Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 19, No 1. Agosto − Marzo, 2019 ISSN 1659 -0643

El Arbelos Esférico

Javier G. Mendieta
jg_mendieta@hotmail.com
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero, México

Erika González Nava
fresita_akire@hotmail.com
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero, México

Hermes Nolasco Hesiquio
nolascohh@hotmail.com
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero, México

Recibido: Mayo 13, 2018 Aceptado: Agosto 12, 2018

Resumen. El arbelos es el objeto geométrico construido con tres arcos de medias circunferencia, tangentes dos a dos. Fue estudiado inicialmente por Arquímedes quien descubrió muchas de sus propiedades. Ahora, una generalización del arbelos es el arbelos esférico y, con él, surgen las cuestiones en cuanto a las relaciones que existen con el arbelos, su volumen con relación a las esferas que lo constituyen, así como a los teoremas relacionados con la cadena de esferas de Pappus y el corazón esférico de Bankoff. El objetivo de este articulo no es explorar las propiedades del arbelos, sino las del arbelos esférico; mostramos como dos de las propiedades importantes del arbelos no se pueden generalizar al arbelos esférico

Palabras clave: Arbelos, cadena de esferas, relación de área, cadena infinita, corazón esférico, esfera inscrita, relación de volumen.

Abstract. The arbelos is the geometric object constructed with three arcs of half-circumference, tangents two to two. It was studied initially by Archimedes who discovered many of its properties. Now, a generalization of the arbelos is the spherical arbelos and, with it arise the questions regarding the relationships that exist with the arbelos, its volume in relation to the spheres that constitute it, as well as the theorems related to the chain of spheres of Pappus and the spherical heart of Bankoff. The objective of this article is not to explore the properties of the arbelos, but those of the spherical arbelos; we show how two of the important properties of the arbelos can not be generalized to the spherical arbelos

KeyWords: Arbelos, sphere chain, area ratio, infinite chain, spherical heart, inscribed sphere, volume ratio.

1.1 Introducción

Inmerso en las ideas de sus predecesores, Arquímedes intentó la cuadratura del círculo y de muchas otras figuras. Siguiendo las ideas de Hipócrates de Chios estudió las propiedades de una figura particularmente simple que aparece en su libro de LOS LEMAS, una lúnula formada por tres arcos de medias circunferencias, tangentes dos a dos.

Consideremos tres medias circunferencias C_1, C_2 y C_3 de radios r_1, r_2 y r_3 con sus centros O_1, O_2 y O_3 respectivamente sobre el segmento de recta AC. La figura limitada por los tres arcos de las medias circunferencias C_1, C_2 y C_3, tangentes dos a dos, fue nombrada por Arquímedes "Arbelos o Chuchillo del Zapatero", comúnmente denotada por: $\text{Arb}(ADCB) = \text{Arb}(ACB)$, figura 1.1

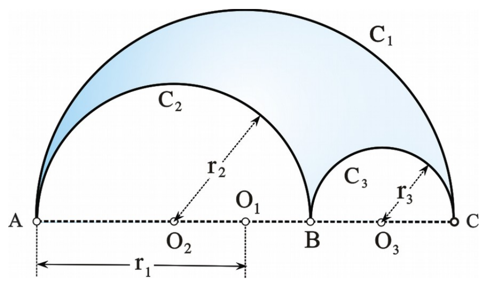

Figura 1.1: Tres circunferencias tangentes dos a dos forman el Arbelos.

1.2 Circunferencia media del arbelos

Las propiedades del arbelos son muy interesantes y algunas de ellas no tan simples. Comencemos por considerar la propiedad conocida como circunferencia media del arbelos. En la 1.2, se ha considerado un arbelos, $\text{Arb}(ADCB)$, y la recta BD, que es la media geométrica de los diámetros $AB = 2r_2$ y $BC = 2r_3$ y, por ello, BD es ortogonal a AC en B, en donde los centros de C_1, C_2 y C_3 son: O_1, O_2 y O_3. Bajo estas circunstancia se tiene el teorema siguiente:

Teorema 1.1 De la circunferencia media del arbelos

El área, $A\left(C\left(O, \dfrac{DB}{2}\right)\right)$ de la circunferencia de centro O y diámetro BD es igual al área del arbelos $ADCB$, $A(\text{Arb}(ADCB))$, es decir $A(\text{Arb}(ADCB)) = A(C(O, DB/2))$, 1.2

Demostración. Efectivamente, el área, $A(\text{Arb}(ADBC))$, del arbelos, Arb(ADBC), en función de los radios r_1, r_2 y r_3 de las medias circunferencias C_1, C_2 y C_3, es

$$A(\text{Arb}(ADBC)) = A_{C_1} - A_{C_2} - A_{C_3} = \frac{\pi}{2}(r_1^2 - r_2^2 - r_3^2). \tag{1.1}$$

Para simplificar la ecuación 1.1 hay que observar que los radios están relacionados mediante la ecuación: $2r_1 = 2r_2 + 2r_3$, que equivale a $r_1 = r_2 + r_3$

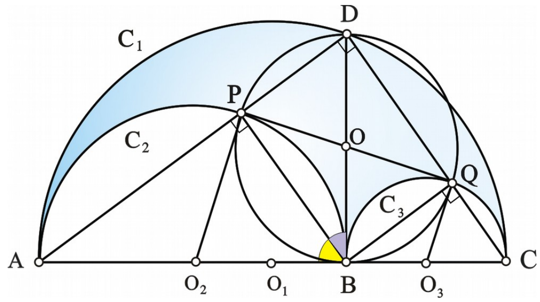

Figura 1.2: Relaciones angulares en la circunferencia media en el arbelos.

Sustituyendo el valor de r_1 en la ecuación 1.1 para el área del arbelos se tiene que,

$$A(\text{Arb}(ADBC) = \frac{\pi}{2}((r_2 + r_3)^2 - r_2^2 - r_3^2) = \pi r_2 r_3 \tag{1.2}$$

Ahora, consideremos el triángulo rectángulo inscrito en la media circunferencia C_1; ahí se ve que los triángulos ADB y DCB son semejantes y, por lo tanto, podemos establecer la relación: $\dfrac{2r_2}{DB} = \dfrac{DB}{2r_3}$ de donde

$$DB = 2\sqrt{r_2 r_3} \tag{1.3}$$

De ello se desprende que el área de la circunferencia $C\left(O, \dfrac{DB}{2}\right)$ es

$$A\left(C\left(O, \frac{DB}{2}\right)\right) = \pi\left(\frac{DB}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{2\sqrt{r_2 r_3}}{2}\right)^2 = \pi r_2 r_3; \tag{1.4}$$

lo que significa que: $A(\text{Arb}(ADBC)) = A\left(C\left(O, \dfrac{DB}{2}\right)\right)$ ■

Por lo tanto el teorema 1.1, de la circunferencia media del arbelos, es cierto.

Además, en la circunferencia media del arbelos se tienen las relaciones entre la recta DB y la tangente común PQ a las circunferencias C_2 y C_3. Para encontrarlas consideremos el $\angle ADC$ inscrito en C_1 y a los puntos P, que es la intercepción de AD con C_2, y Q, que es la intersección de DC con C_3, 1.2. Ahora, los puntos A, P y D son colíneales, debido a que AD es uno de los lados del ángulo inscrito ADC en la media circunferencia C_1, al igual que D, Q y C. Entonces, fijemos nuestra atención en el segmento de recta PB que determina con AP el $\angle APB$ inscrito en C_2 ; lo mismo que el $\angle BQC$ que está inscrito en C_3, estos son ángulos rectos.

De todo esto se deduce la relación que existe entre los ángulos inscritos en las medias circunferencias del arbelos, esto es $\angle ADC = \angle APB = \angle BQC = \pi/2$; es decir, los triángulos: ADC, APB y BQC son rectángulos. Esto nos lleva a considerar que el cuadrilátero $PDQB$ es un rectángulo, ya que los ángulos BPD, PDQ y BQD son rectos. Y ya que las diagonales de un rectángulo son iguales concluimos que PQ y BD son iguales, siendo que se bisecan mutuamente y, debido a ello, el punto O es el centro de la circunferencia de diámetro BD, conteniendo a P y Q.

Ahora, para ver que la recta PQ es tangente común a las circunferencias C_2 y C_3 primero consideremos el ángulo O_2PO y tratemos de demostrar que es recto. Para ello se tiene que los segmentos O_2P y O_2B son iguales, por ser radios de la misma circunferencia; es por ello que el $\Delta(O_2PB)$ es isósceles y, por ello, $\angle O_2BP = \angle O_2PB$. También el triángulo POB es isósceles, ya que O es punto medio de DB y PQ y, por ello, $PO = OB$, de donde se deduce que $\angle OBP = \angle OPB$. Ahora, DB es ortogonal a AC en B, es decir, $O_2BO = \pi/2$, pero los ángulos O_2BP y OBP los constituyen, es decir, $\angle O_2BO = \angle O_2BP + \angle OBP = \pi/2$; pero resulta que el ángulo $\angle O_2BP$ se puede sustituir por el $\angle O_2PB$ y el $\angle OBP$ por $\angle OPB$ de donde se obtiene que $\angle O_2PB + \angle OPB = \pi/2$, lo que muestra que la recta PQ es perpendicular al radio O_2P y, por ello, PQ es tangente a la circunferencia C_2. En forma similar, utilizando el $\Delta(BOQ)$, puede demostrarse que PQ es tangente a C_3.

1.3 Circunferencias mellizas en el arbelos

El área del arbelos se puede encontrar si se conocen los radios de las circunferencias que lo constituyen. Para determinar el perímetro $\mathrm{P_{Arb}}$ del arbelos consideramos el perímetro de los arcos de circunferencia que lo constituyen, es decir: o $\mathrm{P_{Arb}} = \pi\ (r_1 + r_2 + r_3)$, pero sabemos que: $r_1 = r_2 + r_3$ por lo que: $P_{\mathrm{Arb}} = 2\pi\ r_1$. O dicho de otro modo, el perímetro del arbelos es igual al de la circunferencia de diámetro AC. Para $A(\mathrm{Arb}(ADBC))$, ya se ha visto que es $\pi r_2 r_3$.

1.4 Circunferencias mellizas en el arbelos

Una propiedad del arbelos, quizá inesperada, es la de las circunferencias tangentes a la recta BD, conocidas como circunferencias mellizas de Arquímedes, y que proporcionan una visión extendida de las propiedades del arbelos estudiadas por Arquímedes en su libro de LOS LEMAS, 1.3a.

Se trata de dos circunferencias tangentes a BD, una tangente a las circunferencias C_1 y C_2, y la otra tangente a las circunferencias C_1 y C_3, denotadas aquí como C_4 y C_5, con centros y radios respectivos O_4, O_5 y R y S, entonces, tenemos el teorema siguiente.

Teorema 1.2

Las circunferencias, C_4 y C_5, tienen el mismo valor de radio y, además, la circunferencia C_Ω, es tangente a ambas y tiene por diámetro $EF = BD$, 1.3a.

Demostración. Solo probaremos que los radios R y S son iguales. Efectivamente, consideremos las circunferencias C_4 y C_5 y sus radios R y S respectivamente y fijemos nuestra atención en el triángulo rectángulo $O_2\ O_4V$, siendo V la perpendicular a AC por O_4 y $\theta = \angle VO_2O_4$, entonces se tiene que:

$$\cos(\angle VO_2O_4) = \cos\theta = \frac{r_2 - R}{r_2 + R}. \tag{1.5}$$

Consideremos ahora el triángulo $\Delta O_1O_2O_4$; ahí ΔO_1O_4 tiene el valor de: $r_1 - R$ ¿Por qué? pues, simplemente porque C_4 es tangente a C_1 en M, en donde T_1 es la tangente común en M y, por lo tanto, O_1M es perpendicular a T_1, y ya que: O_4M también lo es a T_1 entonces se deduce que O_1,O_4 y M son colíneales; así se tiene que: $O_1O_4 = r_1 - R$, 1.3b.

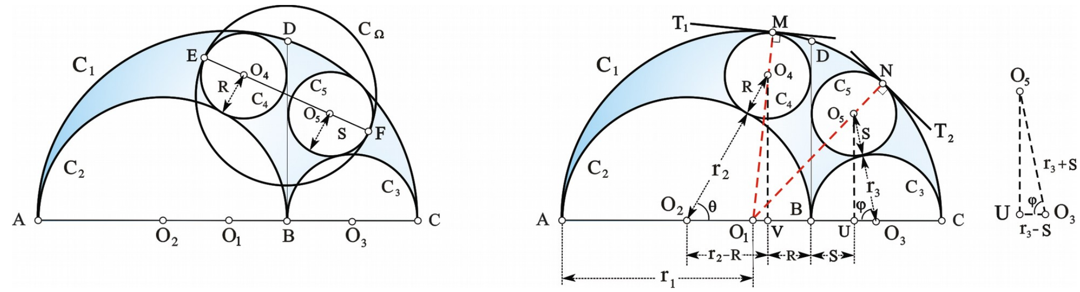

Figura 1.3: Relaciones angulares en la circunferencia media en el arbelos.

Ahora, aplicando la ley de los cosenos al triángulo $\Delta O_1O_2O_4$ y considerando que: $\angle O_1O_2O_4 = \theta$ se tiene $(O_1O_4)^2 = (O_1O_2)^2 + (O_2O_4)^2 - 2(O_1O_2)(O_2O_4)\cos\theta$. Esta relación se transforma en,

$$(r_1 - R)^2 = (r_1 - r_2)^2 + (r_2 + R)^2 - 2(r_1 - r_2)(r_2 + R)\left(\frac{r_2 - R}{r_2 + R}\right) \tag{1.6}$$

y simplificando vemos que: $-r_1R = -r_1r_2 + r_2^2$, de donde se obtiene que: $R = r_2(r_1 - r_2)/r_1$.

Y como $r_1 = r_2 + r_3$ entonces se deduce que $R = \dfrac{r_2r_3}{r_2 + r_3}$

Una idea análoga se puede aplicar al triángulo $\Delta O_1O_3O_5$, en donde, mediante el triángulo rectángulo O_3UO_5, obtenemos que: $\cos\angle UO_3O_5 = \cos\varphi = \dfrac{r_3 - S}{r_3 + S}$

Con ello, se tiene que: $(O_1O_5)^2 = (O_1O_3)^2 + (O_3O_5)^2 - 2(O_1O_3)(O_3O_5)\cos\varphi$, de ahí se deduce que:

$$(r_1 - R)^2 = (r_1 - r_2)^2 + (r_2 + R)^2 - 2(r_1 - r_2)(r_2 + R)\left(\frac{r_2 - R}{r_2 + R}\right)$$

llegando con ello a: $S = \dfrac{r_2r_3}{r_2 + r_3}$, es decir: $R = S$, como se afirmó. ■

1.5 Cadena de circunferencias de Pappus en el arbelos

Ya desde la antigüedad otros geómetras, además de Arquímedes, estudiaron al arbelos; el geómetra Pappus de Alejandría, (290-350), en el siglo IV encontró propiedades verdaderamente sorprendentes del arbelos, él estuvo ante la posibilidad de estudiar la idea geométrica del infinito construyendo una secuencia de circunferencias de Apolonio en el arbelos, denominada comúnmente cadena de circunferencias de Pappus. 1.4.

Esta cadena de circunferencias puede construirse si tomamos en cuenta la circunferencia $C_6 = k_2$ tangente a C_1, C_2 y C_3, y luego a la circunferencia k_3, tangente a C_1, C_2, y a k_2 y así, una vez y otra vez, hasta considerar la sucesión infinita de circunferencias $\{k_n\}$, con k_n tangente a C_1, C_2 y a k_{n-1}, con $k_1 = C_3$; entonces, en la cadena, se tiene que la sucesión de centros, O_{k_n}, pertenecen a la elipse Ω con longitud del semieje mayor $\alpha = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$ y de eje menor $\beta = \sqrt{r_1r_2}$.

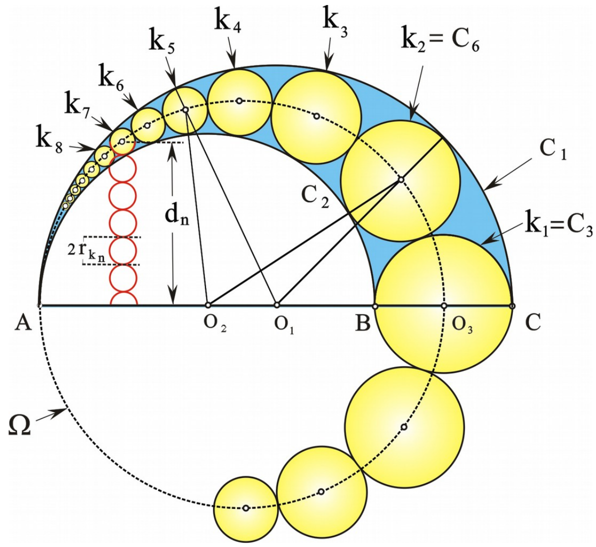

Figura 1.4: La distancia $d_n = 2(n-1)r_{k_n}$ en la Cadena o familia de circunferencias de Pappus.

En efecto, si r_{k_n} y O_{k_n} representan respectivamente el radio y el centro de la circunferencia k_n, Fig. 4, entonces todos los centros O_{k_n} tienen la suma de sus distancias a los centros O_1, punto medio de AC, y O_2, punto medio de AB, igual a $(r_2 + r_{k_n}) + (r_1 - r_{k_n}) = r_1 + r_2$. Así, los centros O_1 y O_2 son los focos de la elipse Ω que contiene a todos los centros O_{k_n} de la Cadena de Pappus, cuya longitud del eje mayor es $2\alpha = r_1 + r_2$ y, por lo tanto, su centro es: $\dfrac{r_1+r_2}{2}$.

Con ello, y utilizando la relación pitagórica para la elipse de longitud de semiejes α y β y distancia focal δ, tenemos que la longitud del semieje menor está determinado por: $\beta^2 = \alpha^2 - \delta^2$, y observando que: $\delta = (r_1 - r_2)/2$ se tiene

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_1-r_2}{2}\right)^2} = \sqrt{r_1 r_2} \tag{1.7}$$

Pappus de Alejandría expuso en su libro IV de su COLECCIÓN el teorema, con relación al arbelos, siguiente.

Teorema 1.3

La distancia d_n, desde cualquiera de los centros O_{k_n} a la recta AC, está determinada por la fórmula: $d_n = 2(n-1)r_{k_n}$ en donde r_{k_n} es el radio de la circunferencia k_n.

Una demostración puede ser muy laboriosa, por ello no se desarrolla aquí porque se sale del objetivo de este trabajo. Pappus la estructuró utilizando la geometría de Euclides, no obstante, mediante las herramientas de la geometría moderna se acostumbra utilizar la inversión geométrica para la demostración.

1.6 Corazón en el arbelos esférico y teorema de Bankoff

Otra propiedad interesante en el desarrollo del arbelos es la determinada por el teorema de león Bankoff, (1908-1997), quien lo enunció por primera vez el 14 de febrero de 1977. Consideremos la Figura 1.5, ahí se ve un corazón constituido por los arcos de circunferencia $AB = C_2$, $BC = C_3$ y $CMA = C'_1$ que designaremos mediante $\text{Crz}(ABCM)$ y su área por $A(\text{Crz}(ABCM))$. También vemos al arbelos constituido por los arcos de circunferencia C_1, C_2 y C_3, que designaremos por: $\text{Arb}(ADCB)$ y a su área mediante: $A(\text{Arb}(ADCB))$.

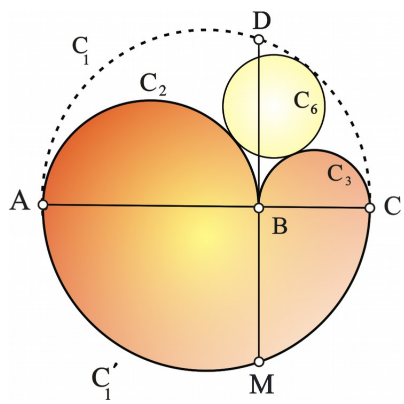

Figura 1.5: Teorema de Bankoff

Bajo esas circunstancias la razón de las áreas del corazón, que resulta una figura a todas luces asimétrica, y de la circunferencia C_6 inscrita en el arbelos es simplemente el cociente de los radios de la circunferencia mayor, que constituye al arbelos, y de la circunferencia pequeña inscrito en él. Con ello se llega al teorema de Bankoff:

Teorema 1.4 (de Bankoff)

Si r_6 es el radio de la circunferencia C_6 inscrita en el arbelos, y r_1 es el radio de la circunferencia C_1 entonces, la razón de las áreas del arbelos y el corazón está dada mediante la ecuación:

$$\frac{r_6}{r_1} = \frac{r_1^2 - r_2^2 - r_3^2}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = \frac{A(\text{Arb}(ADCB))}{A(\text{Crz}(ABCM))} \tag{1.8}$$

Demostración. Comencemos con la determinación del radio de la circunferencia C_6 tangente a las tres medias circunferencias C_1, C_2 y C_3 que constituyen al arbelos de la figura 1.6. Si representamos su radio por r_6 entonces, para determinar su valor encontremos el área de los triángulos $\Delta O_1O_2O_6$ y $\Delta O_1O_3O_6$ utilizando la fórmula para el área de un triángulo, en función de sus lados, de Herón de Alejandría.

Así, para el triángulo $\Delta O_1O_3O_6$ se tiene que su perímetro, $P(\Delta O_1O_3O_6)$, que resulta ser:

$$P(\Delta(O_1O_2O_6)) = O_1O_2 + O_2O_6 + O_6O_1 = r_1 - r_2 + r_2 + r_6 + r_1 - r_6 = 2r_1$$

y su área es $A(\Delta(O_1O_2O_6)) = \sqrt{r_1(r_3-r_6)r_6r_2}$.

De forma similar, se tiene para el triángulo $\Delta O_1O_3O_6$

$$P(\Delta(O_1O_3O_6)) = O_1O_3 + O_3O_6 + O_6O_1 = r_1 - r_3 + r_3 + r_6 + r_1 - r_6 = 2r_1,$$

y su área es $A(\Delta(O_1O_3O_6)) = \sqrt{r_1(r_2-r_6)r_6r_3}$.

Ahora bien, dado que los triángulos $\Delta O_1O_2O_6$ y $\Delta O_1O_3O_6$ tienen la misma altura entonces, sus áreas deben estar en proporción directa de sus bases y, por ello, se tiene que

$$\frac{A(\Delta(O_1O_2O_6))}{A(\Delta(O_1O_3O_6))} = \frac{\sqrt{r_1(r_3-r_6)r_6r_2}}{\sqrt{r_1(r_2-r_6)r_6r_3}} = \frac{O_1O_2}{O_1O_3} = \frac{r_1-r_2}{r_1-r_3} = \frac{r_3}{r_2} \tag{1.9}$$

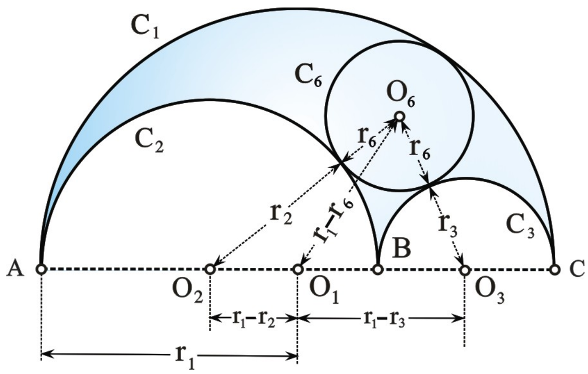

Figura 1.6

elevando al cuadrado se obtiene la expresión $\dfrac{(r_3-r_6)r_2}{(r_2-r_6)r_3} = \dfrac{r_3^2}{r_2^2}$, mediante la cual podemos despejar el valor de r_6, esto es

$$r_6 = \frac{r_2r_3(r_1+r_3)}{r_2^2+r_2r_3+r_3^2} \tag{1.10}$$

Ahora nos ocuparemos del área del arbelos. Para encontrar el área del arbelos solo es necesario encontrar el área de la media circunferencia C_1 y restarle al área de las dos medias circunferencias C_2 y C_3, así se obtiene que $A(\text{Arb}(ADCB) = \pi r_2r_3$; mientras que el área del corazón se obtiene sumando el área de las tres medias circunferencias C_1, C_2 y C_3, esto nos lleva a que $A(\text{Crz}(ABCM)) = \dfrac{\pi}{2}\left(r_1^2+r_2^2+r_3^2\right)$

Entonces, sólo nos resta, para probar el teorema de Bankoff, simplificar todo esto encontrando la razón entre los radios r_6 y r_1 , considerando que: $r_1 = r_2 + r_3$ se llega a la expresión

$$\frac{r_6}{r_1} = \frac{\dfrac{r_2r_3(r_2+r_3)}{r_2^2+r_2r_3+r_3^2}}{r_1} = \frac{\pi r_2r_3}{\dfrac{\pi}{2}(r_1^2+r_2^2+r_3^2)} \tag{1.11}$$

esto es: $r_1^2 + r + 2^2 + r_3^2 = 2(r_2^2 + r_2r_3 + r_3^2) \implies r_1^2 = r_2^2 + 2r_2r_3 + r_3^2$

Y con ello llegamos a que: $r_1^2 = (r_2 + r_3)^2$, lo que demuestra la veracidad de la ecuación 1.8,

$$\frac{r_6}{r_1} = \frac{r_1^2 - r_2^2 - r_3^2}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = \frac{A(\text{Arb}(ADCBA))}{A(\text{Crz}(ABCM)}$$

1.7 Arbelos Esférico

En el año 2016 el geómetra J. G. Mendieta, de la Universidad Autónoma de Guerrero, México, en su libro "Geometría, una reflexión infinita", Tomo I [5], generalizó la idea del arbelos, haciéndolo esférico. Ahí planteó la conjetura sobre la relación que guardan los volúmenes de las esferas involucradas, no obstante, no efectuó ninguna comprobación ni calculó al respecto y no respondió ninguna cuestión que ahí planteó.

Podemos considerar un arbelos esférico como el construido mediante tres medias esferas, E_1, E_2 y E_3, generadas por las tres medias circunferencias, C_1, C_2 y C_3 respectivamente que constituyen un arbelos plano. En esa forma, cada uno de los arcos de circunferencia se transforma en una media esfera para desembocar en un objeto tridimensional; figura 1.7.

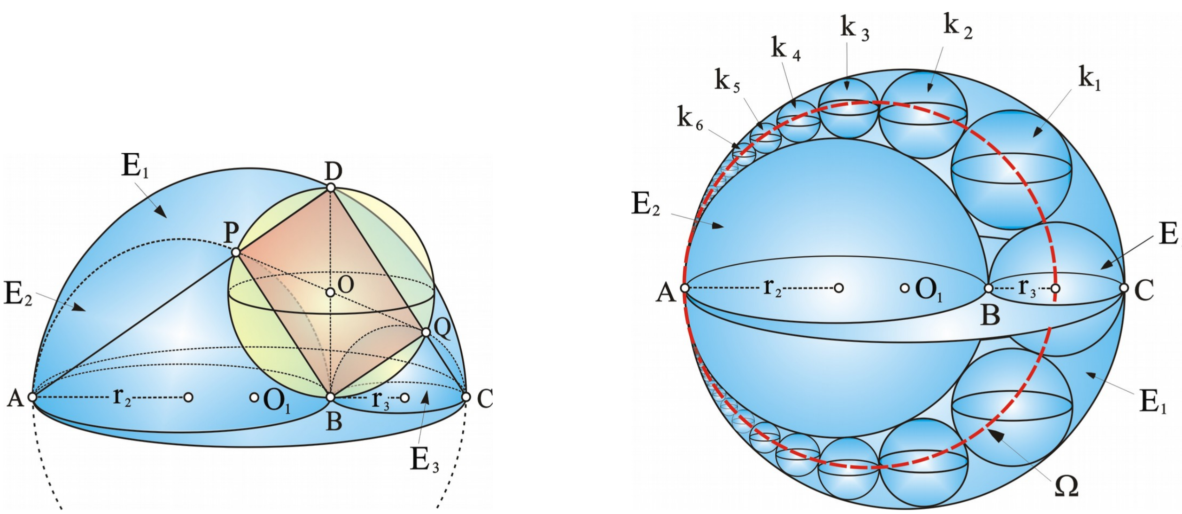

Figura 1.7: a).- En el arbelos esférico las esferas que lo constituyen son tangentes entre sí. b).- La Cadena de Pappus en el arbelos esférico. Cada esfera es tangente a cuatro esferas, sus vecinas.

El primer problema que se nos presenta a considerar es ¿Será siempre posible encontrar una esfera tangente a otras tres?. Luego nos asechan multitud de interrogantes: ¿Los teoremas que hacen referencia a las propiedades del arbelos se pueden generalizar a las esferas?, ¿La Cadena de Circunferencias de Pappus es ahora una Cadena de Esferas de Pappus?, ¿Tienen sus centros todas ellas en una elipse, o mejor dicho, en un elipsoide?. Y, por supuesto, al efectuar un corte a las esferas, a lo largo del diámetro que constituye al arbelos esférico, se debe llegar al caso del arbelos plano y, con ello, a todas sus propiedades conocidas, incluyendo el corazón de Bankoff. Sin embargo, al pasar de la dimensión dos a la tres parece que sólo es necesario agregar un número más, pero no es así, ahora las áreas se convierten en volúmenes y todo se complica mucho más.

1.8 Teorema de la esfera media en el arbelos esférico

Comencemos por considerar un arbelos esférico, $\text{Arb}_E(ADBC)$, formado por las medias esferas E_1, E_2 *y* E_3, tangentes entre sí, figura 1.7a, con radios respectivos r_1, r_2 *y* r_3, y tratemos de comprobar si la propiedad de la circunferencia media en el arbelos, Teorema 1.1, se generaliza a la esfera media en el arbelos esférico, considerando, además, que una esfera, $E(O,R)$, queda bien definida si se conoce su centro O y su radio R , esto es, ¿Será cierto que el volumen de la esfera de diámetro BD, es igual al volumen del arbelos esférico $ADCB$?, figura 1.7a, relación que representaremos mediante la ecuación siguiente,

Teorema 1.5

$$V(\text{Arb}_E(ADBC)) = V\left(E\left(O, \frac{DB}{2}\right)\right) \tag{1.12}$$

Quizá la primera impresión que se tiene de esta conjetura es que es cierta, para demostrarlo consideremos la ecuación 1.12 y con los radios de las esferas E_1, E_2 y E_3 encontremos los volúmenes correspondientes.

Para empezar calculemos el volumen $V(\text{Arb}_E(ADBC))$ del arbelos esférico, esto es:

$$V(\text{Arb}_E(ADBC)) = \frac{1}{2}\left[V\left(E\left(O_1, r_1\right)\right) - V\left(E\left(O_2, r_2\right)\right) - V\left(E\left(O_3, r_3\right)\right)\right]$$

$$V(\text{Arb}_E(ADBC)) = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi r_1^3 - \frac{4}{3}\pi r_2^3 - \frac{4}{3}\pi r_3^3\right] \tag{1.13}$$

Sin olvidar la relación que guardan los radios de las esferas, E_1, E_2 *y* E_3, es decir,

$$2r_1 = 2r_2 + 2r_3 \quad \text{o} \quad r_1 = r_2 + r_3$$

Tomando esto en cuenta se tiene que la ecuación 1.13 se convierte en

$$\frac{2}{3}\pi\left[(r_2+r_3)^3 - r_2^3 - r_3^3\right] = \frac{2\pi}{3}\left(r_2^3 + 3r_2^2 r_3 + 3r_2 r_3^2 + r_3^3 - r_2^3 - r_3^3\right) = 2\pi r_2 r_3\left(r_2 + r_3\right) \tag{1.14}$$

Es decir

$$V(\text{Arb}_E(ADBC)) = 2\pi r_2 r_3 (r_2 + r_3) \tag{1.15}$$

Ahora, por la propiedad demostrada para el arbelos en el plano, ecuación 1.3, se tiene que $DB = 2\sqrt{r_2 r_3}$, entonces el volumen $V\left(E\left(O, \frac{DB}{2}\right)\right)$ de la esfera $E\left(O, \frac{DB}{2}\right)$ con diámetro DB es

$$V\left(E\left(O, \frac{DB}{2}\right)\right) = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2\sqrt{r_2 r_3}}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi r_2 r_3 \sqrt{r_2 r_3} \tag{1.16}$$

Por lo tanto, la ecuación 1.12 se transforma en:

$$V(\text{Arb}_E(ADBC)) = V\left(E\left(O, \frac{DB}{2}\right)\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{3}\pi r_1^3 - \frac{2}{3}\pi r_2^3 - \frac{2}{3}\pi r_3^3 = \frac{4}{3}\pi r_2 r_3 \sqrt{r_2 r_3} \tag{1.17}$$

Que se reduce a $r_1^3 - r_2^3 - r_3^3 = 2r_2r_3\sqrt{r_2r_3}$, lo que no se ve nada fácil de simplificar, toda vez que hay potencias cúbicas y raíces cuadradas.

No obstante, antes de hacer una demostración general y de tratar de simplificar la ecuación 1.17 pensemos en un caso particular interesante, de tal manera que nos pueda indicar si vamos en la dirección correcta o si resulta ser un contraejemplo. Pensemos en un arbelos esférico, $\text{Arb}_E(ADBC)$, construido de tal forma que el radio de la esfera mayor, E_1, sea r_1 y los radios de las esferas interiores, E_2 y E_3, tangentes entre sí, sean $r_2 = r_3$, lo que nos lleva a que

$$r_1 = 2r_2 = 2r_3 \tag{1.18}$$

Entonces, el volumen del arbelos esférico $V(\text{Arb}_E(ADBC))$ es, según la fórmula 1.15 y utilizando la relación 1.18,

$$V(\text{Arb}_E(ADBC)) = 2\pi r_2r_3(r_2+r_3) = \pi r_2r_3(2r_2+2r_3) \quad = \quad \pi r_2r_3(r_1+r_1) = 2\pi r_1r_2r_3 = \frac{\pi r_1(2r_2)(2r_3)}{2} = \frac{\pi r_1^3}{2} \tag{1.19}$$

Por otro lado, de la ecuación (4) se sabe que: $DB = 2\sqrt{r_2r_3}$, y como $r_2 = r_3$ entonces se tiene que; $DB = 2\sqrt{r_2r_2} = 2r_2$ y, por ello, el volumen de la esfera con diámetro DB, de este caso, es

$$V(E(O,\frac{DB}{2})) = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{DB}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{r_1^3}{8} = \frac{\pi r_1^3}{6} \tag{1.20}$$

Entonces se tiene que $V(\text{Arb}_E(ADBC)) = \dfrac{\pi r_1^3}{2} \neq \dfrac{\pi r_1^3}{6} = V\left(E\left(O,\dfrac{DB}{2}\right)\right)$, es decir, el caso particular sirve de contra ejemplo y nos lleva a concluir que la propiedad de la circunferencia media en el arbelos, teorema 1.5, no se cumple como propiedad de la esfera media en el arbelos esférico.

1.9 Razón general entre el volumen de la esfera media y el arbelos esférico

Pero si la propiedad de la esfera media en el arbelos esférico no se cumple entonces: ¿qué relación guardan los volúmenes entre la esfera de diámetro DB y el arbelos esférico?, para ello dividiremos el volumen $V(Arb_E(ADBC)$ del arbelos esférico entre el volumen $V(E(O,DB/2))$ de la esfera de diámetro BD, considerando la relación que guardan los tres radios r_1, r_2 y r_3 de las esferas que lo constituyen. Así, retomando la ecuación 1.15, se tiene

$$V(Arb_E(ADBC)) = 2\pi r_2r_3\,(r_2+r_3)$$

Mientras que el volumen de la esfera $E\left(O,\dfrac{DB}{2}\right)$, de diámetro $DB = 2\sqrt{r_2r_3}$, según la ecuación 1.16, es $V\left(E\left(O,\dfrac{DB}{2}\right)\right) = \dfrac{4}{3}\pi r_2r_3\sqrt{r_2r_3}$. Entonces, efectuando la división entre las ecuaciones 1.15 y 1.16 se tiene el teorema

Teorema 1.6

$$\frac{V(Arb_E(ADBC)}{V(E(O,DB/2))} = \frac{2\pi\left(r_2r_3\left(r_2+r_3\right)\right)}{\dfrac{4}{3}\pi r_2r_3\sqrt{r_2r_3}} = \frac{3\left(r_2+r_3\right)}{2\sqrt{r_2r_3}} \tag{1.21}$$

Esta es la relación que se establece entre los volúmenes de arbelos esférico y la esfera media de diámetro DB.

Por ejemplo, como ya se ha visto, si $r_2 = r_3 = \dfrac{1}{2}r_1$ se tiene, sustituyendo valores en la ecuación 1.21, que $\dfrac{V(Arb_E(ADBC)}{V(E(O,DB/2))} = \dfrac{3\left(r_2+r_3\right)}{2\sqrt{r_2r_3}} = \dfrac{6r_2}{2r_2} = 3$, que es el mismo resultado que si se dividen las ecuaciones 1.19 y 1.20, esto es

$$\frac{V(Arb_E(ADBC)}{V(E(O,DB/2))} = \frac{\dfrac{\pi r_1^3}{2}}{\dfrac{\pi r_1^3}{6}} = 3. \tag{1.22}$$

Esta es una relación importante, primero porque hace ver que el teorema 1.5 de la esfera media en el arbelos esférico no se cumple y, segundo, porque determina la generalidad de la razón entre los volúmenes del arbelos esférico y la esfera media.

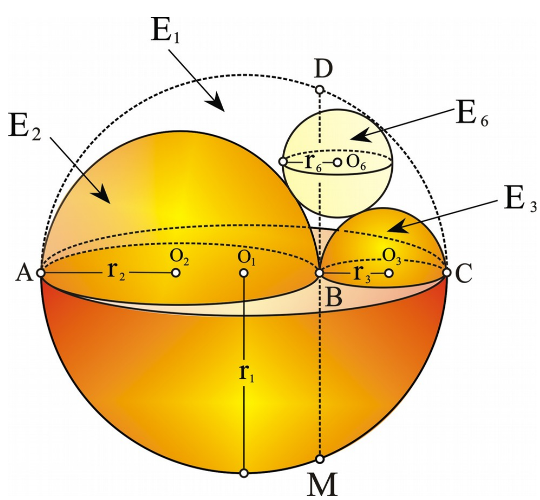

Figura 1.8

Ahora, consideremos un corazón tridimensional, figura 1.8, que denotaremos como $Crz_E(ADCB)$, aquel que se puede construir mediante los arcos de circunferencia que determinan un corazón en el plano, y que aquí llamaremos corazón esférico. esta es la generalización natural del corazón plano a la geometría espacial, entonces, inmediatamente nos viene a la mente el teorema de Bankoff, y así la cuestión surge ¿qué relación se cumple entre el corazón esférico y la esfera inscrita E_6 en el arbelos esférico?

Veamos si el teorema de León Bankoff se puede generalizar para el corazón esférico, esto es ¿será cierto que si r_6 es el radio de la esfera E_6 inscrita en el arbelos esférico y r_1 es el radio de la esfera E_1 entonces, la razón de los volúmenes del arbelos esférico y el corazón esférico está dada mediante la siguiente ecuación, teorema 1.6.

$$\frac{r_6}{r_1} = \frac{r_1^3 - r_2^3 - r_3^3}{r_1^3 + r_2^3 + r_3^3} = \frac{V(Arb_E(ADCBA))}{V(Crz_E(ABCM))} \tag{1.23}$$

Demostración. Se sabe, por la ecuación 1.13, que el volumen del arbelos esférico es

$$V(Arb_E(ADBC)) = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi r_1^3 - \frac{4}{3}\pi r_2^3 - \frac{4}{3}\pi r_3^3\right],$$

mientras que el volumen del corazón esférico es, sumando el volumen de las tres medias esferas E_1, E_2 y E_3,

$$V(Crz_E(ABCM)) = \frac{V(E_1)}{2} + \frac{V(E_2)}{2} + \frac{V(E_3)}{2} = \frac{2}{3}\pi\left(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3\right). \tag{1.24}$$

Entonces la ecuación 1.23 se transforma en $\dfrac{V(Arb_E(ADCBA))}{V(Crz_E(ABCM))} = \dfrac{\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi r_1^3 - \frac{4}{3}\pi r_2^3 - \frac{4}{3}\pi r_3^3\right]}{\frac{2}{3}\pi\left(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3\right)}$.

Que se simplifica a

$$\frac{V(Arb_E(ADCBA))}{V(Crz_E(ABCM))} = \frac{r_1^3 - r_2^3 - r_3^3}{r_1^3 + r_2^3 + r_3^3} \tag{1.25}$$

Pero resulta que la ecuación: $\dfrac{r_1^3 - r_2^3 - r_3^3}{r_1^3 + r_2^3 + r_3^3}$ no puede ser igual a la razón $\dfrac{r_6}{r_1}$; si lo fuera también se debería cumplir en el caso de que $r_2 = r_3$, ya que en ese caso: $r_1 = 2r_2 = 2r_3$ y, por ello la ecuación 1.25 se convierte en

$$\frac{r_1^3 - r_2^3 - r_3^3}{r_1^3 + r_2^3 + r_3^3} = \frac{(2r_2)^3 - r_2^3 - r_2^3}{(2r_2)^3 + 2r_2^3} = \frac{6r_2^3}{10r_2^3} = \frac{3}{5} \tag{1.26}$$

Ahora, se sabe que el radio de la esfera E_6 inscrita en el arbelos esférico es el mismo, por la ecuación 1.10, que el de la circunferencia C_6 en el arbelos plano, esto es $r_6 = \dfrac{r_2 r_3(r_2 + r_3)}{r_2^2 + r_2 r_3 + r_3^2}$ y, por ello, resulta que si $r_2 = r_3$ se tiene

$$r_6 = \frac{r_2 r_2(r_2 + r_2)}{r_2^2 + r_2 r_2 + r_2^2} = \frac{2r_2^3}{3r_2^2} = \frac{2}{3}r_2 \implies \frac{r_6}{r_1} = \frac{2}{3}\frac{r_2}{r_1}. \tag{1.27}$$

Pero entonces, si la ecuación 1.23 es cierta se debe cumplir en el caso $r_2 = r_3$, o sea, la ecuación 1.26 debe ser igual a la 1.27, es decir: $\dfrac{r_6}{r_1} = \dfrac{2}{3}\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{3}{5}$, lo que implica que $r_1 = \dfrac{5}{3}r_2$, y como, por hipótesis, $r_1 = 2r_2$, entonces: $2r_2 = \dfrac{5}{3}r_2 \implies 1 = \dfrac{5}{6}$, lo que resulta imposible y, por ello, la relación 1.23, para el arbelos esférico y el corazón esférico no se cumple para el valor de los radios $r_1 = 2r_2$. Es decir, el teorema 6 en el corazón de Bankoff tridimensional no se cumple.

1.10 Razón general entre volúmenes y radios en el arbelos esférico

Pero entonces, ¿qué relación existe entre el volumen, $V(Arb_E(ADBC))$, del arbelos esférico y el volumen, $V(Crz_E(ABCM))$, del corazón esférico?. Para ello sólo es necesario dividir sus volúmenes y así se tiene nuevamente la ecuación 1.25, no obstante la relación entre las ecuaciones 1.25 y r_6/r_1 resulta ser

$$\frac{\dfrac{V(Arb_E(ADCBA))}{V(Crz_E(ABCM))}}{\dfrac{r_6}{r_1}} = \frac{\dfrac{2\pi r_2 r_3\,(r_2+r_3)}{\dfrac{2}{3}\pi\,(r_1^3+r_2^3+r_3^3)}}{\dfrac{r_6}{r_1}} = \frac{\dfrac{2\pi r_2 r_3\,(r_2+r_3)}{\dfrac{2}{3}\pi\,(r_1^3+r_2^3+r_3^3)}}{\dfrac{r_2 r_3}{r_2^2+r_2 r_3+r_3^2}} \tag{1.28}$$

Lo que nos lleva, haciendo simplificaciones, a la ecuación siguiente teorema,

Teorema 1.7

$$= \frac{2\pi r_2 r_3\,(r_2+r_3)\,(r_2^2+r_2 r_3+r_3^2)}{r_2 r_3 \dfrac{2}{3}\pi(r_1^3+r_2^3+r_3^3)} = \frac{3\,(r_2+r_3)\,(r_2^2+r_2 r_3+r_3^2)}{(r_1^3+r_2^3+r_3^3)}. \tag{1.29}$$

Razón que debería ser 1 si $\dfrac{V(Arb_E(ADCBA))}{V(Crz_E(ABCM))}$ fuera igual a $\dfrac{r_6}{r_1}$. Por lo tanto, el teorema de Bankoff no aplica de igual forma en el arbelos esférico.

1.11 Conclusiones

El arbelos esférico es la natural generalización del arbelos en el plano; desde el momento que surge como generalización las preguntas también surgen en relación a si también son las propiedades del arbelos generalizadas, pero no es así. Aquí se han expuesto dos de ellas, la relación entre los volúmenes de la esfera media y el arbelos esférico y el teorema de Bankoff. La demostración ha consistido construir contraejemplos para refutar la veracidad de los teoremas. No se han utilizado métodos del análisis sino métodos algebraicos que enmarcan y resaltan los trabajos de Arquímedes. También se ha encontrado relaciones generales para la razón de la esfera media y el arbelos esférico, así como para la esfera inscrita en el arbelos esférico y el corazón de Bankoff.

Finalmente, esto muestra que las propiedades del arbelos esférico resultan muy distintas a las del arbelos en el plano y, quizá por ello, no se ha hecho una investigación más exhaustiva de ellas.

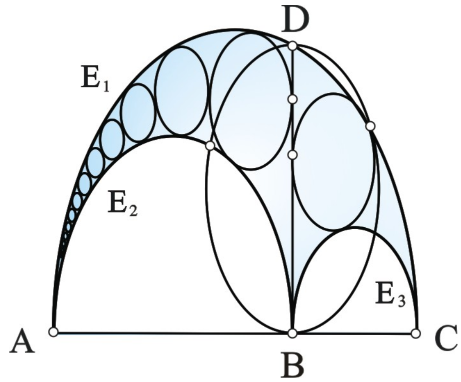

Figura 1.9: El arbelos elíptico, una generalización del arbelos.

Falta mucho por investigar y deducir muchas más propiedades, incluyendo la cadena de circunferencias de Pappus, que aquí llamamos cadena de esferas de Pappus y, más aún, generalizar el arbelos al el arbelos elíptico, que está constituido no por arcos de circunferencia, sino por arcos de elipse; y entonces, ¿cómo es una cadena elíptica de Pappus? y, más aún, al arbelos elipsoidal que es una generalización del arbelos elíptico en el espacio, cuando las elipses se convierten en elipsoides.

Bibliografía

[1] Dalcín, Mario. "Gemelas de arquímedes". Ed. Instituto de Profesores ?Artigas?, Departamento de Matemática de Formación Docente, Montevideo-Uruguay. 2012.

[2] Eves, Howard. *Estudio de las geometrías*. Tomo 1. Ed. Uteha. Méx. 1969.

[3] Guzmán Chiquiza, Wilson Alexander, Camilo Flórez Segura, Andrés. "Un Estudio sobre los lemas de arquímedes: desarrollo algebraico y dinámico". Ed. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. 2013.

[4] Heath, T. L. *El libro de los lemas*. Ed., The Works of Archimedes, pp. 301-318. Dover, USA. 1953.

[5] Mendieta, J, G. *Geometría, una reflexion infinita*, Tomo I pp. 417-428. Ed. Universidad Autónoma de Guerrero. Gro. Méx. 2016.

[6] Shively, Levi S. *Introduccion a la geometría moderna*. Ed. CECSA, México. 1984.