Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 20, No 2. Marzo − Agosto, 2020 ISSN 1659 -0643

Los infinitos de algunas series divergentes

The infinites of some divergent series

Diego Miramontes de León
diego.miramontes@gmail.com
Universidad Autónoma de Zacatecas
México

Gerardo Miramontes de León
gmiram@ieee.org
Instituto Tecnológico Sanmiguelense
de Estudios Superiores. México

Recibido: 17 Febrero 2019 Aceptado: 23 Agosto 2019

Resumen. En este trabajo interesa mostrar que dos series divergentes, aunque ambas tienen un número infinito de términos, al tener términos diferentes, su valor al infinito también difiere. En el documento se muestra que la serie armónica, dada por la suma del inverso de los números naturales, puede descomponerse en dos series. Una de ellas dada por la suma del inverso de los naturales de la forma $1/n^p$ con $p > 1$ y la otra, que será llamada subarmónica, formada por el resto de los términos que completan la serie armónica original. Se muestra que cada una de estas series es, una convergente y la otra divergente, obteniendo así la serie original divergente. Se incluye la demostración de la divergencia de las nuevas series, y como extensión de esta descomposición de la serie armónica, se hace una comparación de dos series subarmónicas las cuales, a pesar de ser ambas divergentes, difieren en su valor al infinito.

Palabras clave: Series infinitas, Divergencia, Infinito.

Abstract. This work aims to show that two divergent series, although both have an infinite number of terms, if they have different terms, their value to infinity also differs. In this document, it is shown that the harmonic series, given by the sum of the inverse of natural numbers, can be decomposed into two series; one of them is given by the sum of the inverse of the naturals in the form $1/n^p$ where $p > 1$ and the other, which will be called subharmonic, formed by the rest of the terms that complete the original harmonic series. It is shown that each of these series is one convergent and the other divergent, thus obtaining the original divergent series. It is included the demonstration of the divergence of the new series, and as an extension of this decomposition of the harmonic series, a comparison is made of two subharmonic series which, despite being both divergent, differ in their value to infinity.

KeyWords: Infinite series, Divergence, Infinity.

1.1 Introducción

El tema de las series infinitas se remonta a la antigüedad y desde entonces se tienen dos grandes problemas por resolver. En el primero se investiga si la serie es convergente o divergente, mientras que en el segundo interesa conocer el valor de la serie al infinito, si se demuestra su convergencia. Cuando se encuentra que la serie es divergente, simplemente se dice que su valor es infinito.

La serie de interés en este trabajo es la serie armónica, la cual está dada por la suma de los inversos de los números naturales, es decir, con $n \in \mathbb{N}$, la serie es

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \tag{1.1}$$

Al resolver el primer problema se crearon diferentes criterios para probar si la serie era divergente o no. Una prueba de la divergencia de (1.1) fue dada por Oresme en el siglo XIV [8], de la cual se presenta un desarrollo en el Apéndice 1.7.

Para el segundo problema, Euler [5] representa, sin duda, una de las referencias más importantes para resolver el misterio del valor al infinito de la serie con argumento $1/n^2$.

Se pueden encontrar pruebas de la divergencia de la serie armónica en Larson [7] donde se da una definición de serie convergente y serie divergente, mientras que en Plaza [9] hace uso de un caso especial de la desigualdad media aritmética-media geométrica. Ejemplos de otras demostraciones anteriores se encuentran desde la década de 1970 en Honsberger [6]; en las décadas de 1980 y 1990 con Cusumano [1], Dunham (1987) [2], Dunham (1990) [3], Dunham (1999) [4], entre muchos más.

En general, se puede tener la suma de los inversos de los naturales de orden p como

$$S_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \text{ para } p > 1 \tag{1.2}$$

A estas series se les conoce como series-p.

El mismo Euler [5] resolvió la suma de los inversos de los naturales al cuadrado ($p = 2$) como

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{1.3}$$

Otros resultados para $p = 4$, 6, 8 y 10 se pueden consultar en Sánchez [10], y como puede verse en esa referencia, se tiene que para p par la serie converge a un múltiplo racional de π^{2n}, mientras que para p impar no se conoce una expresión cerrada. En cualquier caso, S_p son series convergentes siempre que se tenga $p > 1$.

El artículo está organizado como sigue: En la Sección 1.2 se describen el planteamiento del problema y los objetivos del trabajo.

En la Sección 1.3 se presenta una primera descomposición de la serie armónica, en la cual se extraen todos los términos $1/n^2$. En la Sección 1.4 se presenta la descomposición para otro caso y se extiende la descomposición para el caso general. En la Sección 1.5 se desarrollan las pruebas de divergencia para las nuevas series propuestas. Con las nuevas series, en la Sección 1.6 se hace un análisis del comportamiento al infinito de la descomposición de la serie armónica para dos casos y esto nos lleva directamente a la Sección 1.7 donde proponemos algunas conclusiones.

1.2 Planteamiento del problema y objetivos

Se plantea que la serie dada por (1.1) se puede analizar a través de la descomposición en dos subseries, es decir, $S = S_p + S'_p$, en donde la convergencia de S_p, definida en (1.2), ha sido ampliamente demostrada (consultar [10]), mientras que S'_p es una nueva serie, que llamaremos subarmónica, la cual interesa desarrollar y analizar.

De acuerdo a (1.1) y (1.2) se observa que la serie S_p puede verse como una subserie de S. Con base en esta observación se propone una nueva ecuación para construir la serie S'_p, la cual contendrá los términos no incluidos en S_p.

Posteriormente a la descomposición de la serie armónica, el interés surge al observar que de la serie divergente S, se extrae una subserie convergente S_p. Si esta última serie dada para $p > 1$ es convergente, entonces para que la serie completa sea divergente, la subserie generada S'_p debe ser divergente. El objetivo del trabajo es demostrar, primero, que la ecuación propuesta reconstruye la serie completa para cualquier $p > 1$, y segundo, la divergencia de la subserie generada.

Como objetivos específicos se plantean los siguientes:

a) Mostrar que las series S_p y S'_p son subseries de la serie armónica S.

b) Presentar una nueva ecuación para generar una nueva serie S'_p y reconstruir la serie armónica a partir de S_p para todo $p > 1$.

c) Demostrar que las nuevas subseries generadas S'_p son divergentes y que presentan, para dos valores dados de p, una diferencia al infinito.

Es importante aclarar que lo anterior no debe confundirse con los diferentes infinitos de Cantor, ya que no se refiere al número de elementos de cada serie (su cardinalidad), si no que se refiere al valor de las series divergentes al infinito.

1.3 Primera descomposición de S

Sea S_2, reescrita aquí por claridad, la serie de los inversos de los números naturales al cuadrado, es decir,

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \tag{1.4}$$

En la Figura 1.1, se muestra la serie S_2 como una parte de la serie armónica S.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\boxed{\frac{1}{1}}+\overbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}^{2}+\boxed{\frac{1}{4}}+\overbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}^{4}+\boxed{\frac{1}{9}}+\overbrace{\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}}^{6}$$

$$+\boxed{\frac{1}{16}}+\overbrace{\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\cdots+\frac{1}{23}+\frac{1}{24}}^{8}+\boxed{\frac{1}{25}}+\overbrace{\frac{1}{26}+\cdots}^{2n}$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

Figura 1.1: S_2 como parte de S y número de términos de S_2' entre valores consecutivos de la forma $1/n^2$.

La convergencia de (1.4), como se mencionó antes, fue calculada por Euler en 1740 [5], obteniendo el valor de $\pi^2/6$. Esto asigna un valor de convergencia, por lo tanto, se tiene que de la serie divergente S se extrae una parte convergente S_2.
Los términos restantes, mostrados en la Figura 1.1 entre llaves, forman una nueva serie dada por

$$S_2'=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=n^2+1}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{j} \tag{1.5}$$

De acuerdo a Segal [11], S_2' puede denominarse "serie subarmónica", ya que la suma parcial es menor o igual a la suma parcial de la serie armónica clásica.
La serie armónica puede, entonces, escribirse como la suma de estas dos series, de las cuales una es convergente y la otra, necesariamente, es divergente

$$S=S_2+S_2'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\sum_{j=n^2+1}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{j}\right) \tag{1.6}$$

Para la serie S_2', el número de términos entre valores consecutivos de la forma $1/n^2$ está dado por

$$T_2=2n \tag{1.7}$$

Cabe hacer notar que al obtener la serie armónica a partir de (1.6), comenzando con $n=1,2,3,\ldots$, la S obtenida equivale a la serie armónica hasta el término $(n+1)^2-1$ para cada valor de n. Por ejemplo, para $n=1$ la S reconstruida contendrá los siguientes tres términos $1/1+1/2+1/3$.
Como S es una serie divergente, entonces S_2' debe ser divergente, según se demuestra en la Sección 1.5.

1.4 Otras descomposiciones de S

Es posible generar nuevas series a partir de la serie armónica, extrayendo un cierto grupo de términos. Se desarrolla, en esta sección, una sola expresión para S que incluye las dos series como en (1.6), pero para diferentes valores de p.

Segunda descomposición de S

Así como S_2 es una subserie de S, la suma de los inversos de los naturales al cubo, es decir $p = 3$, la cual está dada en (1.8), es otra subserie de S y los términos que restan de S se presentan en la (1.9).

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \frac{1}{216} + \frac{1}{343} + \dots \tag{1.8}$$

$$S'_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n^3+1}^{(n+1)^3-1} \frac{1}{j} \tag{1.9}$$

El número de términos de la nueva serie S'_3 entre $1/n^3$ y $1/(n+1)^3$ con $n \geq 1$ es:

$$T_3 = 3(n^2 + n) \tag{1.10}$$

En la Figura 1.2 se muestra, nuevamente, la serie completa S y los términos que quedan fuera de S_3 marcados entre llaves superiores. El número de términos que restan entre dos valores consecutivos de la forma $1/n^3$ es ahora de 6, 18, 36, 60, etc. De acuerdo a (1.10) el número de términos extraídos de S en la construcción de S'_3 crece muy rápidamente.

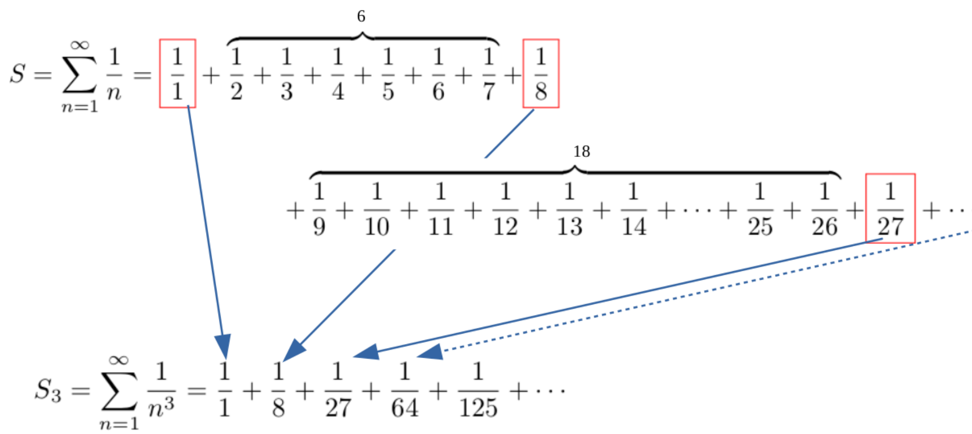

Figura 1.2: S_3 como parte de S y número de términos de S'_3 entre valores consecutivos de la forma $1/n^3$.

Descomposición general de S

En general, la suma de los inversos de los naturales a la potencia p con $p > 1$, representa una subserie de S y el número de términos entre dos valores consecutivos de la forma $1/n^p$ que forman la nueva serie S'_p, está dado por

$$T_p = (n+1)^p - n^p - 1 \tag{1.11}$$

Entonces la serie resultante está dada por

$$S'_p = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n^p+1}^{(n+1)^p-1} \frac{1}{j} \tag{1.12}$$

donde $p > 1$ es el exponente deseado para la serie de términos $1/n^p$ y $n = 1, 2, \dots$.
La reconstrucción de la serie armónica S queda como

$$S = S_p + S'_p = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p} + \sum_{j=n^p+1}^{(n+1)^p-1} \frac{1}{j} \right) \tag{1.13}$$

1.5 Pruebas de convergencia

Para el caso S_2, el valor de convergencia conocido es el dado por Euler [5], es decir, $S_2 = \pi^2/6$. Por otro lado para S_p con p par se conocen valores de convergencias, mientras que para p impar no se conoce una expresión cerrada. Por ejemplo, para $p = 2,4,6,8,10$ se tiene como suma $\pi^2/6$, $\pi^4/90$, $\pi^6/945$, $\pi^8/9450$ y $\pi^{10}/93555$ respectivamente, mientras que para los p impares sólo se sabe que no es un número racional (consultar [10]).
En este caso interesa demostrar la divergencia de las series S'_p obtenidas a partir de S.

Prueba de divergencia para S'_2

La serie S'_2 se definió en la (1.5). Desarrollando la nueva serie, se tiene que para cada valor de n se generan grupos de términos, como puede verse en la Figura 1.1 y que en adelante se definirán como G_n,

$$\begin{array}{lr} \text{si } n=1 & G_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3} \\ \text{si } n=2 & G_2 = \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \\ \text{si } n=3 & G_3 = \frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15} \\ \vdots & \end{array}$$

Puesto que el último término en cada grupo es $1/[(n+1)^2-1]$, y cada grupo contiene $2n$ términos, entonces la suma dentro de cada grupo es por lo menos

$$G_n \geq \frac{2n}{(n+1)^2-1}$$

Recordando la demostración de Oresme para la serie armónica (ver el Apéndice 1.7), se pueden agrupar más de un término según sea necesario de modo que la suma sea siempre $\geq \frac{1}{2}$, es decir, se desea una suma de m grupos tal que:

$$m\left(\frac{2n}{(n+1)^2-1}\right) \geq \frac{1}{2}$$

de aquí que

$$m \geq \left(\frac{(n+1)^2-1}{4n}\right) = \left(\frac{n+2}{4}\right)$$

Para incluir el operador $\geq$ en el cálculo de m usaremos

$$m = \left\lceil \frac{n+2}{4} \right\rceil \tag{1.14}$$

donde los semi-corchetes rectagulares $\lceil\ \rceil$ indican redondeo al entero inmediato superior.
Para reagrupar estos términos, primero se requiere calcular m. Si $m > 1$ entonces se tomarán m términos como sigue

$$G_n + G_{n+1} + \cdots + G_{n+m-1} \tag{1.15}$$

y el siguiente agrupamiento comenzará con G_{n+m}.
Por ejemplo, sea $n = 1$, entonces $m = \lceil \frac{3}{4} \rceil = 1$, por lo tanto sólo se requiere G_1, ya que $G_1 \geq \frac{1}{2}$, de hecho $G_1 = 0.83333$. Si $n = 2$, entonces $m = \lceil \frac{4}{4} \rceil = 1$, y nuevamente sólo se requiere G_2, el cual es mayor que $1/2$, es decir $G_2 = 0.63452$.

Ahora sea $n = 3$, así que $m = \lceil \frac{5}{4} \rceil = 2$, entonces se agruparán $[G_3 + G_4]$ lo cual será $\geq 1/2$. El siguiente agrupamiento comienza con G_5, según lo expuesto en la (1.15) y después de calcular m, con $n = 5$, se sabrá cuantos términos se agregarán.

En general, el valor del agrupamiento para $m > 1$ será

$$\left[\frac{2n}{(n+1)^2-1} + \frac{2(n+1)}{(n+2)^2-1} + \cdots + \frac{2(n+m-1)}{(n+m)^2-1} \right] \geq \frac{1}{2} \tag{1.16}$$

Conviene demostrar que cada agrupamiento propuesto, en el peor escenario, efectivamente es $\geq 1/2$. Supongamos que $m > 1$, por ejemplo sea $n = 3$ y $m = 2$, el agrupamiento resultante, que corresponde a $[G_3 + G_4]$, será

$$\left[\frac{2n}{(n+1)^2-1} + \frac{2(n+1)}{(n+2)^2-1} \right] = \left[\frac{6}{15} + \frac{8}{24} \right] = 0.73333 \geq \frac{1}{2}$$

El resultado neto de $[G_3 + G_4]$ es $[0.48926 + 0.39523] = 0.88449$.

Ahora sea $n = 5$, que corresponde al siguiente agrupamiento puesto que ya se agruparon G_3, G_4 y, como se puede comprobar, $m = 2$. Entonces

$$\begin{aligned} &\left[\frac{2n}{(n+1)^2-1} + \frac{2(n+1)}{(n+2)^2-1} \right] \\ &= \left[\frac{10}{35} + \frac{12}{48} \right] = 0.5357142857 \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

que nuevamente representa el peor caso.

El agrupamiento queda como sigue

$$S_2' = G_1 + G_2 + [G_3 + G_4] + [G_5 + G_6] + [G_7 + G_8 + G_9] + [G_{10} + G_{11} + G_{12}] + \ldots$$

Como este agrupamiento puede continuarse indefinidamente, podemos escribir

$$S_2' = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots = \sum_{k=0}^{K} C_k$$

donde $C_0 = G_1$, $C_1 = G_2$, $C_3 = [G_3 + G_4]$, $C_4 = [G_5 + G_6]$, etc.

Entonces, puede verse que

$$S_2' = (K+1)C_k, \text{ donde } C_k \geq \tfrac{1}{2} \tag{1.17}$$

Si $K \to \infty$, entonces S_2' es divergente. ■

Divergencia para las series S_p'

La demostración de la divergencia para la serie S_2' se puede extender a la serie S_3' y en general para las series S_p'. Sólo se requiere reemplazar el valor deseado de p en la (1.12) y sucesivamente en las expresiones para el cálculo de m y el agrupamiento de los grupos G_n correspondientes, para obtener los nuevos grupos C_k.

En este caso, como el término más pequeño en cada G_n es $1/[(n+1)^p - 1]$ y cada grupo tiene $(n+1)^p - n^p - 1$ términos (ver (1.11)), se requiere que:

$$m\left(\frac{(n+1)^p - n^p - 1}{(n+1)^p - 1} \right) \geq \frac{1}{2} \tag{1.18}$$

por lo que

$$m = \left\lceil \frac{(n+1)^p - 1}{2((n+1)^p - n^p - 1)} \right\rceil \tag{1.19}$$

El agrupamiento sigue la secuencia mostrada en (1.15). Posteriormente se aplica la misma regla dada en (1.17) para S'_p, es decir,

$$S'_p = (K+1)C_k, \text{ donde } C_k \geq \tfrac{1}{2}$$

Si $K \to \infty$, entonces S'_p es divergente. ■
En la continuación del trabajo se consideran S_2 y S_4 convergentes, lo cual ha sido ampliamente demostrado [10], mientras que S'_2 y S'_4 son divergentes. La selección anterior obedece a que los valores de convergencia para S_2 y para S_4 son conocidos, simplificando así la exposición, y además la divergencia para S'_2 y S'_4 se obtienen de las secciones 1.5 y 1.5.

1.6 Análisis de las series reconstruidas

Según se anotó antes, la serie armónica S se puede ir construyendo a partir de la (1.13) para cualquier valor de p tomando $n = 1,2,3,\ldots$. Sin embargo, al desarrollar la serie para dos valores de p se encuentra que las series obtenidas tienen diferente número de términos para un mismo valor de n. Por ejemplo, tomando sumas parciales tenemos que si $n = 1$ y $p = 2$, la serie resultante $S = S_2 + S'_2$ es

$$S = \boxed{\frac{1}{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \tag{1.20}$$

que es el resultado de aplicar la (1.13). Si se toma desde $n = 1$ hasta $n = 2$, también con $p = 2$, entonces la serie S queda como

$$S = \boxed{\frac{1}{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \boxed{\frac{1}{4}} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

donde se han indicado los términos que vienen de la serie S_2 con recuadros en rojo.
Ahora si $p = 4$, para $n = 1$, la serie resultante $S = S_4 + S'_4$, donde $S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$, es

$$S = \boxed{\frac{1}{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{15}$$

Si se toma desde $n = 1$ hasta $n = 2$, con $p = 4$, entonces la serie S queda como

$$S = \boxed{\frac{1}{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{15} + \boxed{\frac{1}{16}} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \cdots + \frac{1}{80}$$

Puede verse la diferencia en el número de términos en cada desarrollo. Se desea obtener el mismo desarrollo de la serie armónica, sin importar si se toma, por ejemplo en dos casos, $p = 2$ y $p = 4$.
A continuación se muestra que para dos valores pares cualesquiera de p, se puede desarrollar la serie parcial en cada caso de modo que coincidan no sólo en el número de términos sino en cada término. La ventaja de usar valores pares de p, es que se conoce el valor de convergencia de las series S_p. Cabe aclarar, además, que no estamos interesados en el resultado de la suma parcial, si no que al mostrar que podemos obtener la misma cantidad de términos para diferentes valores de p, estaremos justificando el uso de la (1.13) en la comparación de dos series obtenidas para diferentes casos.
Para continuar, es necesario proponer un cambio de notación para indicar las sumas parciales. Por lo general, la suma parcial de la serie armónica se denota por H_n (conocida como números armónicos),

pero en este caso, por claridad en el desarrollo, denotaremos la suma parcial de la serie armónica hasta $n = n_x$ como S^{n_x}.
Sean $S^{n_1} = S_{p_1} + S'_{p_1}$, con $p = p_1$, y $S^{n_2} = S_{p_2} + S'_{p_2}$, con $p = p_2$, las sumas parciales de la serie armónica hasta n_1 en la primera y hasta n_2 en la segunda. Entonces, para poder igualar S^{n1} y S^{n2}, se debe completar la serie armónica parcial hasta el mismo término en ambas series. Así, se requiere que

$$(n_1 + 1)^{p_1} - 1 = (n_2 + 1)^{p_2} - 1 \tag{1.21}$$

ya que la expresión de cada lado de (1.21) representa el último término de cada serie.
En general, para valores pares p_1 y p_2, con $p_2 > p_1$, y dado un valor n_2 para la serie $S^{n_2} = S_{p_2} + S'_{p_2}$, se requiere calcular la serie $S^{n_1} = S_{p_1} + S'_{p_1}$ hasta el término:

$$n_1 = (n_2 + 1)^{p_2/p_1} - 1 \tag{1.22}$$

lo cual se obtiene resolviendo la (1.21). En nuestro caso, tenemos $p_1 = 2$ y $p_2 = 4$. Es decir, se desea $S^{n_1} = S_2 + S'_2$ lo mismo que $S^{n_2} = S_4 + S'_4$. Resolviendo la (1.21) para n_1, o aplicando la (1.22), dada n_2, se obtiene

$$n_1 = (n_2 + 1)^2 - 1 \tag{1.23}$$

Entonces el desarrollo de la serie S para estos dos valores de p debe ser

$$S = S^{n_1} = S^{n_2} \tag{1.24}$$

donde, nuevamente usando la (1.13) parcial, S^{n_1} y S^{n_2} son las sumas dadas por

$$S^{n_1} = \sum_{n=1}^{n_1} \left(\frac{1}{n^2} + \sum_{j=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{j} \right), \text{ donde se reemplazó } p = 2 \tag{1.25}$$

y

$$S^{n_2} = \sum_{n=1}^{n_2} \left(\frac{1}{n^4} + \sum_{j=n^4+1}^{(n+1)^4-1} \frac{1}{j} \right), \text{ donde se reemplazó } p = 4 \tag{1.26}$$

Como ejemplo, sea $n_2 = 1$, entonces de la (1.23) resulta $n_1 = 3$. Desarrollando tenemos

$$S^{n_2} = \boxed{\frac{1}{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{15} \tag{1.27}$$

y

$$|S^{n_1} = \boxed{\frac{1}{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \boxed{\frac{1}{4}} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{8} + \boxed{\frac{1}{9}} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{15} \tag{1.28}$$

donde en los recuadros se señalan los valores de $n_2 = 1$ en la (1.27), y de $n_1 = 1,2,3$ en la (1.28).
Cumpliendo esta condición, es decir, (1.22) , (1.25) y (1.26) se puede asegurar que las sumas parciales de S^{n_1} y S^{n_2} son exactamente iguales. En adelante estas sumas se denotan sólo como S, ya que en el límite, cuando $n \to \infty$, éstas se convierten en la serie armónica S, y se puede establecer que

$$S_2 + S'_2 = S_4 + S'_4 \tag{1.29}$$

Lo que resulta interesante en esta igualdad es que se sabe que S_2 y S_4 convergen, esto es, cuando $n \to \infty$

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6}$$

y

$$S_4 = \frac{\pi^4}{90}$$

Como $S_2 > S_4$, entonces, de acuerdo a la igualdad (1.29), $S_2' < S_4'$. Esto sugiere que aunque ambas series S_2' y S_4' son divergentes, su valor al infinito es diferente. Entonces, podemos decir que para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$, las series subarmónicas están relacionadas como

$$S_2' = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \left(\frac{1}{j}\right) < S_4' = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n^4+1}^{(n+1)^4-1} \left(\frac{1}{j}\right) \tag{1.30}$$

La (1.30) indica que la serie subarmónica que omite todos los términos de la forma $1/n^2$ es menor que la serie subarmónica que omite todos los términos de la forma $1/n^4$.
Más aún, se puede asegurar que

$$S_4' - S_2' = S_2 - S_4 = 0.562610833137088. \tag{1.31}$$

Entonces, se está comprobando que estas series subarmónicas divergentes tienen diferente valor al infinito.
Como generalización final, se puede escribir:
Sean S_a y S_b dos series divergentes diferentes, entonces se cumple que

$$|S_a - S_b| > 0 \tag{1.32}$$

donde las barras | | indican valor absoluto.

1.7 Conclusiones

En este trabajo se mostró que la serie armónica se puede descomponer en dos subseries, una S_p dada por la suma de los inversos naturales de la forma $1/n^p$ con $p > 1$ y la otra, S_p' dada por todos los términos que completan la serie armónica. Para lograr lo anterior se propuso una ecuación para generar S_p' para toda $p > 1$. Además, sabiendo que S es divergente y S_p es convergente, se demostró la divergencia de S_p'.
Una vez hecho lo anterior y conociendo los valores de convergencia de S_p para dos valores p_1 y p_2, se logró calcular la diferencia al infinito de las series divergentes S_{p_1}' y S_{p_2}'.
Para resaltar los resultados alcanzados en este trabajo se puede mencionar: a) Las series S_p se muestran como un subconjunto de la serie armónica S; b) Se genera una nueva serie S_p' a través de una nueva ecuación que al sumarla a S_p permite reconstruir S; c) Se demuestra la divergencia de las nuevas series S_p' y d) Se calcula la diferencia al infinito de estas series S_p' resultando un valor diferente de cero.

Bibliografía

[1] Cusumano, A. (1998). The harmonic series diverges. *The Amer. Math. Monthly. 105* (7), p.608.

[2] Dunham, W. (1987). The Bernoullis and the harmonic series. *College Mathematics Journal. 18*(1), p. 18-23.

[3] Dunham, W. (1990). *Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics*. John Wiley and Sons.

[4] Dunham, W. (1999). *Euler: The Master of Us All*. The Mathematical Association of America.

[5] Euler, L., (1740) De progressionibus harmonicis observationes *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, **7**: 150-161.

[6] Honsberger, R. (1976). *Mathematical Gems II*. The Mathematical Association of America.

[7] Larson, R. and Edwards, B. H., (2013) *Calculus* 10th Edition. Cengage Learning, Independence: KY.

[8] Oresme, N., (ca. 1360) Quastiones super Geometriam Euclidis (Questions concerning Euclid's Geometry).

[9] Plaza, A., (2018) The Harmonic Series Diverges, *The Amer. Math. Monthly. 125*(3), p.222-222.

[10] Sánchez Muñoz, J. M., (2015) Euler y El Problema de Basilea, *Pensamiento Matemático. 5*,(1), p.27-56.

[11] Segal, A. C. (1989), Subharmonic Series, *The College Mathematics Journal. 20*(3), p.194-200.

[12] Tóth L., and Mare (1991), S. E 3432, *The Amer. Math. Monthly. 98*(3), p. 264.

APÉNDICE

La agrupación de Oresme

Partiendo de la serie armónica, Oresme la agrupa de la siguiente manera

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{16}\right] + \cdots$$

Haciendo $C_0 = 1$, $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, etc. tenemos que cada grupo se puede escribir como

$$C_k = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \frac{1}{2^{k-1} + n}, \text{donde } k \geq 1.$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} C_1 = &\ \textstyle\sum_{n=1}^{2^{1-1}} \frac{1}{2^{1-1}+n} = && \frac{1}{2^0+1} = \frac{1}{2} \\ C_2 = &\ \textstyle\sum_{n=1}^{2^{2-1}} \frac{1}{2^{2-1}+n} = && \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} \\ C_3 = &\ \textstyle\sum_{n=1}^{2^{3-1}} \frac{1}{2^{3-1}+n} = && \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

El número de términos en cada grupo C_k es 2^{k-1}. Como el término menor en cada grupo es precisamente $\frac{1}{2^k}$ tenemos al menos 2^{k-1} veces $\frac{1}{2^k}$, es decir,

$$2^{k-1} \times \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2},$$

así que cada $C_k \geq \frac{1}{2}$. Podemos decir que

$$S = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{m} C_k \geq (m+1)\frac{1}{2}.$$

Como $C_0 = 1$,

$$S = C_0 + \sum_{k=1}^{m} C_k = 1 + m\left(\frac{1}{2}\right).$$

Si $m \to \infty$, $m(1/2) \to \infty$, por lo tanto, la serie S diverge.