Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/
Vol 21, No 1. Setiembre – Febrero, 2021 ISSN 1659 -0643

Clasificaciones y construcción del concepto de discontinuidad puntual.

| Classifications and construction of the concept of punctual discontinuity |

Otilio B. Mederos
omederosa@gmial.com
Universidad Autónoma de Coahuila.
México

Carlos Negrón
carlos.negron@desoft.cu
Universidad de Holguín.
Cuba

José L. Sánchez
jlsanchezsantiesteban@gmil.com
Universidad Autónoma de Gurrero.
México

José M. Sigarreta
jlsanchezsantiesteban@gmil.com
Universidad Autónoma de Gurrero.
México

Recibido: 5 noviembre 2019 Aceptado: 5 Abril 2020

Resumen. En este trabajo se construye una organización del conocimiento escolar para la formación de los conceptos de continuidad y discontinuidad puntual, y de conceptos subordinados al concepto de discontinuidad puntual. Se utilizan con este objetivo, como herramienta, la operación clasificación de conceptos, sus reglas y tareas didácticas. Se realizan seis clasificaciones del concepto de discontinuidad puntual. La organización construida asociada a los contenidos escolares de continuidad y discontinuidad puntual puede utilizarse total o parcialmente según los requerimientos del programa en donde se aplique.

Palabras clave: Conocimiento escolar, clasificación de conceptos, tareas didácticas, continuidad y discontinuidad.

Abstract. An organization of school knowledge for the formation of concepts of continuity and discontinuity at a point, and of concepts subordinate to the concept of discontinuity at a point is constructed in this paper. It is used for this purpose, as a tool, the operation classification of concepts, it rules and didactic tasks. Six classifications related to concepts in study, were performed. The organization built can be used whole or in part according to the requirements of the program where applicable.

KeyWords: School knowledge, classification of concepts, learning tasks, continuity and discontinuity.

1.1 Introducción

Los conceptos del Cálculo Diferencial (CD) como procesos infinitos tienen características que los distinguen de los conceptos que se estudian en las asignaturas de matemáticas, de los niveles educativos anteriores al universitario que no tratan este tema. Las funciones reales de variable real, pueden ser localmente o globalmente crecientes; pero no puntualmente crecientes y pueden ser continuas puntualmente, localmente o globalmente. Las propiedades de un concepto con una de estas características, ya sea global o local, pueden diferir. A título de ejemplo, existen funciones continuas en un solo punto de su dominio que no pueden trazarse "sin levantar el lápiz del papel": $g(x) = xf(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

El objetivo de este trabajo es mostrar la utilidad de la operación clasificación de conceptos, sus reglas y tareas didácticas en la construcción de los conceptos de continuidad y discontinuidad puntual. En este sentido se supone para ello que se conocen los conceptos de continuidad y discontinuidad puntual.

1.2 Antecedentes sobre conceptos

Ausubel, et al., (2000), plantea que los conceptos constituyen un aspecto importante de la teoría de asimilación debido a que la comprensión y la resolución significativa de problemas dependen en gran parte de la disponibilidad en la estructura cognoscitiva del alumno, tanto de conceptos supra ordinados (en la adquisición inclusiva de conceptos) como de conceptos subordinados (en la adquisición supra ordinada de conceptos).

Definición de concepto

En este epígrafe analizamos algunas definiciones del concepto de concepto que nos conducen a la definición que utilizaremos en este artículo. Ausubel y otros (2000) definen los conceptos como objetos, acontecimientos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterios y que están diseñados en cualquier cultura dada mediante algún signo o símbolo aceptado. En esta definición hay dos elementos que consideramos muy importantes: los atributos de criterios y la utilización de signos o símbolos para designarlos. Los conceptos son las estructuras mentales mediante las que representamos categorías significativas. Objetos o hechos concretos se agrupan sobre la base de similitudes que se perciben entre ellos; los que «encajan» en la categoría son ejemplos del concepto; los que no encajan son no-ejemplo (Bruning y Schraw, 2006, p.53). Un interesante planteamiento sobre la importancia de encontrar lo que hay de semejante y diferente entre los objetos de la "extensión" de los conceptos es el siguiente:

> "La idea que se tiene de un objeto sólo constituye un concepto siempre y cuando que, gracias a ella, podamos distinguir lo que hay en el objeto de semejante a los objetos que le son distintos y lo que hay de diferente en relación con los objetos que se le asemejan" (Gorski y otros, s.f. p.38). (p. 267)

En este artículo consideramos que un concepto es un modelo mental generalizado de determinados rasgos o propiedades de objetos, o relaciones entre objetos, agrupados en una clase; así como de los objetos con esas características agrupados en otra clase. Se denominan propiedades esenciales de un concepto a características de los objetos modelados en el mismo, cada una de las cuales es necesaria y todas en conjunto suficientes para distinguir los objetos que corresponden al concepto de los demás.

Un conjunto de propiedades esenciales de los objetos conocidos del concepto, que sea suficiente para distinguir los nuevos objetos del concepto, constituye su contenido. La extensión de un concepto es la clase (conjunto) de los objetos que dicho concepto abarca. Consideramos que un objeto de un concepto del CD es una colección, que puede ser unitaria, de representaciones de una función que satisfacen las propiedades del contenido.

En este trabajo se indican los conceptos por el par (E, C), o simplemente por E cuando no haya dudas; donde E indica a la extensión y C al contenido del concepto. Pueden encontrarse diferentes colecciones C de propiedades que sólo cumplen los objetos (elementos) de E, por lo que es usual indicar el contenido por la colección de propiedades $\{p_i\}_{i\in l}$ que se haya escogido, donde I es un conjunto de índices. Obsérvese que un objeto x pertenece a la extensión de un concepto (E, C), si y sólo si cumple simultáneamente todas las propiedades $p_i, i \in l$ de su contenido, o lo que es lo mismo, si cumple la propiedad única $\wedge_{i\in l} p_i$.

El proceso de formación de un concepto

Con respecto al proceso de formación de conceptos es importante tener en cuenta que la investigación plantea que el ascenso hasta la formación del concepto se efectúa a través de tres fases básicas, dividida cada una a su vez en varias etapas (Vygotsky, 1968, p. 75).

En los Capítulos IV y V del libro escrito por Pozo (1999) se presenta un conjunto de resultados sobre la formación de conceptos artificiales y de conceptos naturales, respectivamente. En nuestro trabajo se considera que un concepto se ha formado cuando se cumplen las condiciones siguientes:

1. Se ha determinado una clase C de propiedades esenciales que llamaremos contenido del concepto y que caracterizan a sus objetos.

2. Se han construido objetos que satisfacen las propiedades esenciales y objetos que no satisfacen al menos una de estas propiedades.

3. Se han agrupado en otra clase E, que hemos denominado la extensión del concepto, todos los objetos que satisfacen las propiedades de C.

4. Se utiliza un símbolo lingüístico para designar al par (E, C), asociado al concepto; y se realiza una definición del mismo.

En este trabajo se ejemplifican las Tareas 1, 3 y 4. Cuando en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un concepto matemático se parte de una definición, es necesario que se diseñen actividades para que los estudiantes comprendan que el concepto consta de contenido y de extensión; y que, además, la operación definición establece una relación de subordinación del concepto definido con el concepto de partida. Para mayor información sobre el proceso de formación de conceptos matemáticos, vías para su realización y acciones útiles para que los estudiantes participen en el mismo; recomendamos el Capítulo III del libro escrito por Mederos y otros (2014).

Teorías sobre la forma en que se adquieren los conceptos

El análisis de un concepto está en función de la teoría que se tome como base; ya sea asociada con sus características y/o atributos o en su relación con otros conceptos. Existen diferentes teorías sobre cómo se adquieren los conceptos, entre ellas las probabilísticas desarrolladas, fundamentalmente, por Wattenmaker (1986) y Rosch (1978) y la visión clásica desarrollada por Bourne (1982, 1985) que sustenta esta investigación, centrada en el estudio del concepto sobre la base de un conjunto de características necesarias y suficientes del objeto y una extensión bien delimitada. En la visión denominada probabilística; no están bien delimitados los atributos necesarios y suficientes (contenido del concepto) que permiten definir el objeto, ni los objetos que pertenecen a su extensión, en dicho sentido se está en presencia de una estructura difusa.

Cabe destacar, que sin importar la teoría que se tome como base de estudio todas coinciden en entender el concepto como una representación mental del objeto. De manera general se puede plantear que la teoría probabilística, asevera que el conocimiento se adquiere por mecanismos asociativos, dándole un peso importante al proceso de abstracción. En tal dirección, los conceptos se construyen a través del reconocimiento de similitudes entre objetos. La Teoría de Prototipos elaborada por Rosch (1978), asume como prototipo al objeto más representativo de una determinada clase, como aquel que comparte la mayor cantidad de atributos con el resto de miembros de dicha categoría; así mismo las clases tienen límites difusos, en los que se encontrarían los miembros de alguna otra clase. Así mismo, Wittgenstein (año) asevera que la pertenencia de un elemento a determinada categoría, es más o menos probable, dependiendo de los rasgos que comparta con los miembros más representativos de ella.

En la Teoría de Bourne, (1982, 1985), se analiza un determinado concepto como aquella categorización de objetos y de sucesos sobre la base de rasgos y de relaciones que, o bien son comunes a los objetos percibidos, o bien son juzgados así por el individuo. Además, la pertenencia a una clase conceptual se determina aplicando un conjunto de reglas, que se pueden aprender mediante la instrucción o la experiencia de ejemplos positivos (los que cumplen las reglas) o negativos (los que incumplen, al menos, una regla).

En Bourne, Ekstrand y Domonowski (1978), se define un concepto como: "…cualquier regularidad de eventos u objetos reales o imaginarios, que se pueda describir. Podemos decir que una persona entiende un concepto cuando puede identificar y emplear ejemplos de la regularidad en forma apropiada a sus circunstancias". (p.221).

En diferentes disciplinas pueden utilizarse con éxito diferentes teorías como fundamento teórico del proceso de formación de un concepto. En matemáticas la utilización de la teoría regida por reglas, parece ser la que más facilita la utilización del aparato lógico deductivo para determinar nuevas propiedades de los conceptos.

La operación definición de conceptos

La definición es quizás la operación conceptual que más se utiliza en el trabajo científico y en nuestra vida. La operación definición científica sobre la colección de conceptos definidos o primarios parte de un concepto (E, C), que llamaremos concepto de partida de la definición, y considerando una colección de propiedades C_1 que sólo satisfacen los elementos de una sub-colección propia E_1 de E, se obtiene un nuevo concepto (E_1, C_1) definido a partir de (E, C).

Utilizando un lenguaje menos simbólico, podemos asegurar que en toda definición científica se resuelven dos problemas cognitivos:

a) Se determina un conjunto de rasgos esenciales que caracteriza a los elementos de la extensión del concepto definido.

b) Se fija su extensión, lo que permite diferenciar sus elementos del resto de los elementos del conjunto de partida.

Cuando la definición o la clasificación son el punto de partida del proceso de formación, entonces hay que construir objetos de la extensión del concepto de partida que cumplan, y objetos que no cumplan, las propiedades del contenido del concepto definido. El estudio de un concepto después de definido o clasificado hay que dirigirlo tanto a la ampliación del número de propiedades de los elementos, como del número de objetos conocidos, de su extensión. Constituye un error didáctico y metodológico dar prioridad al estudio de una de estas dos características lógicas una vez que se ha definido un concepto, o que sea el resultado de una clasificación.

La operación clasificación de conceptos

Para el estudio de muchos conceptos es necesario realizar una o varias clasificaciones con el objetivo de obtener una o varias particiones de la extensión del concepto que se clasifica, poder realizar un estudio más profundo de cada una de esas partes y obtener más y mejor información de la extensión del concepto que se clasifica. En este trabajo tomamos la definición de la operación clasificación de conceptos siguiente:

> Dado un concepto (E, C) y un conjunto de colecciones P_i de propiedades de elementos de E, $P_i = \{p_{ij} : i \in I, j \in J_i\}$, donde I y J_i son conjuntos; la colección de propiedades $P = \{P_i : P_i = \wedge_{j\in_i} p_{ij}\}$, se llama criterio de clasificación de (E, C) si, y sólo si, la colección de conceptos (E_i, C_i), donde $C_i = \{P_i, i \in I\}$, es tal que $\{E_i : i \in I\}$, es una partición de E. Dado el criterio de clasificación $P = \{P : i \in I\}$, la operación que asocia al concepto (E, C) la colección de conceptos $\{(E_i, C_i)\}$ se denomina clasificación de (E, C) según el criterio P. Mederos y Ruiz, (2007, p. 38)

En el presente trabajo llamamos también clasificación de (E, C) según el criterio P a la colección $\{(E_i, C_i)\}_{i\in I}$ y ampliamos la definición anterior aceptando que las propiedades P_i estén definidas por combinaciones de conjunciones y disyunciones de propiedades p_{ij}.

Otras dos operaciones conceptuales muy importantes son la generalización y la restricción. En Mederos y Roldán (2013) puede verse la estrecha relación que existe entre las operaciones clasificación y generalización.

Reglas para la operación clasificación

Las reglas básicas que se deben cumplir al realizar la operación clasificación consideramos que son las siguientes:

a) La clasificación debe realizarse partiendo de un solo criterio P.

b) Se debe comprobar que $E = \cup\{E_i : i \in l\}$

c) Se debe cumplir que $E_j \cap E_k = \emptyset$ para todo j de $I \setminus \{k\}$ y para todo k de I.

d) La clasificación debe ser proporcionada.

e) La clasificación debe realizarse sin saltos.

f) Determinación de un criterio óptimo.

Se considera que una clasificación es desproporcionada cuando la cardinalidad de algunos E_i coincide con la de E y la de otros E_i es menor. Como el propósito fundamental de una clasificación es construir una partición $\{E_i :\in l\}$ de E para realizar un estudio más profundo de cada E_i y por lo tanto de E, cuando la clasificación es desproporcionada lo aconsejable es realizar clasificaciones de los conceptos (E_i, C_i) en los que los cardinales de E_i y de E coinciden.

Ocurren saltos cuando se realiza una primera clasificación, posteriormente se ejecuta la clasificación de algunos conceptos que surgen a partir de ésta y se presentan todos los conceptos obtenidos en ambas, como resultado de una sola clasificación.

La clasificación de un concepto debe hacerse de tal forma que el criterio que se tome para realizarla, sea el más útil para determinar las propiedades de los elementos de cada una de las subclases en que quede dividida la extensión del mismo. Sin embargo, esto en la práctica no resulta fácil, por lo que en muchos casos se realizan varias clasificaciones de un mismo concepto.

Tareas didácticas concernientes a la clasificación de conceptos

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se pueden presentar distintos tipos de tareas, relativas a la clasificación de conceptos, entre las cuales están las siguientes:

1. Se tiene un concepto (E, C) y un criterio de clasificación P. Se quiere construir la colección de conceptos $\{(E_i, C_i)\}_{(i \in I)}$ que resulta de la clasificación de (E, C) mediante el criterio P.

2. Se tienen un concepto (E, C), un criterio P y la colección de conceptos $\{(E_i, C_i)\}(i \in I)$ que se obtiene de (E, C) mediante la clasificación según P:

   a) Dado un elemento x de E, se quiere determinar el concepto (E_k, C_k) de esta colección tal que $x \in E_k$

   b) Se pretende construir colecciones de elementos de E_i para cada i de I. En el caso de conceptos del CD las colecciones deben ser infinitas.

3. Se tiene un concepto (E, C), un criterio P y una clasificación de (E, C) según el criterio P. Se quiere realizar una clasificación de, al menos, uno de los conceptos resultantes de la clasificación de (E, C).

4. Se tienen un concepto (E, C) y una colección de propiedades $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ de los elementos de E. Se quiere obtener un criterio P a partir de esta colección para clasificar a (E, C).

5. Se tiene un concepto (E, C). Se desea realizar una o varias clasificaciones de (E, C), pero no se tiene un criterio, ni se ha determinado una colección de características de elementos de E a partir de las cuales éste se pueda obtener.

6. Construir representaciones simbólicas y gráficas de las extensiones del concepto que se clasifica y de los conceptos que resultan de la clasificación.

En la revisión de libros de texto de diferentes niveles de educación, se observa que por lo general los ejercicios y problemas que se proponen en relación con la clasificación, corresponden sólo a las Tareas 1, 2.1 y 3. El análisis de en qué nivel de educación deben realizarse las restantes tareas se sale del alcance de este artículo, pero lo que sí es cierto, es que los profesores y profesoras, deben conocerlas para poder desarrollar la actividad de enseñanza.

En la Sección 3 y en cada uno de los Epígrafes 4.1-4.5 se comienza determinando una colección de propiedades, a partir de las cuales se construye un criterio para clasificar un concepto, por lo que se da cumplimiento a tareas del tipo 4 y 5; y como se realiza la clasificación con el criterio construido se da cumplimiento a tareas del tipo 1. En cada uno de los Epígrafes 4.2-4.5 se realiza la clasificación de uno de los conceptos construidos con las clasificaciones realizadas en 4.1-4.4, de esta forma se da cumplimiento a una tarea del tipo 3. Al final de cada uno de los epígrafes de la Sección 4 se construye una representación simbólica y una representación gráfica de las extensiones de los conceptos correspondientes a la clasificación clasificada en este epígrafe, con lo que se da cumplimiento a una tarea del tipo 6. Actualmente está en fase de terminación un artículo, continuación natural del presente, en el que se da cumplimiento a tareas del tipo 2.

1.3 Definición de los conceptos de continuidad y discontinuidad puntual

Esta sección consta de dos epígrafes, en los que se definen los conceptos de continuidad y discontinuidad puntual, respectivamente; dando solución a los problemas cognitivos a) y b) del Epígrafe 1.4. Se construyen rigurosamente las extensiones y los contenidos de estos dos conceptos y del concepto de partida de los mismos. Las definiciones de los conceptos de continuidad y discontinuidad puntual pueden utilizarse como puntos de partida de los procesos de formación de los mismos, lo cual no hacemos porque no está contemplado en los objetivos de este trabajo.

Definición del concepto de continuidad puntual

Definición 1.1

Se dice que f es continua en un elemento a de su dominio si y sólo si se cumplen las dos condiciones:

c_1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ es un número real L.

c_2) $L = f(a)$.

Sean B la colección de todos los subconjuntos A de $\mathbb{R}$ de los cuales a es un elemento, o sea $B = \{A \subset \mathbb{R} : a \in A\}$, y $F(a)$ la colección de todas las funciones reales de variable real definidas en a, $F(a) = \cup_{A\in B} F(A)\}$. Notemos que $F(a)$ es la extensión del concepto de partida de la Definición 1. El contenido del concepto de función continua en un elemento a de $\mathbb{R}$ es el conjunto formado por las propiedades c_1 y c_2. La extensión de este concepto, que indicamos por $C(a)$, es la colección de elementos de $F(a)$ que satisfacen las propiedades del contenido. El concepto de continuidad en el punto a se indica por $(C(a), \{c_1, c_2\})$ y cuando no dé lugar a confusión utilizaremos $C(a)$.

Nótese que toda función definida en un punto aislado es continua en dicho punto, una manera inmediata de verlo, por ejemplo es utilizando la definición según Haine:

$\forall x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$, como x es un punto aislado, la premisa de esta implicación no ocurre, por lo que la proposición es siempre válida, la función es continua en el punto (para más información ver Dolores, Nolasco, Mederos y Sigarreta, 2016). Por lo tanto, el estudio de la continuidad y de la discontinuidad de los elementos de $F(a)$ se reduce a los casos en que a es un punto de acumulación de su dominio. La colección de todos los puntos de acumulación de un conjunto A se indica por $\overline{A}$.

Definición del concepto de discontinuidad puntual

Definición 1.2

Un elemento f de $F(a)$ tal que a es un punto de acumulación de su dominio A, o sea $a \in A \cap \overline{A}$, se dice que es discontinua en a si y sólo si cumple una de las dos propiedades siguientes:

d_1) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ es un número real l y $l \neq f(a)$.

d_2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no es un número real.

El contenido del concepto de función discontinua en un punto de acumulación a de su dominio es el conjunto $\{d_1, d_2\}$. La extensión de este concepto, que denotamos por $\Delta(a)$, es la colección de los elementos de $F(a)$ que pertenecen a $\cup_{A \in B_i} F(A)$, donde $B_1 = \{a \in A \cap \overline{A}. : A \subset \mathbb{R}\}$, y que satisfacen la propiedad del contenido.

Observaciones:

1. Se ha definido la discontinuidad de funciones $f : A \to \mathbb{R}$ sólo para elementos a de $A \cap \overline{A}$, porque f es continua en todo elemento de $A/\overline{A}$ y en los elementos de $\mathbb{R}/A$ no tiene sentido analizar la continuidad ni la discontinuidad de f.
2. La propiedad d_1 de la definición 2 equivale a la propiedad $c_1 \wedge c'_2$
3. La propiedad $\{d_2\}$ es equivalente a c'_1.
4. El contenido del concepto de discontinuidad puntual coincide con el conjunto unitario $\{c'_1 \vee (c_1 \wedge c_2)\}$

1.4 Clasificación del concepto de función con extensión F(a)

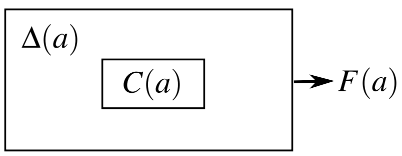
En esta sección se dará cumplimiento a una tarea del tipo 1 construyendo una clasificación del concepto de función real de variable real con extensión $F(a)$. Tomamos como criterio de clasificación la propiedad de continuidad en a y su negación; o sea, el criterio $\{c, c'\}$ donde c es la propiedad $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Los elementos de $F(a)$ que satisfacen la propiedad $c(c')$ son los elementos de$C(a)(\Delta(a))$.

Sea $c = c_1 \wedge c_2$ y $c' = c'_1 \vee (c_1 \wedge c'_2)$

La colección $\{(C(a), \{c\}), (\Delta(a), \{d\})\}$, donde $d = c' = d_1 \vee d_2$, es la clasificación que resulta de aplicar el criterio de clasificación $\{c, d\}$ a $F(a)$. De esta forma se da cumplimiento a una tarea del tipo 1. Consecuentemente, se tienen las notaciones simbólica y gráfica de las extensiones que se muestran en la Figura 1.1.

$$C(a) \cap \Delta(a) = \varnothing$$
$$C(a) \cup \Delta(a) = F(a)$$

(a.) Representación simbólica



(b.) Representación gráfica

Figura 1.1: Representaciones que resultan de la aplicación del criterio $\{c, d\}$.

Para completar la formación de estos conceptos es suficiente construir conjuntos de objetos de sus extensiones respectivas, lo cual se realizará en un trabajo posterior.

1.5 Varias clasificaciones relacionadas con el concepto de discontinuidad puntual

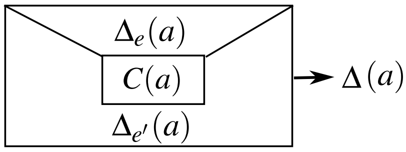
Esta sección se divide en cinco epígrafes, en cada uno de los tres primeros y en el quinto se realiza la clasificación de un concepto en dos nuevos conceptos. En el cuarto epígrafe se realiza una clasificación del concepto de discontinuidad puntual en varios conceptos.

Clasificación del concepto de función discontinua en un punto

En este epígrafe se clasifica el concepto de la función real de variable real discontinua en a, tomando como criterio la propiedad de discontinuidad evitable y su negación, es decir el conjunto $\{d_1, d_2\}$. Los elementos de $\Delta(a)$ que satisfacen la propiedad d_1 se dice que tiene discontinuidad evitable y su extensión se indica por $\Delta_e(a)$. Los elementos de $\Delta(a)$ que no satisfacen la propiedad d_1, equivalentemente que satisfacen la propiedad d_2, se dice que tienen discontinuidad no evitable y su extensión se indica por $\Delta_{e'}$. La colección de conceptos $\{(\Delta_e(a), \{d_1\}), (\Delta_e(a), \{d_2\})\}$ es la clasificación que se obtiene de la aplicación del criterio de clasificación $\{d_1, d_2\}$ al concepto $\Delta(a)$, que es uno de los conceptos que resultan de la clasificación realizada en la Sección 3.

Las representaciones simbólicas y gráficas de las extensiones $\Delta(a), \Delta_e(a)$ y $\Delta_{e'}(a)$ se muestran en la Figura 2.

$$\Delta_e(a) \cap \Delta_{e'}(a) = \varnothing$$
$$\Delta_e(a) \cup \Delta_{e'}(a) = \Delta(a)$$



(a.) Representación simbólica (b.) Representación gráfica

Figura 1.2: Representaciones que resultan de la aplicación del criterio $\{d_1, d_2\}$.

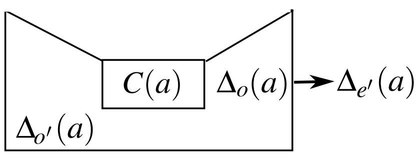
Clasificación del concepto de función con discontinuidad no evitable

Sea $d_3 = d_{31} \wedge d_{32} \wedge d_{33}$, donde por d_{31}, d_{32}, d_{33} se indican las propiedades $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l_i, l_i \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l_d, l_d \in \mathbb{R}$ y $l_i \neq l_d$ respectivamente. Tomando el criterio $\{d_3, d'_3?\}$ para clasificar el concepto $\Delta_{e'}(a)$, los elementos que satisfacen d_3 se dice que tienen una discontinuidad ordinaria o de primera clase. Estas funciones reciben también el nombre de funciones con salto finito $||l_d - l_i|$. Los elementos de $\Delta_{e'}(a)$ que satisfacen la propiedad $d'_3 = d'_{31} \vee d'_{32}$ reciben el nombre de funciones con una discontinuidad no ordinaria o de segunda clase en a. Obsérvese que la otra variante de negación de d_3 es $d_{31} \wedge d_{32} \wedge (l_i = l_d)$ que corresponde a las funciones continuas. Por lo tanto, la única variante de negación de d_3 en $\Delta_{e'}(a)$ es $d'_3 = d'_{31}? \vee d'_{32}$.

Las extensiones de los conceptos de función con una discontinuidad ordinaria y de función con una discontinuidad no ordinaria se indican por $\Delta_0(a)$ y por $\Delta_{0'}(a))$ (a), respectivamente. La colección de conceptos $\{(\Delta_0(a), \{d_3\}), (\Delta_{0'}(a), \{d'_3\})\}$ es la clasificación que resulta de aplicar el criterio $\{d_3, d'_3\}$. Hemos dado cumplimiento a una tarea del tipo 3.

Las representaciones simbólicas y gráficas de las extensiones $\Delta_{e'}(a), \Delta_0(a)$ y $\Delta_{0'}(a)$ aparecen en la Figura 1.3.

$$\Delta_o(a) \cap \Delta_{o'}(a) = \varnothing$$
$$\Delta_o(a) \cup \Delta_{o'}(a) = \Delta_{e'}(a)$$



(a.) Representación simbólica (b.) Representación de extensiones

Figura 1.3: Representaciones que resultan de la aplicación del criterio $\{d_3, d'_3\}$.

Clasificación del concepto de función con discontinuidad no ordinaria

Sea $S = \{-\infty, +\infty\}$, entonces los elementos de $\Delta_{0'}(a)$ satisfacen la propiedad

$$d'_3, d'_3 = d'_{31} \vee d'_{32}, d'_{31} = (d'_{31})_1 \vee (d'_{31})_2 \quad \text{y} \quad (d'_{32})_1 \vee (d'_{32})_2$$

donde

$$(d'_{31})_1 = \lim_{x \to a^-} f(x) \in S, \quad (d'_{31})_2 = \lim_{x \to a^-} f(x) \notin S \cup \mathbb{R}$$
$$(d'_{32})_1 = \lim_{x \to a^+} f(x) \in S, \quad (d'_{32})_2 = \lim_{x \to a^+} f(x) \notin S \cup \mathbb{R}$$

Indiquemos por d_{42} y d_{41} las propiedades

$$\left[d_{31} \wedge (d'_{32})_2\right] \vee \left[(d'_{31})_1 \wedge (d'_{32})_2\right] \vee \left[(d'_{31})_2 \wedge d_{32}\right] \vee \left[(d'_{31})_2 \wedge (d'_{32})_1\right] \vee \left[(d'_{31})_2 \wedge (d'_{32})_2\right]$$

y

$$\left[d_{31} \wedge (d'_{32})_1\right] \vee \left[(d'_{31})_1 \wedge d_{32}\right] \vee \left[(d'_{31})_1 \wedge (d'_{32})_1\right];$$

entonces $d_4 = d_{41} \vee d_{42}$

Tomando el conjunto $\{d_{41}, d_{42}\}$ como criterio de clasificación del concepto $\Delta_{0'}(a)$, los elementos de $\Delta_{0'}(a)$ que satisfacen la propiedad d_{41} se denominan funciones con discontinuidad infinita y los que satisfacen d_{42} reciben el nombre de funciones esencial en el punto a. Las extensiones de los conceptos correspondientes las indicamos por $\Delta_\infty(a)$ y $\Delta_{es}(a)$, respectivamente. Resulta que la colección $\{(\Delta_\infty(a), \{d_{41}\}), (\Delta_{es}(a), \{d_{42}\})\}$ constituye una clasificación del concepto de función con discontinuidad no ordinaria. En la Figura 1.4 se presentan las representaciones simbólicas y gráficas de las extensiones de los conceptos de esta clasificación.

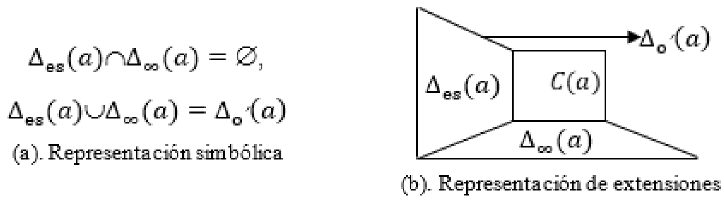


Figura 1.4: Representaciones que resultan de la aplicación del criterio $\{d_{41}, d_{42}\}$.

Clasificación del concepto de función discontinua con otro criterio

Comenzamos esta sección seleccionando un conjunto de propiedades a partir de las cuales construiremos otro criterio para clasificar el concepto de función discontinua en a. Utilizando el criterio $\{d_1, d_3, d_{41}, d_{42}\}$ para clasificar $\Delta(a)$ se obtiene la clasificación $\{(\Delta_e(a), \{d_1\}), (\Delta_0(a), \{d_3\}), (\Delta_\infty(a), \{d_{41}\}), (\Delta_{es}(a),$
La Figura 1.5 muestra las representaciones simbólicas y gráficas de las extensiones de esta clasificación.

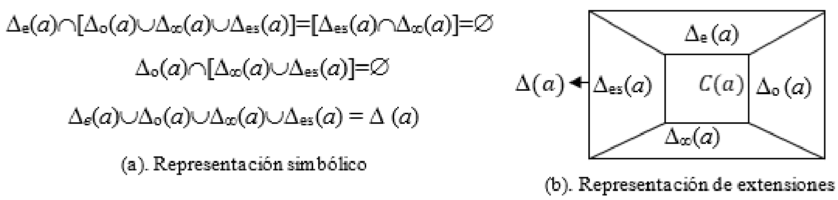


Figura 1.5: Representaciones que resultan de la aplicación del criterio $\{d_1, d_3, d_{41}, d_{42}\}$.

Utilizando los resultados de la clasificación realizada en la Sección 1.4 y en este epígrafe se puede clasificar el concepto $F(a)$ en los conceptos $C(a), D_e(a), D_o(a), D_\infty(a)$ y $D_{es}(a)$. Procediendo de forma similar se pueden construir otras clasificaciones de los conceptos $D_{e'}(a)$ y $D_{0'}$.

Clasificación del concepto de función con discontinuidad infinita

Indiquemos por d_5 la propiedad

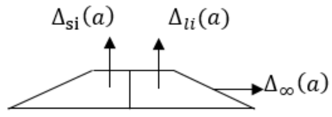
$$|\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x)| = +\infty$$

El concepto $\Delta_\infty(a)$ se clasifica por medio del criterio $\{d_5, d_5'\}$ en los conceptos $(\Delta_{si}(a), \{d_5\})$ y $(\Delta_{li}(a), \{d_5'?\})$ de función con salto infinito y función con límite infinito en a, respectivamente. Las extensiones de estos dos conceptos forman una partición de la extensión $\Delta_\infty(a)$. Las Representaciones simbólicas y gráficas de las extensiones de esta clasificación se muestran en la Figura 1.6.

$$\Delta_{si}(a) \cap \Delta_{li}(a) = \emptyset$$

$$\Delta_{si}(a) \cup \Delta_{li}(a) = \Delta_\infty(a)$$

(a). Representación simbólico



(b). Representación de extensiones

Figura 1.6: Representaciones que resultan de la aplicación del criterio $\{d_5, d_5'\}$.

Al terminar cada una de las clasificaciones que se realizan en esta sección se está en condiciones de completar un proceso de formación de los conceptos subordinados que resultan de las mismas. En la Tabla 1.1 se presenta un resumen de los conceptos resultantes de las clasificaciones realizadas en esta sección con sus descripciones simbólicas respectivas.

Tabla 1.1: Conceptos subordinados al concepto de discontinuidad puntual

Conceptos subordinados al concepto de discontinuidad puntual	
Concepto de función con discontinuidad	Descripción simbólica
En a	$(\Delta(a), \{d\}), d = c' = c_1' \vee c_2' = d_1 \vee d_2, d_1 = c_1 \wedge c_2'$ y $d_2 = c_1'$ $c_1 : \lim_{x\to a} f(x)$ es un número real $l, c_2 : l = f(a)$ $d_1 : \left(\lim_{x\to a} f(x) = l, l \in \mathbb{R}\right) \wedge (l \neq f(a)), d_2 : \lim_{x\to a} f(x) \notin \mathbb{R}$
Evitable en a	$\Delta_e(a), \{d_1\}, d_1 : (\lim_{x\to a} f(x) = l, l \in \mathbb{R}) \wedge (l \neq f(a))$
No evitable en a	$(\Delta_{e'})(a), \{d_2\}), d_2 : \lim_{x\to a} f(x) \notin \mathbb{R}$
Ordinaria en a	$(\Delta_0(a), \{d_3\}), d_3 = d_{31} \wedge d_{32} \wedge d_{33}, d_{31} : \lim_{x\to a^-} f(x) = l_i \in \mathbb{R}?$ $d_{32} : \lim_{x\to a^+} f(x) = l_d \in \mathbb{R}$ y $d_{33} : l_i \neq l_d$
No ordinaria en a	$(\Delta_{0'}(a), \{d_3'\}), d_4 = d_3' = d_{31}' \vee d_{32}', d_{31}' = (d_{31}')_1 \vee (d_{31}')_{2'}$ $d_{32}' = (d_{32}')_1 \vee (d_{32}')_{2'}, S = \{-\infty, +\infty\},$ $(d_{31}')_1 : \lim_{x\to a^-} f(x) \in S, (d_{31}')_2 : \lim_{x\to a^-} f(x) \notin S \cup \mathbb{R},$ $(d_{32}')_1 : \lim_{x\to a^+} f(x) \in S, (d_{32}')_2 : \lim_{x\to a^+} f(x) \notin S \cup \mathbb{R},$
Infinita en a	$(\Delta_\infty(a), \{d_{41}\}), d_{41} = \left[d_{31} \wedge (d_{32}')_1\right] \vee \left[(d_{31}')_1 \wedge d_{32}\right] \vee \left[(d_{31}')_1 \wedge (d_{32}')_1\right]$
Esencial en a	$(\Delta_{es}(a), \{d_{42}\}), d_{42} =$ $\left[d_{31} \wedge (d_{32}')_2\right] \vee \left[(d_{31}')_1 \wedge (d_{32}')_2\right] \vee \left[(d_{31}')_2 \wedge d_{32}\right] \vee$ $\left[(d_{31}')_2 \wedge (d_{32}')_1\right] \vee \left[(d_{31}')_2 \wedge (d_{32}')_2\right]$
De salto infinito en a	$(\Delta_{si}(a), \{d_5\})$ $d_5 : \|\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x)\| = +\infty$
De límite infinito en a	$(\Delta_{li}(a), \{d_5'\})$

En la Tabla 1.2 se presenta un resumen de clasificaciones de varios de los conceptos de la Tabla 1.1, que incluye estrictamente a todas las clasificaciones realizadas en esta sección.

Tabla 1.2: Clasificaciones del concepto $F(a)$ y de conceptos subordinados a $F(a)$

Clasificaciones de los conceptos $F(a), \Delta(a), \Delta_{e'}(a), \Delta_{0'}(a)$ y $\Delta_{\infty}(a)$	
Primera clasificación de $F(a)$	
Criterio	Conceptos que la forman
$\{c, d\}$	$(C(a), \{c\}), (\Delta(a), \{d\})$
Primera clasificación de $\Delta(a)$	
$\{d_1, d_2\}$	$(\Delta_e(a), d_1)$ y $(\Delta_{e'}(a), \{d_2\})$
Segunda clasificación de $F(a)$	
$\{c, d_1, d_2\}$	$(C(a), \{c\}), (\Delta_e(a), \{d_1\})$ y $(\Delta_{e'}(a), \{d_2\})$
Clasificación de $\Delta_{e'}(a)$	
$\{d_3, d'_3\}$	$(\Delta_0(a), \{d_3\})$ y $(\Delta_{0'}(a), \{d'_3\})$
Segunda clasificación de $\Delta(a)$	
$\{d_1, d_3, d'_3\}$	$(\Delta_e(a), \{d_1\}), (\Delta_0(a), \{d_3\})$ y $(\Delta_{0'}(a), \{d'_3\})$
Tercera clasificación de $F(a)$	
$\{c, d_1, d_3, d'_3\}$	$(C(a), \{c\}), (\Delta_e(a), \{d_1\}), (\Delta_0(a), d_3)$ y $(\Delta_{0'}(a), \{d'_3\})$
Clasificación de $\Delta_{0'}(a)$	
$\{d_{41}, d_{42}\}$	$(\Delta_{\infty}(a), \{d_{41}\})$ y $(\Delta_{es}(a), \{d_{42}\})$
Segunda clasificación de $\Delta_{e'}(a)$	
$\{d_3, d_{41}, d_{42}\}$	$(\Delta_0(a), \{d_3\}), (\Delta_{\infty}(a), \{d_{41}\})$ y $(\Delta_{es}(a), \{d_{42}\})$
Tercera clasificación de $\Delta(a)$	
$\{d_1, d_3, d_{41}, d_{42}\}$	$(\Delta_e(a), \{d_1\}), (\Delta_0(a), \{d_3\}), (\Delta_{\infty}(a), d_{41})$ y $(\Delta_{es}(a), \{d_{42}\})$
Cuarta clasificación de $F(a)$	
$\{c, d_1, d_3, d_{41}, d_{42}\}$	$(C(a), \{c\}), (\Delta_e(a), \{d_1\}), (\Delta_0(a), d_3), (\Delta_{\infty}(a), d_{41})$ y $(\Delta_{es}(a), \{d_{42}\})$
Clasificación de $\Delta_{\infty}(a)$	
$\{d_5, d'_5\}$	$(\Delta_{li}(a), \{d_5\})$ y $(\Delta_{si}(a), \{d'_5\})$
Segunda clasificación de $\Delta_{0'}(a)$	
$\{d_5, d'_5, d_{42}\}$	$(\Delta_{li}(a), \{d_5\}), (\Delta_{si}(a), \{d'_5\})$ y $(\Delta_{es}(a), \{d_{42}\})$
Tercera clasificación de $\Delta_{e'}(a)$	
$\{d_3, d_5, d'_5, d_{42}\}$	$(\Delta_0(a), \{d_3\}), (\Delta_{li}(a), \{d_5\}), (\Delta_{si}(a), \{d'_5\})$ y $(\Delta_{es}(a), \{d_{42}\})$
Cuarta clasificación de $\Delta(a)$	
$\{d_1, d_3, d_5, , d'_5, d_{42}\}$	$(\Delta_e(a), \{d_1\}), (\Delta_0(a), \{d_3\}), (\Delta_{li}(a), d_5), (\Delta_{si}(a), \{d'_5\})$ y $(\Delta_{es}(a), \{d_{42}\})$
Quinta clasificación de $F(a)$	
$\{c, d_1, d_3, d_5, d'_5, d_{42}\}$	$(C(a), \{c\}), (\Delta_e(a), \{d_1\}), (\Delta_0(a), d_3), (\Delta_{si}(a), d_5), (\Delta_{si}, \{d'_5\})$ y $(\Delta_{es}(a), \{d_{42}\})$

1.6 Conclusiones

Las ideas en relación con la formación de conceptos planteadas por Bourne (1966) y, en particular, cuando afirmó que: "un concepto existe siempre que dos o más objetos o eventos han sido agrupados juntos y separados de otros objetos (o eventos) en base a algún rasgo o propiedad característica" (p.1); fueron elementos esenciales, para el desarrollo de esta investigación al orientarnos desde el punto de vista teórico en la construcción de una clasificación de las funciones reales de variable real definida en a tomando como base los conceptos continuidad y discontinuidad en a.

La teoría regida por reglas desarrollada por Bourne (1982) para la formación de conceptos, fue un instrumento eficaz para el estudio de la extensión de un concepto. Además, en esta dirección, se divide esta extensión en varias partes y se proporcionan las propiedades y reglas que deben utilizarse para la construcción de colecciones infinitas de elementos de cada una de dichas partes.

La cadena de clasificaciones del concepto de función discontinua en un punto $a \in \mathbb{R}$ y de conceptos que resultan de estas clasificaciones es la que sigue:

$$\text{Discont. } a = \begin{cases} \text{Evitable} \\ \text{No evitable} \begin{cases} \text{Ordinaria} \\ \text{No ordinaria} \begin{cases} \text{Esencia} \begin{cases} \text{Infinita} \begin{cases} \text{Salto Infinito} \\ \text{Límite Infinito} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Dichas clasificaciones permiten una mejor estructuración del contenido asociado con los conceptos básicos de función, continuidad y discontinuidad, lo que favorece los procesos cognitivos del estudiante y por otro lado permite al docente elaborar tareas específicas en función de cada una delas clasificaciones encontradas.

Cabe destacar que auxiliándose de la Tabla 1.1 pueden realizarse otras tres clasificaciones de $\Delta(a)$, otras dos clasificación de $\Delta_{e'}(a)$ y una más de $\Delta_{0'}(a)$. A partir de la definición de la operación clasificación de conceptos, de las reglas y de las tareas didácticas concernientes a dicha operación, permite desarrollar un proceso de formación de los conceptos que resultan de cada clasificación.

Bibliografía

[1] Ausubel, D., Novak J., y Hanesian, H. (2000). *Psicología educativa.* Un punto de vista cognoscitivo. Ciudad de México. México: Trillas.

[2] Bourne, L. (1982). *Typicality effects in logically defined categories*. Memory- Cognition, 10, 3-9.

[3] Bourne, L. (1966). Human conceptual behavior. Allyn and Bacon Inc.

[4] Bourne, L., Ekstrand, B., Mominowski, L. (1978). Psicología del pensamiento. México, Ed. Trillas.

[5] Bruning, R. Schraw, G. (2006). *Psicología cognitiva y de la instrucción.* Pearson Educación, S. A. Printice Hall. Madrid. España.

[6] Dolores, C., Nolasco, H., Mederos, O., Sigarreta, M. (2016). Aproximación teórica al concepto de discontinuidad. En *Revista Iberoamericana de Ciencias, 3*(7), 1-11.

[7] Gorski, D.,Tavants, P., Asmus, V., Stempkóvskaia, V., Glagóliev, V. (s.f.). *Lógica*. La Habana. Cuba: Imprenta nacional de Cuba.

[8] Mederos, O., Roldán R. (2013). *Generalizaciones del Concepto de Métrica.* UNIÓN [en línea], 35. Recuperado de `http://www.fisem.org/www/union/revista35.php`

[9] Mederos, O., Roldán, R., Mederos, B. Kakes, A. (2014). *Algunas formas de generalización de conceptos en la Matemáticas Disciplinar y la Escolar.* México. México: Plaza y Valdés Editores.

[10] Mederos, O., Ruiz, A. (2007). *Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros convexos.* Ideas y recursos para el aula. Números. 67, 37-46.

[11] Pozo J. (1999). *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Madrid. España: Ediciones Morata, S. L.

[12] Rosch, E. (1978). *Principles of categorization.* En E. Rosch y B. B. Lloyd (Eds). Cognition and categorization. (pp.28-49). Erlbaum. Mahwah, New York. USA.

[13] Sakharov, L. (1930). *Methods in Investigation Concepts.* Psicología III. Upspieji. Moscu. URSS.

[14] Vygotsky, L. (1968). *Pensamiento y lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas.* La Habana. Cuba: Instituto del Libro.

[15] Wattenmaker, W., Dewey, G., Murphy, T., Medin, D. (1986). *Linear separability and concept learning:* Context, relational properties, and concept naturalness. Psychonomic Bulletin D Rewiew 10, 141-148.