Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/
Vol 21, No 1. Setiembre – Febrero, 2021 ISSN 1659 -0643

Uso de la Continuidad en la resolución de inecuaciones

| Use of Continuity in solving inequalities |

Giovanni Sanabria Brenes
gsanabria@itcr.ac.cr
Escuela de matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica-Universidad de Costa Rica
Costa Rica

Recibido: 21 mayo 2019 Aceptado: 28 mayo 2020

Resumen. Por lo general, en un curso usual de Cálculo Diferencial se requiere resolver una serie de inecuaciones, principalmente en aplicaciones de la derivada, para determinar la monotonía o concavidad de una función. Sin embargo, si bien previamente a derivación se estudia continuidad, pocas veces se suele hacer uso de la continuidad para resolver las inecuaciones. El presente trabajo esboza una forma de hacer uso de la continuidad en la resolución de inecuaciones: el método analítico.

Palabras clave: continuidad, inecuaciones, método analítico vs el método algebraico

Abstract. In general, in a usual Differential Calculus course, it is required to solve a series of inequalities, mainly in applications of the derivative, to determine the monotony or concavity of a function. However, although continuity is studied prior to referral, continuity is rarely used to resolve inequalities. The present work outlines a way to make use of continuity in solving inequalities: the analytical method.

KeyWords: continuity, inequalities, analytical method vs. algebraic method

1.1 Introducción

Usualmente, en un curso de Matemática General se recurre a las técnicas de factorización y a tablas de signos para resolver una inecuación, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejercicio 1 Determine el conjunto solución de $\dfrac{3x-1}{3x^2(x-1)} \geq 0$.

Se tiene que

	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$3x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$	

Por lo tanto, el conjunto solución es

$$S =]-\infty, 0[\cup \left]0, \frac{1}{3}\right] \cup]1, +\infty[$$

Es usual que esta forma de resolver inecuaciones se mantenga en un curso de Cálculo Diferencial y no se aproveche la continuidad para resolverlas. En los siguiente apartados se brindan algunos resultados que nos permitirán resolver las inecuaciones de una forma un poco distinta.

En general, en la enseñanza de la matemática se suele privilegiar, quizás por mera tradición, el método algebraico para resolver problemas sobre otros métodos como el geométrico, numérico y en este caso, el método analítico.

1.2 Repaso de Continuidad

Seguidamente se presentan los principales resultados y definicionespresentes en la Teoría de Continuidad de funciones. Estos resultados y otros se encuentran en Apostol (1986) y Stewart (2001).

Definición 1.1 (Continuidad en un punto)

Una función f es continua en un punto $x = b$ si se cumplen las siguientes condiciones:

a.) La función está definida en b: $f(b)$ existe, es decir, $b \in D_f$.

b.) El límite $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existe, o sea da un número real.

c.) Se debe cumplir que $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$.

Si una de estas condiciones no se cumple se dice que f es **discontinua** en $x = b$.

Definición 1.2 (Continuidad por la Izquierda en un punto)

Una función f es continua por la izquierda en un número b si se cumplen las siguientes condiciones:

a.) La función esta definida en b: $f(b)$ existe, es decir, $b \in D_f$.

b.) El límite por la izquierda: $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existe, o sea da un número real.

c.) Se debe cumplir que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

De manera similar se define la **continuidad por la derecha en un punto**. A ambas se les llama **continuidades laterales**.

Definición 1.3 (Continuidad en un intervalo)

a.) Una función f es continua en $]a, b[$ si f es continua en x para todo $x \in]a, b[$.

b.) Una función f es continua en $]a, b]$, si f es continua en $]a, b[$ y f es continua por la izquierda en $x = b$.

c.) Una función f es continua en $[a, b[$, si f es continua en $]a, b[$ y f es continua por la derecha en $x = a$.

d.) Una función f es continua en $[a, b]$, si f es continua en $]a, b[$, f es continua por la derecha en $x = a$ y f es continua por la izquierda en $x = b$.

Definición 1.4 (Continuidad en un conjunto)

Si A es la unión de intervalos, se dice que una función f es continua en A si es continua en cada uno de los intervalos que conforman A.

Teorema 1.1

Las siguientes funciones son continuas en todo su dominio:

- Polinomios
- Funciones racionales
- Funciones trigonométricas
- Funciones trigonométricas inversas
- $\sqrt[n]{x}$, con $n \geq 3$ impar
- $\sqrt[n]{x}$, con $n \geq 2$ par (excepto en 0)
- Funciones exponenciales
- Funciones logarítmicas

Teorema 1.2 (peraciones de funciones continuas)

Si f y g son dos funciones continuas en $x = b$ entonces:

a.) La función $f + g$ es continua en $x = b$.

b.) La función $f - g$ es continua en $x = b$.

c.) La función $f \cdot g$ es continua en $x = b$.

d.) La función $\dfrac{f}{g}$ es continua en $x = b$, si $g(b) \neq 0$.

Teorema 1.3 (Teorema del Valor Intermedio: TVI)

Si se cumplen las siguientes condiciones:

a.) f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.

b.) M es un número real que está entre $f(a)$ y $f(b)$, es decir:

$$f(a) < M < f(b) \quad \text{o} \quad f(b) < M < f(a).$$

Entonces: existe al menos un valor m en el intervalo abierto $]a, b[$ tal que: $f(m) = M$.

El teorema del Valor Intermedio es la pieza primordial para resolver inecuaciones, como se verá más adelante. Aquí se puede seguir enunciando algunos teoremas importante como el Teorema de Bolzano. Sin embargo, se pretende solo repasar los teoremas y definiciones básicas que permitan abordar la siguiente sección.

1.3 Método analítico de resolución de inecuaciones

Quizás, alguna vez ha escuchado a un docente quejarse de que los estudiantes de Matemática General, al resolver una inecuación y hacer la tabla de signos, para llenarla simplemente evaluaban cada factor en un número particular dentro de los intervalos determinados por la tabla.
Dicha observación gira en torno a la falta de rigor en la forma de proceder: "si el factor en un valor le da positivo, realmente sabe el estudiante por qué en todo el intervalo será positivo el factor".

La observación del docente puede ser válida a nivel de Matemática General, donde las inecuaciones se reducen a hallar los signos de rectas y parábolas, en las cuales es fácil determinar su signo incluso gráficamente. Sin embargo, el procedimiento indicado de evaluar en un valor no es incorrecto y es una herramienta poderosa para resolver inecuaciones más complejas y tiene su sustento en la continuidad.

Para definir bien este procedimiento, primero se recuerda qué se entiende por inecuación.

Definición 1.5

Una **inecuación en una variable** x es una desigualdad que se puede expresar de la forma

$$f(x) < 0, \quad f(x) > 0, \quad f(x) \leq 0 \quad \text{o bien} \quad f(x) \geq 0,$$

donde $f(x)$ es la fórmula o criterio de una función de variable real. Un valor de x es solución de la inecuación si es una preimagen de f que satisface la desigualdad. Se dice que la inecuación está asociada a f.

Note que un requisito para que x sea solución de una inecuación es que $x \in D_f$. Así, en la resolución de una inecuación asociada a f es necesario calcular el domino de f.

Teorema 1.4

Si f es continua en $[a,b]$ y x_0 es el único cero de f en $[a,b]$ entonces

a.) $f(x)$ mantiene su signo para todo $x \in [a, x_0[$.

b.) $f(x)$ mantiene su signo para todo $x \in]x_0, b]$

Prueba. Para a.), suponga por contradicción que existen $y, z \in [a, x_0[$ con $y < z$ tales que $f(y)$ y $f(z)$ tienen signos distintos. Como $y, z \in [a, b]$, entonces f es continua en $[y, z]$ y por el TVI se tiene que existe $x_1 \in]y, z[$ con $f(x_1) = 0$. Como $x_1 \in]y, z[$, entonces $x_1 < z < x_0$. Así, $x_1 \neq x_0$, lo cual contradice la hipótesis de que x_0 es el único cero de f en $[a, b]$. ■

Del mismo modo se obtiene resultados similares para $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ y para $\mathbb{R}$. Por ejemplo, en el caso de $\mathbb{R}$, el resultado es dado por el siguiente teorema.

Teorema 1.5

Si f es continua en $\mathbb{R}$ y x_0 es el único cero de f en $\mathbb{R}$ entonces

a.) $f(x)$ mantiene su signo para todo $x \in]-\infty, x_0[$.

b.) $f(x)$ mantiene su signo para todo $x \in]x_0, \infty[$

Prueba. Similar al teorema anterior ■

Ejemplo 1.1

Determine el conjunto solución de $\dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+1}}-2\geq 0$

Sea $f(x)=\dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+1}}-2$, note que el dominio de f es $\mathbb{R}$ y fácilmente se puede ver que f es continua en su dominio, pues:

a.) $f_1(x)=3x-1$ es un polinomio, por lo tanto f_1 es continua en $\mathbb{R}$.

b.) Sea f_2 dado por $f_2(x)=\sqrt{x^2+1}$, f_2 es continua en su dominio que es $\mathbb{R}$.

c.) $f_3(x)=2$ es un polinomio, por lo tanto f_3 es continua en $\mathbb{R}$.

d.) De 1 y 2 se tiene que $\dfrac{f_1}{f_2}$ es continua en $\mathbb{R}-\left\{x|\sqrt{x^2+1}=0\right\}=\mathbb{R}$.

e.) De 3 y 4 se tiene que $f=\dfrac{f_1}{f_2}+f_3$ es continua en $\mathbb{R}$.

Por otro lado, la ecuación con radicales $f(x)=0$ solo se cumple para $x=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}$. Entonces como f tiene solo un cero y es continua en $\mathbb{R}$, su signo se mantiene en $\left]-\infty,\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}\right[$ y en $\left]\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5},+\infty\right[$. Para saber su signo en cada intervalo, basta evaluar f en algún punto del intervalo. Dado que $f(0)=-3<0$ y $f(2)=\dfrac{5}{\sqrt{5}}-2>0$, se tiene que

	$-\infty$	$\frac{3+2\sqrt{6}}{5}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	

Y la solución de la inecuación es $\left[\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5},\infty\right[$.

La solución del ejemplo anterior, sin continuidad, requiere un desarrollo algebraico más complejo. Seguidamente, los teoremas anteriores se van generalizar a n ceros.

Teorema 1.6

Si f es continua en $[a,b]$ y los ceros distintos de f en $[a,b]$ son

$$x_0<x_1<\ldots<x_n$$

entonces

a.) $f(x)$ mantiene su signo para todo $x\in\left]-\infty,x_0\right[$.

b.) $f(x)$ mantiene su signo para todo $x\in\left]x_n,+\infty\right[$

c.) $f(x)$ mantiene su signo para todo $x\in\left]x_{i-1},x_i\right[$ para $i=1,2,\ldots,n$.

Prueba. Se procede a demostrar (1), las otras pruebas son similares. S uponga por contradicción que existen $y, z \in \left]-\infty, x_0\right[$ tales que $f(y)$ y $f(z)$ tienen signos distintos. Por el TVI existe $x \in \left]y, z\right[$ tal que $f(x) = 0$. Así x es cero de f y además

$$x \in \left]y, z\right[\wedge z \in \left]-\infty, x_0\right[\Longrightarrow x < z < x_0 \Longrightarrow x < x_0 < x_1 < .... < x_n$$

Es decir, se halló un cero de f distinto a $x_0, x_1, ..., x_n$. $\Rightarrow\Leftarrow$ ■

Se pueden obtener resultados similares para $\mathbb{R}$, $\left[a, +\infty\right[$ y para $\left]-\infty, b\right]$.

Ejemplo 1.2

Determine el conjunto solución de $\left(x^2 - 1\right)(x - 5) < 0$

Sea $f(x) = \left(x^2 - 1\right)(x - 5)$, note que f es un polinomio por lo tanto f es continua en $\mathbb{R}$. Además $f(x) = 0$ si y solo si $x = -1, x = 1$ o $x = 5$. Como $f(-2) = -21 < 0$, $f(0) = 5 > 0$, $f(2) = -9 < 0$ y $f(6) = 35$,
entonces

	$-\infty$	-1	1	5	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

Y la solución de la inecuación es $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, 5\right[$.

La interrogante ahora es ¿Qué sucede si f tiene discontinuidades? Veamos primero el caso en que f puede ser discontinua en algún extremo del intervalo.

Teorema 1.7

Si f es continua en $\left]a, b\right[$ y x_0 es el único cero de f en $\left]a, b\right[$ entonces

a.) $f(x)$ mantiene su signo para todo $x \in \left]a, x_0\right[$.

b.) $f(x)$ mantiene su signo para todo $x \in \left]x_0, b\right[$

Prueba. Para (1), suponga por contradicción que existen $y, z \in \left]a, x_0\right[$ con $y < z$ tales que $f(y)$ y $f(z)$ tienen signos distintos. Como $y, z \in \left]a, b\right[$ y f es continua en $\left]a, b\right[$, entonces f es continua en $[y, z]$ y por el TVI se tiene que existe $x_1 \in \left]y, z\right[$ con $f(x_1) = 0$. Como $x_1 \in \left]y, z\right[$, entonces $x_1 < z < x_0$. Así, $x_1 \neq x_0$ lo cual contradice la hipótesis de que x_0 es el único cero de f en $[a, b]$. ■

El teorema anterior nos brinda un resultado para f continua en $\left]a, b\right[$. Se pueden obtener resultados similares para f continua en $\left]a, +\infty\right[$ y para f continua en $\left]-\infty, b\right[$.

Ejemplo 1.3

Determine el conjunto solución de $\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x\sqrt{x+3}} < 0$

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x\sqrt{x+3}}$, el dominio de f es

$$D_f =]-3, +\infty[- \{0\} =]-3, 0[\cup]0, +\infty[$$

Además

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 3x - 10 = 0 \iff x = -2 \vee x = 5.$$

Fácilmente se puede ver que f es continua en $]-3, 0[$ y en $]0, +\infty[$. Por lo tanto, utilizando el teorema anterior:

a.) En $]-3, 0[$: f es continua y su único cero es $x = -2$. Por el teorema anterior, f mantiene su signo en $]-3, -2[$ y en $]-2, 0[$. Así, para hallar el signo de f en esos intervalos, basta evaluar f en algún valor del intervalo, por ejemplo en $-\dfrac{5}{2} \in]-3, -2[$ y en $-1 \in]-2, 0[$. Como $f\left(-\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{3}{2}\sqrt{2} < 0$ y $f(-1) = 3\sqrt{2} > 0$ se tiene que

	-3		-2		0
$f(x)$		$-$		$+$	

b.) En $]0, +\infty[$: f es continua y su único cero es $x = 5$. Por el teorema anterior, f mantiene su signo en $]0, 5[$ y en $]5, +\infty[$. Así, para hallar el signo de f en esos intervalos, basta evaluar f en algún valor del intervalo, por ejemplo en $1 \in]0, 5[$ y en $6 \in]5, +\infty[$. Como $f(1) = -6 < 0$ y $f(6) = \frac{4}{9} > 0$ se tiene que

	0		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$+$	

De (1) y (2) se tiene que la solución de $f(x) < 0$ es $S =]-3, -2[\cup]0, 5[$

Finalmente, el siguiente teorema nos ayuda a resolver una gran variedad de inecuaciones.

Teorema 1.8

Sea f una función continua en $]a, b[$,salvo en un número finito de discontinuidades, y que tiene un número finito de ceros en $]a, b[$. Sea C el conjunto de las discontinuidades de f en $]a, b[$ y D el conjunto de ceros de f en $]a, b[$. Si el conjunto $C \cup D$ no es vacío, dado que es finito, sus elementos ordenados son

$$x_0 < x_1 < ... < x_n,$$

entonces:

a.) $f(x)$ mantiene su signo para todo $x \in]a, x_0[$.

b.) $f(x)$ mantiene su signo para todo $x \in]x_n, b[$

c.) $f(x)$ mantiene su signo para todo $x \in]x_{i-1}, x_i[$ para $i = 1, 2, ..., n$.

Prueba. Suponga por contradicción que existen y, z ambos en alguno de los intervalos mencionados ($]a, x_0[$, $]x_n, b[$ o $]x_{i-1}, x_i[$), tales que $f(y)$ y $f(z)$ tienen signos distintos. Por el TVI se hallaría un cero de f distinto a $x_0, x_1, ..., x_n$, lo cual contradice la hipótesis de que los ceros de f en $[a, b]$ están en $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$. ■

El teorema anterior nos brinda un resultado sobre el intervalo $]a, b[$. Se pueden obtener resultados similares sobre $\mathbb{R}$, $]a, +\infty[$ y $]-\infty, b[$.

Ejemplo 1.4

Determine el conjunto solución de $\dfrac{(x^2-4)(x+10)}{(x-3)(x+1)} \geq 0$

Sea $f(x) = \dfrac{(x^2-4)(x+10)}{(x-3)(x+1)}$. Note que f tiene solo 2 discontinuidades: 3 y −1; y los ceros de f son $-2, 2, -10$. Por el teorema anterior, se tiene que $f(x)$ no cambia su signo en $]-\infty, -10[$, $]-10, -2[$, $]-2, -1[$, . $]-1, 2[$, $]2, 3[$ y en $]3, +\infty[$. Como

$$f(-11) = -\frac{117}{140}, f(-5) = \frac{105}{32}, f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{119}{18}, f(0) = \frac{40}{3}, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{161}{30}, f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{225}{14}, f(4) = \frac{168}{5}$$

entonces

	$-\infty$	-10	-2	-1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	

Por lo tanto, la solución de $f(x) \geq 0$ es $[-10, -2] \cup]-1, 2] \cup [3, +\infty[$

1.4 Algunas aplicaciones

El método esbozado en la sección anterior permite resolver fácilmente una serie de inecuaciones que se pueden presentar en cursos de matemática a nivel universitario, que tienen como requisito Cálculo Diferencial. Seguidamente se presentan algunos ejemplos.

La resolución de inecuaciones es utilizada en Cálculo Diferencial, por ejemplo, para: analizar la primera derivada, analizar la segunda derivada y en problemas de optimización.

Análisis de la primera derivada

Ejemplo 1.5

Realice el análisis de la primer derivada de la función $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

a.) Puntos Críticos.

a.) Dominio de $f : D_f = \mathbb{R}$.

b.) Valores Críticos. Se tiene que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{\left[x(x-1)^2\right]^2}} \cdot \left[(x-1)^2 + 2x(x-1)\right] = \frac{(x-1)\left[(x-1)+2x\right]}{3(x-1)\sqrt[3]{x^2(x-1)}} \\ &= \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}} \end{aligned}$$

a.) $f'(x) = 0$. La derivada se hace cero si $x = \dfrac{1}{3}$.

b.) $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$ o $x = 1$.

Como $0, 1$ y $\dfrac{1}{3}$ están en D_f entonces son valores críticos

c.) Puntos críticos. se tiene que $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ y $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$, entonces los puntos críticos son

$$(0,0), \quad (1,0) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right).$$

b.) Monotonía de f. Dado que $f'(x) = \dfrac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}$. Note que f' es discontinua en 0 y en 1, y solo tiene un cero en $x = \dfrac{1}{3}$, entonces f' no cambia su signo en $]-\infty, 0[$, $\left]0, \dfrac{1}{3}\right[$, $\left]\dfrac{1}{3}, 1\right[$ y $]1, +\infty[$. Evaluando f' en algún punto de cada uno de los intervalos anteriores se obtiene que

	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
f'	$+$	$+$	$-$	$+$	
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

f crece en $]-\infty, 0]$, $[0, 1]$, $[1, +\infty[$ y decrece en $\left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$.

c.) Extremos relativos. Por el criterio de la primera derivada se tiene que en $x = \dfrac{1}{3}$ se alcanza un máximo relativo, este es $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$, y alcanza un mínimo relativo en $x = 1$ que es 0.

Problemas de optimización

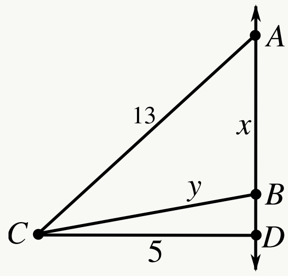
Los problemas de optimización suelen tener un gran inconveniente cuando la función a optimizar no varía en un intervalo cerrado, dado que se busca un extremo absoluto. En esto caso, si f tiene un único valor crítico p, la forma de demostrar que f tiene un extremo absoluto es utilizando el criterio de la primera derivada pues el criterio de la segunda derivada es insuficiente. Veamos un ejemplo usual de optimización.

Ejemplo 1.6

Un hombre está en un bote en el mar en un punto C a una distancia de 5 km de la costa (que se supone recta) y desea llegar a un punto A sobre la costa que está a $13km$ de C. Él puede remar hacia la costa a $2\dfrac{km}{h}$ y caminar por la costa a $4\dfrac{km}{h}$.¿En qué punto B de la playa debe desembarcar para llegar al punto A en el menor tiempo posible?

a.) **Variables:**

x : distancia que recorre caminando (km)
y : distancia que recorre remando (km)
t_1 : tiempo que tarda caminando (horas)
t_2 : tiempo que tarda remando (horas)
t : tiempo total (horas) (**Variable a optimizar**)



b.) **Ecuaciones que relacionen las variables identificadas.** Note que

$$t = t_1 + t_2, \quad \frac{x}{t_1} = 4, \quad \frac{y}{t_2} = 2$$

Además, por el Teorema de Pitágoras aplicado al ΔACD se tiene que $AD = 12$, entonces $BD = 12 - x$. Y aplicando nuevamente el Teorema de Pitágoras al ΔBDC se tiene que

$$y^2 = 5^2 + (12-x)^2\,.$$

c.) **Expresar la variable a optimizar en función de una sola variable**. De las ecuaciones anteriores se tiene que:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \frac{x}{4} + \frac{\sqrt{5^2 + (12-x)^2}}{2}$$

Por lo tanto:

$$t(x) = \frac{x}{4} + \frac{\sqrt{5^2 + (12-x)^2}}{2}$$

d.) .**Optimizar** $t(x)$. Nos interesa la función t con dominio $\mathbb{R}^+$ pues x es una distancia. Se tiene que

$$t'(x) = \frac{1}{4} + \frac{-2(12-x)}{4\sqrt{5^2 + (12-x)^2}}$$

Note que t' esta definida en $\mathbb{R}^+$ y además puede verificar que la ecuación $t'(x) = 0$ tiene una única solución $x = 12 - \frac{5}{3}\sqrt{3} \approx 9.113\,25$. Como t' es continua en $\mathbb{R}$, $t'(0) = -\frac{11}{52} < 0$ y $t'(12) = \frac{1}{4} > 0$ se obtiene que

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & 0 \quad & 12 - \frac{5}{3}\sqrt{3} \quad & +\infty \\
t' & - & + & \\
t & \searrow & \nearrow &
\end{array}$$

Por el criterio de la primera derivada se tiene que t alcanza un mínimo relativo en $x = 12 - \frac{5}{3}\sqrt{3}$. Sin embargo, debido a los intervalos de monotonía se tiene que f alcanza su mínimo absoluto en $x = 12 - \frac{5}{3}\sqrt{3}$. Así se alcanza el menor tiempo posible cuando desembarca en un punto B situado aproximadamente a 9.11 km de A.

El problema anterior, se puede abordar restringiendo más el dominio de t a un intervalo cerrado $(D_t = [0, 12])$, y bastaba hallar el mínimo absoluto de t en un intervalo cerrado. Sin embargo, la solución brindada, da un camino diferente.

Estadística Inferencial

En Estadística Inferencial se suelen presentar problemas con algunas inecuaciones en Estimación de Máxima Verosimilitud. El siguiente ejemplo fue tomado de Sanabria (2011).

Ejemplo 1.7

La variable aleatoria X tiene densidad de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{x}{a^2 e^{x/a}}, \text{ para } x \geq 0$$

Tres observaciones de X son $x_1 = 12; x_2 = 16$ y $x_3 = 15$. Encuentre la estimación de máxima verosimilitud del parámetro a.

a.) **Determinación de la función de verosimilitud** g. En este caso la muestra observada es $(12, 16, 15)$ por lo tanto la función de verosimitud es

$$g(a) = f(12)\,f(16)\,f(15) = \frac{12}{a^2 e^{12/a}}\frac{16}{a^2 e^{16/a}}\frac{15}{a^2 e^{15/a}} = \frac{2880}{a^6 e^{43/a}}$$

b.) **Simplificación de** $\ln g(a)$. Se busca el valor de a que maximice g. Para ello lo mejor es primeramente aplicar logaritmo natural a g :

$$\ln g(a) = \ln 2880 - 6 \ln a - \frac{43}{a}$$

c.) **Calcular** $g'(a)$. Derivando la expresión anterior se tiene que

$$\frac{g'(a)}{g(a)} = -\frac{6}{a} + \frac{43}{a^2} \quad \Longrightarrow \quad g'(a) = \left(-\frac{6}{a} + \frac{43}{a^2}\right) g(a)$$

d.) **Estimación de** a. Para que $g'(a) = 0$ basta que $-\frac{6}{a} + \frac{43}{a^2} = 0$ o que $g(a) = 0$, dado que $g(a)$ no puede ser cero, se tiene que

$$-\frac{6}{a} + \frac{43}{a^2} = 0 \Longrightarrow a = \frac{43}{6}$$

Note que se tiene que

$$g'(a) = \left(-\frac{6}{a} + \frac{43}{a^2}\right) \frac{2880}{a^6 e^{43/a}}$$

Como f es una función de densidad de probabilidad, entonces $a > 0$, y entonces nos interesa g' con dominio $\mathbb{R}^+$. Como g' es continua en $\mathbb{R}^+$, $g'(1) > 0$ y $g'(8) < 0$ entonces

	0	$\frac{43}{6}$	$+\infty$
g'	$+$	$-$	
g	$\nearrow$	$\searrow$	

Por lo tanto, la función g alcanza su máximo absoluto en $a = \frac{43}{6}$.

Probabilidad

También en probabilidad se suelen presentar inecuaciones no tan fáciles de resolver. El siguiente ejemplo fue tomado de Sanabria (2012) y la inecuación que involucra es resuelta utilizando el método analítico.

Ejemplo 1.8

Una empresa se dedica a la producción de cierto tipo de aguacates. El peso de estos sigue una distribución normal con un peso promedio de 350 gramos y una desviación estándar de 100 gramos. Los aguacates son recogidos en baldes, los cuales tienen indicado que no resisten un peso superior a diez kilogramos. Suponga que en los baldes la limitación es de peso y no de espacio. ¿Cuántos aguacates máximo se deben empacar por balde, de manera que estos resistan el peso, en por lo menos el 95 % de los casos?

Considere la variable

$$X: \text{ peso en kg de un aguacate de un tipo dado.}$$

Note que $X \sim N(0.35, 0.1^2)$. Suponga que en el balde se empacan n aguacates, sean $X_1, X_2, ..., X_n$ el peso de estos aguacates. Note que variables $X_1, X_2, ..., X_n$ son "copia" de la variable X. Además, se puede suponer que dichas variables son independientes. Por el teorema (suma de normales es normal) se tiene que S_n, el peso de los aguacates en el balde, cumple que

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n \sim N(0.35n, 0.1^2 n)$$

Dado que el balde resiste un peso de 10 kg, entonces

$$P(S_n < 10) \geq 0.95 \quad \Longrightarrow \quad \phi\left(\frac{10-0.35n}{0.1\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 \approx \phi(1.645)$$

Como ϕ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, entonces

$$\phi\left(\frac{10-0.35n}{0.1\sqrt{n}}\right) \geq \phi(1.645) \Longrightarrow \frac{10-0.35n}{0.1\sqrt{n}} \geq 1.645$$

Así nos interesan las soluciones naturales de la inecuación

$$\frac{10-0.35x}{0.1\sqrt{x}} \geq 1.645, \text{ con } x \in \mathbb{R}^+$$

Sea $f(x) = \dfrac{10-0.35x}{0.1\sqrt{x}} - 1.645$, note que f es continua en $\mathbb{R}^+$. Además

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x \approx 26.1672 \vee x \approx 31.1966.$$

Como $f(1) \approx 94.855 > 0$, $f(27) \approx -0.586\,525 < 0$ y $f(32) \approx -3.766\,32 < 0$ se tiene que

	0	26.1672	31.1966	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$-$	$-$	

Entonces $f(x) \geq 0$ para $x \in \left]0, 26.1672\right]$.

Así, se tiene que el máximo valor de n que cumple que $f(n) \geq 0$ es $n = 26$. Por lo tanto, se deben empacar máximo 26 aguacates por balde.

Finalmente, veamos como se resuelve la inecuación del ejemplo anterior sin el método presentado.

Ejemplo 1.9

En el ejemplo anterior, se buscaba el máximo natural $n \geq 9$ que cumple que

$$\frac{10-0.35n}{0.1\sqrt{n}} \geq 1.645$$

Esta inecuación es equivalente a

$$\underbrace{10-0.35n}_{\text{positivo}} \geq 0.1645\sqrt{n} \qquad (*)$$

Como el miembro derecho de esta desigualdad es positivo, entonces el miembro izquierdo también lo es:

$$10-0.35n > 0$$

Para resolver la desigualdad $(*)$ se puede elevar al cuadrado, bajo la restricción de que $10-0.35n$ es positivo. Así,

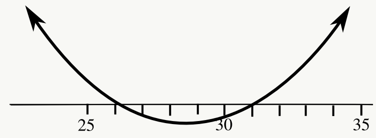
$$\begin{aligned} &(10-0.35n)^2 \geq (0.1645)^2 n \\ \Longrightarrow \quad & 0.1225n^2 - 7n + 100 \geq 0.0270603n \\ \Longrightarrow \quad & 0.1225n^2 - 7.0270603n + 100 \geq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se buscan los valores de n que cumplen

$$\begin{cases} 0.1225n^2 - 7.0270603n + 100 \geq 0 \\ 10 - 0.35n > 0 \end{cases}$$

Note que la función cuadrática $f(n) = 0.1225n^2 - 7.0270603n + 100$ es cóncava hacia arriba y las intersecciones con el eje X son

$$n_1 = 26,1672$$
$$n_2 = 31,1966$$



Como se quiere que $f(n) \geq 0$, es decir, que f esté sobre o en el eje X, entonces la solución de esta inecuación en $\mathbb{R}$ es

$$S =]-\infty, 26.1672] \cup [31.1966, +\infty[\quad (**)$$

Pero además

$$10 - 0.35n > 0 \Longrightarrow n \in]-\infty, 28.5714[\,. \quad (***)$$

De $(**)$ y $(***)$ se tiene que n debe satisfacer que

$$n \leq 26.1672$$

Por lo tanto, el máximo valor de n es 26.

1.5 Conclusión

El trabajo presentado brinda un método para resolver una inecuación asociada a f, cuando f es continua o tiene un número finito de discontinuidades. Sobre este método:

a.) Dado que la mayoría de funciones que utilizamos son continuas en su dominio, el método nos permite resolver una amplia gama de inecuaciones.

b.) Se aborda un método de resolución de inecuaciones distinto al de las tablas de signos que puede ser muy útil en Cálculo Diferencial cuando se cuenta con una herramienta más poderosa, la continuidad. Esto no quiere decir que en dicho curso se deben resolver las inecuaciones con el método presentado, más bien lo importante es presentarles a los estudiantes esta otra opción, y hacerles ver que es una poderosa opción cuando el algebra se complica. Es pasar de una solución algebraica para resolver inecuaciones a una solución analítica.

c.) El método presentado (**método analítico de resolución de inecuaciones**) permite ampliar la gama de funciones con que se trabaja en algunos cursos. Por ejemplo, realizar el análisis de la primera derivada de función con un criterio más elaborado.

d.) Se evidenció que el método analítico simplifica la solución algebraica de problemas en estadística y probabilidad.

e.) La continuidad es la columna vertebral de un curso de Cálculo Diferencial, su importancia es enorme. Aquí se ha presentado una aplicación concreta de la continuidad: la resolución de inecuaciones.

f.) La mayoría de aplicaciones que requiere de inecuaciones, en la realidad, pueden ser algebraicamente complicadas de resolver, por lo que el método análitico nos brinda otro camino para resolverlas siempre que la función involucrada sea continua salvo en un número finito de discontinuidades.

g.) Si bien el método requiere hallar los ceros de f (resolver una ecuación y factorizar) esto es más simple que resolver la inecuación, salvo que f sea un polinomio.

h.) En algunos cursos de Matemática General a nivel universitario, se estudia la resolución de inecuaciones cuadráticas o con radicales, esto puede ser poco útil para estudiantes que luego llevan Cálculo Diferencial.

El método analítico no es un método nuevo para resolver inecuaciones. Es una aplicación casi inmediata del Teorema del Valor Intermedio. Quizás lo novedoso es la presentación formal y sistemática de esta aplicación para resolver inecuaciones, y el insistir en su uso desde cálculo diferencial. La intención de este trabajo es instar a los profesores de Cálculo Diferencial a que utilicen el método analítico en la resolución de inecuaciones por las razones teóricamente expuestas. Didácticamente, la implementación del método en los cursos requiere el diseño de ejercicios similares a los ejemplos brindados y generar experiencias que permitan valorar y mejorar la aprehensión del método por parte de los estudiantes.

Bibliografía

[1] Apostol, T.(1986) *Calculus*. Vol.1. Editorial Reverté S.A. España.

[2] Sanabria, G.(2011) *Comprendiendo la Estadística Inferencial*. Editorial Tecnológica de Costa Rica: Cartago, Costa Rica.

[3] Sanabria, G. (2012)*Comprendiendo las Probabilidades.* Editorial Tecnológica de Costa Rica: Cartago, Costa Rica.

[4] Stewart, J. (2001) *Cálculo en una variable*. Thomson L. México