Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 20, No 2. Marzo – Agosto, 2020

Artículo de sección
ISSN 1659 -0643

Una Introducción a la Geometría Riemanniana
An Introduction to Riemannian Geometry

José Manuel Sánchez Muñoz
jmanuel.sanchez@educarex.es
G.I.E. Pensamiento Matemático
Universidad Politécnica de Madrid
España

Recibido: 4 abril 2019 Aceptado: 30 Agosto 2019

Resumen. El principal propósito de este artículo es hacer una introducción histórica a la Geometría Riemanniana, poniendo de manifiesto la renovada vigencia de esta área matemática de investigación. Se trata de una rama llena de interesantes ejemplos de aplicación en la realidad que nos rodea, que pueden ir desde la utilización de la geometría esférica en la geolocalización de nuestros gps, a la aplicación de la teoría de la relatividad general y la interpretación de cómo se expande nuestro universo.

Palabras clave: Geometrías no euclídeas, Geometría Riemanniana, Geometría Diferencial.

Abstract. The main purpose of this article is to make a historical introduction to Riemannian Geometry, highlighting the renewed validity of this mathematical area of research. It is a branch full of interesting examples of application in the reality that surrounds us, which can range from the use of spherical geometry in the geolocation of our GPS, to the application of the theory of general relativity and the interpretation of how our universe expands.

KeyWords: Non Euclidian Geometries, Riemannian Geometry, Differential Geometry.

1.1 El Quinto Postulado de Euclides

Puede considerarse sin lugar a equívocos que los *Elementos* de Euclides (c.325-c.265 a.C.) es no sólo la obra matemática más importante de la edad antigua y un fiel exponente de la herencia matemática griega clásica, sino una de las más importantes de la Historia de las Matemáticas, donde se expone un compendio de los principales avances alcanzados en geometría, siendo durante 2.000 años la obra de referencia en este campo.

Escrita alrededor del año 300 a.C., en él se formulan las premisas fundamentales de la geometría en forma de los llamados *postulados* y *axiomas*. Los postulados son:

1. Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta.
2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Postulado de las Paralelas. Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

Este Quinto Postulado (en algunas ediciones se trata del Axioma XI) tiene un equivalente, atribuido al escocés John Playfair (1748-1818), que es el más usado en los libros de Geometría:

5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela.

La noción de paralelismo no dejaba de ser un acto de fe, ya que para convencernos de que dos rectas son paralelas sería necesario prolongarlas por ambos sentidos "hasta el infinito", y comprobar que efectivamente nunca se cortan en toda *su infinita extensión*. El Postulado de las Paralelas ocupaba por lo tanto un lugar fundamental en la cabeza de cualquier geómetra, apareciendo por primera vez en los *Elementos* en la proposición 29, prescindiendo de él en las 28 anteriores. En vista de su intrincada naturaleza, algunos consideraron la idea de prescindir de él, deduciéndolo en forma de teorema demostrado a partir de anteriores proposiciones y conceptos básicos de la geometría.

Dicho reto atrajo a muchos geómetras como el griego Posidonio (c.135-51 a.C.), el greco-egipcio Claudio Ptolomeo (c.100-c.170), el griego Proclo (410-485), el persa Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274), el inglés John Wallis (1616-1703), el jesuíta italiano Giovanni Gerolamo Saccheri (1667-1733), el alemán de origen francés Johann Heinrich Lambert (1728-1777), o el francés Adrien-Marie Legendre (1752-1833), sin embargo ninguno de ellos tuvo éxito.

Unos de los primeros intentos serios lo realizó Proclo. Veamos su razonamiento. Sean dos líneas paralelas l y m y supongamos que la línea n corta a m en P. Demostremos que n corta también a l. Sea Q el punto de corte de l con la perpendicular que pasa por P. Si n coincide con $\overrightarrow{PQ}$ entonces n corta a l en Q. En otro caso, existe un rayo $\overrightarrow{PY}$ de n que está entre el rayo $\overrightarrow{PQ}$ y un rayo $\overrightarrow{PX}$ de m. Consideremos el punto X como el punto de intersección entre la recta m y la perpendicular a m trazada por el punto Y. A medida que el punto Y se va alejando de P, el segmento XY va aumentando indefinidamente de longitud, de modo que eventualmente sería más grande que el segmento PQ. Por consiguiente, Y debe quedar al otro lado del semiplano delimitado por la recta l, y por tanto la recta n corta a la recta l.

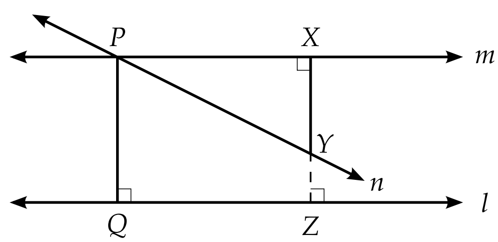


Figura 1.1

El razonamiento de Proclo, incluye los conceptos de movimiento y continuidad. Los pasos de su demostración son correctos, pero sin embargo, la conclusión alcanzada es completamente falaz. El motivo es que una sucesión estrictamente creciente de términos positivos puede estar acotada superiormente. Por ejemplo, $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Si se analiza el paso previo a la conclusión puede comprenderse mejor la falacia obtenida. Se puede decir que:

1. Los puntos X, Y y Z son colineales.
2. Los segmentos XZ y PQ son congruentes, es decir cuanto más grande sea XZ, más grande será PQ, por lo tanto XY será también más grande que XZ, por lo que el punto Y estará en el otro lado del semiplano delimitado por la recta l.

La conclusión es consecuencia directa de los dos puntos anteriores, sin embargo el principal problema es que dichas afirmaciones no han sido adecuadamente justificadas.

Esta demostración ilustra la necesidad de tener que ser extremadamente cuidadoso cuando se piensa en paralelas. Sin el Postulado de las Paralelas, únicamente se puede afirmar que dos paralelas (en un plano) son aquellas que no tienen ningún punto en común. En ningún caso se puede afirmar que siempre sean equidistantes, ni siquiera que tienen una perpendicular común.

Wallis dejó de lado la idea de equidistancia utilizada sin éxito por todos sus predecesores, y dió una nueva demostración del Quinto Postulado. Basó dicha demostración en el axioma "Para cada figura existe una figura similar de magnitud arbitraria" [2, p. 16].

Saccheri y Lambert fueron los que más profundizaron en el problema, logrando aproximarse a una solución en gran medida. En su obra "Euclides ab omni naevo vindicatus" ("Euclides exonerado de toda culpa") (1733), Saccheri por entonces profesor de la Universidad de Pavía, demostró en su desconocimiento muchos de los teoremas hoy clásicos de la geometría no euclídea, y pensó que había demostrado el Quinto Postulado mediante reducción al absurdo. Sin embargo, estaba profundamente equivocado, ya que dedujo sus resultados erróneamente por fiarse más de la intuición que de la lógica, convencido de que había logrado el objetivo cuando llegó a resultados que le parecían "inimaginables".

Saccheri demostró que si en un cuadrilátero $ABCD$, los ángulos en A y B son rectos, y los lados AD y BC son de la misma longitud, entonces los ángulos en D y C son congruentes[1] (figura 1.2). De este modo se abre un abanico que contempla tres posibilidades:

1. Los ángulos en D y C son congruentes y rectos (hipótesis del ángulo recto). La existencia de este cuadrilátero es equivalente a la declaración expuesta por el Quinto Postulado de Euclides.

2. Los ángulos en D y C son congruentes y agudos (hipótesis del ángulo agudo). El cuadrilátero nos conduce a la geometría hiperbólica.

3. Los ángulos en D y C son congruentes y obtusos (hipótesis del ángulo obtuso). El cuadrilátero nos conduce a la geometría elíptica.

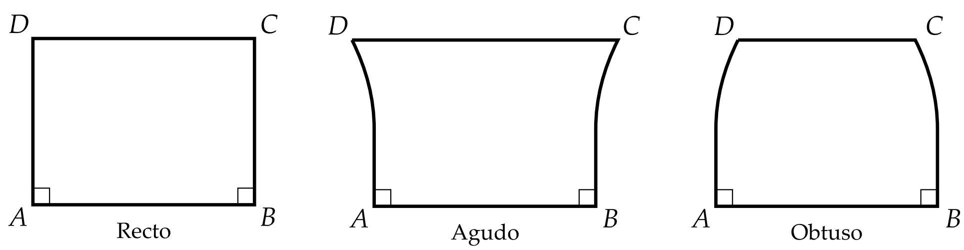


Figura 1.2: Cuadriláteros birectángulos isósceles de Saccheri.

Su objetivo era utilizar el método de reducción para descartar las hipótesis de los ángulos agudo y obtuso. Saccheri eliminó fácilmente la hipótesis del ángulo obtuso, pero no pudo destruir la hipótesis del ángulo agudo, llegando a realizar las siguientes afirmaciones:

> "La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, ya que es repugnante a la naturaleza de la línea recta." [15, pp. 98]

[1] En geometría, en lugar de utilizar el concepto de igualdad, se dice que dos objetos son congruentes si tienen idénticas dimensiones y la misma forma sin importar su posición u orientación, es decir es posible encontrar una isometría (traslación, rotación y/o reflexión) que los relaciona.

> "Cabe considerar aquí una notable diferencia entre los anteriores rebatimientos de las dos hipótesis. Porque en lo que se refiere a la hipótesis del ángulo obtuso el tema está mas claro que la luz del mediodía [...] Pero por el contrario, no alcanzo a demostrar la falsedad de la otra hipótesis, la del ángulo agudo, sin haber demostrado previamente que la línea, cuyos puntos equidistan de una supuesta recta situada en el mismo plano que ésta, es igual a dicha recta." [15, pp. 98-99]

Saccheri obtuvo varias propiedades válidas en geometría hiperbólica:

- Los ángulos en C y D son congruentes y agudos.
- El lado DC es más largo que el AB.
- El segmento de línea que une el punto medio del lado AB y el punto medio del lado DC es mutuamente perpendicular a ambos.
- El segmento de línea que une los puntos medios de los lados, no es perpendicular a ninguno de los lados. Estos dos segmentos rectilíneos anteriores son perpendiculares entre sí.
- El segmento de línea que une el punto medio del lado AB y el punto medio del lado DC divide el cuadrilátero en dos cuadriláteros que tienen tres de sus ángulos rectos y el último ángulo agudo (cuadriláteros de Lambert).
- Dos cuadriláteros de Saccheri con lados AB y ángulos en D y C congruentes, son congruentes entre sí (p. ej. los pares restantes de partes correspondientes son congruentes).
- Dos cuadriláteros de Saccheri con lados DC y ángulos en D y C congruentes, son congruentes entre sí.

El alemán Georg Simon Klügel (1739-1812) demostraría posteriormente en 1763 en su tesis doctoral que los resultados de Saccheri no conducían a una contradicción en contra del profundo convencimiento de este último, sino que se traducían en resultados que parecían estar en contraposición con la experiencia. Sin saberlo, Saccheri plantó la semilla que germinaría más tarde en la geometría no euclídea.

En su libro "Theorie der Parallellinien" ("Teoría de las Paralelas") (escrito en 1766 y publicado de forma póstuma en 1786), Lambert emprendió el mismo camino que Saccheri, sin embargo no encontró contradicción lógica y no cometió los mismos errores que el italiano y que muchos de los geómetras que le antecedieron. No obstante nunca declaró haber logrado demostrar el Quinto Postulado. A este respecto, manifestaba:

> "Sin lugar a dudas, este básico postulado es mucho menos claro y obvio que los otros. Naturalmente, no sólo da la impresión de que debe demostrarse, sino que hasta cierto punto hace que el lector sienta que es capaz de dar una demostración, o que debe darla. Sin embargo, en la medida en que entiendo este asunto, eso es sólo una primera impresión. El que lee más en profundidad a Euclides seguramente se sorprenderá no sólo del rigor de sus demostraciones sino también de la simplicidad encantadora de su exposición. Siendo esto así, se maravillará aún más de la posición del Quinto Postulado cuando descubra que Euclides demostró proposiciones que podrían dejarse sin demostrar con mucha más facilidad." [8, pp. 159-160]

Lambert construyó un cuadrilátero que contenía tres ángulos rectos (la mitad de un cuadrilátero de Saccheri), y consideró las tres posibles hipótesis para el cuarto ángulo: recto, obtuso o agudo. Al igual que Saccheri dedujo multitud de teoremas clásicos de la geometría no euclídea a partir de la hipótesis del ángulo agudo, pero a diferencia del italiano sin encontrar una aparente contradicción. Demostró que en las tres hipótesis, la suma de los ángulos de un triángulo es menor, igual o mayor que dos ángulos rectos, respectivamente, y que el defecto o exceso (según la hipótesis) es proporcional al área del triángulo. El interés de dicho cuadrilátero radicaba en que si se podía demostrar

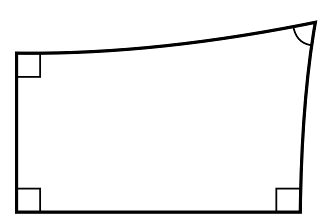


Figura 1.3: Cuadrilátero trirectángulo de Lambert.

que el cuarto ángulo debía ser un ángulo recto, entonces el Postulado de las Paralelas Euclídeo podría ser probado como teorema. Al igual que Saccheri desestimó la hipótesis del obtuso, pero no obtuvo unos resultados satisfactorios que arrojaran suficiente luz sobre la hipótesis del ángulo agudo. Esta insatisfacción le llevó a no publicar en vida sus resultados.

Otro de los resultados interesantes contenidos en su "Teoría de las Paralelas", es la estrecha semejanza con la geometría esférica de la geometría plana que se mantendría, si la segunda hipótesis (hipótesis del ángulo obtuso) fuera válida, y el comentario de que la geometría esférica es indepediente del Postulado de las Paralelas. Con respecto a la tercera hipótesis, hizo la siguiente observación:

> "Respecto a esta, debería concluir que la tercera hipótesis tendría lugar en el caso de una esfera imaginaria." [2, p. 50]

Quizás llegó a dicha conclusión tras observar la ecuación $(A+B+C-\pi)r^2$, que expresa el área de un triángulo esférico. Si en esta sustituimos el radio r, por el radio imaginario $\sqrt{-1}\,r$ tenemos $r^2(\pi-A-B-C)$, que resulta la ecuación del área de un triángulo plano para la tercera hipótesis de Lambert.

Siguiendo los razonamientos de Saccheri y Lambert, Legendre es posiblemente el matemático que más tiempo dedicó a intentar demostrar el Quinto Postulado, sin embargo muy a su pesar nunca aportó resultados definitivos. Tal fue su obsesión por encontrar una demostración definitiva del problema de las paralelas, que durante 29 años publicó una tras otra demostración en las diferentes ediciones de su libro "Éléments de Geométrie" (1794-1823) (en español "Elementos de Geometría"). No obstante, utilizó en sus investigaciones unas elegantes y sencillas deducciones que provocaron un gran éxito en su rápida difusión, provocando un creciente interés por el problema.

En alguna de sus más atractivas tentativas, Legendre siguió el camino de Saccheri, atacando el problema por el lado de la suma de los ángulos de un triángulo, sin embargo se mantiene pertinaz en querer demostrar que dicha suma es igual a dos ángulos rectos. Con la intención de conseguirlo, descarta desde un inicio la hipótesis saccheriana del ángulo obtuso, afirmando que *en cualquier triángulo la suma de los ángulos es menor* (hipótesis del ángulo agudo) *o igual* (hipótesis del ángulo recto) *dos ángulos rectos*. Veamos su demostración.

Considérense n segmentos congruentes y consecutivos sobre una recta, $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}$, sobre los cuales se construyen n triángulos congruentes en una idéntica región de la recta, teniendo por terceros vértices los puntos $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Los segmentos $B_1B_2, B_2B_3, \ldots, B_{n-1}B_n$, que unen estos últimos vértices, son congruentes, y pueden considerarse como bases de otros $n-1$ triángulos congruentes $B_1A_2B_2, B_2A_3B_3, \ldots, B_{n-1}A_nB_n$. Se completa la figura 1.4 con el triángulo $B_nA_{n+1}B_{n+1}$, igual a los precedentes. Se denotan como β y α a los ángulos en B_1 del triangulo $\Delta A_1B_1A_2$ y A_2 de su consecutivo respectivamente, de tal manera que se cumple que $\beta \leq \alpha$.

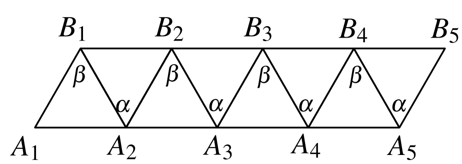


Figura 1.4

Legendre procede por reducción al absurdo, de tal manera que si $\beta > \alpha$, de la comparación de los dos triángulos $\Delta A_1B_1A_2$ y $\Delta B_1A_2B_2$, que tienen los lados congruentes, se deduciría que $A_1A_2 > B_1B_2$. Además, como la línea quebrada $A_1B_1B_2 \ldots B_{n+1}A_{n+1}$ es mayor que el segmento A_1A_{n+1}, entonces se cumple que

$$A_1B_1 + (B_1B_2)\cdot n + A_{n+1}B_{n+1} > (A_1A_2)\cdot n,$$

es decir:

$$2A_1B_1 > (A_1A_2 - B_1B_2)\cdot n$$

Sin embargo, la anterior desigualdad, para n suficientemente grande, contradice el *postulado de Arquímedes* (que considera implicitamente la infinidad de la recta), por lo que se concluye que $A_1A_2 > B_1B_2$, y por lo tanto es absurdo suponer que $\beta > \alpha$, por lo que se puede afirmar que $\beta \leq \alpha$, de donde se deduce de manera inmediata que la suma de la medida de los tres ángulos del triángulo $A_1B_1A_2$ es menor o igual a dos ángulos rectos.

Este teorema se denomina en ocasiones de forma inadecuada *primer teorema de Legendre*, cuando es sobradamente reconocido que su responsable fue Saccheri, quien al demostrar la falsedad de la hipótesis del ángulo obtuso, había sacado a la luz dicho teorema casi un siglo antes.

Existe un denominado *segundo teorema de Legendre*, paradógicamente también demostrado por Saccheri, que bajo su forma más general afirma: *Si en un solo triángulo la suma de la medida de sus ángulos interiores es menor o igual a dos ángulos rectos, es, respectivamente, menor o igual a dos ángulos rectos en cualquier otro triángulo*.

Veamos como demuestra Legendre que *la suma de la medida de los tres ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos* (figura 1.5). Supóngase que $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} < 2\ \widehat{rectos}$. Se fija un punto D sobre el lado AB, y se traza a transversal DE de modo que el ángulo $\widehat{ADE}$ sea igual al ángulo $\widehat{B}$. En el cuadrilátero $DBCE$ se cumple que la suma de la medida de los ángulos interiores es menor que cuatro rectos, de donde $\widehat{AED} > \widehat{ACB}$. El ángulo $\widehat{E}$ del triángulo ADE resulta entonces ser función determinada y decreciente del lado AD, o, lo que viene a ser equivalente, la longitud del lado AD está completamente determinada cuando las medidas del ángulo $\widehat{E}$ y de los dos ángulos fijos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ son conocidas (en ángulos rectos). Sin embargo, según Legendre se llega aquí a un absurdo o contradicción, porque la longitud de un segmento no tiene significación si no se conoce la unidad de medida a la que está referida, y la naturaleza de la cuestión no indica en absoluto dicha unidad.

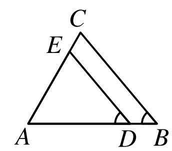


Figura 1.5

Por lo tanto, hay que rechazar la hipótesis de partida de que $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} < 2\ \widehat{rectos}$, y de forma consecuente, se resuelve que $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = 2\ \widehat{rectos}$. A partir de aquí se puede conseguir una demostración del Quinto Postulado. El método de Legendre se basa entonces en el postulado de Lambert que niega la existencia de una *unidad absoluta* para los segmentos.

Otro resultado importante demostrado por Legendre hace uso de la siguiente hipótesis: *Por un punto cualquiera tomado en el interior de un ángulo se puede siempre trazar una recta que encuentre a los dos lados del ángulo*. Veamos como procede (figura 1.6).
Sea ABC un triángulo, en el cual, si es posible, la suma de los ángulos sea menor que dos ángulos rectos.

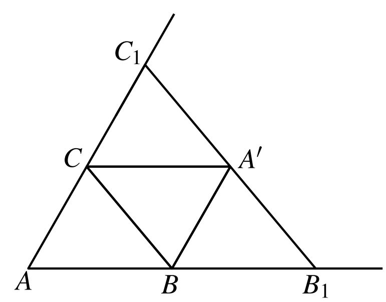


Figura 1.6

Se define α (*deficiencia*) de tal manera que $2\ \widehat{rectos} - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$. Se construye el punto A' simétrico del punto A respecto al lado BC. La deficiencia del nuevo triángulo CBA' resulta ser también α. A continuación, en virtud de la hipótesis enunciada, se traza por A' una recta que interseca en B_1 y C_1 a los lados del ángulo $\widehat{A}$. Se demuestra fácilmente que la deficiencia del triángulo AB_1C_1 resulta ser la suma de las deficiencias de los cuatro triángulos que lo forman, y, por lo tanto, mayor que 2α. Repitiendo, a partir del triángulo AB_1C_1, la anterior construcción, se obtendrá un nuevo triángulo de deficiencia mayor que 4α. Tras n operaciones de idéntica naturaleza, se habrá construido un triángulo de deficiencia mayor que $2^n\alpha$. Pero para n bastante grande resulta que $2^n\alpha > 2\ \widehat{rectos}$ (*postulado de Arquímedes*), lo cual resulta absurdo. Por lo tanto, $\alpha = 0$, y de esto resulta: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = 2\ \widehat{rectos}$.

Esta última demostración se apoya en el *postulado de Arquímedes*. Sin embargo se podría haber evitado la utilización de dicho postulado (figura 1.7). Para ello, sean AB y HK sendas rectas oblicua y perpendicular a AH. Se traza la recta AB', simétrica de AB respecto de AH. En virtud de la hipóte-

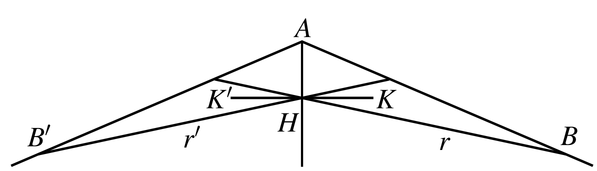


Figura 1.7

sis de Legendre, se traza una recta r por el punto H, que interseca a los dos lados del ángulo $\widehat{BAB'}$. Si dicha recta es distinta de HK, también su simétrica r', respecto a AH, goza de la misma propiedad, y, por consiguiente, también la HK. Entonces, una recta perpendicular y una oblicua a la recta AH se intersecan siempre. De dicho resultado se deduce la teoría ordinaria de las paralelas, y, por lo tanto, $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=2\ \widehat{rectos}$.

Con esta obra, Legendre pensó que la inexpugnable dificultad escondida en la cuestión de las paralelas estaba finalmente resuelta. Sin embargo, esencialmente no añadía nada verdaderamente nuevo al material y a las convicciones expuestas por todos sus predecesores. El verdadero mérito del francés está en la sencilla y elegante manera con que trató sus investigaciones, por lo que éstas alcanzaron una difusión bastante notable, lo cual contribuyó en gran medida a aumentar el interés de nuevos investigadores y nuevas ideas en cierto modo transgresoras respecto a la corriente kantiana respecto a la concepción del espacio.

1.2 El nacimiento de las geometrías no euclídeas

Tras dos milenios de vigencia del Quinto Postulado euclídeo, parecía que una gran multitud de geómetras estaban dispuestos a principios del siglo XIX a acatar dicha hipótesis como un resultado irrefutable, sin embargo unos cuantos prosiguieron con sus investigaciones, intentando buscar una solución definitiva, entre ellos los que más se acercaron fueron Ferdinand K. Schweikart (1780-1857), y sobre todo el sobrino de este último, Franz Adolf Taurinus (1794-1874). Dicha búsqueda iba a desembocar en el descubrimiento de nuevos sistemas geométricos cuya copaternidad debe otorgarse al alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), el ruso Nikolái Ivanovich Lobachevski (1793-1856) y el magiar János Bolyai (1802-1860).

Gauss fue el primer matemático en enfocar el problema de la demostración del Quinto Postulado de manera exitosa. Sin embargo, bien porque no se sintiera en su fuero interno suficientemente satisfecho con los resultados obtenidos, bien porque desconfiaba de la aceptación de los mismos dado lo vanguardistas que resultaban en contra de la imperante corriente filosófica kantiana que gobernaba cualquier campo de la ciencia de la época, el caso es que sus conclusiones nunca llegaron a ver la luz, aunque tras su muerte han podido conocerse por figurar entre sus papeles, sus borradores, o su extensa correspondencia mantenida con coetáneos suyos como el magiar Wolfgang (Farkas) Bolyai (1775-1856), o los alemanes Heinrich W. M. Olbers (1758-1840), Heinrich C. Schumacher (1780-1850), Christian L. Gerling (1788-1864), Schweikart, Taurinus, Friedrich L. Wachter (1792-1817), y Friedrich W. Bessel (1784-1846).

Sus investigaciones sobre el asunto de las paralelas tienen como punto de partida el año 1792, cuando consiguió llegar a una contradicción perfectamente rigurosa siguiendo el mismo método de reducción al absurdo que Saccheri. A la luz del resultado obtenido, y dada la intuición fuera de lo común con que Gauss estaba dotado de forma innata, le hizo pensar que quizás pudiera existir un tipo de geometría distinta a la de Euclides, que desde el punto de vista de la lógica, no contenía en sí misma ninguna contradicción. Sin embargo, en una carta fechada el 17 de diciembre de 1799 mostraba su excepticismo a W. Bolyai acerca del camino que tomaban sus investigaciones:

> "En cuanto a mí, mis trabajos están ya muy adelantados; pero el camino por el que he penetrado no conduce al fin que se persigue, y que tú afirmas haber alcanzado, sino que más bien conduce a poner en duda la existencia de la Geometría.
>
> He llegado, es verdad, a muchas cosas, que para la mayor parte de los hombres constituirían una demostración válida; pero que, en mi opinión, no prueban, por decirlo así, NADA; por ejemplo: si se pudiese demostrar la existencia posible de un triángulo rectilíneo, cuya área fuese mayor que toda área dada, entonces estaría en condiciones de demostrar con rigor perfecto toda la Geometría.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Nacido en el seno de una familia humilde campesina del ducado alemán de Brunswick, desde muy temprana edad Gauss ya mostró un especial talento para los números y el lenguaje, aprendiendo a leer solo. Considerado un niño prodigio, con tan sólo 12 años comienza a interesarse especialmente por la geometría. A la edad de 14 años su reputación le llevó a recibir el mecenazgo del duque de Brunswick. Conoció así a su profesor Johann Christian Martin Bartels (1769-1836) que se encargó de acelerar sus progresos en Matemáticas.

Parece ser que con 17 años empezaron a gestarse en él las primeras intuiciones sobre la posibilidad de la existencia de otras geometrías completamente distintas a la ortodoxa geometría euclídea conocida hasta el momento. Unido a la Universidad de Gotinga, primero como estudiante y más tarde como profesor, destacó en infinidad de campos de las matemáticas y las ciencias, como la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica.

Hoy día es considerado "el príncipe de los matemáticos" y sin lugar a equívocos uno de los tres matemáticos más importantes desde la antigüedad junto al griego Arquímedes de Siracusa (c. 287 a.C.-c.212 a.C.) y el inglés Isaac Newton (1643-1727). Su amigo Wolfgang Sartorius von Waltershausen (1809-1876) le describía en su biografía póstuma (1856):

> "Gauss fue sencillo y sin afectación desde su juventud hasta el día de su muerte. Un pequeño estudio, una mesita de trabajo con un tapete verde, un pupitre pintado de blanco, un estrecho sofá, y, después de cumplir los 70 años, un sillón, una lámpara con pantalla, una alcoba fresca, alimentos sencillos, una bata y un gorro de terciopelo eran todas sus necesidades." [16, p. 86]

> Casi todos, es cierto, quisieran dar a esto el título de axioma; yo no; podría, en efecto, ocurrir que, por lejanos que entre sí estuvieran los vértices de un triángulo en el espacio, su área fuese, sin embargo, inferior a un límite asignado." [2, pp. 65-66]

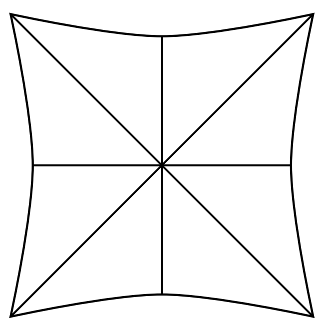
Ya en pleno siglo XIX (en torno a 1813), vencido el inicial excepticismo del primer periodo de sus investigaciones, parece que desarrolló los teoremas fundamentales de dicha nueva geometría a la que denominó en primera instancia "antieuclídea" (documentado en correspondencia mantenida con Wachter fechada en 1816), más tarde "geometría astral" (documentado en una carta de Schweikart a Gerling que incluía un pliego para Gauss fechada en diciembre de 1818), y por último, "no euclídea" (documentado en una carta a Schumacher fechada el 12 de junio de 1831). A pesar de lo paradógico de los resultados obtenidos, a estas alturas Gauss tenía la certeza y el convencimiento de que la geometría no euclídea no contenía en sí misma ninguna contradicción, sin embargo no dejó mostrar dicho convencimiento a otros por la seguridad de no ser comprendido (como demuestra en una carta a Bessel fechada el 27 de enero de 1829); confía parte de sus investigaciones a amigos íntimos como Taurinus (en 1824), no sin antes rogando guardase una prudente discreción sobre dichos descubrimientos.

En una carta a Schumacher en 1831, justo antes de que conociera los trabajos de 1832 de János Bolyai sobre la *geometría absoluta* e interrumpiera la redacción de los resultados de sus meditaciones de los últimos cuarenta años sobre el asunto, Gauss determina la longitud de la circunferencia de radio r bajo la forma:

$$\pi k \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}} \right)$$

Respecto a k, dice que cuando se quiera poner de acuerdo la nueva geometría con la experiencia, precisa suponerla infinitamente grande respecto a todas las magnitudes mensurables. En el caso específico que $k = \infty$, la expresión gaussiana se convierte en la longitud ordinaria de la circunferencia[2]. Esta observación puede hacerse extensible a todo el sistema descubierto por Gauss, sistema que, cuando $k = \infty$, contiene, como caso límite, el de Euclides.

Contemporáneas e independientes de las investigaciones realizadas por Gauss, cabe nombrar los esfuerzos realizados por F. C. Schweikart, que en 1807 publicaba "Die Theorie der Parallellinien, nebs Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie" (en español "La Teoría de las Paralelas, así como Sugerencias para su Destierro de la Geometría"), la cual, en contra de lo que deja suponer el título, no contiene una tratado independiente del Quinto Postulado, sino uno basado en el concepto de los paralelogramos. Schweikart desarrolló una geometría independiente de la *hipótesis de Euclides*. Fechada en diciembre de 1818, en la ciudad alemana de Marburgo donde ejercía como jurista, Schweikart consignaba a Gerling, discípulo de Gauss, un pliego para éste, que contenía las siguientes afirmaciones:

> "Existen dos tipos de geometría –una geometría en sentido estricto–: la euclídea, y una geometría astral.
>
> Los triángulos, en esta última, tienen la particularidad de que la suma de las medidas de sus tres ángulos interiores no es igual a dos ángulos rectos.
>
> Sentado esto, se puede demostrar rigurosamente que:
>
> *a)* la suma de las medidas de los tres ángulos interiores de un triángulo es menor que dos ángulos rectos;
>
> *b)* dicha suma es tanto menor cuanto mayor es el área del triángulo;
>
> *c)* la altura de un triángulo rectángulo isósceles, aún creciendo cuando crecen los lados, sin embargo no puede superar determinado segmento, que yo denomino CONSTANTE.
>
> El cuadrado, en consecuencia, tiene la forma de la figura 1.8.
>
> 
>
> **Figura 1.8**
>
> Si esta constante fuese para nosotros el semieje terrestre (y en consecuencia de esto, toda línea recta trazada entre dos estrellas fijas que distan entre sí 90° sería tangente a la esfera terrestre) sería infinitamente grande respecto a las dimensiones que se presentan en la vida cotidiana.
>
> La geometría euclídea se verifica en la hipótesis de que la constante sea infinitamente grande. Sólo entonces es verdad que la suma de los tres ángulos de todo triángulo es igual a dos rectos, y esto se deja demostrar fácilmente, tan sólo si se admite como dato que la constante sea infinitamente grande." [2, p. 76]

En marzo de 1819, Gauss, en respuesta a Gerling respecto a la geometría astral, pone de manifiesto su completa concordancia con las ideas propuestas por Schweikart, valorando las investigaciones de éste, y poniendo de manifiesto

[2]Para verlo, basta con sustituir cada exponencial por su desarrollo en serie, resultando:

$$\pi k\left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right) = 2\pi k\left(\frac{r}{k} + \frac{r^3}{k^3 3!} + \frac{r^5}{k^5 5!} + \cdots\right) = 2\pi r\left(1 + \frac{r^2}{k^2 3!} + \frac{r^4}{k^4 5!} + \cdots\right)$$

Pasando al límite, cuando $k = \infty$, se obtiene: $2\pi r$.

que él mismo había desarrollado la geometría astral para resolver cualquier problema, dada la constante descrita por Schweikart. Concluía determinando el límite superior del área de un triángulo mediante la expresión[3]:

$$\frac{\pi CC}{\left[\text{log.hyp.}\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^2}$$

Schweikart no llegó a publicar sus investigaciones. Hacia 1820, Schweikart indujo a su sobrino F. A. Taurinus para que pusiera sus esfuerzos en el problema de las paralelas. En 1824 parece que Taurinus se puso manos a la obra seriamente con la tarea encomendada por su tío, pero con una perspectiva en cierto modo diferente a como Schweikart la había abordado. Taurinus sí consideraba el Quinto Postulado como una verdad absoluta y alimentó la esperanza de poderlo demostrar. Tras varias infructuosas tentativas y bajo la influencia de Schweikart y Gauss, publica en 1825 su "Theorie der Parallellinien", que contenía desarrollos no euclídeos, rechazando la hipótesis del ángulo obtuso y con investigaciones parecidas a las realizadas por Saccheri y Lambert respecto a la hipótesis del ángulo agudo. Al igual que su tío, se encontró con su "constante", a la que denominó *parámetro*, y en su incapacidad por representar el espacio como un concepto susceptible de varias determinaciones, concluye que deben ser posibles todos los sistemas correspondientes a los infinitos valores que pueden ser asignados a dicho parámetro. Dicha interpretación de Taurinus le condujo posteriormente a rechazar la hipótesis del ángulo agudo, a pesar de reconocer la compatibilidad lógica de las proposiones que de ella se deducen.

Al año siguiente Taurinus publicó su "Geometriae prima elementa" (Colonia, 1826), donde expone nuevamente las investigaciones desarrolladas en 1825. Dicha publicación concluye con un apéndice trascendental a todas luces, en el que demuestra cómo se puede construir efectivamente un sistema geométrico (analítico) correspondiente a la hipótesis del ángulo agudo.
Taurinus parte de la ecuación fundamental de la trigonometría esférica:

$$\cos\left(\frac{a}{k}\right)=\cos\left(\frac{b}{k}\right)\cos\left(\frac{c}{k}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{b}{k}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{k}\right)\cos\alpha$$

y en ella sustituye el radio real k por el radio imaginario ik (siendo $i=\sqrt{-1}$, es decir, la unidad imaginaria). Taurinus obtiene una ecuación que puede expresarse de un modo elegante mediante la utilización de las *funciones hiperbólicas*[4]:

$$\cosh\left(\frac{a}{k}\right)=\cosh\left(\frac{b}{k}\right)\cosh\left(\frac{c}{k}\right)-\operatorname{senh}\left(\frac{b}{k}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{c}{k}\right)\cos\alpha \tag{1.1}$$

[3]La constante C que se muestra en esta expresión es la constante de Schweikart, que aparece al coger como unidad de longitud el segmento que tiene ángulo de paralelismo $\pi/4$; es distinta de la que Gauss denotó como k y por medio de la cual expresa la longitud de la circunferencia (véase pág. 9). Las dos constantes están ligadas por la siguiente expresión: $k=\dfrac{C}{\log.\left(1+\sqrt{2}\right)}$.

[4]Recuerde el lector la definición analítica y las propiedades fundamentales de las funciones hiperbólicas:

$$\operatorname{senh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots;\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots;$$

$$\tanh x=\frac{-e^{-x}}{e^x+e^{-x}};\quad \coth x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Las funciones circulares $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$, $\ldots$, son susceptibles también de una definición analítica, de manera que:

$$\operatorname{sen} x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdot;\quad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots;$$

$$\tan x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)};\quad \cot x=\frac{i\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{e^{ix}-e^{-ix}}.$$

es sencillo deducir las relaciones entre las funciones circulares y las funciones hiperbólicas:

$$i\operatorname{sen} hx=\operatorname{sen}(ix);\quad \cosh x=\cos(ix);\quad i\tanh x=\tan(ix);\quad -i\coth x=\cot(ix).$$

La ecuación (1.1) es la ecuación fundamental de la *geometría logarítmico-esférica* de Taurinus. Es relativamente sencillo demostrar que en la geometría logogarítmico-esférica la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es menor de 180° (π radianes). Supongamos que tenemos un triángulo equilátero, en dicho caso si introducimos $a = b = c$ en la ecuación (1.1), y despejamos $\cos\alpha$, tendremos:

$$\cos\alpha = \frac{\cosh^2\left(\frac{a}{k}\right) - \cosh\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{senh}^2\left(\frac{a}{k}\right)} = \frac{\cosh\left(\frac{a}{k}\right)}{1+\cosh\left(\frac{a}{k}\right)}$$

Pero

$$\cosh\left(\frac{a}{k}\right) = 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{k}\right)^4 + \cdots,$$

por lo tanto,

$$\cos\alpha = \frac{1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{k}\right)^4 + \cdots}{2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{k}\right)^4 + \cdots} \tag{1.2}$$

Esta fracción resulta evidentemente mayor que $\frac{1}{2}$, por lo tanto $\alpha < 60°$ ($\pi/3$ radianes), de donde resulta que la suma de las medidas de los ángulos interiores del triángulo resulta menor de 180° (π radianes).

Además, resulta oportuno resaltar que

$$\lim_{a\to 0}\cos\alpha = \frac{1}{2};$$

es decir, el límite de α cuando a tiende a cero es 60° ($\pi/3$ radianes). Por lo tanto, en la geometría logarítmico-esférica, la suma de los ángulos de un triángulo tiende a 180° (π radianes) cuando los lados tienden a cero.

Respecto a la ecuación (1.2), podemos hacer las siguientes observaciones:

$$\lim_{k\to\infty}\cos\alpha = \frac{1}{2};$$

es decir cuando k tiende a infinito, entonces α tiende a 60° ($\pi/3$ radianes). En consecuencia, si se supone la constante k infinitamente grande, el triángulo es equilátero, y cada uno de sus ángulos interiores mide 60° ($\pi/3$ radianes), como en la geometría ordinaria.

De manera más general, puede observarse cuando $k = \infty$, la ecuación (1.1) se convierte en:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

es decir, la ecuación fundamental de la trigonometría plana euclídea.

Si consideramos la segunda ecuación fundamental de la trigonometría esférica

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos\left(\frac{a}{k}\right),$$

Estas últimas relaciones permiten transformar las ecuaciones fundamentales de la trigonometría, en las correspondientes para las funciones hiperbólicas, resultando:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1; \quad \operatorname{senh}(x\pm y) = \operatorname{senh}x\cosh y \pm \operatorname{senh}y\cosh x; \quad \cosh(x\pm y) = \cosh x\cosh y \pm \operatorname{senh}x\operatorname{senh}y.$$

y aplicamos un simple cambio del coseno circular a coseno hiperbólico, obtenemos la segunda ecuación fundamental de la geometría logarítmico-esférica:

$$\cos\alpha = -cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cosh\left(\frac{a}{k}\right). \tag{1.3}$$

Cuando $\alpha = 0$ y $\beta = 90^\circ$, entonces:

$$\cosh\left(\frac{a}{k}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} \tag{1.4}$$

En este caso, el triángulo correspondiente a la ecuación (1.4) tiene un ángulo nulo y los dos lados que lo forman de longitud infinita y paralelos (asintóticos). El ángulo β comprendido entre el lado paralelo y el lado perpendicular CA, como resulta de la ecuación (1.4), es función de a (definido posteriormente por Lobachevski como *ángulo de paralelismo* –véase pág. 15– correspondiente a la distancia a –figura 1.9–).

Cuando $\beta = 45^\circ$ ($\pi/4$ radianes), el segmento BC, cuya longitud puede calcularse mediante la ecuación (1.4), es la constante de Schweikart. Si se denomina P a dicha constante, se tiene:

$$\cosh\left(\frac{P}{k}\right) = \sqrt{2},$$

de donde, resolviendo respecto a k, se obtiene:

$$k = \frac{P}{\log\left(1+\sqrt{2}\right)}.$$

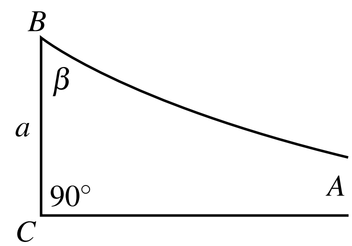


Figura 1.9

Esta expresión deducida por Taurinus, muestra la relación entre las dos constantes k (utilizada por Gauss para expresar la longitud de la circunferencia) y P.

Taurinus dedujo otros importantes teoremas de la geometría logarítmico-esférica simplemente con sustituir el radio real por el radio imaginario en las ecuaciones de la trigonometría esférica. Por ejemplo, dedujo que el área de un triángulo es proporcional a su *deficiencia*[5]; el límite superior del área en cuestión resulta:

$$\frac{\pi P^2}{\left[\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^2}$$

la longitud de la circunferencia de radio r es:

$$2\pi k \operatorname{senh}\left(\frac{r}{k}\right)$$

el área del círculo es entonces:

$$2\pi k^2\left(\cosh\left(\frac{r}{k}\right) - 1\right),$$

el área de la superficie esférica y el volumen de la esfera son respectivamente:

$$4\pi k^2 \operatorname{senh}^2\left(\frac{r}{k}\right); \quad 2\pi k^3\left(\operatorname{senh}\left(\frac{r}{k}\right)\cosh\left(\frac{r}{k}\right) - \frac{r}{k}\right).$$

Los resultados alcanzados por Taurinus confirmaron la previsión de Lambert respecto a su *tercera hipótesis* o *hipótesis del ángulo agudo*, ya que las ecuaciones de la geometría logarítmico-esférica, interpretadas analíticamente, dan como resultado las relaciones fundamentales entre los elementos de un triángulo trazado sobre una esfera de radio

[5]Término utilizado por Lambert, para expresar la diferencia entre $2(n-2)$ ángulos rectos y la suma de los ángulos de un polígono de n lados, que es proporcional al área del mismo polígono.

imaginario[6].

Al igual que Lambert ya había hecho con anterioridad, Taurinus reconoció que la geometría esférica corresponde al sistema válido en la hipótesis del ángulo obtuso; además que la geometría ordinaria consitutuye un nexo de unión entre la geometría esférica y la geometría logarítmico-esférica. Si el radio k varía de un modo continuo del campo real al campo puramente imaginario, pasando por el infinito, se pasa del sistema esférico al sistema logarítmico-esférico, a través del de Euclides.

Aunque Taurinus, como ya se ha comentado, excluyó la posibilidad de una geometría logarítmico-esférica válida en el plano, no desconocía el interés teórico que podía ofrecer, sin embargo las ecuaciones y expresiones a las que llegó reclamaron la atención de otros geómetras, y parece evidente que fue capaz de prever la existencia de algún caso concreto en el cual dicha geometría pudiera encontrar una interpretación.

A Lobachevski le corresponde el mérito de ser el primero en publicar los resultados sobre la existencia de una nueva geometría distinta a la de Euclides. Parece ser que hacia 1815 comenzó a trabajar en la teoría de las paralelas e intentó probar el Quinto Postulado, muy en la línea de las investigaciones llevadas a cabo por Legendre. Sin embargo en 1823 afirmaba en su curso de "Geometría" (publicado de manera póstuma en 1909):

> "[. . .] ninguna de ellas [demostraciones], sea del tipo que sea, merece la pena denominarse demostración matemática en el completo sentido de la palabra, y sólo se pueden tomar como aclaraciones [. . .] los conceptos en sí no contienen la verdad que intentábamos probar." [11]

Es decir, es imposible deducir el Quinto Postulado de los conceptos y proposiciones fundamentales de la geometría.

Para llegar a dicha deducción, Lobachevski siguió los caminos que Saccheri y Lambert tomaron en sus primeros pasos. Para ello consideró como hipótesis la afirmación contraria al Quinto Postulado de Euclides, es decir que "por un punto exterior a una recta se pueden trazar no una, sino al menos dos rectas paralelas a la recta dada". Tomando condicionalmente dicha proposición, como axioma y, considerando después todas las demás proposiciones de la geometría, desarrolló sus deducciones. Ante la imposibilidad de llegar a contradicción alguna, Lobachevski llegó a dos conclusiones:

1. Es imposible demostrar el Quinto Postulado.
2. Sobre la proposición considerada, se pueden llegar a una serie de consecuencias, es decir, teoremas, que no contienen contradicción alguna. Dichas consecuencias forman una teoría no contradictoria, completamente factible, que puede ser considerada como una nueva geometría no euclídea.

Lobachevski denominó prudentemente a dicha *geometría imaginaria*, ya que no fue capaz de encontrar ningún modelo real para ella[7], pero sin embargo, y esto es lo más importante, vio claramente su posibilidad lógica. A diferencia de Gauss publicó sus resultados, mostrando la verdadera grandeza de un genio que defiende su convicción sin vacilaciones, y sin miedo a la incomprensión o la crítica.

El 11 de febrero de 1826, en una sesión de la Facultad de Física y Matemáticas de la Universidad de Kazán (en cualquier caso una universidad de segunda fila alejada de cualquier centro importante de producción matemática)

[6] Además de sus investigaciones sobre el Postulado de las Paralelas, Lambert se ocupó de estudiar las funciones trigonométricas con argumento imaginario, cuya relación con la geometría no euclídea pusieron de manifiesto las investigaciones de Taurinus. Es posible que Lambert se percatara de que las ecuaciones de la trigonometría esférica conservan una forma real aún realizando el cambio en ellas del radio real por el radio imaginario puro. De ese modo la previsión de Lambert relativa a la hipótesis del ángulo agudo tendría un fundamento indiscutible. Sin embargo nada nos hace suponer que Lambert fuera capaz de relacionar sus investigaciones sobre las funciones trigonométricas con la teoría de las paralelas.

[7] Algunos de los primeros modelos reales relacionados directamente con la geometría de Lobachevski se tratarán específicamente en la Sección 1.4.

Nikolái Ivanovich Lobachevski (1793-1856)

Lobachevski nació en la ciudad rusa de Nizhni Nóvgorod en el seno de una familia humilde. Su padre, administrador oficial, murió cuando Lobachevski tenía sólo 7 años, dejando viuda y tres huérfanos, por lo que la familia decidió mudarse en 1800 a la ciudad de Kazán al oeste de Rusia, cerca de la Siberia. El pequeño Nikolái ingresó en la escuela en 1802, gracias a la obtención de una beca estatal.

En 1807, se graduó e ingresó en la recientemente fundada (1804) Universidad de Kazán. Su primera intención fue estudiar medicina, aunque más tarde se decantó por las matemáticas y la física. Uno de sus profesores fue el alemán Johann Martin Bartels (1769-1836), antiguo profesor y amigo de Gauss. Muy probablemente dicha amistad común y la correspondencia mantenida entre los dos alemanes despertó en Lobachevski un creciente interés por la demostración del Quinto Postulado, ya que Bartels impartió un curso de "Historia de las Matemáticas" basado en un texto original del francés Jean Étienne Montucla (1725-1799) en el que se discutía en detalle la teoría de las paralelas.

En 1811 recibió su licenciatura en física y matemáticas, en 1814 obtuvo una plaza de profesor asociado y más tarde en 1822 obtuvo la titularidad definitiva. En 1827 se convirtió en rector de la universidad, manteniéndose en dicho cargo durante 19 años. A pesar de su gran carga administrativa y burocrática, nunca abandonó su función docente, enseñando materias como mecánica, hidrodinámica, ecuaciones diferenciales, cálculo de variaciones o física matemática.

En 1832 se casó con Lady Varvara Alexejevna Moisieva, hija de una adinerada familia de Kazán, y fruto de dicho matrimonio nacieron siete hijos, lo que significó una gran carga.

Tras su retiro en 1846, su salud empezó a deteriorarse rápidamente, en parte debido a que su primogénito murió nada más jubilarse, sufrió una enfermedad que lo dejó completamente ciego, y sus dificultades financieras se agravaron enormemente. Sus logros matemáticos no fueron nunca reconocidos en vida y desgraciadamente murió sin conocer la repercusión e importancia de sus investigaciones.

Lobachevski leyó su memoria "Una sucinta exposición de los principios de la geometría con una demostración rigurosa del teorema de las paralelas", en las que exponía los principios de la nueva geometría más general que la ordinaria euclídea, y las ecuaciones que en la misma relacionaban los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. En esta memoria, Lobachevski establece que por un punto pasan dos paralelas a una recta y donde la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos (hipótesis del ángulo agudo de Saccheri y Lambert).

En 1829 publicó una memoria en el Boletín de la Universidad de Kazán sobre "Los Principios de la Geometría" donde se recoge gran parte de los resultados expuestos previamente en el manuscrito de 1826 que se había perdido. Sucesivamente fueron publicados "Geometría imaginaria" (1835), "Los Nuevos fundamentos de la Geometría con completa Teoría de las Paralelas" (1835-1838), "Aplicaciones de la Geometría Imaginaria a Algunas Integrales" (1836), "Géométrie imaginaire" (1837), y en 1840 el opúsculo resumen "Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien" (en español "Investigaciones Geométricas sobre la Teoría de las Paralelas"). Sin embargo en ningún caso aparece la demostración rigurosa del teorema de las paralelas. Lejos de que la comunidad aceptara sus trabajos, fue objeto de duras críticas, como por ejemplo las de Mijaíl Ostrogradski (1801-1861) para entonces el matemático ruso (ucraniano) de mayor prestigio en su época.

La geometría no euclídea tal y como la concibieron Gauss y Schweikart en 1816, y estudiada por Taurinus como un sistema abstracto en 1826, no apareció hasta 1829-1830 a través de los trabajos de Lobachevski. El método utilizado para describir su nueva geometría imaginaria, o como más tarde denominó *pangeometría*, puede vislumbrarse en su publicación "Investigaciones Geométricas sobre la Teoría de las Paralelas" de 1840. En dicha publicación, después de haber establecido un grupo de teoremas independientes de la teoría de las paralelas, Lobachevski introdujo en su nueva geometría conceptos completamente vanguardistas como el *ángulo de paralelismo*. Si se considera una recta AB y se traza su perpendicular por un punto P, el ángulo de paralelismo QPF por el punto P depende de la altura PQ. En efecto, si se considera el punto P' situado por encima de P, la recta $P'T$, que forma con $P'Q$ un ángulo igual a QPF, y la recta PF, son paralelas euclídeas que, por lo tanto, divergen. Entonces, la recta $P'F'$, paralela a AB por P', está más cerca de $P'Q$ que la recta $P'T$, lo cual evidencia que el ángulo de paralelismo es una función $\pi(x)$ de la distancia x del punto P a la recta AB $\big($figura 1.2$\big)$. El ángulo de paralelismo es agudo, y disminuye al aumentar la distancia del punto P a la recta AB. Lobachevski también demostró que el ángulo de paralelismo tiende al ángulo recto a medida que disminuye la distancia del punto a la recta AB, y determinó explícitamente dicha función $\pi(x)$ mediante la siguiente expresión:

$$\cot\left(\frac{\pi(x)}{2}\right) = q^x$$

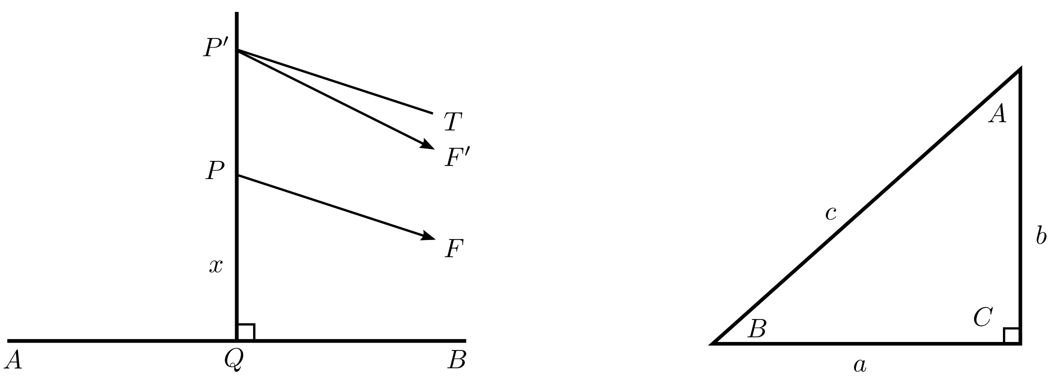
donde q es una constante mayor que 1; esta relación se conoce con el nombre de "ecuación fundamental" de la geometría hiperbólica. Las propiedades de dicha función son:

a) Está definida para $x > 0$.

b) Es monótona decreciente y continua.

c) Toma todos los valores entre 0° y 90° (0 y $\pi/2$ radianes respectivamente).

d) $\pi(x)$ tiende a 90° ($\pi/2$ radianes) cuando x se hace infinitamente pequeño, y $\pi(x)$ tiende a 0° (0 radianes) cuando x se hace infinitamente grande.



(a) Ángulo de paralelismo. (b) Triángulo rectángulo.

Figura 1.10

De la definición de las paralelas, Lobachevski deduce después sus principales propiedades:

a) Si PQ es la paralela a AB por el punto P, es la paralela a AB es esa dirección para cada punto de PQ (*conservación*).

b) Si PQ es la paralela a AB, entonces AB es paralela a PQ (*reciprocidad*).

c) Si las rectas PF y $P'F'$ son paralelas a la recta AB, entonces las rectas PF y $P'F'$ son paralelas entre sí (*transitividad*).

d) Si PQ y AB son paralelas, entonces PQ es asintótica a AB.

La discusión sobre estas cuestiones van precedidas por los teoremas sobre la suma de los ángulos de un triángulo, los mismos teoremas ya enunciados por Legendre, e incluso anteriormente por Saccheri. Llegados a este punto, es evidente que Lobachevski estaba familiarizado con las investigaciones de Legendre.

Con el fin de construir las ecuaciones trigonométricas de su nueva geometría imaginaria, Lobachevski estableció la existencia de tres clases diferentes de circunferencias:

a) Los "ciclos" o circunferencias propiamente dichas, con centro real y con eje ideal.

b) Los "horociclos", con centro y eje ideal (circunferencias de radio infinito).

c) Las "curvas equidistantes" o "hiperciclos", o curvas determinadas por el lugar geométrico de los puntos situados a un mismo lado de una recta a distancia iguales a ella.

Además del horociclo, Lobachevski introduce la horosfera (esfera de radio infinito), equivalentes en la geometría ordinaria a la línea recta y al plano respectivamente. Sobre la horosfera, por la que pasan infinitos horociclos, existe una geometría análoga a la geometría ordinaria, donde los horociclos toman el papel de las líneas rectas. Lobachevski obtiene su primer resultado notable: "La geometría euclídea y, en particular la trigonometría plana, se mantiene en la horosfera".

Lobachevski utilizó esta última propiedad, y otra propiedad relativa a los horociclos coaxiales (circunferencias concéntricas de radio infinito), para deducir las ecuaciones de una nueva trigonometría plana y esférica[8]. Las ecuaciones de la trigonometría esférica en el nuevo sistema son exactamente iguales a las de la trigonometría esférica ordinaria, cuando los elementos del triángulo se miden en ángulos rectos.

Obtuvo las siguientes igualdades para un triángulo rectángulo ABC con catetos a y b (figura 1.2, trigonometría hiperbólica), siendo $\pi(a)$, $\pi(b)$ y $\pi(c)$ los ángulos de paralelismo correspondientes a los lados del triángulo a, b y c:

$$\begin{aligned} \cot\pi(a) &= \cot\pi(c)\operatorname{sen}A \\ \cot\pi(b) &= \cot\pi(c)\operatorname{sen}B \\ \operatorname{sen}\pi(a)\operatorname{sen}\pi(b) &= \operatorname{sen}\pi(c) \end{aligned} \tag{1.5}$$

para las funciones trigonométricas ordinarias. De este modo pudo "resolver" el triángulo ABC, es decir, obtener por ejemplo un cateto conocidos la hipotenusa y el ángulo opuesto. Lobachevski llegó a la ecuación fundamental de su geometría:

$$\cos A\cos\pi(b)\cos\pi(c) + \frac{\operatorname{sen}\pi(b)\operatorname{sen}\pi(c)}{\operatorname{sen}\pi(a)} = 1 \tag{1.6}$$

Resulta relativamente sencillo ver que la ecuación (1.6) puede transformarse en la ecuación (1.1) expresada por Taurinus y viceversa. Para transformar la expresión de Taurinus en la de Lobachevski basta utilizar la ecuación (1.4), donde el ángulo β que en ella aparece, resulta ser $\pi(a)$ en la expresión de Lobachevski.

Para el paso inverso, es suficiente utilizar uno de los resultados de Lobachevski, a saber:

$$\tan\frac{\pi(x)}{2} = a^{-x} \tag{1.7}$$

[8]Se demuestra que las ecuaciones de la trigonometría plana no euclídea pueden obtenerse sin la introducción de la horosfera. El único resultado requerido es la relación constante de los arcos resultantes de dos horociclos coaxiales cortados por un par de ejes cuando la distancia entre dichos arcos es la unidad.

La ecuación (1.7) es la misma que la ecuación (1.4) de Taurinus, pero con otra forma. La constante a que aparece en la ecuación (1.7) es indeterminada, y representa la relación constante de los arcos resultantes de dos horociclos coaxiales cortados por un par de ejes cuando la distancia entre dichos arcos es la unidad (figura 1.11).
Si tal y como hizo Lobachevski, se elige una unidad conveniente, la constante a puede tomar el valor e, base de los logaritmos naturales. Por otro lado si se desea, los resultados de Lobachevski pueden expresarse con la geometría logarítmico-esférica de Taurinus, o la geometría no euclídea de Gauss, mediante el cambio de variable

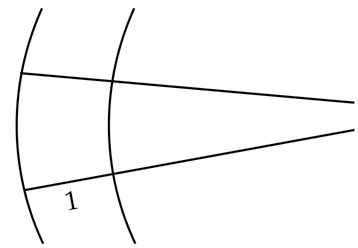


Figura 1.11

$$a = e^{\frac{1}{k}}$$

En este caso la ecuación (1.7) resulta:

$$\tan\frac{\pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}} \tag{1.8}$$

que resulta idéntica a

$$\cosh\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\pi(x)} \tag{1.9}$$

La ecuación (1.9) es fruto de la transformación de la ecuación (1.6) de Lobachevski en la ecuación (1.1) de Taurinus. Por lo tanto, puede afirmarse que *la geometría logarítmico esférica de Taurinus es formalmente idéntica a la geometría imaginaria o pangeometría de Lobachevski*.
A partir de sus ecuaciones, Lobachevski dedujo las siguientes propiedades fundamentales:

a) Para triángulos con lados pequeñísimos (infinitesimales), las ecuaciones trigonométricas ordinarias pueden sustituirse en las ecuaciones de la trigonometría imaginaria, omitiendo los infinitésimos de órdenes superiores al segundo.

b) La sustitución de los lados a, b, y c en lados puramente imaginarios ia, ib, y ic, respectivamente, convierte las ecuaciones de la trigonometría imaginaria en las ecuaciones de la trigonometría esférica[9].

c) Estableciendo en el plano y en el espacio un sistema de coordenadas semejante al cartesiano ordinario, es posible, con los métodos de la geometría analítica, calcular longitudes de líneas, áreas de superficies y volúmenes de sólidos.

Parece evidente que la relación de amistad que su profesor Bartels mantenía con Gauss supuso un impulso para Lobachevski a la hora de interesarse por el problema de las paralelas. Sin embargo, también es evidente por la correspondencia descubierta, que Bartels únicamente conocía los primeros trabajos de Gauss, hasta 1807 como mucho, por lo tanto es de justicia concluir que Lobachevski creó su geometría de forma independiente a cualquier influencia gaussiana. Tan bien resulta comprobado que conocía los trabajos de sus predecesores, sobre todo de Saccheri y Lambert. En cualquier caso, bien la falta de demostraciones que probaran la consistencia de una nueva geometría, bien la inutilidad de sus primeras investigaciones (1815-1817), indujeron a Lobachevski, como antes a Gauss, a pensar que la dificultad para superar tales escollos se fundamentara en un cambio de perspectiva para abordar el problema completamente diferente al supuesto hasta entonces. Dicha idea se ve claramente expresada en "Los Nuevos fundamentos de la Geometría", de 1835, donde dice:

> "La infructuosidad de las tentativas, hechas desde la época de Euclides por espacio de dos milenios, despertó en mí la sospecha de que en los mismos datos no estuviese contenida la verdad que se había querido demostrar, y que para su confirmación pudieran servir, como en el caso de otras leyes naturales, las experiencias, a ejemplo de las observaciones astronómicas. Habiéndome convencido finalmente de la exactitud de mi conjetura y adquirida la creencia de haber resuelto compretamente el difícil problema, escribí, en el año 1826, una Memoria sobre este asunto ('Exposition succinte des principes de la Geómetrie')." [2, p. 92]

[9]Véase el método utilizado por Taurinus para la construcción de su geometría logarítmico-esférica, pág. 10.

A diferencia de la concepción filosófica kantiana del espacio imperante de la época, los trabajos de Lobachevski chocaron de manera frontal contra los estamentos y pensamientos filosófico-científicos del momento. La doctrina kantiana consideraba el espacio como una intuición subjetiva, una realidad empírica indudable. Y posee también idealidad transcendental porque es la condición de posibilidad de toda experiencia y no está en las cosas en sí mismas. La visión de Lobachevski enlazaba más bien con el sensualismo y la corriente empirista, y consideraba a la Geometría como un campo dentro de las ciencias experimentales.

En 1855, poco antes de morir y ya completamente ciego, Lobachevski publicó su obra cumbre "La Pangeometría", su obra final, que significa geometría universal, ya que dicha nueva geometría englobaba la geometría de Euclides como un caso límite particular de ésta. He aquí cómo se expresa Lobachevski respecto a sus logros:

> "Habiendo mostrado en lo que precede de qué modo es preciso calcular la longitud de las líneas curvas, el área de las superficies y el volumen de los cuerpos, nos es permitido afirmar que la Pangeometría es un sistema de geometría completo. Una simple ojeada sobre las ecuaciones que expresan la dependencia existente entre los lados y los ángulos de los triángulos rectilíneos, es suficiente para demostrar que, a partir de ahí, la Pangeometría se convierte en un método analítico, que reemplaza y generaliza los métodos analíticos de la Geometría ordinaria. Se podría comenzar la exposición de la Pangeometría por las susodichas ecuaciones y también tratar de sustituir a estas ecuaciones otras que expresen las dependencias entre los ángulos y los lados de todo triángulo rectilíneo. Sin embargo, en este último caso, sería preciso demostrar que estas nuevas ecuaciones concuerdan con las nociones fundamentales de la Geometría. Las ecuaciones obtenidas, habiendo sido deducidas de esas nociones fundamentales, concuerdan necesariamente con éstas, y todas las ecuaciones con que se quisieran sustituir, si éstas no fueran una consecuencia de las ecuaciones, deben conducir a resultados contrarios a tales nociones. Así, las ecuaciones obtenidas son la base de la Geometría más general, pues no dependen de la suposición de que la suma de los tres ángulos de todo triángulo rectilíneo sea igual a dos ángulos rectos." [2, pp. 93-94]

Prácticamente de manera simultánea a Lobachevski pero de forma independiente, el magiar Bolyai descubrió la imposibilidad de poder demostrar el Quinto Postulado y la posibilidad de una geometría no euclídea. Siempre demostró una sobresaliente aptitud para las matemáticas, en las que se instruyó de la mano de su padre Wolfgang. La teoría de las paralelas formó parte de su ocupación diaria durante su estancia en la Real Academia Militar de Ingenieros de Viena (1817-1822).

Una de sus amistades más destacadas durante su época de juventud fue Carl Szász (1798-1853), al que parece que Bolyai le debió la idea explícita de considerar la paralela a AM, trazada por B, como la posición límite de una secante BC, que gira alrededor de B en un sentido determinado, esto es, considerar a BC paralela a AM, cuando BC, según una expresión Szász, se desprende de AM.

Bolyai denominó a dicha paralela con el nombre de *paralela asintótica* o *asíntota*; en conversaciones con Szász se presentaron los conceptos de *línea de equidistancia de una recta*, y *paraciclo* (similar al horociclo de Lobachevski), y se reconoció que la condición indispensable para la demostración del *axioma XI* pasaba por la posibilidad de afirmar que el paracilo es una recta. Una vez Szász abandonaba Viena una vez se le encomendó encargarse de la enseñanza del Derecho en el Colegio de Nagy-Enyed en Hungría, Bolyai se quedaba sólo en la batalla por la demostración del *axioma XI*. En principio parece claro que hasta 1820, Bolyai siguió la estrategia perseguida por Saccheri y Lambert, y le comunica a su padre la creencia de haber tenido éxito en su empresa, sin embargo su padre puso en su conocimiento de algunos errores cometidos. El reconocimiento de éstos por parte de János sirvió como revulsivo para los descubrimientos futuros que estaban por llegar, a pesar del excepticismo que su padre le hizo llegar. En una carta fechada el 4 de abril de 1820 un apesadumbrado Wolfgang escribía al joven János:

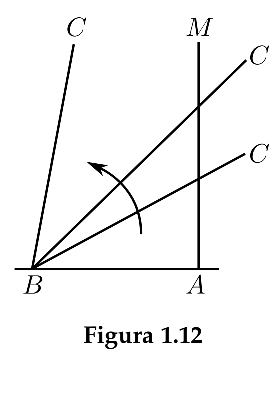


Figura 1.12

> "Te suplico, no trates de intentar conseguir la demostración de la teoría de las paralelas. Perderás en ello todo tu tiempo y, con todo lo que tu eres, no llegarás a demostrar esa proposición. No busques la razón de esa teoría ni por el procedimiento que me comunicas, ni por ningún otro. He explorado a fondo todas las vías posibles: no he

dejado ni una sola sin estudiar. He atravesado esa noche interminable que apagó toda la luz y la alegría de mi vida. Por el amor de Dios te lo ruego. Témele tanto como a las pasiones sensuales porque lo mismo que ellas, puede llegar a absorber todo tu tiempo y privarte de tu salud, de la paz de espíritu y de la felicidad de la vida. Este abismo oscuro puede, quizás devorar unos mil Newtons, uno sobre otro y no arrojará ninguna luz sobre la tierra [...] Pensé que me sacrificaría por la verdad. Estaba listo para convertirme en un mártir que eliminaría la contradicción de la geometría y la convertiría en un objeto purificado para la humanidad. Realicé enormes y monstruosos esfuerzos; siendo mis investigaciones infinitamente mejores que las de los demás, sin embargo no he logrado una satisfacción completa [...] Llegué a sentirme desconsolado, compadeciéndome de mismo y de toda la humanidad [...] He atravesado todos los arrecifes de este infernal Mar Muerto y siempre he regresado con el mástil y la vela rotos [...] Sin pensarlo arriesgué mi vida y mi felicidad: 'aut César aur nihil'." [5, p. 9]

Lejos de hacerle caso, Bolyai estaba por entonces completamente convencido de la independencia del Quinto Postulado. El joven János estaba dispuesto entonces a construir una *teoría absoluta* del espacio, siguiendo el método clásico de los griegos, es decir, aplicando el método deductivo, pero sin decidir a priori sobre la validez o no validez del Quinto Postulado.

Fue en 1823 cuando Bolyai se adentró profundamente en la verdadera y complicada naturaleza del problema que quería resolver; en lo sucesivo no añade a ello sino condiciones relativas al material y a la forma. Por enconces, descubre la siguiente ecuación

$$e^{-\frac{a}{k}} = \tan \frac{\pi(a)}{2}, \tag{1.10}$$

que relaciona el ángulo de paralelismo $\pi(a)$ al correspondiente segmento. Orgulloso de los avances que estaba realizando, János escribía a su padre desde Temesvár (hoy Timişoara, Rumanía) el 3 de noviembre de 1823:

"Mi querido y buen padre:

Tengo tanto que contarte sobre mis nueva creación, que de momento me es imposible entrar en detalles, así te escribo únicamente una cuartilla. Espero tu respuesta a mi carta de dos folios; y tal vez no te hubiera escrito antes de recibir tu respuesta si no hubiera deseado mandarte la carta que he escrito a la Baronesa, la cual te ruego se la hagas llegar [...]

Vamos ahora a otro asunto en tanto lo permita el papel. Planeo escribir, tan pronto lo haya puesto en orden, y cuando pueda publoicarse, un trabajo sobre las paralelas. No está todavía acabado, pero he dado con un camino que promete con certeza alcanzar la meta, si es en general alcanzable. Todavía no ha sido alcanzada pero he descubierto cosas tan magníficas que yo mismo estoy estupefacto.

Sería una pérdida eterna si se perdieran. Cuando las veas, padre, tú mismo lo reconocerás. Ahora no puedo decir más; sólo esto: que de la nada he creado un mundo completamente nuevo. Todo lo que te he enviado comparado con esto es un castillo de naipes frente a un verdadero castillo.

PS. He osado, padre mío, juzgar sobre estos trabajos de mi espíritu absolutamente y con convicción antes que tú; no temo de ti ninguna interpretación falsa (que ciertamente yo no merecería), lo que significa, que desde cierto punto de vista, te considero un segundo yo." [13, p. 86]

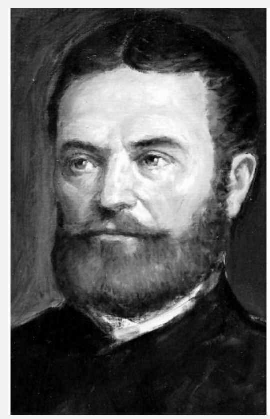
Su padre, alentado por la disposición del joven János, expresaba su deseo de acoger inmediatamente toda la teoría de su hijo en el "Tentamen Juventutem studiosa in elementa Matheseos" (en español "Ensayos de iniciación de la juventud escolar en los fundamentos de matemáticas puras", en adelante "Tentamen"), su obra magna, y le animó a escribir:

"Si es cierto que has llegado a la solución del problema, hay que publicarlo rápidamente por dos razones, primero porque las ideas pasan tan fácilmente de uno a otro que alguien pudiera anticiparse a la publicación; y segundo porque parece cierto que muchas cosas tienen su época, las cuales son encontradas al mismo tiempo en distintos lugares, así como las violetas aparecen en primavera en todos lados; y puesto que toda lucha científica no es más

> que una gran guerra, a la que no se sabe cuando seguirá la paz, se debe, cuando se puede, vencer, puesto que aquí la victoria corresponde al primero." [2, p. 99]

Wolfgang Bolyai estaba bastante alejado de la idea de que su presentimiento correspondiese a un hecho real, esto es, al simultáneo descubrimiento de la geometría no euclidea por parte de Gauss, Taurinus y Lobachevski. A diferencia de Lobachevski que había dado un mayor desarrollo a la geometría imaginaria, especialmente a su contenido analítico, Bolyai trató con mayor profundidad la cuestión de la dependencia e independencia de las proposiciones geométricas del Quinto Postulado. Lobachevski construyó su nuevo sistema geométrico partiendo de la negación de dicho postulado, mientras que Bolyai ponía en evidencia que las proposiciones y construcciones de la geometría ordinaria no dependen de dicho postulado. Tales proposiciones, que él denominaba *absolutamente verdaderas*, pertenecen a la *ciencia absoluta* del espacio. El estudio de tales proposiciones de dicha ciencia pudiera realizarse confrontando la geometría ordinaria con la de Lobachevski. Todo aquello que ambas geometrías tienen en común, por ejemplo las ecuaciones de la trigonometría esférica, pertenece a la geometría absoluta. Sin embargo, Bolyai no siguió este camino, y en su defecto se enfrascó en la tarea de demostrar directamente sus proposiciones absolutamente verdaderas, es decir, independientemente del Quinto Postulado.

János Bolyai (1802-1860)



Nació en la ciudad magiar de Kolozsvár, actual Cluj-Napoca (Rumanía), en el seno del Imperio Austro-Húngaro. Su padre, que fue antiguo compañero de universidad y amigo personal de Gauss, fue el encargado de instruir su formación, de manera que a los 13 años dominaba el Cálculo y la Mecánica Analítica. Entre 1818 y 1822 estudió en el Colegio Real de Ingeniería en Viena.
En 1832 publicó un completo tratado sobre geometría no euclídea completamente ajeno a las investigaciones de Lobachevski, que tres años antes había publicado un estudio muy similar. Sus logros no fueron merecidamente reconocidos en vida. Su padre intentó que Gauss lo considerara como pupilo, pero el alemán se negó en tanto en cuanto los resultados obtenidos eran similares a los que él ya había concebido años atrás. Este hecho desanimó enormemente a János Bolyai que nunca más continuó su carrera como matemático. Desgraciadamente jamás llegó a sus oídos los elogios que le dedicó Gauss en una carta a su pupilo Gerling fechada el 14 de febrero de 1832:

> "[. . .] Yo tengo a este joven geómetra Bolyai por un genio de primera magnitud." [13, p. 67]

En 1843, aquejado de fiebres tuvo que retirarse de su carrera militar. Murió de neumonía el 27 de enero de 1860 en la ciudad húngara de Marosvásárhely, actual Tirgu-Mures (Rumanía), en cuya Biblioteca Bolyai-Teleki puede encontrarse su manuscrito de más de 20.000 páginas, donde pone de manifiesto el profundo convencimiento de la consistencia de su teoría sobre la existencia de una nueva geometría no euclídea.

En 1826, el joven János le hizo llegar su trabajo a su antiguo profesor de matemáticas en la Academia Militar de Ingenieros Johann Wolter von Eckwehr (1789-1857), y en 1829 remitió el manuscrito a su padre. Lejos de quedar satisfecho, su padre no alcanzó a comprender la forma en que el joven János introducía en las ecuaciones el valor de una constante indeterminada. Sin embargo, tras varios inconvenientes económicos del joven János para la publicación de sus estudios, padre e hijo se pusieron de acuerdo para publicar la nueva teoría del espacio del joven János como un apéndice al primer volumen del "Tentamen". Dicho apéndice de 26 páginas se titulaba "Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adjecta ad casum fasitatis quadratura circuli geometrica" (en español, "Apéndice que exhibe la ciencia del espacio absolutamente verdadera; esto es la independencia de la veracidad o falsedad del Axioma XI de Euclides (a priori indecible para siempre) a la que se adjunta –en caso de falsedad– una cuadratura geométrica del círculo"). Dicho título se ha traducido modernamente como "La Ciencia Absoluta del Espacio".

János intentó publicar sus investigaciones en una segunda ocasión cuando participó en un concurso que consistía en realizar una interpretación geométrica de los números complejos. Su trabajo, que no fue comprendido, ofrecía una interpretación por parejas de números reales, muy similar a la que utilizamos hoy día. Adicionalmente, citó su apéndice, donde sugirió que la geometría que allí aparecía se daría en una esfera de radio imaginario.

Gauss recibió una primera copia del "Tentamen" en junio de 1831, y una segunda en enero de 1832. Al parecer el viejo Wolfgang se lo envió sin el consentimiento de su hijo János. Tan sólo 6 semanas después, el 6 de marzo de 1832, Gauss respondía a Wolfgang:

> "Si comienzo diciendo que no podría elogiar este trabajo, te quedarás sorprendido de momento; pero no puedo hacer otra cosa. Alabar el trabajo sería alabarme a mí mismo, ya que el contenido del trabajo, el camino que tu hijo ha seguido, los resultados que ha obtenido, coinciden casi exactamente con mis propias meditaciones, que han ocupado mi mente en los últimos treinta y cinco años. Me encuentro sorprendido en extremo.
>
> Mi intención era, en relación con mi propio trabajo, del cual he confiado bien poco a papel, no publicarlo durante mi vida. La mayoría no tiene la lucidez para entender nuestras conclusiones y sólo he encontrado unos pocos que han recibido con interés lo que les he contado respecto a tal asunto. Para comprender estas cosas, uno debe tener una percepción entusiasta de lo que es necesario, y en este punto la mayoría están bastante confundidos. Por otra parte, tenía intención de escribir un artículo de forma que las ideas no se perdiesen conmigo.
>
> De modo que estoy gratamente sorprendido de no hacer este esfuerzo, y estoy encantado de que sea precisamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya precedido de un modo tan notable." [2, p. 100]

Wolfgang le hizo llegar a su hijo la respuesta de Gauss, añadiendo:

> "La respuesta de Gauss respecto a tu obra redunda en honor de nuestra patria y de nuestra nación." [2, pp. 100-101]

Sin embargo, a pesar de la última frase de Gauss, János quedó totalmente decepcionado y desilusionado con la respuesta del gran matemático alemán; no podía ni quería convencerse de que otro, antes y de manera independiente de él, hubiera llegado a la geometría no euclídea. Llegó incluso a imaginar que tras enviar su padre su "Appendix" a Gauss, éste tratara de apropiarse de sus ideas. A pesar de ser un hombre de temperamento fuerte, que había participado y vencido en trece duelos consecutivos, János cayó en una profunda depresión mental y nunca más volvió a publicar sus resultados. En 1851, con un gran resentimiento hacia Gauss, escribía:

> "En mi opinión, y como estoy persuadido, en la opinión de los que juzgan sin prejuicios, todas las razones esgrimidas por Gauss para explicar por qué nunca publicó nada en su vida sobre este tema son insuficientes; porque en la ciencia, como en la vida diaria, es necesario clarificar las cosas de interés general que todavía están ambiguas, así como despertar, acrecentar y promover el sentido perdido de la verdad. ¡Ay!, para gran detrimento de la humanidad, solo unos pocos tienen aptitudes para las matemáticas; por tal motivo Gauss, para ser coherente, debería haber mantenido una gran parte de su gran trabajo para sí mismo. Es un hecho que entre los matemáticos, e incluso entre personas célebres, existen, desafortunadamente, mucha gente superficial, pero esto no es una razón para que un hombre sensible escriba sólamente cosas superficiales y mediocres, dejando que la ciencia entre en un estado letárgico. Tal suposición no es natural, por lo que considero ciertamente incorrecto que Gauss, en lugar de reconocer honesta y definitivamente el gran trabajo del Apéndice y del Tentamen, y en lugar de expresar su gran alegría e interés y tratar de preparar una apropiada recepción para la buena causa, evitando todo esto, él descansa contento con piadosos deseos y quejas acerca de la ausencia de una civilización adecuada. Ciertamente, no es esta la actitud que llamamos vida, trabajo y mérito." [8, pp. 179-180]

Entre las principales aportaciones de Bolyai a la geometría hiperbólica caben destacar:

1. La definición de paralelas y sus propiedades independientemente del Quinto Postulado de Euclides.

2. El concepto de "ángulo de paralelismo" y la relación entre la distancia de un punto a una recta y dicho ángulo, que es la clave de la trigonometría hiperbólica (figura 1.13). En la primera carta escrita a su padre en 1823,

Bolyai le hizo saber que había descubierto la ecuación (1.10) mediante la cual se podía obtener el ángulo de paralelismo $\pi(a)$ en función de una constante k;

3. El concepto de circunferencia de radio infinito, "paraciclo". En geometría hiperbólica, un paraciclo es una curva cuyas normales convergen asintóticamente. Puede ser descrito como el límite de los círculos que comparten una tangente en un punto dado cuando sus radios tienden a infinito. En geometría euclídea ordinaria, un círculo de radio infinito sería una recta, pero en geometría hiperbólica esta recta se curva.

4. La trigonometría esférica es independiente del Quinto Postulado de Euclides.

5. La trigonometría plana en la geometría no euclídea y aplicaciones para el cálculo de áreas y volúmenes.

6. Problemas que pueden ser resueltos mediante métodos elementales. Cuadratura del círculo, en la hipótesis de falsedad del Quinto Postulado.

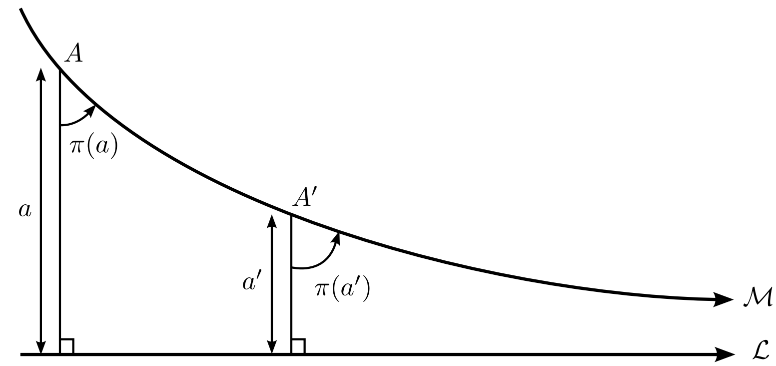


Figura 1.13: El ángulo de paralelismo, $\pi(a)$, depende del punto A de $\mathcal{M}$.

Veamos ahora algunos de los resultados absolutamente maravillosos, por su sencillez y elegancia, a los que llegó el magiar. Entre ellos está el siguiente teorema (figura 1.14).

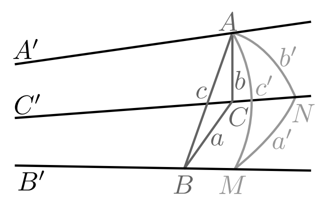


Figura 1.14

Teorema 1.1

En un triángulo rectilíneo, las circunferencias de radio igual a sus lados están relacionados entre si como los senos de los ángulos opuestos.

Sea ABC un triángulo rectángulo en C, y BB' la perpendicular en B al plano del triángulo. Se trazan las rectas AA' y CC' por los vértices A y C respectivamente, paralelas en cierto sentido a BB'; imagínese la horosfera (en principio plana) que pasa por A y corta ortogonalmente las rectas AA', BB' y CC' en los puntos A, M y N respectivamente. Se denotan a', b', c' a los lados del triángulo horosférico AMN, y considerando que la geometría sobre la esfera de radio infinito es idéntica a la geometría plana ordinaria, entonces se puede afirmar que:

$$\operatorname{sen}\widehat{AMN} = b' : c'.$$

Pero sobre la horosfera, dos arcos de horociclo están entre sí como las circunferencias que tienen por radios (denominados horicíclicos) aquellos arcos, así que, denotando $cirf.\ x'$ la circunferencia de radio horicíclico x', se puede afirmar que:

$$\operatorname{sen}\widehat{AMN} = cirf.\ b' : cirf.\ c'.$$

Por otro lado, una circunferencia de radio horocíclico x' trazada sobre la horosfera, puede considerarse como una circunferencia ordinaria, cuyo radio rectilíneo x sea la mitad de la cuerda del arco horocíclico $2x'$. De este modo, si se denota $\bigcirc x$ como la circunferencia de radio rectilíneo x y se observa que los dos ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AMN}$ son iguales, la anterior relación se puede expresar del siguiente modo:

$$\operatorname{sen}\widehat{ABC} = \bigcirc b : \bigcirc c.$$

De la propiedad del triángulo rectángulo ABC, expresada en esta igualdad, se puede deducir el enunciado del teorema de Bolyai, del mismo modo que de la relación euclídea

$$\operatorname{sen}\widehat{ABC} = b : c$$

se deduce la proporcionalidad entre los lados de una triángulo y los senos de los ángulos opuestos (*Appendix*, § 25) Siguiendo todo lo anterior, el *teorema de Bolyai* se expresa brevemente así:

$$\bigcirc a : \bigcirc b : \bigcirc c = \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\gamma. \tag{1.11}$$

Si ahora se quisiera categorizar el sistema geométrico, se tiene:

1. En la hipótesis euclídea, $\bigcirc x = 2\pi x$, y sustituyendo en la ecuación (1.11),

$$a : b : x = \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\gamma. \tag{1.12}$$

2. En la hipótesis no euclídea,

$$\bigcirc x = \pi k \left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right) = 2\pi k \operatorname{senh}\left(\frac{x}{k}\right),$$

y operando del mismo modo resulta,

$$\operatorname{senh}\left(\frac{a}{k}\right) : \operatorname{senh}\left(\frac{b}{k}\right) : \operatorname{senh}\left(\frac{c}{k}\right) = \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\gamma. \tag{1.13}$$

La ecuación (1.13) se denomina el *teorema de los senos* de la geometría de Lobachevski-Bolyai.

De la ecuación (1.11), siguiendo el procedimiento idéntico para llegar a la ecuación (1.12), Bolyai dedujo la *proporcionalidad entre los senos de los ángulos y los senos de los lados en un triángulo esférico*. De este modo Bolyai manifiesta la independencia de la trigonometría esférica respecto al Quinto Postulado (*Appendix*, § 26), lo cual no hace más que poner en valor la verdadera importancia del teorema de Bolyai.

Otro de los resultados de la geometría absoluta es la siguiente construcción de una paralela a una recta AN trazada por un punto D (*Appendix*, § 34).

Se trazan las rectas DB y AE perpendicularmente a AN y se traza desde D la perpendicular DE a la recta AE. El ángulo $\widehat{EDB}$ del cuadrilátero trirectángulo $ABDE$ es recto o agudo, por lo que ED resulta igual o mayor que AB. Con centro en A se describe una circunferencia de radio ED, que corta al segmento DB en un punto O, coincidente con B, o bien comprendido entre B y D. Bolyai manifiesta que la *recta AO forma con DB un ángulo $\widehat{AOB}$ con igual medida al ángulo de paralelismo correspondiente al segmento BD*[10] (*Appendix*, § 27). Por lo tanto, se traza por D una paralela DM a AN de modo que el ángulo $\widehat{BDM}$ resulte igual al ángulo $\widehat{AOB}$.

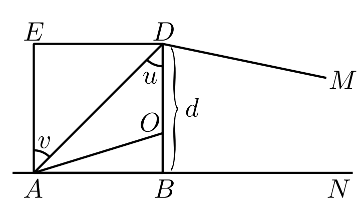


Figura 1.15

[10]Bolyai demuestra esta proposición, para ello considera las circunferencias $\bigcirc AB$ y $\bigcirc ED$, resultantes de las rotaciones de los puntos B y D alrededor de la recta AE, la primera perteneciente al plano perpendicular al eje AE que contiene precisamente el punto A, y la segunda perteneciente a una *superficie equidistante* de dicho plano. La equidistancia entre el plano y la superficie viene dada precisamente por el segmento $d = BD$. La relación entre ambas circunferencias es precisa y únicamente de dicho segmento d. Dicha relación pude expresarse también

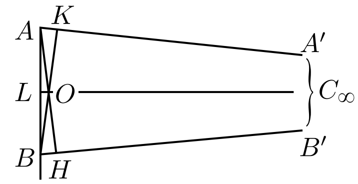


Figura 1.16

Bolyai también se encargó de crear construcciones no euclídeas, como la *cuadratura del círculo*. Partiendo de la *construcción, en la geometría no euclídea, del segmento correspondiente a un ángulo (agudo) de paralelismo dado* (construcción inversa a la vista anteriormente), y puesto que el teorema sobre la *eventual* incidencia de las tres alturas de un triángulo es lícito también la geometría de Lobachevski-Bolyai, se fija un punto B sobre el lado AB del ángulo agudo $\widehat{BAA'}$ de manera que la paralela BB' forme el ángulo $\widehat{B'BA}$ agudo con la recta AA' (figura 1.16). Las dos semirrectas AA', BB' y el segmento AB pueden considerarse lados de un triángulo, del cual uno de sus vértices es el punto C_∞, común a las dos paralelas AA' y BB'. Si se trazan desde los vértices A y B sendas perpendiculares AH y BK sobre los lados opuestos, ambas perpendiculares se cortan en un punto O interior del triángulo anteriormente definido, en el cual concurre también la perpendicular al lado AB trazada desde C_∞. Por lo tanto, si desde O se traza la perpendicular OL a AB, se determinará el segmento AL correspondiente al ángulo de paralelismo $\widehat{BAA'}$.

Un caso particular sería que el ángulo $\widehat{BAA'}$ mida 45° ($\pi/4$ radianes), en cuyo caso AL se convierte en la constante de Schweikart.

Una manera alternativa de enunciar el problema resuelto sería la siguiente: *Construir una recta paralela a un lado de un ángulo agudo y perpendicular al otro lado*. Sin embargo, la solución propuesta por Bolyai (*Appendix*, § 35) es bastante más compleja.

1.3 Curvatura gaussiana, Topología y el teorema de Gauss-Bonet

A lo largo de los siglos, los geómetras habían abordado un desafío fundamental: ¿cómo cuantificar el tipo y la extensión de la curvatura de una superficie bidimensional? La respuesta se hizo esperar hasta finales del siglo XVIII. Gauss consideró una superficie compuesta de curvas; al tomar un punto en dicha superficie y analizar las diversas curvas pertenecientes a ésta que pasan por él, Gauss obtuvo un número que cuantificada la curvatura en dicho punto, número al que denominamos *curvatura gaussiana*. Gauss demostró que la curvatura es definida extrínsecamente y determinable intrínsecamente, de manera que un supuesto habitante bidimensional de la superficie podría conocer el valor de dicha curvatura sin necesidad de salir de su mundo bidimensional (*Theorema Egregium*).
La curvatura gaussiana de una superficie es un número real $K(P_0)$ que mide la curvatura intrínseca en cada punto regular P_0 de una superficie. Esta curvatura puede calcularse a partir de los determinantes de la primera y segunda formas fundamentales de la superficie (véase § 1.5 en pág. 38):

$$K(P_0) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{b_{11}b_{22} - {b_{12}}^2}{g_{11}g_{22} - {g_{12}}^2}$$

En general varía de un punto a otro de la superficie y está relacionada con las curvaturas principales de cada punto (κ_1 y κ_2), mediante la relación $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$. Dichas curvaturas se corresponden con las de las direcciones principales

considerando el teorema de Bolyai (1.11), el cual, aplicado a los dos triángulos rectángulos ADE y ADB, conduce a la siguiente expresión

$$\bigcirc AB : \bigcirc ED = \operatorname{sen} u : \operatorname{sen} v.$$

De lo anterior se deduce que la relación $\operatorname{sen} u : \operatorname{sen} v$ es invariable si, al conservar fijo el segmento d, la recta AE se desvía, manteniéndose perpendicular a BD. En especial, si el pie de AE tiende al infinito sobre AN, entonces u tiende a $\pi(d)$ y v a un ángulo recto. Por lo tanto

$$\bigcirc AB : \bigcirc ED = \operatorname{sen} \pi(d) : 1.$$

Por otro lado, en el triángulo rectángulo AOB se verifica la relación:

$$\bigcirc AB : \bigcirc AO = \operatorname{sen} \widehat{AOB} : 1,$$

las dos últimas expresiones conducen a establecer la igualdad de los dos ángulos $\pi(d)$ y $\widehat{AOB}$, tal y como se quería demostrar.

del plano tangente a la superficie en cada punto, es decir, de todas las direcciones posibles de dicho plano tangente, aquellas en las que la curvatura normal toma sus valores extremos. En superficies tipo esfera, donde todas las curvas se doblan de manera similar, dicha curvatura es positiva (se demuestra que en una esfera de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$ y radio r, $K(S^2) = 1/r^2 > 0$), mientras que en superficies del tipo paraboloide hiperbólico o "silla de montar", es negativa. En un cilindro, la curvatura gaussiana es cero, al igual que en un plano horizontal; de hecho, si una superficie tiene curvatura cero, eso se traduce en que se puede "desenrollar" hasta quedar plana.

A excepción de la esfera que se trata de una figura excepcionalmente simétrica en muchos sentidos, cuya curvatura es uniforme (cada punto de la misma es idénticamente curvo a cualquier otro, se dice que son *umbilicales* con la misma curvatura normal $\kappa_1 = \kappa_2 = 1/r$), la mayoría de superficies curvas que se manejan tienen una curvatura variable en toda su extensión. Hablando en términos geométricos, los matemáticos consideran que la curvatura es un fenómeno local, porque describe una pequeña región de una superficie, pero no arroja luz sobre su estructura en general.

En el sentido opuesto desde un punto de vista geométrico, surge una rama de las matemáticas que conocemos como *topología*, que se encarga de estudiar las propiedades globales de una figura. En topología, lo que importa es la estructura general, no los detalles de cada pequeña región. En esencia, la topología considera que dos figuras son sencillamente idénticas si una puede adoptar la forma de la otra mediante transformaciones sin cortar ni pegar. Por supuesto que dicho proceso de transformación puede distorsionar la curvatura en todos y cada uno de los puntos. En tal caso, curvatura y topología pueden parecer nociones geométricas completamente independientes, irrelevantes la una para la otra. Sin embargo, Gauss se encargó de descubrir una íntima conexión entre estas dos maneras opuestas de entender el análisis de figuras.

A pesar de que la curvatura se defina localmente, Gauss fue capaz de hallar una manera de calcular el promedio de la curvatura en toda la superficie a través del cálculo integral. Al integrar la curvatura en toda la superficie genera un número que de alguna manera describe la figura. Dicha integración representa en cierto modo una curvatura total. Gauss descubrió que dicho número tenía una importancia mucho mayor que la curvatura en un punto cualquiera, en particular, resistía a la transformación topológica. Es decir, por mucho que la superficie cambiara y la curvatura oscilara, el número que Gauss había obtenido para la curvatura general permanecía invariante. Es más, Gauss identificó dicho concepto como un objeto conocido de la topología: la *característica de Euler* (originalmente dada para sólidos platónicos) o conocida hoy día por su generalización como *característica de Euler-Poincaré*. Dicho número, procedente de la ecuación poliédrica de Euler (Nº Caras $+$ Nº Vértices $-$ Nº Aristas $= 2$) se considera único y depende únicamente del número y tipo de agujeros que haya en una superficie. Se denota con la letra χ, y en el caso de un politopo de tres dimensiones, es decir un poliedro homeomorfo[11] a una esfera, $\chi = 2$. Gauss observó que integrar la curvatura en toda la superficie da precisamente $2\pi\chi$.

En realidad, una vez más, Gauss no llegó a publicar dichos estudios, que fueron redescubiertos y generalizados posteriormente en 1848 por el francés Pierre Ossian Bonet (1819-1892). El *teorema de Gauss-Bonet*, como lo conocemos hoy día, posee una relevancia fundamental no sólo en la geometría moderna porque conecta la geometría de superficies (en el sentido de la curvatura) con su topología (en el sentido de la característica de Euler), sino en la física, ya que la gravedad se interpreta como la curvatura espacio-tiempo en el desarrollo de la teoría general de la relatividad. Formalmente, si se supone que $\mathcal{M}$ es una variedad de Riemann compacta orientable de dimensión 2, con borde $\partial\mathcal{M}$, K es la curvatura gaussiana en los puntos de $\mathcal{M}$ y k_g es la curvatura geodésica en los puntos de $\partial\mathcal{M}$, entonces:

[11] En resumen, el homeomorfismo se define como una función biyectiva, continua y con inversa continua, entre dos espacios topológicos. De modo intuitivo, el concepto de homeomorfismo refleja cómo dos espacios topológicos son "los mismos" si permitiendo estirar, doblar o cortar y pegar, uno se convierte en otro y viceversa. Sin embargo, los criterios intuitivos de "estirar", "doblar", "cortar y pegar" requieren de cierta práctica para aplicarlos correctamente. Por ejemplo, deformar un segmento de línea hasta un punto no está permitido. Sin embargo, piense el lector en cualquier poliedro convexo y la esfera, o una rosquilla y una taza de café. Estos objetos son homeomorfos, es decir desde un punto de vista topológico son idénticos.

$$\int_{\mathcal{M}} K\, dA + \int_{\partial\mathcal{M}} k_g\, ds = 2\pi\chi(\mathcal{M})$$

El teorema se puede aplicar en particular a superficies compactas sin frontera, en cuyo caso se omite la segunda integral. La característica de Euler-Poincaré de una superficie orientable, compacta y sin frontera es $2-2g$, donde g es el género de la superficie. Cualquier superficie orientable compacta sin frontera es topológicamente equivalente a una esfera con asas y g es el número de ellas. El teorema expresa sorprendentemente que la característica de Euler-Poincaré es un invariable topológico, es decir no cambia aunque la superficie $\mathcal{M}$ se doble o se deforme (varía la curvatura de sus puntos). Por lo tanto, si se tiene por ejemplo una esfera con una abolladura, entonces su curvatura total es 4π (ya que en dicho caso $\chi(\mathcal{M})=2$), independientemente de lo grande o profunda que resulta dicha abolladura.

1.4 Los primeros modelos "reales" de la geometría no euclídea

El primero en construir un modelo plausible de la geometría hiperbólica fue el italiano Eugenio Beltrami (1835-1900). Beltrami trabajó en el campo de la geometría diferencial y la física matemática, y fue el primero en demostrar la consistencia de la geometría hiperbólica de Lobachevski en 1868, en su libro "Teoría fundamental de espacios de curvatura constante". Para ello utilizó la *pseudoesfera*, una superficie de revolución generada al girar una curva tractriz alrededor de su asíntota. Dicha curva, posee la propiedad de que la longitud del segmento tangente comprendido entre el punto de tangencia y el punto de corte con su asíntota es constante.

Según Beltrami, las rectas para esta geometría están representadas por las geodésicas en la pseudoesfera. En esta superficie existen dos tipos de líneas geodésicas, curvas que partes del ecuador y suben hasta el infinito, y curvas (cerradas al tratarse de una superficie de revolución) alrededor del eje de la pseudoesfera. En esta superficie que por un punto exterior a una geodésica se pueden trazar infinitas geodésicas que no cortan a la primera, es decir, hay infinitas paralelas. La interpretación de su descubrimiento se traducía en que todas las relaciones geométricas aplicadas en una zona específica del plano hiperbólico coinciden con las relaciones geométricas sobre una zona específica de la pseudoesfera, es decir, que existe una isometría entre ambos, de tal modo que el papel de los segmentos de una recta en dicho plano está desempeñado por las líneas de menor longitud sobre la superficie, las denominadas *geodésicas*. De este modo en la geometría de Lobachevski no cabe afirmar que la distancia mínima entre dos puntos es la longitud del segmento recto que los une como se deduce en la geometría euclídea, sino la longitud del tramo de curva geodésica que los une. Se dice que dos figuras son isométricas si entre sus puntos se puede establecer una correspondencia, de manera que la distancia entre puntos correspondientes sea la misma. Un movimiento sobre la pseudoesfera que conserve las dimensiones desde un punto de vista de la geometría intrínseca, independientemente que vaya acompañado de torsiones, representa un movimiento en el plano de Lobachevski. Las longitudes, áreas y ángulos se miden sobre la superficie, correspondiendo a longitudes, áreas y ángulos en la geometría de Lobachevski.

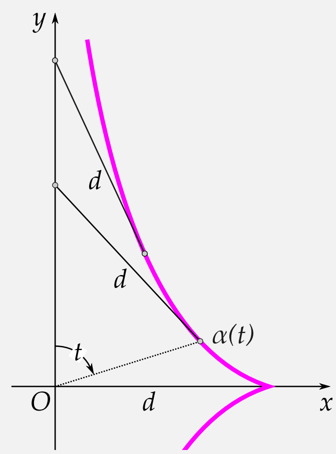
La pseudoesfera tiene la característica fundamental de que todos sus puntos poseen una curvatura gaussiana negativa constante. Todas las superficies de curvatura negativa constante tienen (al menos localmente) la misma geometría intrínseca y pueden servir por tanto como modelo de la geometría hiperbólica. Sin embargo, posteriormente, el alemán David Hilbert (1862-1943) demostró en 1901 que dicha superficie no se podía extender infinitamente en todas las direcciones sin tropezar con singularidades, y en consecuencia no servía para representar la geometría hiperbólica en *todo* el plano. Por otro lado, el neerlandés Nicolaas Kuiper (1920-1994) demostró en 1955 que existían superficies lisas que representan (en el sentido de geometría intrínseca) todo el plano hiperbólico, pero que tales superficies no pueden ser deformadas continuamente y no tienen por lo tanto una curvatura definida.
Cabe destacar que treinta años anteriores a las investigaciones llevadas a cabo por Beltrami, el matemático germano-ruso Ferdinand Minding (1806-1885) había estudiado ya la geometría intrínseca de la pseudoesfera, y demostró de

hecho las propiedades que verifican la coincidencia entre las dos geometrías. Desgraciadamente ni él ni nadie se percataron de este hecho hasta que las ideas de Lobachevski fueron lo suficientemente divulgadas. Beltrami únicamente tuvo que comparar los resultados de Lobachevski y Minding para percatarse de la relación entre ambas.

La verdadera repercusión del descubrimiento de Beltrami es que significó un cambio de actitud por completo de los matemáticos hacia la geometría hiperbólica, pasando de una concepción "ficticia" a convertirse en algo real y

Tractriz

Denominamos *tractriz* a la curva que describiría un objeto situado en un extremo de un segmento de longitud d que es arrastrado por otro situado en el extremo opuesto de dicho segmento que se desplaza en línea recta. Como curiosidad se le conoce como la *curva del hueso de perro*.



Fue introducida por primera vez por el francés Claude Perrault (1613-1688) en 1670, y más tarde estudiada en 1676 por el inglés Isaac Newton (1642-1727) y en 1692 por el neerlandés Christiann Huygens (1629-1695).

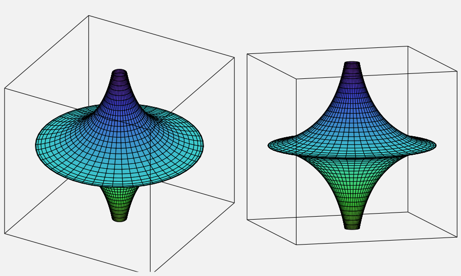
Su ecuación puede expresarse en forma paramétrica del siguiente modo: $\alpha(0,\pi) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) \equiv \begin{cases} x(t) = d \operatorname{sen} t \\ y(t) = d\left(\cos t + \log\left(\tan \frac{t}{2}\right)\right) \end{cases}$$

donde t es el ángulo que el eje y forma con el vector $\alpha'(t)$ (vector tangente a la curva).

Se trata de una curva parametrizada diferenciable, regular excepto en $t = \pi/2$. La longitud del segmento tangente a la tractriz entre el punto de tangencia y el eje y es constante igual a d, y el eje y es la recta asíntota de la curva.

Pseudoesfera



Se denomina *pseudoesfera* o *tractoide* a la superficie de revolución que se obtiene de girar la curva tractriz alrededor de su asíntota. Se trata de una superficie cuya curvatura de Gauss es negativa constante e igual a $-\frac{1}{d^2}$, lo que significa que todos sus puntos son puntos de silla, siendo d el radio de la pseudoesfera (ver figura de tractriz).

A pesar de tratarse de una superficie no acotada, su área y volumen si lo son, siendo éstos $4\pi d^2$ y $\frac{2}{3}\pi d^3$ respectivamente. Su parametrización es: $\Phi(u,v) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(u,v) \equiv \begin{cases} x(u,v) = d \cos u \operatorname{sen} v \\ y(u,v) = d \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z(u,v) = d\left(\cos v + \log\left(\tan \frac{u}{2}\right)\right) \end{cases}$$

perfectamente tangible.

Posteriormente se desarrollaron otros modelos. El alemán Felix Klein (1849-1925) generalizó el modelo de Beltrami a todo el espacio n-dimensional. En 1870 expuso la interpretación en el círculo, donde únicamente se considera como "plano" de Lobachevski el interior de dicho círculo, excluyendo del estudio la circunferencia del mismo y el dominio exterior. Las cuerdas del círculo se denominarán "rectas" y de acuerdo al convenio adoptado sus puntos extremos son excluidos ya que pertenecen a la circunferencia.

Se considerará "movimiento" a cualquier transformación que aplique el círculo en sí mismo y que transforme por lo tanto rectas en rectas, es decir, que no distorsione las cuerdas, por ejemplo una rotación del círculo alrededor de su centro. De este modo los teoremas de la geometría ordinaria dentro del círculo se transforman en los teoremas de la geometría hiperbólica y viceversa. Por ejemplo, el axioma de Lobachevski especifica que por un punto exterior a una recta se pueden trazar al menos dos rectas que no corten a la primera. Si trasladamos este axioma al lenguaje de geometría ordinaria en el círculo se obtiene que por un punto interior al círculo y exterior a una cuerda se pueden trazar al menos dos cuerdas que no cortan a la primera, por lo tanto dicho axioma se satisface en el modelo especificado por Klein.

En la geometría hiperbólica, entre todas las rectas que pasan por un punto exterior A a una recta dada BC y que no cortan a ésta, existen dos rectas "extremo", que pasan precisamente por B y C. Por lo tanto no tienen puntos en común con BC puesto que los puntos de la circunferencia están excluidos (figura 1.17). Por lo tanto, este teorema de Lobachevski se cumple en el modelo especificado.

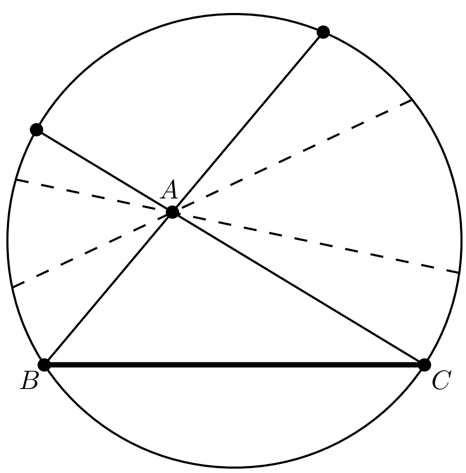


Figura 1.17: Modelo de Klein

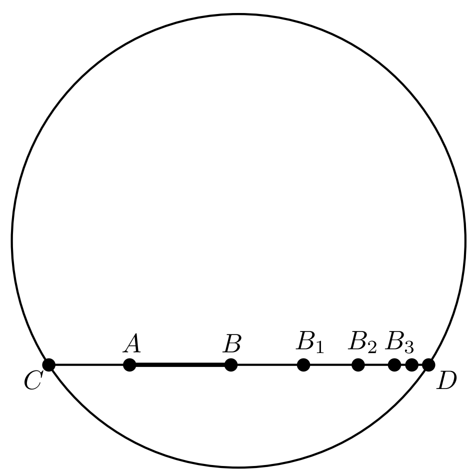


Figura 1.18

Con el fin de poder seguir traduciendo los teoremas de Lobachevski al lenguaje de la geometría euclídea dentro del círculo es necesario especificar cómo se miden distancias y ángulos. Es evidente que el proceso de medida de longitudes no puede ser el mismo que la geometría tradicional, puesto que una cuerda, en el sentido ordinario, tiene una longitud finita, mientras que la recta que dicha cuerda representa es infinita.

En la geometría ordinaria la longitud de un segmento XY se mide mediante comparación con otro segmento AB que consideramos de longitud unidad. Para ello se coloca el segmento AB a lo largo de XY. Si queda una parte de XY menor que AB dividimos este último en 10 partes iguales (iguales en el sentido de que cada una se obtiene por traslación de la anterior); dichas partes se colocan encima de la porción restante de XY; si fuera necesario dividimos AB en 100 partes y así sucesivamente. De este modo, la longitud de XY se puede expresar mediante una fracción decimal que puede tener incluso infinitas cifras. Por lo tanto, las longitudes pueden ser medidas mediante un movimiento de cierta parte del segmento tomado como unidad, y por lo tanto la medida se basa en el movimiento. Una vez los movimientos han sido definidos (que en el caso que compete se definen como transformaciones del círculo en sí mismo que llevan rectas sobre rectas), conocemos qué segmentos deben considerarse iguales y cuál es su longitud (cómo debemos medirla). Los términos en que se define el movimiento contienen ya, aunque de un modo explícito, la regla para medir longitudes. Los ángulos se miden exactamente del mismo modo, por comparación con el ángulo tomado como unidad. De este modo, la regla para medir ángulos está también contenida en la definición de movimiento.

La medida de longitudes y ángulos en la geometría hiperbólica se realiza de un modo sencillo. Sea el segmento AB sobre la cuerda CD (figura 1.4), midiendo segmentos del modo que se realiza en la geometría ordinaria (p. ej. $|CB|$ es la longitud euclídea del segmento CB), se define la longitud de AB mediante la siguiente expresión:

$$d(A,B) = \left| \ln \frac{|CB|\,|DA|}{|CA|\,|DB|} \right| \tag{1.14}$$

Si aplicamos la ecuación (1.14) para la medida de longitudes resulta que una cuerda tendrá longitud infinita. Esto es debido a que si, mediante una transformación que hayamos considerado como movimiento, transformamos el segmento AB en el BB_1, éste en el B_1B_2, y así sucesivamente, los segmentos B_kB_{k+1} serán cada vez más pequeños en el sentido geométrico clásico (aunque iguales en el sentido de nuestro modelo para la geometría hiperbólica; figura 1.4). Los puntos $B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots$ se van acumulando en el extremo de la cuerda. Sin embargo, para nosotros las cuerdas no tienen punto extremo puesto que este se encuentra sobre la circunferencia y por lo tanto por el convenio adoptado, están en el infinito. En el sentido de la geometría hiperbólica los puntos $B_1, B_2, \ldots$ no se acumulan en ninguna parte, sino que tienden al infinito. Por medio de las transformaciones que se han tomado como movimientos no se pueden alcanzar los puntos de la circunferencia desde dentro del círculo sin más que colocar segmentos iguales uno a continuación del otro.

Con el fin de entender mejor cómo se transportan los segmentos en este modelo, se considera la transformación que consiste en una traslación a lo largo de una recta. Se introduce un sistema de coordenadas rectangulares en el plano y como origen de coordenadas se toma el centro del círculo. Con el fin de simplificar las operaciones, se considera el círculo de radio unidad, de manera que su circunferencia tiene de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y los puntos del interior del mismo satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 < 1$.

Se considera la transformación dada por las expresiones:

$$x' = \frac{x+a}{1+ax}, \quad y' = \frac{y\sqrt{1-a^2}}{1+ax} \tag{1.15}$$

donde x' e y' son las coordenadas del punto en que se transforma el punto de coordenadas x e y, y a es un número arbitrario de valor absoluto menor que 1.

Despejando x e y de la expresión (1.15), se obtiene las expresiones inversas de x e y en función de x' e y':

$$x = \frac{x'-a}{1-ax'}, \quad y = \frac{y'\sqrt{1-a^2}}{1-ax'} \tag{1.16}$$

La transformación (1.15) satisface las dos condiciones para ser un "movimiento" en el modelo especificado, de manera que: 1) transforma el círculo en sí mismo; 2) transforma rectas en rectas.

La primera propiedad se demuestra observando que la relación $x^2 + y^2 \leq 1$ implica la correspondiente relación $x'^2 + y'^2 \leq 1$, y viceversa. Demuéstrese, por ejemplo, que cuando $x^2 + y^2 = 1$ necesariamente $x'^2 + y'^2 = 1$, esto es, que los puntos de la circunferencia se transforman en puntos de la circunferencia.
Si se calcula $x'^2 + y'^2 = 1$ haciendo uso de (1.15) y teniendo en cuenta que $x^2 + y^2 = 1$, es decir, $y^2 = 1 - x^2$,

$$\begin{aligned} x'^2+y'^2 &= \frac{(x+a)^2+y^2(1-a^2)}{(1+ax)^2} = \frac{(x+a)^2+(1-x^2)(1-a^2)}{(1+ax)^2} = \\ &= \frac{x^2+2ax+a^2+1-x^2-a^2+a^2x^2}{(1+ax)^2} = \frac{1+2ax+a^2x^2}{1+2ax+a^2x^2} = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto cuando $x^2+y^2=1$, también $x'^2+y'^2=1$. El resto de los casos se demuestran del mismo modo.

La segunda propiedad de (1.15) puede demostrarse fácilmente. Se sabe que una recta se representa a través de una ecuación lineal; y de forma inversa, una ecuación lineal representa una recta. Considérese una recta de ecuación

$$Ax+By+C=0 \tag{1.17}$$

Si se aplica la transformación (1.15) se obtiene

$$A\,\frac{x'-a}{1-ax'}+B\,\frac{y'\sqrt{1-a^2}}{1-ax'}+C=0$$

y reduciendo a común denominador,

$$(A-aC)x'+B\sqrt{1-a^2}\,y'+(C-aA)=0$$

Como se puede observar, esta ecuación es lineal y por lo tanto representa una recta. Además, es la recta en la que se transforma la recta (1.17) mediante (1.15). Obsérvese asimismo que la transformación (1.15) lleva el eje Ox sobre sí mismo, produciendo sólo un desplazamiento longitudinal de sus puntos. Esto es evidente, ya que sobre este eje $y=0$ y por (1.15) entonces $y'=0$. Sobre el eje Ox la transformación viene dada por una única ecuación:

$$x'=\frac{x+a}{1+ax}\ (|a|<1) \tag{1.18}$$

Sobre este eje el segmento x_1x_2 se transforma aplicando (1.18) en x_1x_2' y según los convenios adoptados sus longitudes se deben considerar iguales. Este es el modo en que se efectúa el "transporte de segmentos".

Para el centro O del círculo se tiene que $x=0$ y por lo tanto $x'=a$; es decir, mediante (1.15) el centro se traslada a un punto A de coordenada $x=a$.

Dado que la única condición impuesta a a es $|a|<1$, el centro se puede transformar en cualquier punto del diámetro a lo largo del eje Ox.

Mediante la misma transformación el punto que estaba en A se convierte en el punto A' de coordenadas
$x_1=\frac{a+a}{1+a^2}=\frac{2a}{1+a^2}$

De este modo, el segmento OA se transforma por (1.15) en AA_1, y así es "transportado" sobre la "recta" que representa el diámetro del círculo.

Repitiendo el mismo proceso, se puede transportar el mismo segmento un número arbitrario de veces. El punto A_n de coordenada x_n se transforma en el punto A_{n+1} de coordenada

$$x_{n+1}=\frac{x_n+a}{1+ax_n}$$

Se obtienen de este modo puntos $A, A_1, A_2, \ldots$ de coordenadas

$$x_0=a, \quad x_1=\frac{2a}{1+a^2}, \quad x_2=\frac{x_1+a}{1+ax_1}=\frac{3a+a^3}{1+3a^2}, \quad \ldots$$

Dado que todos los segmentos A_nA_{n+1} se obtienen de OA por transformaciones que expresan un movimiento, todos ellos son "iguales" entre sí (iguales en el sentido de la geometría hiperbólica tal y como está representada en el modelo). Es sencillo demostrar que la sucesión de puntos A_n converge al punto extremo del diámetro, en el sentido del modelo tiende al infinito.

Dado que el eje Ox puede ser tomado en cualquier dirección, las mismas transformaciones de desplazamiento se pueden efectuar a lo largo de cualquier diámetro. Si se combinan con rotaciones alrededor del centro de la circunferencia y con simetrías respecto a un diámetro, se obtienen todos los "movimientos" que se pueden considerar en el modelo de Klein y se demuestra que dichas transformaciones cumplen todas las condiciones (axiomas) a las que están sujetos los movimientos en geometría, y por lo tanto que el modelo satisface la geometría hiperbólica.

Klein propuso un modelo para la geometría de Lobachevski. En un plano se considera el interior de un círculo. Un punto se considera como un punto, y una recta como una cuerda (excluyendo los extremos). Se considera un movimiento que transforma el círculo en sí mismo y las cuerdas en cuerdas. La situación de los puntos se considera de manera usual, es decir, un punto está sobre una recta, un punto está entre otros dos. La regla para medir longitudes y ángulos (y también superficies) se deduce de la forma en la que se definen los movimientos. También se define la igualdad de segmentos y ángulos (o de figuras arbitrarias), y dicha definición es aplicable a la operación de transportar un segmento a lo largo de otro.

Con todos los condicionantes anteriores, se puede concluir que a cada teorema de la geometría de Lobachevski en el plano le corresponde un hecho verdadero de la geometría de Euclides dentro del círculo, y viceversa, todo hecho de este tipo se puede reinterpretar en forma de teorema de la geometría de Lobachevski.

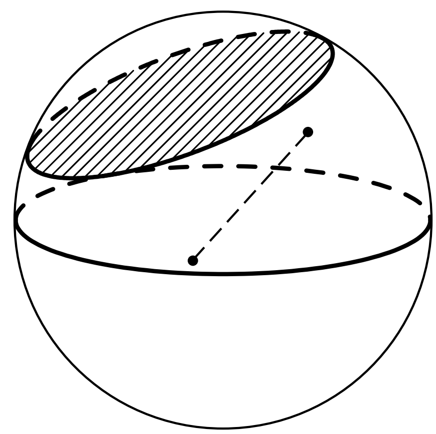


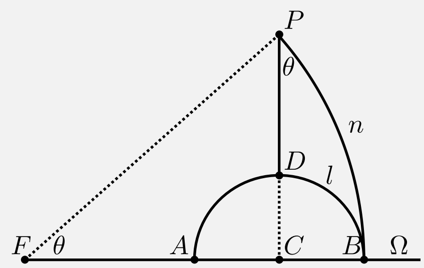
Figura 1.19

De forma idéntica Klein construyó un modelo de la geometría de Lobachevski en el espacio basado en la geometría proyectiva y lo dio a conocer en 1872 en su famoso método de caracterización de geometrías, el Programa Erlangen. Para este modelo se toma el disco abierto unidad, donde las rectas se representan como cuerdas de circunferencia que intersecan al disco en su interior. De este modelo, se obtiene una analogía entre el espacio hiperbólico y el interior de la esfera euclídea (figura 1.19), por lo que una contradicción en la geometría hiperbólica significaría que existe otra en la geometría euclídea. Por tanto, demuestra que la geometría hiperbólica es consistente si y solamente si lo es la geometría euclídea. Una recta se interpreta como una cuerda, un plano como un círculo cuya circunferencia está sobre la esfera. Pero se excluye la superficie de la esfera, y por tanto se excluyen los puntos extremos de las cuerdas y las circunferencias de dichos círculos. Finalmente, un movimiento se define como una transformación de la esfera en sí misma que transforma cuerdas en cuerdas.

Con la aparición de este modelo de la geometría de Lobachevski se ponía de manifiesto su sencillo significado real. Dicha geometría es válida porque puede ser considerada una exposición concreta de la geometría en un círculo o en una esfera. Al mismo tiempo se probó su carácter no contradictorio: sus resultados no pueden llevar a contradicciones puesto que cada uno de ellos se puede trasladar al lenguaje de la geometría euclidiana ordinaria dentro del círculo (o una esfera si se trata de la geometría de Lobachevski en el espacio)[12].

[12]Los matemáticos suelen poner de manifiesto que la geometría de Lobachevski se puede representar dentro de la de Euclides, y por tanto es tan poco contradictoria como ésta.

Ángulo de paralelismo



En la figura adjunta se tiene la h-recta l y una de sus paralelas por P, n. Se considera PD la perpendicular a l por el punto P, y θ es el ángulo de paralelismo. Sean r y t los radios de los arcos n y l respectivamente y s la distancia de P a Ω. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo $\widehat{FPC}$, $r^2 = s^2 + (r-t)^2 \Rightarrow s^2 + t^2 = 2rt$.

Además, por perpendicularidad, $\widehat{PFC} = \theta$ (ángulo de paralelismo), y por lo tanto, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{s}{r}$, y como

$$\frac{s}{r} = \frac{2st}{2rt} = \frac{2st}{s^2+t^2} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{2st}{s^2+t^2} \tag{1.19}$$

Ahora se plantea que la distancia (hiperbólica) de P a D:

$$d_H(P,D) = \left|\ln\frac{PC}{DC}\right| = \left|\ln\frac{s}{t}\right|$$

Utilizando la expresión del coseno hiperbólico:

$$\cosh\left(d_H(P,D)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{t}+\frac{t}{s}\right) = \frac{s^2+t^2}{2st} \tag{1.20}$$

De (1.19) y (1.20), se obtiene que $\operatorname{sen}\theta \cdot \cosh(d_H(P,D)) = 1$, una expresión que muestra que el ángulo de paralelismo depende directamente de la longitud del segmento PD y que si éste tiende a 0, el ángulo de paralelismo tiende a $\dfrac{\pi}{2}$.

Respecto a la geometría hiperbólica plana, hay que destacar al francés Henri Jules Poincaré (1854-1912). La relevancia de la figura de Poincaré en el mundo científico fue sobresaliente. Matemático, físico, científico teórico y filósofo de la ciencia hizo considerables aportaciones a la Teoría del Caos y la Teoría de la Relatividad.

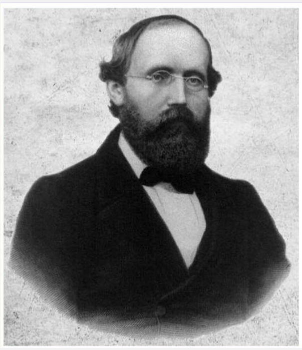
En 1887, mientras intentaba dar solución al problema de los tres cuerpos, un problema relacionado con la estabilidad del Sistema Solar, Poincaré describió dos modelos de geometría hiperbólica en dos dimensiones. Uno de ellos ocupa el interior del disco unidad y otro el semiplano superior. En el primero se representan las rectas como arcos de circunferencia que intersecan perpendicularmente al disco en su interior y en el semiplano, las rectas son líneas verticales y semicircunferencias que inciden perpendicularmente sobre el eje real.

1.5 Geometría Riemanniana

Breve introducción histórica

Corría la fecha del 10 de Junio de 1854 en la Facultad de Filosofía de Gotinga. Un joven profesor y antiguo alumno de Gauss se preparaba para dar una conferencia con el título "Sobre las Hipótesis en que se basan los Fundamentos de la Geometría" con el principal fin de adquirir su habilitación, y por lo tanto, acceder a su cátedra definitiva. El joven Riemann no lo sabía aún, pero estaba a punto de revolucionar los fundamentos de la geometría y abrir una nueva puerta en el edificio matemático. Su disertación tenía dos partes y exponía en líneas generales una nueva teoría geométrica denominada hoy día geometría riemanniana relacionada de manera directa con la *hipótesis del ángulo* *obtuso* de Saccheri y Lambert. En la primera parte, planteó el problema de cómo definir un espacio n-dimensional y terminó dando una definición de lo que hoy llamamos un espacio riemanniano y el tensor de curvatura. En la segunda parte de su conferencia, Riemann planteó preguntas profundas sobre la relación de la geometría con el mundo en el que vivimos, preguntándose cuál era la dimensión del espacio real y qué geometría describía el espacio real. A pesar de la ausencia de cálculos ni demostraciones matemáticas, lo abstracto de su exposición dejó a su audiencia un tanto estupefacta, entre la que se encontraba un ya anciano Gauss, quien al parecer fue el único medianamente capacitado para comprender la repercusión de las ideas del joven Riemann.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)



Riemann nació en una aldea cercana a Dannenberg, en el soberano Reino de Hanóver, al norte de la actual Alemania. Su padre era pastor luterano en Breselenz y había luchado en las guerras Napoleónicas. Siempre tuvo una frágil salud, fundamentalmente debido a problemas de subalimentación durante la niñez. Era el segundo de seis hermanos, los cuales varios de ellos murieron siendo aún niños. Quedó huérfano de madre siendo aún muy joven, por lo que en 1840 se mudó con su abuela a Hanóver. Tras la muerte de ésta en 1842, ingresó en la escuela (Johanneum Gymnasium) en la ciudad de Luneburgo en la Baja Sajonia, donde rápidamente demostró una capacidad sobresaliente para el cálculo acompañada de una timidez casi enfermiza.

En 1846, a la edad de 19, comenzó a estudiar filología y teología en la Universidad de Gotinga, con la idea de complacer a su padre y poder ayudar a su familia haciéndose pastor. Sin embargo la verdadera vocación del joven Riemann estaban en las matemáticas. Acudió a conferencias de Gauss sobre el Método de mínimos cuadrados. En 1847 su padre reunió el dinero suficiente para que comenzara a estudiar matemáticas. Ese mismo año se trasladó a Berlín, donde enseñaban ilustres matemáticos como Jacobi, Dirichlet, Steiner o Eisenstein. En 1848 estallaron manifestaciones y movimientos obreros por toda Alemania, Riemann fue reclutado por las milicias de estudiantes, incluso ayudó a proteger al rey en su palacio de Berlín. Permaneció allí por dos años y volvió a Gotinga en 1849, donde tuvo el privilegio de ser supervisado por Gauss en su tesis doctoral sobre teoría de variable compleja (conocida hoy día como superficies de Riemann), presentada el 18 de diciembre de 1851, un trabajo de, en palabras de Gauss, "... una originalidad gloriosamente fértil".

Comenzó a impartir sus primeras conferencias en 1854, en las cuales fundó el campo de la geometría riemanniana. Lo ascendieron a profesor extraordinario en la universidad de Gotinga en 1857 y se hizo profesor ordinario en 1859. En dicho año formuló por primera vez la hipótesis de Riemann, uno de los más famosos e importantes problemas matemáticos aún sin resolver, descubrimiento tras el cual, la Universidad de Gotinga le otorgó el puesto de Jefe de Departamento de Matemáticas, exactamente el mismo puesto que su predecesor Gauss había ocupado.

En 1862 se casó con Elise Koch, con quien tuvo una hija, y en otoño de ese año Riemann, que siempre tuvo una salud delicada, cogió un catarro que se convirtió en tuberculosis. Murió en 1866 en su tercer viaje a Italia en Selasca para intentar recuperarse.

Hoy día es considerado un genio, pero de un modo diferente a Gauss; Gauss fue capaz de abarcar todo lo posible en las matemáticas, pero Riemann otorgó a sus aportaciones un carácter casi mágico. Realizó descubrimientos asombrosos sobre los números primos, en parte debido a que fue capaz de "inventar" una maquinaria capaz de interconectar aspectos fundamentales de la teoría de números. También contribuyó en gran medida al desarrollo de la geometría, construyendo nuevos modelos no euclídeos (geometrías elípticas) dando origen a una teoría geométrica general denominada *geometría riemanniana*, utilizada por ejemplo por

Alfred Einstein a la hora de fundamentar su teoría general de la relatividad. Su aportación a la ciencia, lejos de estar pasada de moda, posee aún hoy día una relevancia sobresaliente. Por desgracia, nunca sabremos cuán cerca estuvo de demostrar su famosa hipótesis, ya que al parecer tras su muerte su ama de llaves destruyó en el fuego gran parte del material que Riemann tenía en forma de manuscritos o borradores.

Este logro de magnitudes intelectuales gigantescas fue la conclusión final de las investigaciones previas comenzadas en 1851 durante la redacción de la tesis doctoral de Riemann, donde aparecían las denominadas ecuaciones de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, que debe satisfacer una función analítica $w = f(z) = u + iv$ de una variable compleja $z = x + iy$, a pesar de que dichas condiciones ya eran conocidas desde la época de Euler y d'Alambert. Dicha tesis conducía finalmente al concepto de superficie de Riemann, lo que en cierto modo anticipaba el papel fundamental que iba a jugar la topología en el análisis.

Las ideas básicas de la geometría de Riemann

Riemann comenzó definiendo el concepto de espacio como la consideración de una colección continua de fenómenos homogéneos. En dicho espacio las coordenadas de los puntos son cantidades que determinan el fenómeno en cuestión considerado, por ejemplo, las intensidades x, y, z, determinan el color $C = xR + yV + zA$ (Rojo, Verde, Azul). En caso de que hubiera n valores (esto es, x_1, x_2, $\ldots$, x_n) entonces estaríamos considerando un espacio n-dimensional. En dicho espacio se pueden considerar líneas e introducir una medida de su longitud en pequeños pasos (infinitamente pequeños), de modo similar a como se mide la longitud de una curva en el espacio ordinario.

Si se quiere determinar la distancia de un punto a otro infinitamente próximo a él, es necesario dotar a dicho espacio de una regla de determinación de distancias, o lo que se conoce comúnmente, hay que dotarle de una *métrica*. El caso más simple se presenta cuando dicha regla es la misma que en el espacio euclídeo, es decir las relaciones geométricas de la geometría euclídea se satisfacen en dicho espacio, pero únicamente en dominios infinitamente pequeños, es decir una aproximación tanto mayor cuanto menor sea el dominio. Un espacio en el que la distancia se mide mediante una regla de este tipo se denomina *riemanniano*, y la geometría de dichos espacios se denomina de igual forma *riemanniana*. En resumidas cuentas, un espacio riemanniano es por tanto un espacio que es euclídeo "en lo infinitamente pequeño".

El ejemplo más sencillo de espacio riemanniano es una superficie lisa cualquiera en su geometría intrínseca. La geometría intrínseca de una superficie es una geometría riemanniana de dos dimensiones. Esto es, en el entorno de cada uno de sus puntos, una superficie lisa prácticamente es idéntica a su plano tangente y dicha diferencia se hace más pequeña cuanto menor es el dominio considerado. Por lo tanto, en un dominio pequeño de la superficie, su geometría difiere también poco de la geometría del plano; cuánto más pequeño es el dominio, menores son las diferencias. Sin embargo, en dominios mayores la geometría de una superficie curva es diferente de la de Euclides. La geometría riemanniana no es más que una generalización de la geometría intrínseca de una superficie de dos dimensiones a un número arbitrario n. Se puede considerar por lo tanto que el espacio real es euclídeo únicamente en dominios pequeños en comparación con la escala astronómica. Cuanto más pequeño es un dominio más aproximadamente se cumple la geometría euclídea y viceversa. Dicha idea, que ya fue señalada por Lobachevski, fue la que consideró Riemann y la generalizó aplicándola a una geometría arbitraria y no únicamente a la de Lobachevski; es decir debe considerarse la geometría de Lobachevski como un caso especial de la geometría riemanniana.

Resumiendo la geometría riemanniana nació como síntesis de tres ideas fundamentales que son:

1. La posibilidad de que existan geometrías distintas a la euclídea.
2. El concepto de geometría intrínseca de una superficie.
3. El concepto de espacio con un número arbitrario de dimensiones.

Medida de la distancia

Con el fin de entender cómo se define matemáticamente un espacio riemanniano, cabe que recordemos en primer lugar la regla para medir distancias en un espacio euclídeo.
Si se consideran unas coordenadas rectangulares x e y en el plano, si se aplica el teorema de Pitágoras, la distancia (s) entre dos puntos cuyas diferencias de coordenadas son Δx y Δy, se expresa por la ecuación:

$$s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

De manera análoga, en un espacio tridimensional resulta:

$$s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

En un espacio euclídeo n-dimensional, la distancia se define por la ecuación general

$$s = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \cdots + \Delta x_n^2}$$

En este punto es fácil deducir la regla para medir distancias en un espacio riemanniano. La regla debe coincidir con la euclídea, pero únicamente en dominios infinitamente pequeños en el entorno de cada punto de dicho espacio.
Por lo tanto, un espacio riemanniano se caracteriza por el hecho de que en el entorno de cada uno de sus puntos A se pueden introducir unas coordenadas x_1, x_2, ..., x_n, de modo que la distancia de A a un punto X infinitamente próximo venga expresada por la ecuación

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2} \tag{1.21}$$

donde $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ son las diferencias (infinitamente pequeñas) entre las coordenadas de A y X. Dicho de otro modo, la distancia de un punto A a un punto arbitrariamente próximo X se expresa por la misma ecuación que en geometría euclídea, pero solamente con una cierta aproximación, que es tanto mayor cuanto más próximos son los puntos X y A, es decir,

$$s(AX) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \cdots + \Delta x_n^2} + \epsilon$$

donde ϵ es una cantidad pequeña en comparación con el primer término y es tanto más pequeña cuanto menores sean las diferencias de coordenadas Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n.[13]

Esta es la definición matemática precisa de métrica riemanniana y de espacio riemanniano. La diferencia entre la métrica riemanniana (es decir, la regla para medir distancias) y la euclídea estriba en que dicha regla es válida únicamente en el entorno de cada punto. Además las coordenadas en las que se expresa de un modo tan simple son diferentes para cada punto[14].

El hecho de que un espacio riemanniano coincide con el euclídeo en lo infinitamente pequeño permite definir en él las magnitudes geométricas fundamentales, de modo similar a como se hizo para la geometría intrínseca de una superficie mediante su aproximación de una parte infinitamente pequeña de ella por un plano. Por ejemplo, un volumen infinitamente pequeño se expresa igual que en el espacio euclídeo. El volumen de un dominio finito se obtiene sumando volúmenes infinitamente pequeños, es decir, integrando la diferencia de volumen. La longitud de una curva se obtiene sumando distancias infinitamente pequeñas entre puntos infinitamente próximos de ella, es decir, por integración de la diferencial de longitud ds a lo largo de la curva. Y esto es una expresión analítica

[13] El significado preciso de la ecuación (1.21) se suele expresar de otro modo. Supongamos que una curva parte de A y que las coordenadas de un punto X arbitrario de ella vienen dados por las funciones $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ de una variable t. Entonces la diferencia ds de la longitud de un arco de curva en A viene expresada por (1.21).
[14] Si se pudieran introducir en todo el espacio unas coordenadas tales que esta regla para medir distancias se cumpliera para cada par de entornos, entonces el espacio sería euclídeo.

rigurosa del hecho de que la longitud se determina llevando sobre la curva una vara de medir infinitamente pequeña. El ángulo entre dos curvas en un punto común se determina igual que en el espacio. Además, en un espacio riemanniano n-dimensional se pueden definir superficies de distintas dimensiones, desde 2 hasta $n-1$. Por otra parte, es fácil probar que cada superficie, a su vez, representa un espacio riemanniano del correspondiente número de dimensiones, de la misma forma que una superficie en el espacio euclídeo resulta ser un espacio riemanniano bidimensional.

También se demuestra que un espacio de Riemann se puede representar siempre como una superficie en un espacio euclídeo de un número de dimensiones suficientemente grande, es decir, para cada espacio riemanniano n-dimensional se puede encontrar en un espacio euclídeo $\frac{n(n+1)}{2}$-dimensional una superficie que, desde el punto de vista de su geometría intrínseca, no difiera de este espacio riemanniano (al menos en una parte de él).

La forma cuadrática fundamental

Con el fin de obtener la expresión analítica de las distintas cantidades geométricas como longitud de curvas, ángulos, áreas (o volúmenes), curvatura, gradiente de funciones y divergencia de campos vectoriales, es necesario definir en primer lugar una expresión general para la regla de medir longitudes en un espacio de Riemann, de manera que dicha expresión sea independiente de las coordenadas específicas de cada punto. La ecuación (1.21) se verifica en cada punto A para una elección adecuada de coordenadas en dicho punto, de manera que al pasar a otro punto es necesario cambiar dichas coordenadas, lo cual supone sin duda un serio inconveniente. Sin embargo, dicho inconveniente se puede evitar de un modo sencillo.

Supóngase que en un cierto dominio de un espacio de Riemann se introducen unas coordenadas arbitrarias $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Entonces "la distancia infinitamente pequeña" o, como suele definirse, el "elemento de longitud" desde un punto A de coordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ a otro punto X de coordenadas $y_1 + dy_1, y_2 + dy_2, \ldots, y_n + dy_n$ se expresa por la ecuación

$$ds = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\, dy_i\, dy_k} \qquad \text{o} \qquad ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\, dy_i\, dy_k \tag{1.22}$$

donde los coeficientes g_{ik} son funciones de las coordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de A.
La segunda expresión de (1.22) es una forma cuadrática[15] en las diferenciales de las coordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Desarrollándola se puede expresar así:

$$\sum g_{ik}\, dy_i\, dy_k = g_{11}\, dy_1^2 + g_{12}\, dy_1\, dy_2 + g_{21}\, dy_2\, dy_1 + g_{22}\, dy_2^2 + \cdots$$

Dado que $dy_1\, dy_2 = dy_2\, dy_1$, es conveniente considerar el segundo y el tercer término idénticos $g_{12} = g_{21}$, y en general $g_{ik} = g_{ki}$, es posible en tanto en cuanto sólo es importante su suma $(g_{ik} + g_{ki}) dy_i\, dy_k$.

La forma cuadrática es definida positiva, ya que $ds^2 > 0$, excepto cuando todas las diferencias son nulas.

Existe también su inversa. Si en un espacio n-dimensional, en el que se han introducido las coordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_n$, se define el elemento de longitud conforme a la ecuación (1.22) con la condición de que la forma cuadrática sea definida positiva (es decir, siempre mayor que 0 excepto cuando todas las $dy_i = 0$), entonces el espacio es riemanniano. En otros términos, en el entorno de cada punto A se pueden introducir nuevas coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de modo que en ellas el elemento de longitud se expresa en la forma sencilla (1.21):

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2$$

Por lo tanto, la métrica riemanniana (es decir, una definición de longitud que es euclídea en lo infinitamente pequeño) se puede expresar mediante cualquier forma cuadrática definida positiva de la forma (1.22) con coeficientes

[15] Una forma cuadrática de varias variables es una expresión algebraica que es un polinomio de grado dos en esas variables.

g_{ik} que sean funciones de las coordenadas y_i. Este es el método general para dar una métrica riemanniana. Como ejemplo de esto último, un espacio (localmente) euclídeo de dimensión 3, no es más que un caso muy especial de un espacio de Riemann en el que se verifica que $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ y todos los demás g_{ik} son cero.

En un espacio de Riemann, una curva viene dada por la variación de las n-coordenadas de un punto respecto a un único parámetro t que toma valores en un cierto intervalo

$$y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \cdots, y_n = y_n(t) \qquad (a \leq t \leq b) \tag{1.23}$$

La longitud de la curva se expresa mediante la integral

$$s = \int ds = \int \sqrt{\sum g_{ik}\, dy_i\, dy_k}$$

En el caso de que la curva se exprese mediante las ecuaciones (1.23), se tiene:

$$dy_1 = y_1'\, dt, dy_2 = y_2'\, dt, \cdots, dy_n = y_n'\, dt,$$

por lo tanto

$$s = \int_a^b \sqrt{\sum g_{ik} y_i' y_k'}\, dt \tag{1.24}$$

Dado que las g_{ik} son funciones conocidas de las coordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_n$, y estas últimas dependen de t de acuerdo con las ecuaciones (1.23), la función de t bajo el signo integral está completamente determinada para la curva dada. En consecuencia, la integral tiene un valor definido y la curva también una longitud definida.

La longitud de la curva más corta que une dos puntos dados A y B se toma como la distancia entre estos puntos. Esta curva, denominada geodésica, juega un papel análogo al del segmento rectilíneo AB. Se puede demostrar que en un dominio pequeño cada dos puntos está unidos por una única geodésica. Hallar una línea geodésica equivale a hallar el mínimo de la integral (1.24), un problema de cálculo de variaciones. La aplicación del método del cálculo de variaciones permite deducir una ecuación diferencial, que determina las líneas geodésicas, y establecer sus propiedades para todo espacio de Riemann.

Probemos una de las proposiciones dadas anteriormente, a saber, que la métrica riemanniana en coordenadas arbitrarias viene dada mediante la ecuación general (1.22).

Supóngase que en un dominio de un espacio riemanniano se introducen ciertas coordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Tómese un punto A arbitrario en dicho dominio y supóngase que $x_1, x_2, \ldots, x_n$, son las coordenadas especiales en las cuales el elemento de longitud en A se expresa mediante la ecuación (1.21) o, lo que es lo mismo,

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 \tag{1.25}$$

Las coordenadas x_j se expresan en función de las $y_i (i, j = 1, \cdots, n)$ por ciertas ecuaciones,

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ x_2 &= f_2(y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= f_n(y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{aligned}$$

Entonces

$$dx_1 = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} dy_2 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n} dy_n$$

y análogamente, para $dx_2, \cdots, dx_n$. Sustituyendo estas expresiones en (1.25). Después de elevar al cuadrado y agrupar los términos en dy_1^2, $dy_1\,dy_2$, dy_2^2, etc, se obtiene una expresión de la forma

$$ds^2 = g_{11}\,dy_1^2 + 2g_{12}\,dy_1\,dy_2 + g_{22}\,dy_2^2 + \cdots + g_{nn}\,dy_n^2,$$

donde los coeficientes $g_{11}, g_{12}, \cdots, g_{nn}$ son expresiones en las derivadas parciales $\partial f_i/\partial y_j$. Pero esto no es más que la ecuación (1.22) expresada en forma desarrollada, y por consiguiente la proposición está demostrada.

Demostremos que, inversamente, la ecuación (1.22) define una métrica riemanniana, es decir, que en cada punto se puede transformar con una elección adecuada de las coordenadas x_i en la ecuación (1.25). Supóngase que

$$ds^2 = \sum g_{ik}\,dy_i\,dy_k,$$

donde las g_{ik} son funciones de las coordenadas $y_1, \cdots, y_n$ y la forma cuadrática es definida positiva. Entonces los coeficientes g_{ik} son números dados y las variables de las que depende la forma son $dy_1, dy_2, \cdots, dy_n$. Se sabe que toda forma definida positiva se puede reducir a una suma de cuadrados mediante un cambio lineal de variables[16], es decir, que existe una transformación

$$\begin{aligned} dy_1 &= a_{11}\,dx_1 + a_{12}\,dx_2 + \cdots + a_{1n}\,dx_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dy_n &= a_{n1}\,dx_1 + a_{n2}\,dx_2 + \cdots + a_{nn}\,dx_n \end{aligned} \tag{1.26}$$

tal que cuando estas expresiones se sustituyen en (1.22) se obtiene

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2$$

Si se realiza el cambio de coordenadas $y_1, y_2, \cdots, y_n$ a $x_1, x_2, \cdots, x_n$ por medio de

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn}\,x_n \end{aligned}$$

entonces las diferenciales dy_j se expresan en función de las diferenciales dx_i precisamente por las ecuaciones (1.26). Por lo tanto, dicho cambio de coordenadas resuelve el problema, en coordenadas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ elegidas en el punto, el cuadrado de la diferencial ds^2 se expresa mediante la sencilla ecuación euclídea (1.25). Se demuestra así que la ecuación general (1.22) proporciona de hecho una métrica riemanniana.

El tensor de curvatura

La teoría de la curvatura había surgido con las investigaciones llevadas a cabo por Gauss a principios del siglo XIX (véase § 1.3 en pág. 24). Sus trabajo estaban orientados a permitir un análisis de las formas en las que una superficie bidimensional puede curvarse. Después, surgieron las investigaciones de Riemann, tras el descubrimiento del espacio hiperbólico. En dicho momento la curvatura se convirtió en el concepto fundamental de una nueva geometría. Sin embargo, espacios con más dimensiones, como por ejemplo el espacio-tiempo cuatridimensional de nuestro universo, resultan mucho más complicados a la hora de analizar, en primer lugar debido a que los seres humanos no somos capaces de visualizar objetos en cuatro o más dimensiones, y en segundo, por que dichos espacios pueden cuvarse de muchísimas formas diferentes. Analizar dichas posibilidades requieren de una maquinaria conceptual matemática muy pesada.

[16]No importa que en este caso las variables de la forma sean diferenciales; pueden ser consideradas como ciertas variables independientes.

Un espacio euclídeo es el caso especial más simple de espacio riemanniano[17]. Una tarea importante de la geometría riemanniana consiste en dar una expresión analítica de la diferencia entre un espacio riemanniano general y otro euclídeo mediante la definición de una medida, por así decirlo, de la no-euclidianidad del espacio riemanniano. Esta medida es lo que se denomina tensor de curvatura del espacio.

Se debe poner de manifiesto ante todo que el concepto de curvatura de un espacio no está relacionado de ningún modo con la idea de que el espacio esté sumergido en un espacio superior envolvente en el cual tenga, de algún modo, una cierta curvatura. La curvatura se define dentro del espacio dado y expresa su diferencia respecto al euclídeo en el sentido de sus propiedades geométricas intrínsecas. Cuando se dice que el espacio real tiene curvatura, esto significa únicamente que sus propiedades geométricas difieren de las del espacio euclídeo. Pero esto no significa en absoluto que nuestro espacio esté inmerso en otro espacio en el que sea, de alguna manera, curvo. Tal idea no tiene relación alguna con las aplicaciones de la geometría riemanniana al espacio real y pertenece al campo de la fantasía especulativa.

El concepto de curvatura de un espacio de Riemann generaliza a n dimensiones el de curvatura gaussiana de una superficie, que es una medida de la diferencia entre la geometría intrínseca de una superficie y la geometría en un plano y se puede tratar desde un punto de vista puramente geométrico interno. Y no es otra cosa que la curvatura del espacio riemanniano bidimensional que representa la superficie dada.

Cabe recordar, por ejemplo, dos ecuaciones de la geometría intrínseca en las que interviene la curvatura de Gauss. Imaginemos un pequeño triángulo sobre la superficie, próximo a un punto O y cuyos lados son líneas geodésicas; sean sus ángulos α, β, γ y su área σ. La cantidad $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ expresa la diferencia entre la suma de sus ángulos y la suma de los ángulos de un triángulo en el plano.

Cuando el triángulo se contrae hacia el punto O, la razón de $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ a su área σ tiende a la curvatura gaussiana en O. De otra forma, para un pequeño triángulo

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{\sigma}=K+\epsilon$$

donde $\epsilon\to 0$ cuando el triángulo se contrae hacia O. Esto muestra exactamente que la curvatura gaussiana es una medida de la diferencia entre la suma de los ángulos de un triángulo en el plano y en la superficie.

Si se considera un pequeño círculo sobre la superficie con centro en O (es decir, el lugar geométrico de los puntos que equidistan de O, en el sentido de la distancia sobre la superficie). Si r es el radio de dicho círculo y l su longitud, entonces

$$l=2\pi r-\frac{\pi}{3}Kr^3+\epsilon$$

donde K es de nuevo la curvatura gaussiana en O y ϵ denota una cantidad muy pequeña en comparación con r^3.

En este punto, la curvatura gaussiana aparece como una medida de la diferencia entre la longitud de un pequeño círculo y $2\pi r$, que es su longitud en la geometría euclídea.

La curvatura de un espacio riemanniano juega un papel similar. Se puede definir, por ejemplo, del siguiente modo. En un espacio riemanniano dado se construye una superficie lisa F formada por geodésicas que pasan por un punto

[17]En un espacio euclídeo el elemento de longitud en coordenadas rectangulares se expresa por la ecuación (1.25); $ds^2=\sum dx_i^2$. Si se pasa a otras coordenadas, entonces, según se ha deducido en § 1.5, ds se expresa mediante una forma cuadrática (1.22). Por consiguiente, en un espacio euclídeo y en coordenadas *arbitrarias* se cumple la misma ecuación general (1.22) para el elemento de longitud. El espacio euclídeo difiere, sin embargo, de cualquier otro por el hecho de que se pueden introducir en él coordenadas (que serán coordenadas rectangulares) de forma que la ecuación (1.25) se verifique siempre con el mismo sistema de coordenadas, y no sólo en las proximidades de uno u otro punto, como en el caso de los espacios generales de Riemann.

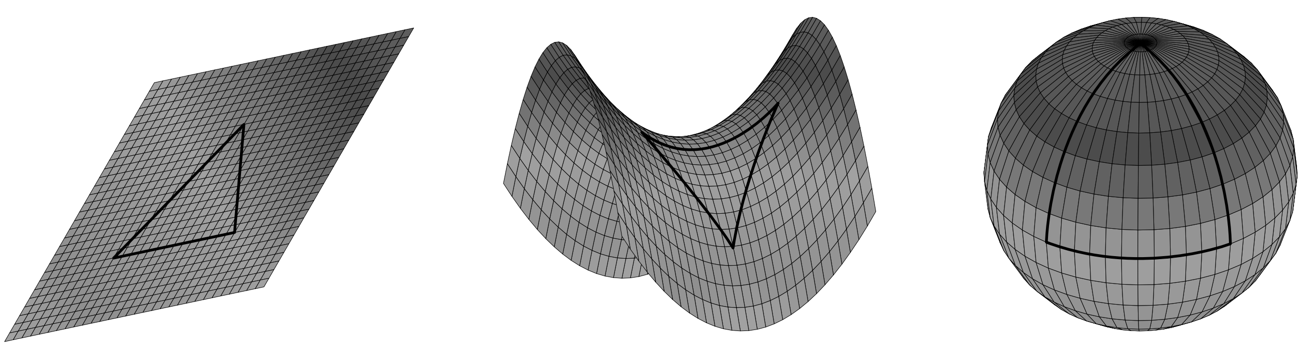
O. Se toma como curvatura del espacio en O, en la dirección de F, la curvatura gaussiana de esta superficie. De manera general, dicha curvatura dependerá no sólo del punto O, sino también de las distintas superficies geodésicas G que pasan por dicho punto O. La curvatura de un espacio en un punto dado no está, por lo tanto, caracterizada por un único número. El propio Riemann introdujo una regla general para relacionar las curvaturas de las distintas superficies en un mismo punto. Debido a estas relaciones, la curvatura en un punto está completamente caracterizada por un cierto sistema de números denominado *tensor de curvatura*. Dicha maquinaria conceptual matemática surgió en las postrimerías del siglo XIX, con los trabajos de los italianos Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) y su discípulo Tullio Levi-Civita (1873-1941). Del mismo modo que Gauss había conseguido describir la curvatura de una superficie bidimensional, sirviéndose de un único número que surgía de la integración a lo largo de la superficie de la curvatura puntual, Ricii y Levi-Civita introdujeron matrices de mayores dimensiones conocidas como tensores para explicar la curvatura de dichos espacios con mayor número de dimensiones.

El tensor de curvatura es utilizado para medir en cierto modo la no euclidianidad de un espacio riemanniano, y está definido de manera intrínseca como una medida de la diferencia entre su métrica y la del espacio euclídeo. Se encarga de determinar por ejemplo la diferencia entre la suma de ángulos de un triángulo y π, o entre la longitud de una circunferencia y $2\pi r$. En general, dicho tensor presenta distintos valores en puntos distintos, y el mismo punto viene dado no por un número, sino por un cierto sistema de números.

Otra idea importante de la geometría riemanniana, utilizada por ejemplo por Einstein[18] en su teoría general de la relatividad, es que un espacio riemanniano no es necesariamente homogéneo en sus propiedades y en dicho caso es imposible mover libremente las figuras sin alterar la distancia entre sus puntos. Interesa por lo tanto conocer en qué espacios riemannianos es posible un movimiento libre de las figuras con el mismo número de grados de libertad que en el espacio euclídeo. Estos son los denominados espacios riemannianos más homogéneos. Eistein encontró en la teoría del cálculo tensorial de Ricci y Levi-Civita las herramientas necesarias para describir la figura de un universo curvado por la gravedad.

El espacio euclídeo es un espacio homogéneo sin curvatura (un espacio de curvatura cero). Otro tipo de espacio homogéneo es el de Lobachevski, de modo que la geometría de Lobachevski, de igual manera que la de Euclides, es un caso especial de geometría riemanniana.

De manera general, un espacio de Riemann en el cual es posible el movimiento libre de figuras es un espacio de curvatura constante, es decir la curvatura es la misma para todos los puntos y todas las superficies geodésicas (en dicho caso en lugar de un tensor de curvatura que cambia de un punto a otro, se expresa mediante un único número común a todos los puntos). Un espacio de curvatura nula es euclídeo mientras que un espacio de curvatura negativa es un espacio de Lobachevski; un espacio de curvatura positiva tiene la misma geometría que una esfera n-dimensional en el espacio euclídeo $(n+1)$-dimensional.



[18]La métrica de Riemann puede ser extendida cómodamente sin problema alguno hacia un espacio de cuatro dimensiones, en cuyo caso la expresión para ds^2 tendrá 16 términos. Einstein utilizó precisamente dicha métrica riemanniana en un espacio generalizado de cuatro dimensiones, el cual puede ser plano o curvo.

Figura 1.20: Espacios euclídeo, hiperbólico y elíptico con curvaturas (constantes) nula, negativa y positiva respectivamente.

1.6 Conclusiones

La nueva geometría no euclídea que Riemann presentaba, mostraba una visión mucho más general que la fundamentada por Lobachevski, ya que a diferencia de la del ruso, no cuestionaba únicamente la concepción de cuántas paralelas se podían trazar por un punto a una recta. Riemann consideraba que la geometría no debería siquiera tratarse de puntos o rectas del espacio en el sentido más convencional, sino de conjuntos de n-uplas ordenadas que se pueden combinar de acuerdo con ciertas leyes.

La ideas que Riemann planteaba en su disertación surgieron tras la aparición de la geometría de Lobachevski, sin embargo, no fueron lo suficientemente apreciadas hasta después de su muerte en 1868 cuando fueron publicadas a título póstumo, planteando una aplicación de su teoría a la conducción del calor y poniendo de manifiesto ya desde su origen, la estrecha relación entre la geometría y la física matemática. Cabe recordar por ejemplo que hasta ese año no apareció la obra de Beltrami, donde se exponía la primera interpretación de la geometría de Lobachevski, o que la segunda interpretación dada por Klein no apareció hasta 1872, como hemos visto en la sección 1.4.

El testigo que Riemann dejó, fue recogido por multitud de matemáticos que se encargaron de encontrar hacia el último tramo del siglo XIX multitud de aplicaciones de dicha teoría en mecánica y en física. El gran espaldarazo de dicha teoría se produjo cuando en 1915 Einstein aplicó las ideas de Riemann en la teoría de la gravitación universal, publicando su teoría general de la relatividad.

Bibliografía

[1] Berger, Marcel (2003). *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ISBN-13: 978-3-540-65317-2.

[2] Bonola, Roberto (1955). *Non-Euclidean Geometry*. . New York: Dover Publications, Inc., ISBN-13: 978-0-486-60027-7. https://archive.org/download/Non-euclideanGeometry/Bonola-NonEuclideanGeometry.pdf

[3] Boza Cordero, Juan Bautista (1995): "Lobachevski. Descubridor de la Geometría Hiperbólica". *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 2(1), pp. 27–37. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/matematica/article/download/109/89

[4] Chavel, Isaac (2006). *Riemannian Geometry. A Modern Introduction*. , 2nd Ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, ISBN-13: 978-0-521-85368-2. http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~dnovikov/Manifolds5775/Chavel_Riemannian_Geometry_A_Modern_Intro.pdf

[5] David, L. von (1951). *Die beiden Bolyai*. Basel: Birkhäuser.

[6] Do Carmo, Manfredo P. (1982). *Riemannian Geometry*, Boston: Birkhäuser, ISBN: 3-7643-3490-8.

[7] Eisenhart, Luther Pfahler (1950).*Riemannian Geometry*, New Jersey: Princeton University Press, ISBN-13: 978-1-400-88421-6. https://archive.org/download/RiemannianGeometry/Eisenhart-RiemannianGeometry.pdf

[8] Greenberg, Marvin Jay (2008). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, 3th edition. New York: W. H. Freeman and Company. http://bibotu.com/books/2013/HistoryandPhilosophyofScience/Greenberg-EuclideanandNon-EuclideanGeometries-DevelopmentandHistory3e(WHF,1993).pdf

[9] Gudmundsson, Sigmundur (2018).*An Introduction to Riemannian Geometry*, v.1.0364, Lecture Notes in Mathematics, Lund University. http://www.matematik.lu.se/matematiklu/personal/sigma/Riemann.pdf

[10] Hernández Paricio, Luis Javier (2007). https://www.unirioja.es/cu/luhernan/gdfolder/gd.pdf*Geometría Diferencial*, Apuntes de Geometría Diferencial, Universidad de La Rioja.

[11] Lobachevski, Nikolái Ivanovich (1946-1951). *The Complete Works*, v. 1-5. M., Gostehizdat.

[12] Lucas, Pascual (1999). http://www.um.es/docencia/plucas/miscelanea/no_euclideas.pdf*Las otras geometrías*, Conferencia "La Historia de las Matemáticas y su Aplicación a la Docencia en Enseñanza Secundaria", Universidad de Murcia. http://www.um.es/docencia/plucas/miscelanea/no_euclideas.pdf

[13] Montesinos Amiliabia, José María (1992):"Las geometrías no euclídeas: Gauss, Lobachevski y Bolyai", *Historia de la matemática en el siglo XIX*, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, pp. 65–114. https://dmle.icmat.es/pdf/HISTORIADELAMATEMATICA_1992_00_00_03.pdf

[14] Prékopa, András (2006). "The Revolution of János Bolyai". Incluído en http://148.206.53.84/tesiuami/S_pdfs/Non-EuclideanGeometries.pdf*Non-Euclidean Geometries. János Bolyai* http://148.206.53.84/tesiuami/S_pdfs/Non-EuclideanGeometries.pdf*Memorial Volume*, International Conference on Hyperbolic Geometry, Budapest, Hungría, Eds: Prékopa, Adrás y Molnár, Emil. New York: Springer. ISBN-10: 0-387-29554-2.

[15] Rosenfeld, Boris A. (1988). *History of non-euclidean geometry*, Nueva York: Springer-Verlag. ISBN-10: 0-387-96458-4.

[16] Sartorius von Waltershausen, Wolfgang (1856). *Gauss: A Memorial*, Leipzig. https://archive.org/details/gauss00waltgoog/

[17] Smogorzhevski, A. S. (1978). *Acerca de la geometría de Lobachevski*, Lecciones populares de matemáticas, Moscú: Editorial Mir, (Trad. Virgilio Llano Mas). ISBN: 2910009902268.