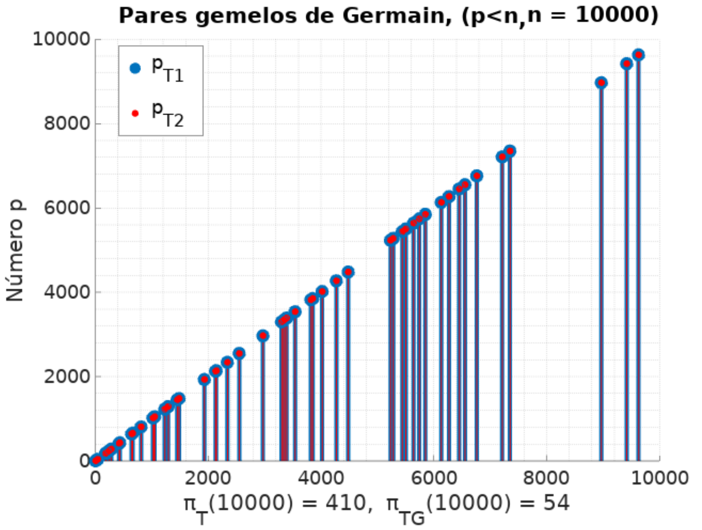


Figura 5: Pares de primos gemelos de Germain con $p \leqslant 10^4$. (Elaboración propia).

La proporción de números primos gemelos de Germain (p_{TG}) contra $\pi(n)$, para diferentes valores de n se muestran en la Tabla 9. La primera columna muestra el valor de n, del cual se calcula $\pi(n)$, la cardinalidad de los números primos $p \leqslant n$, en la segunda. En la tercera columna se incluye la cardinalidad de los primos gemelos $\pi_T(n)$. La cuarta columna muestra la cardinalidad de primos gemelos que son además primos de Germain $\pi_{TG}(n)$. Las columnas quinta y sexta muestran la razón, primero entre la cardinalidad de primos gemelos contra $\pi(n)$, y los primos gemelos que son primos de Germain respecto a $\pi(n)$. En la séptima columna, se exhibe la razón entre el número de primos gemelos que son primos de Germain al número de primos gemelos que no son primos de Germain.

Se encontró que la cantidad de primos gemelos de Germain, es siempre menor al 50 % del total de números primos gemelos para una $p \leqslant n$, por las razones dadas para la (4).

Tabla 9: Densidad de primos gemelos de Germain.

n	$\pi(n)$	$\pi_T(n)$	$\pi_{TG}(n)$	$\pi_T(n)/\pi(n)$	$\pi_{TG}(n)/\pi(n)$	$\pi_{TG}(n)/\pi_{T!G}(n)$
10^2	25	16	5	0.64	0.20	0.45
10^3	168	70	14	0.42	0.08	0.25
10^4	1229	410	54	0.33	0.04	0.15
10^5	9592	2446	240	0.26	0.03	0.11
10^6	78498	16338	1321	0.21	0.02	0.09
10^7	664579	117960	8204	0.18	0.01	0.07
10^8	5761455	880624	53412	0.15	0.01	0.06

Regresando a los primos de Germain, no necesariamente primos gemelos, de acuerdo a [1]: "hay una buena razón para creer que hay cerca del mismo número de primos de Germain que de primos gemelos", es decir, $\pi_G(n)/\pi_T(n) \approx 1$.

Sin embargo, como se muestra en la Tabla 10, la razón entre $\pi_G(n)$ y el total de primos gemelos $\pi_T(n)$

para una $p \leqslant n$ dada, es más bien

$$\pi_G(n)/\pi_T(n) \approx 1/2. \tag{5}$$

En todo caso, si se toman en cuenta el número de pares de primos gemelos, entonces sí se tiene que el número de primos de Germain es aproximadamente igual al número de pares de primos gemelos, es decir, $\pi_G(n)/\pi(\text{pares}_{p_T}) \approx 1$.

Tabla 10: Razón entre primos de Germain y número de primos gemelos.

n	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$\pi_G(n)/\pi_T(n)$	0.62500	0.52857	0.46341	0.47874	0.47411	0.47501	0.48050

Finalmente, se puede decir que la infinitud de los números primos, o de los números primos gemelos están relacionados con la infinitud de los números primos de Germain, aunque estos últimos sean menores en proporción a los otros, es decir, se conjetura que $\pi(n) > \pi_T(n) > \pi_G(n)$.

3.2. Un ajuste a la estimación de $\pi_G(n)$

En el libro de Victor Shoup, (2009) [2], página 123, se menciona:

> Es un problema abierto comprobar (o lo contrario) que hay infinitos primos de Sophie Germain. Sin embargo, la evidencia numérica y argumentos heurísticos, sugieren fuertemente no sólo que hay infinitos de tales primos, si no también una estimación muy precisa sobre la densidad de tales primos.
>
> Sea $\pi^*(x)$ el número de primos de Sophie Germain[3] hasta x
> **Conjetura 5.24** Tenemos
>
> $$\pi^*(x) \approx C\frac{x}{\ln(x)^2},$$
>
> donde C es la constante
>
> $$C := 2\prod_{p>2}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \approx 1.32032.$$
>
> y el producto es sobre todos los primos $p > 2$.

En la página 124, agrega que

> la conjetura anterior también incluye (una versión fuerte de) la famosa conjetura de los primos gemelos como un caso especial: el número de primos p hasta x tal que $p+2$ también es primo es $\approx Cx/\ln(x)^2$, donde C es la misma constante que la Conjetura 5.24.

Como lo dice [2], la conjetura 5.24 es la misma conjetura y la misma constante que la estimación de los primos gemelos. Parece que hay una confusión en el uso de $\pi^*(x)$ al suponer que es una estimación de la cardinalidad de los primos de Germain, ya que de acuerdo a [11], la forma de esta estimación fue dada por Hardy y Littlewood para estimar los números primos gemelos, pero conviene hacer la siguiente observación, la estimación de Hardy-Littlewood es sobre el número de **parejas** de gemelos [12], no el número de primos gemelos, el cual sería el doble. Es más, la constante $C = 1.32032$, corresponde, en realidad, al doble de la llamada constante prima gemela $C_2 = 0.66016181584\ldots$.

[3] Aquí se usará $\hat{\pi}_G(n)$.

Como el número de primos de Germain es casi el mismo que el número de pares de gemelos, se tomará $\hat{\pi}_G(n) = \pi^*$ como una estimación de los primos de Germain de Hardy-Littlewood. En la Tabla 11 se muestran los resultados de esta estimación de $\pi_G(n)$ para algunos valores de n. Para $n = 10^4$, la estimación predice un total de 155.64 primos de Germain (156 al redondear), en lugar del valor exacto de 190; para $n = 10^7$, la estimación entrega 50822 primos de Germain, mientras que el valor exacto, dado en la columna 2, es de 56032 (un error cercano al 10 %). Para $n = 10^9$ el error se reduce a un 7 %, es decir, se predice un total de 3074417.23 en lugar del valor exacto de 3308859.

Tabla 11: Valores estimados de $\pi_G(n)$ según Hardy-Littlewood.

n	$\pi_G(n)$	$\hat{\pi}_G(n)$
10	3	2.49
10^2	10	6.23
10^3	37	27.67
10^4	190	155.64
10^5	1171	996.11
10^6	7746	6917.44
10^7	56032	50822
10^8	423140	389105.93
10^9	3308859	3074417.23

Se propone una pequeña modificación que reduce el error relativo porcentual. El objetivo es encontrar si ese valor de $C = 1.32032$ es el único valor posible, o si hay otro valor que ofrezca una mejor aproximación al valor verdadero de $\pi_G(n)$.

Utilizando el algoritmo LMS (*least mean square*) para la búsqueda del valor óptimo de C, se logró reducir el error a un valor mínimo. LMS es un bello algoritmo de búsqueda de descenso por el gradiente, que a pesar de su sencillez, resulta muy efectivo. El pseudocódigo mostrado en el Algoritmo 1 requiere de los valores conocidos de n y $\pi_G(n)$, se da un valor inicial para C, y un valor de ajuste μ:

Algoritmo 1: Búsqueda de C óptima en $\hat{\pi}_G(n) \approx Cn/\ln(n)^2$.

Datos: C inicial, μ, iteraciones y valores de $\pi_G(n)$ hasta $n = N$
Resultado: valor óptimo de C para $\hat{\pi}_G(n)$
para j<`iteraciones` **hacer**
  inicializa $k = 1$;
  mientras $k < N$ **hacer**
    cálculo de $\hat{\pi}_G(n) = cn/\ln(n)^2$;
    cálculo de error $\Delta E = (\pi_G(n) - \hat{\pi}_G(n))/\pi_G(n)$;
    actualización de $C = C - \mu\Delta E$;
    $k = k + 1$;
  fin
  $j = j + 1$;
fin

El resultado del algoritmo LMS fue $C = 1.38004526392089$ y el error se redujo sobre todo en los valores finales de n. En la ejecución del algoritmo se empleó la lista de primos de Germain de [13]. En la Figura 6 se muestra la variación del % de error y en la Tabla 12 los valores numéricos, donde %error H_L denota el error de la aproximación por Hardy-Littlewood, y %error C_{opt} el % de error con la constante encontrada por el algoritmo LMS.

Con base en este resultado, se conjetura que el valor de C puede ser entre $1.32032 < C < 1.4$.

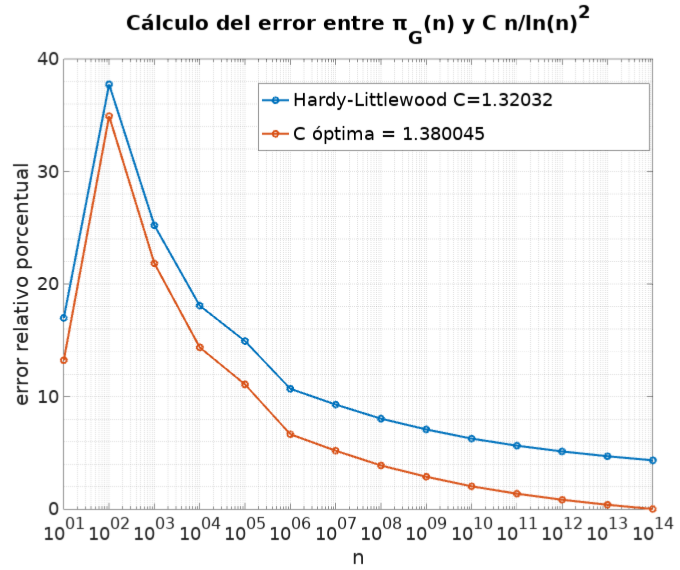


Figura 6: Errores porcentuales con C de Hardy-Littlewood y con C óptima para $\hat{\pi}_G(n)$. (Elaboración propia).

Tabla 12: Porcentaje de error en estimaciones de $\pi_G(n)$.

n	%error H_L	%error C_{opt}
10	16.99	13.24
10^2	37.74	34.93
10^3	25.22	21.83
10^4	18.08	14.38
10^5	14.93	11.09
10^6	10.70	6.66
10^7	9.30	5.20
10^8	8.04	3.88
10^9	7.09	2.88
10^{10}	6.27	2.03
10^{11}	5.64	1.37
10^{12}	5.13	0.84
10^{13}	4.70	0.39
10^{14}	4.34	0.02

4. Conclusión

En este trabajo se abordaron diferentes aspectos relacionados con los números primos de Germain. Se encontró la proporción entre la cardinalidad de números primos de Germain p_G a la cardinalidad de números primos para una $p \leqslant n$ dada, es decir, con respecto a $\pi(n)$.

Se presentó la interrelación de varios temas, es decir, la función $\pi(n)$, los números primos de Germain, las cadenas de Cunningham y los números primos gemelos. Se destacan las relaciones entre las diferentes cardinalidades, $\pi(n)$, $\pi_T(n)$, y $\pi_G(n)$. Se evidenció mediante cálculos numéricos, que la cantidad de números primos de Germain es aproximadamente la mitad de la cantidad de los números primos gemelos, en contraste con [1].

Un resultado interesante es una mejora a la estimación de la cardinalidad de los números primos de Germain. Para esto se obtuvo un valor óptimo del valor de C, es decir, del valor propuesto por Hardy-

Littlewood de 1.32032, se propone $C = 1.380045$. Nuestra fundamentación se basa en la reducción del error en la estimación de $\pi_G(n)$, según se muestra en la Figura 6.

5. Bibliografía

[1] H. Riesel, *Prime number and Computer Methods for factorization*, 2nd ed. Birkhäuser Basel, 2012.

[2] V. Shoup, *A Computational Introduction to Number Theory and Algebra*. Cambridge University Press, 2009.

[3] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Ann Arbor, Michigan: University of Michigan Library, 2005.

[4] T. M. Apostol, *Introducción a la teoría analítica de números primos*, 1984.

[5] A. Cunnningham, "On hyper-even numbers and on fermat's numbers," *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 2, no. 5, pp. 237–274, 1907.

[6] L. Günter, "Long chains of nearly boubled primes," *Mathematics of Computation*, vol. 53, no. 1889, pp. 751–759, 1989.

[7] A. Dirk, "Cunningham chain records," http://primerecords.dk/Cunningham_Chain_records.htm.

[8] "A005602 smallest prime beginning a complete cunningham chain of length n (of the first kind)," https://oies.org/A005602.

[9] P. Stäkel, "Die darstellung der geraden zahlen als summen von zwei primzahlen," vol. 7A, no. 10, pp. 1–47.

[10] M. Barylski, "Studies on twin primes in goldbach partitions of even numbers," http://tasmoto.org/research/TwinPrimesInGoldbachPartitions.pdf, 2018.

[11] P. Ribenboim, *Fermat's Last Theorem for Amateurs*. Springer, 1999.

[12] G. Hardy and J. Littlewood, "On some problems of 'partitio numerarum': III: On the expression of a number as a sum of primes," *Acta Mathematica*, vol. 44, no. 1, pp. 1–70, 1923.

[13] "A092816," https://oies.org/A092816/b092816.txt.