



## **Análisis de la actividad algebraica implicada en el trabajo con las tablas estadísticas**

Analysis of the algebraic activity involved in working with statistical tables

**Jocelyn D. Pallauta**  
jocelyndiaz@correo.ugr.es  
Facultad de Educación  
Universidad de Granada  
España

**María M. Gea**  
mmgea@ugr.es  
Facultad de Educación  
Universidad de Granada  
España

**Carmen Batanero**  
batanero@ugr.es  
Facultad de Educación  
Universidad de Granada  
España

Recibido: 23 setiembre 2019

Aceptado: 10 diciembre 2019

**Resumen.** En este trabajo se analiza la actividad algebraica requerida en el manejo de las tablas estadísticas que se tienen en cuenta en los cursos 5° a 8° de la Educación Básica y en la educación Media en Chile (10 a 13 años). Para ello se utilizan los niveles de razonamiento algebraico descritos por Godino y sus colaboradores, y la clasificación de los tipos de tablas estadísticas sugerida por Lahanier- Reuter. La información obtenida es útil al profesor de Educación Básica o Secundaria para tener en cuenta el nivel de razonamiento algebraico requerido en el trabajo con los diferentes tipos de tablas y las actividades propuestas respecto a ellas.

**Palabras clave:** Educación Básica (niveles 5° a 8°) tablas estadísticas, niveles de razonamiento algebraico.

**Abstract.** In this paper we analyse the algebraic activity required in the work with the statistical tables, which are taken into account in Basic Education in Chile grades 5th to 8th (10 to 13-year-olds). To achieve this goal, the levels of algebraic reasoning described by Godino and his collaborators, and the classification of the types of statistical tables suggested by Lahanier-Reuter are used. The information obtained is useful for teachers of these or upper levels who should take into account the level of algebraic reasoning required in the work with the different types of tables and the proposed activities related to them.

**KeyWords:** Basic Education, statistical tables, levels of algebraic reasoning

## 1.1 Introducción

Las tablas estadísticas aparecen con mucha frecuencia en el estudio de las matemáticas y de otras materias para representar, resumir y comunicar información de tipo diverso y también como instrumento de análisis. En contextos cotidianos, como la televisión, la prensa, publicidad e Internet, encontramos también este tipo de representación para comunicar una gran variedad de información (Gal, 2002). Unas capacidades mínimas de lectura y construcción de las mismas son un requisito para el ciudadano en la sociedad de la información, donde cada día es más necesaria la comprensión de la estadística para tomar mejores decisiones (Engel, 2019).

Para lograr estas competencias, los diseños curriculares en Chile incluyen en la Educación Básica los contenidos relacionados, que se muestran en la Tabla 1.1 (MINEDUC, 2015, 2018). Los primeros tres cursos de Enseñanza Básica, se trabaja con tablas de conteo como medio de registro de datos propios del entorno cercano al estudiante. En cuarto curso, se introduce el uso de las tablas de frecuencia, para representar la información emanada de diferentes fuentes o resultados de juegos aleatorios. El estudio más profundo de las tablas, se presenta en quinto curso, puesto que se incorporan las tablas de datos de doble entrada, mientras que en séptimo nivel aparecen, las tablas de frecuencias absolutas y relativas (porcentual), que son utilizadas para registrar datos de una muestra o de resultados de experimentos aleatorios.

Con orientaciones muy parecidas, el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012) incluye el trabajo con listados de datos desde el 1° curso de Educación Básica y las tablas sencillas de frecuencia desde el 2° curso, las tablas de doble entrada desde 5° curso y las frecuencias relativas y porcentajes en el 6° curso. Contenidos similares se presentan en otros currículos, como NTCM (2000) en diferentes grados, donde se propone el tratamiento explícito de las tablas, en objetivos como representar y organizar la información recogida por los propios estudiantes en diferentes formatos, entre ellos las tablas. Luego, a través de esta, se sugiere determinar y analizar diferentes medidas de centralización y dispersión, dependiendo del contexto que obedezca a la información.

**Tabla 1.1:** Características de los niveles de algebraización 0 a 3 (Godino et al., 2014)

Curso	Objetivos de Aprendizaje sobre tablas estadísticas
1°	-Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando tablas de conteo.
2°	-Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando tablas de conteo. -Registrar en tablas, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas.
3°	-Realizar encuestas, clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas.
4°	-Realizar encuestas, analizar los datos y comparar con los resultados de muestras aleatorias, usando tablas. -Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular de manera manual y/o con software educativo.
5°	-Leer, interpretar y completar tablas y comunicar sus conclusiones.

7°	-Representar datos obtenidos en una muestra mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, de manera manual y/o con software educativo. -Comparar las frecuencias relativas de un evento obtenidas al repetir un experimento de forma manual y/o con software educativo, con la probabilidad obtenida de manera teórica, usando tablas.
----	---

Todos estos documentos curriculares coinciden en destacar la importancia de promover el desarrollo de habilidades estadísticas en los estudiantes, a través de la recolección y análisis de datos que sean de interés, desde temprana edad, con el fin de que cuenten con herramientas que les permitan tomar mejores decisiones en su vida cotidiana y en el futuro.

## 1.2 Planteamiento del problema

---

El profesor que ha de implementar este tema, debe ser consciente de los diversos conocimientos previos requeridos por los estudiantes, los que serán diferentes dependiendo del tipo de tabla estadística, como hemos analizado en Pallauta, Gea y Batanero (en revisión). Pero, tanto en este trabajo, como en otros que se analizan las tablas estadísticas presentadas en los libros de texto, los autores se centran, preferentemente, en el contenido estadístico relacionado, o bien se profundiza en el tipo de actividad propuesta respecto a la tabla y las variables que las caracterizan.

El enfoque de este trabajo es diferente, al centrarse en describir la actividad algebraica requerida en el estudio con las tablas estadísticas, la que viene definida por los tipos de objetos algebraicos y niveles de razonamiento que se ejercitan en dicha actividad. A continuación, describimos los antecedentes y marco teórico, para pasar posteriormente al estudio de la actividad algebraica involucrada en los diferentes tipos de tabla.

## 1.3 Marco Teórico

---

### Bases teóricas.

Nos basamos, por un lado, en la clasificación de los tipos de tablas estadísticas propuestas por Lahanier-Reuter y en segundo en los niveles de algebrización definidos por Godino y sus colaboradores.

### Tipos de tablas estadísticas.

Lahanier-Reuter (2003) identifica tres tipos de tablas presentes en la enseñanza de la estadística: tabla de datos, tabla de distribución de una variable, y la tabla de contingencia. Cada una posee funciones específicas que la dotan de sentido, y se analizan a continuación.

- **Tabla de datos.** Es la primera organización de un conjunto de datos. Tiene forma de matriz y contiene, para cada individuo de la muestra, los valores de una o varias variables.

- **Tabla de distribución de una variable.** Esta tabla se construye a partir del conjunto de datos sin clasificar o desde una tabla de datos. Describe la distribución de una variable, dado que asocia cada modalidad de la variable con el número de individuos de la muestra (frecuencia) que presentan dicha modalidad.
- **Tabla de doble entrada o de contingencia.** Representa datos mediante el cruce de dos variables estadísticas cualitativas o cuantitativas. En la parte superior de la tabla (primera fila), se indican las modalidades de una de las variables, mientras que, en la primera columna, se indican las modalidades de la otra variable. El cuerpo de la tabla está formado por las frecuencias conjuntas, que se refieren a las correspondencias entre las modalidades de cada fila y columna.

A estos tipos de tabla podemos aplicar los niveles de complejidad semiótica, que es un modelo propuesto por Arteaga y colaboradores para los gráficos estadísticos (Arteaga, 2011; Arteaga, & Batanero, 2011; Batanero, Arteaga, & Ruiz, 2010), que son los siguientes:

- **Nivel 1 (N1).** Representar solo algunos datos aislados de una variable. En este nivel no se usa la idea de variable o de distribución.
- **Nivel 2 (N2).** Representar un conjunto de datos asociado a una variable, sin formar la distribución de frecuencias. Se utiliza la idea de variable y sus valores, pero no la de frecuencia o distribución. Las tablas de datos usualmente tendrían un nivel de complejidad N2 y excepcionalmente podrían tener un nivel N1.
- **Nivel 3 (N3).** Representar una distribución de frecuencias de una variable, donde ya aparecen los conceptos de frecuencia y de distribución. En nuestro estudio este nivel corresponde a las tablas de distribución de una variable y nuestra propuesta es considerar tres subniveles, que extienden los de Arteaga y colaboradores:
  - **Nivel de complejidad N3.1:** Tablas de distribución de frecuencias ordinarias: absolutas, relativas o porcentuales.
  - **Nivel de complejidad N3.2:** Tablas de distribución de frecuencias, que incluyen también frecuencias acumuladas (absolutas, relativas o porcentuales). Su nivel de complejidad es mayor, porque involucra el manejo de desigualdades.
  - **Nivel de complejidad N3.3:** Cuando se considera la agrupación de los valores de la variable en intervalo, para cualquier tipo de frecuencia, tanto ordinaria como acumulada. Se añade la idea de intervalo, sus extremos y marca de clase.
- **Nivel 4 (N4).** Representar una distribución de frecuencias de dos o más variables. Se emplean todos los objetos anteriores y además, generalmente, se utiliza una misma escala para representar las variables. Corresponde a la tabla de doble entrada y sugerimos subdividirlo en dos subniveles:

- **Nivel de complejidad N4.1:** Tablas de contingencia de frecuencias ordinarias: absolutas, relativas o porcentuales.
- **Nivel de complejidad N4.2:** Cuando se considera la agrupación de los valores de la variable en intervalo, para cualquier tipo de frecuencia.

## 1.4 Niveles iniciales de algebrización.

Utilizamos como guía para el análisis de las tablas los niveles iniciales de algebrización definidos por Godino y sus colaboradores (Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014; Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray & Lasa, A, 2015). Los autores se basan para definir sus niveles de algebrización, tanto en la actividad que realiza el sujeto que resuelve una tarea matemática, como en el grado de generalidad de los objetos que se utilizan, además de los procesos matemáticos involucrados y el tipo de lenguaje.

Consideran los siguientes tipos de objetos algebraicos: relaciones binarias (de equivalencia y orden), operaciones realizadas sobre los elementos de un conjunto y sus propiedades, funciones y objetos involucrados en las mismas (fórmulas, variables, representaciones de las mismas) y estructuras algebraicas. Además, suponen características de la actividad algebraica como los procesos de generalización, particularización y representación. El primero de estos procesos da lugar a los objetos intensivos, es decir, que se puede definir con un cierto grado de abstracción mediante las propiedades que lo caracterizan, siendo la particularización el proceso inverso. (Godino et al., 2014).

En la Tabla 1.2 resumimos la definición de los niveles 0 a 3, propios de las primeras etapas educativas, según el modelo de Godino et al. (2014). Los autores establecen que se trabaja en uno de estos niveles cuando se cumple una de las condiciones propuestas; por ejemplo, si se usan objetos con segundo grado de generalidad se estaría trabajando a nivel A1. Además, siguiendo a Radford (2003), señalan que, en los primeros niveles educativos, los estudiantes pueden emplear diferentes medios para expresar los objetos y procesos algebraicos, no sólo con el lenguaje simbólico, sino también con lenguaje ordinario, gráfico o tabular.

**Tabla 1.2:** Características de los niveles de algebrización 0 a 3 (Godino et al., 2014)

Nivel	Generalidad de los Objetos	Transformaciones de los objetos	Lenguaje matemático
A0	Objetos con primer grado de generalidad (números particulares). Significado operacional de la igualdad.	Operaciones aritméticas con números particulares. Se aplican propiedades de las operaciones o de N.	Natural, numérico, icónico, gestual. Pueden intervenir símbolos, pero su valor se obtiene operando con números particulares.

A1	Objetos con segundo grado de generalidad (conjuntos, clases o tipos de números). Significado relacional de la igualdad. Variables como incógnitas. .	Operaciones con objetos de primer grado de generalidad, aplicando propiedades de la estructura algebraica de $N$ y la igualdad como equivalencia.	Se puede usar símbolos como resultados de operaciones, pero no se opera con ellos.
A2	Objetos con segundo grado de generalidad (conjuntos, clases o tipos de números). Significado relacional de la igualdad. Variables como incógnitas, números generalizados y cantidad cambiante.	Operaciones con objetos de primer grado de generalidad, aplicando propiedades de la estructura algebraica de $N$ . Ecuaciones de la forma, $ax + b = c$ . En tareas funcionales, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico ? literal, aunque ligados a la información del contexto
A3	Se usan indeterminadas, incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares. Objetos intensivos con segundo grado de generalidad.	Ecuaciones de la forma $ax \pm b = cx \pm d$ en tareas estructurales. Se hacen operaciones con incógnitas o variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico ? literal; se usan los símbolos de manera analítica (sin significados), sin referirse a información contextual.

**Antecedentes** Son antecedentes de nuestro trabajo las investigaciones de Díaz-Levicoy, Morales y López-Martín (2015), quienes centran la atención en las tablas estadísticas, en cuatro libros de texto chilenos de 1° y 2° curso de Educación Básica (6 y 7 años). Se considera, entre otras variables, el tipo de tabla (datos, conteo, frecuencia y doble entrada) en libros de estos niveles educativos, de dos editoriales diferentes (Díaz-Levicoy, Morales, & López-Martín, 2015).

Pallauta y Gea (2019), caracterizan la actividad matemática y el tipo de tabla estadística propuesta al estudiante en dos series de libros de texto que se dirigen a los niveles finales (10 a 13 años) de Educación Básica. Los tipos de tablas, fueron similares a los propuestos por Díaz-Levicoy, pero no se encontraron tablas de conteo y se incorporó y se profundizó en otros tipos (frecuencias ordinarias, acumuladas y de contingencia) que obedecían a los objetos matemáticos que en ellas intervenían y al nivel educativo de los estudiantes.

Guimarães, Gitirana, Cavalcanti y Marques (2007), examinan las actividades que involucran gráficos y tablas en textos de matemática de 1° a 5° de la Enseñanza Fundamental (7 a 11 años), analizando el tipo de representación utilizada, habilidades explotadas, tipo de análisis solicitado al alumno, tipo de datos, contextos, y contenido matemático. Un trabajo muy similar es llevado a cabo por Evangelista y Guimarães (2019), que analizan las actividades que involucran tablas en las colecciones de libros de texto de la escuela primaria brasileña de 1° a 5° grado.

En ninguno de estos trabajos se estudia la actividad algebraica desarrollada, que es el objetivo de este trabajo. Una investigación que analiza la actividad algebraica de las tareas propuestas en un libro de texto mexicano, desde primero de primaria es el de Aké y Godino (2018). Los autores utilizan cuatro criterios del modelo de Niveles de Algebrización (Godino et al., 2014): (1) Tipo de objetos algebraicos; (2) Tipo de notación o representaciones; (3) Transformaciones o cálculo analítico; y (4) Situaciones de modelización.

Nuestro trabajo, pretende caracterizar la actividad algebraica que se desarrolla en los distintos tipos de tablas estadísticas propuestas en una muestra de textos escolares chilenos, identificando la presencia de

los anteriores criterios en cada tipo de tabla y, consecuentemente, el nivel de razonamiento algebraico requerido en el trabajo con las mismas.

## 1.5 Marco metodológico

---

**Concepción metodológica de la investigación** Como se ha indicado, la finalidad del trabajo es analizar el tipo de actividad algebraica requerida en el trabajo con tablas estadísticas sugeridas en los niveles 5° a 8° de la Educación Básica Chilena. Se trata de una investigación de tipo teórico y cualitativo (Cohen, Manion y Morrison, 2013), pues nuestros datos son textos y tablas tomados de documentos oficiales (documentos curriculares) y de algunos libros de texto utilizados en esta etapa educativa en Chile y no se consideran variables cuantitativas.

El enfoque cualitativo provee de una comprensión en profundidad de los datos, además de una riqueza interpretativa (Sampieri, 2018), donde se estudia con detenimiento la naturaleza de las realidades analizadas, en este caso, la actividad algebraica involucrada en las tablas estadísticas

### Técnicas de análisis de datos

Se emplea como técnica el análisis de contenido en una muestra de textos escolares, en concreto doce textos escolares, publicados el año 2017 dirigidos a estudiantes de 5° a 8° curso (10 a 13 años) de Educación Básica de Chile, que siguen el marco curricular vigente (MINEDUC, 2015; 2018). Por cada nivel educativo se analizaron tres textos: el libro del estudiante, el cuaderno de ejercicios, y la guía didáctica para el docente. Los textos analizados fueron elegidos por ser los más utilizados, dado que son distribuidos de forma gratuita a los estudiantes del sistema público chileno.

El objetivo del análisis fue identificar los objetos algebraicos de carácter estructural (operaciones, relaciones de equivalencia, variables o incógnitas), o funcional que se presentan en las tareas relacionadas con las tablas estadísticas en estos textos. A continuación, se exponen los resultados del análisis, donde, para cada tipo de tabla mostramos un ejemplo prototípico tomado de los textos chilenos que se analizan.

## 1.6 Resultados

---

### Tablas de datos

Como se ha indicado, estas tablas recogen los datos de los elementos de una muestra, contando con una fila o columna por elemento y otra fila o columna adicional con la descripción de las variables recogidas. Se muestra un ejemplo en la Figura 1.1, donde los elementos de la muestra son varias horas de un día (que están indicadas en la primera fila) y para cada una de ellas se recoge como dato la temperatura.

En nuestra propuesta, este tipo de tabla corresponde al nivel semiótico N2, descrito por Arteaga (2011), puesto que en esta representación aparecen la idea de variable y valor de la variable. En el ejemplo se contempla como variable la temperatura y sus valores son los obtenidos en diferentes horas de

la mañana. Dichos valores de la temperatura son objetos extensivos (particulares) y se expresan con lenguaje numérico, pero la variable (temperatura en una cierta hora de la mañana) serían objetos intensivos pues se podrían referir a otros valores diferentes y a otros conjuntos de datos.

► En un noticiero se muestra la temperatura en diferentes horas de un día.

Temperatura durante la mañana						
Hora	7:00	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00
Temperatura (°C)	10	14	18	24	28	30

**Figura 1.1:** Listado de datos propuesto para 5º Básico Fuente: Kheong, Soon y Ramakrishnan (2017, p.291)

Por otro lado, en el ejemplo, a cada hora particular se le asocia su temperatura, de modo que podríamos considerar que tenemos una función, que no tiene una expresión algebraica. Se trata de una aplicación que viene dada por una tabla de valores, cuyo dominio es el conjunto de elementos medidos (las horas) y el rango un subconjunto de números reales. En otros ejemplos podríamos considerar una variable cualitativa. Se estaría trabajando a un nivel A0 de algebrización, pues no se pide hallar una expresión algebraica para la función.

#### Tablas de distribución de una variable estadística.

En estas tablas se añade a la variable y sus valores (y la función correspondiente) la idea de distribución. Por tanto, corresponden al nivel de complejidad semiótica N3 (Arteaga, 2011). Para formarlas, se deben clasificar los elementos del conjunto de datos según el valor que les corresponde de la variable, es decir, se establece una relación de equivalencia en dicho conjunto, con tantas clases de equivalencia diferentes como valores tome la variable. A continuación, se establece una función (frecuencia absoluta), cuyo dominio es el conjunto de valores de la variable y cuyo rango es un subconjunto de números naturales. Pero la función frecuencia absoluta no se define mediante una expresión algebraica, sino que a cada valor  $x$  se le asigna el cardinal del subconjunto de la muestra que toma dicho valor:

$$f(x) = \text{Card} \{\text{valores de } x\}$$

Por tanto, en el trabajo con estas tablas, se usan objetos con segundo grado de generalidad (clases formadas por todos los elementos con el mismo valor de la variable). Además, el símbolo igual se usa con sentido relacional, cuando relacionamos la frecuencia  $f$  con el valor de la variable, por ejemplo, en la Figura 1.2, si se indica  $f(1) = 9$

7 Analiza la tabla y responde las preguntas.

Número de revistas compradas	
Cantidad de personas	f
1	9
2	12
3	7
4	12
Total	40

- ¿Cuál es la variable en estudio?
- ¿Cuál es el rango?
- ¿Cuántas personas compraron menos de 3 revistas?

**Figura 1.2:** Ejemplo de tabla de frecuencias absolutas Fuente: Merino, Muñoz, Pérez y Rupin (2017, p.305).

En las tablas de distribución se suelen incluir diferentes tipos de frecuencia, que se indican en la primera fila (absolutas, relativas, acumuladas o porcentajes). En la primera columna se indican las diferentes modalidades o valores que toma la variable. Y en cada una de las siguientes columnas, las

celdas de la tabla contienen frecuencia que corresponde a dicho valor o modalidad (del tipo indicado en la primera fila para esa columna). Este nivel, además, podríamos dividirlo en tres subniveles, dependiendo de si se consideran las frecuencias acumuladas y los intervalos de clase.

**Nivel de complejidad N3.1:** Tablas de distribución de frecuencias ordinarias: absolutas, relativas o porcentuales. Se conforma de columnas (o filas), en la primera de las cuales son mostrados los valores o categorías de la variable ( $x_i$ , para  $i = 1, \dots, k$ ), mientras que en las siguientes se representa la frecuencia absoluta ( $n_i$ , para  $i = 1, \dots, k$ ) y/o relativa ( $f_i$ ) para cada modalidad de la variable. Este tipo de frecuencias toman valores discretos, que corresponden al cardinal del conjunto de elementos que tienen los mismos valores de la variable. Un ejemplo que contiene únicamente frecuencias absolutas se representa en la Figura 1.2. La frecuencia relativa indica la proporción con que se observa el valor  $x_i$  respecto del total de datos considerados. Se denota por  $f_i = n_i / N$  (para  $i = 1, \dots, k$ ), donde  $N$  es el total de datos analizados y  $n_i$  la frecuencia absoluta de la modalidad  $x_i$ . Por tanto, la frecuencia relativa es una función lineal de la absoluta y viceversa y además viene expresada mediante una expresión algebraica. Otro tipo de frecuencias relacionadas es la frecuencia porcentual o porcentaje, que es así mismo una función lineal de la frecuencia absoluta y resulta de multiplicar por 100 la frecuencia relativa. Desde el punto de vista de la actividad algebraica, se trabaja ya a nivel A1, pues se utiliza lenguaje simbólico para expresar operaciones y se consideran objetos de segundo grado de generalidad (clases de equivalencia).

**Nivel de complejidad N3.2:** Tablas de distribución de frecuencias, que incluyen también frecuencias acumuladas (absolutas, relativas o porcentuales). Dichas frecuencias acumuladas se refieren al total de valores que son menores a un valor de la variable determinado. Se obtienen sumando la frecuencia de cada uno de los valores anteriores al considerado y pueden ser ordinarias, relativas o porcentuales.

$$N_i = \sum_{j=1}^i n_j, \quad F_i = \frac{N_i}{N}$$

La relación entre la frecuencia acumulada absoluta, con la frecuencia acumulada relativa y porcentual sería lineal, pero la frecuencia acumulada no guarda relación lineal con la frecuencia ordinaria. De la frecuencia acumulada también se derivan los conceptos de percentil y rango de percentil, así como de mediana. El nivel de complejidad es mayor que en las tablas de frecuencias ordinarias, porque involucra el manejo de desigualdades. Un ejemplo tomado de un libro de texto se muestra en la Figura 1.3. En esta tabla, además de la frecuencia absoluta, se incluye la frecuencia acumulada, y se añade una fila con el cálculo de cuartiles. Respecto al nivel de algebraización se utiliza el A1 y en caso de calcular percentiles, sus rangos o cuartiles, el nivel A2 pues se realizarían operaciones para despejar incógnitas, ya que habría que buscar el valor de la función frecuencia acumulada correspondiente a un cierto porcentaje. En el ejemplo, para calcular el primer cuartil, se busca la frecuencia acumulada que corresponde al 25% de los datos (10,25) y se invierte la función frecuencia acumulada para encontrar el valor de la variable ( $X = 1$ ) que corresponde a dicha frecuencia. Una dificultad es que a dicho valor le corresponden las frecuencias acumuladas que comprendidas entre 4 y 12, ya que trabajamos con una función por saltos (en lugar de una función continua).

Calcula los valores de los cuartiles a partir de la información de la tabla.

Cantidad de hermanos de un grupo de estudiantes		
Cantidad de hermanos	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
0	3	3
1	9	12
2	6	18
3	18	36
4	3	39
5	2	41

  

Cuartil 1 (25%)	Cuartil 2 (50%)	Cuartil 3 (75%)
$0,25 \cdot 41 = 10,25$ $Q_1 = 1$	$0,5 \cdot 41 = 20,5$ $Q_2 = 3$	$0,75 \cdot 41 = 30,75$ $Q_3 = 3$

**Figura 1.3:** Ejemplo de tabla de frecuencias absolutas y acumuladas Fuente: Catalán, Pérez, Prieto y Rupin (2016, p. 317).

**Nivel de complejidad N3.3:** Cuando se considera la agrupación de los valores de la variable en intervalos, para cualquier tipo de frecuencia, tanto ordinaria como acumulada, aumenta la complejidad semiótica, pues se añade la idea de intervalo, sus extremos y marca de clase.

La tabla muestra la cantidad de gasolina que consume una flota de camiones diariamente.

Consumo de gasolina de la flota de camiones	
Gasolina (litros)	Cantidad de camiones
[10, 20[	8
[20, 30[	15
[30, 40[	11
[40, 50[	17
[50, 60]	25

- ¿En qué intervalo se encuentra el percentil 23? ¿Cómo puedes interpretar este valor?
- ¿En qué intervalo se ubica el percentil 45? ¿Qué significa este valor?

**Figura 1.4:** Ejemplo de tabla agrupada en intervalos de clase Fuente: Catalán et al. (2016, p. 330).

El trabajar con tablas de agrupación de valores en intervalos es un primer paso en el estudio de variables aleatorias continuas; la interpretación de la frecuencia de un rango facilita esta comprensión, que se abordará en la distribución en intervalos de estas variables. Un ejemplo de este tipo de tablas se muestra en la Figura 1.4, y desde el punto de vista algebraico, también se trabajaría a nivel A1 o A2 (en el caso del cálculo de percentiles).

## 1.7 Tablas de contingencia

En este tipo de tablas se resume la distribución conjunta de dos variables estadísticas cualitativas o cuantitativas  $(X, Y)$ , con valores  $x_1, x_2, \dots, x_r$  en la variable  $X$ , y con valores  $y_1, y_2, \dots, y_c$  en la variable  $Y$ . Por ejemplo, color de pelo ( $X$ ) y color de ojos ( $Y$ ) toma la forma representada en la Tabla 1.3. Por tanto, se trata de una función que a cada sujeto asigna dos valores, según dos variables diferentes. Estas

tablas corresponderían al nivel más alto de complejidad semiótica (N4) según Arteaga (2011), pues se trabaja con la distribución de dos variables estadísticas unidimensionales que se hacen corresponder entre sí.

**Tabla 1.3:** Tabla de doble entrada

	$y_1$	...	$y_j$	...	$y_c$	
$x_1$						$n_{1.}$
...						...
$x_i$			$n_{ij}$			$n_{i.}$
...						...
$x_r$						$n_{r.}$
	$n_{.1}$		$n_{.j}$		$n_{.c}$	$N$

Fuente: elaborada por las autoras

En las tablas de doble entrada aparecen nuevos tipos de frecuencias (Gea, 2014):

- **Frecuencias dobles ( $n_{ij}$ )**, que se refieren al número de elementos que corresponden a la vez al valor  $x_i$  para la variable X y al valor  $y_j$  para la variable Y. Por ejemplo, el número de sujetos de ojos azules y pelo oscuro. De nuevo, se necesitaría clasificar los sujetos, pero las clases de equivalencia ahora se forman teniendo en cuenta dos variables diferentes. La frecuencia absoluta doble sería el cardinal de la clase de equivalencia correspondiente y, por tanto, es una función de dos variables.
- **Frecuencias marginales, que pueden ser por filas ( $n_{i.}$ ) o por columnas ( $n_{.j}$ )**. En el ejemplo, se puede tratar del número de personas con pelo oscuro (mediante filas), o del número de personas con ojos azules (mediante columnas). En este caso, se considera una única variable y, por tanto, se tiene una función univariante.
- **Frecuencias condicionales:** Cuando se pide el número de elementos para un valor de la variable, fijando un valor de la otra. En el ejemplo, número de sujetos de ojos azules si se sabe que el pelo es oscuro. Matemáticamente, esta frecuencia absoluta condicional  $n_{ij}$  es equivalente a la doble, pero psicológicamente no se perciben de la misma forma, ya que la lectura de frecuencias condicionales posee mayor dificultad (Cañadas, 2012). Se trataría ahora de una función de una variable, cuando se fija como constante el valor de la otra variable.

Las funciones consideradas en todos estos casos no tienen una expresión algebraica conocida. Pero, además de las frecuencias absolutas, mencionadas anteriormente, se pueden deducir de la tabla diferentes tipos de frecuencias relativas que son funciones lineales de las frecuencias absolutas definidas con anterioridad. como:

– Frecuencia relativa doble:  $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$

– frecuencia relativa condicional respecto a su fila:  $f(y_j/X = x_i) = \frac{n_{ij}}{n_{i.}} = \frac{f_{ij}}{f_i}$

– Frecuencia relativa condicional respecto a su columna:  $f(x_i/Y = y_j) = \frac{n_{ij}}{n_{.j}} = \frac{f_{ij}}{f_j}$

También es posible calcular frecuencias relativas marginales, y probabilidades (dobles, marginales y condicionales). Se debe tener en cuenta, que estos diferentes tipos de frecuencias y probabilidades presentes en la tabla de doble entrada, hacen más compleja su interpretación al estudiante

(Cañadas, 2012). Estas tablas, a su vez, podrían contener intervalos de clase, aunque no es habitual considerar frecuencias acumuladas. Por tanto, se podría clasificar este nivel en dos subniveles, según se consideren intervalos de clase o no:

- **Nivel de complejidad N4.1:** Tablas de contingencia de frecuencias ordinarias: absolutas, relativas o porcentuales. Incluimos en la Figura 1.5 un ejemplo para 7<sup>o</sup> curso (12 años), donde se proporcionan únicamente las frecuencias dobles. No obstante, para calcular las probabilidades pedidas en el problema, el estudiante ha de considerar en el apartado b la frecuencia doble y el total de casos, mientras que, en el c, la frecuencia doble y la frecuencia marginal.

6. La tabla muestra la cantidad de hombres y mujeres que estudia en un colegio técnico las especialidades de mecánica y contador.

	Mecánica	Contador
Mujeres	11	54
Hombres	81	54

b. Calcula la probabilidad de escoger al azar, del total de alumnos, una mujer que estudie mecánica.

c. Calcula la probabilidad de escoger al azar, del total de hombres, uno que estudie para contador.

Figura 1.5: Ejemplo tabla de contingencia Fuente: Merino et al. (2016, p. 348).

- **Nivel de complejidad N4.2:** Cuando se considera la agrupación de los valores de la variable en intervalo, para cualquier tipo de frecuencia. En el ejemplo expuesto en la Figura 1.6, en la tabla se presenta una tabla de contingencia en que las modalidades de variable puntaje se encuentran en datos agrupados. El tratamiento con este tipo de tablas posee un mayor grado de complejidad semiótico, porque se trabaja con una variedad de objetos matemáticos (intervalos, marca de clase, desigualdad). En este caso, para la enseñanza de los percentiles, el estudiante de 8<sup>o</sup> Básico (13 años) tendrá que trabajar con funciones continuas para resolver la actividad propuesta.

Responde las preguntas. Para ello, analiza la tabla.

Puntajes obtenidos en un colegio		
Puntaje	Mujeres	Hombres
	f	f
[0, 15[	5	10
[15, 30[	17	15
[30, 45[	15	10
[45, 60[	10	8
[60, 75]	3	7

- a. ¿El rendimiento de los mejores puntajes de las mujeres es superior que el de los hombres?
- b. Respecto al 20% de los puntajes más bajos, ¿es inferior en las mujeres o en los hombres?

Figura 1.6: Ejemplo de tabla de contingencia con datos agrupados Fuente: Castro, Curiche y Vega (2014, p.225)

Particularmente, se busca el intervalo (i) al que pertenece, por ejemplo, el 80% de los datos en las frecuencias acumuladas (40 mujeres y 40 hombres), este se encuentra en el intervalo  $i = 4$  ( $45 < X < 60$ ) y, por medio de una ecuación, podrá determinar los percentiles 80 para el apartado a, mientras que en el b se pide el percentil 20 para ambos valores que toma la variable sexo (hombre y mujer), luego se comparan los valores obtenidos, y conforme a esto se decide quiénes tienen mejor o peor rendimiento, si hombres o mujeres. Desde los niveles de algebrización, la tarea se posicionaría en un nivel A2, en

que el objeto intensivo correspondería al percentil ( $P_k$ ), mientras que los objetos extensivos serían el percentil 80 ( $P_{80}$ ) y 20 ( $P_{20}$ ). Para resumir nuestro análisis, en la Tabla 1.4 se presenta un resumen con los objetos algebraicos involucrados en el trabajo con tablas estadísticas para los niveles educativos de 5° a 8° Básico, a los que hay que añadir los correspondientes procesos matemáticos implicados, que permiten establecer la delimitación de los distintos niveles de razonamiento algebraico, antes mencionados.

**Tabla 1.4:** Objetos algebraicos involucrados en el trabajo con tablas estadísticas

	Tabla datos	F. ordinarias	F. acumuladas	F. agrupadas	F. ordinarias	F. agrupadas
Variable y valores	x	x	x	x	x	x
Relación equivalencia		x	x	x	x	x
Funciones	x	x	x	x	x	x
Función lineal, proporcionalidad (para las f. relativa y %)		x	x	x	x	x
Intervalos de valores, extremos				x		x
Función de dos variables					x	x
Desigualdades			x	x		x
Incógnitas (cálculo de percentiles)			x	x		x
Expresiones simbólicas		x	x	x	x	x

Fuente: elaborada por las autoras

Por ejemplo, siempre que haya que clasificar los datos respecto a su valor, para calcular algún tipo de frecuencia, se emplea un proceso de generalización; y siempre que se vaya a calcular una frecuencia relativa, porcentual o acumulada, se recurre a un proceso de particularización de la fórmula correspondiente para los datos de la muestra. La representación, bien usando símbolos numéricos o algebraicos, está presente a lo largo de todo el trabajo con las tablas, que en si misma constituye una representación particular.

Los objetos matemáticos presentados en la Tabla 1.4, permiten diferenciar la actividad matemática que es posible de llevar a cabo en el tratamiento con los tres principales tipos de tablas estadísticas. Podemos observar, la mayor complejidad de las tablas de distribución y de contingencia, asociadas a un nivel A1 y A2 respectivamente de algebrización, en comparación a la menor cantidad de objetos empleados en el trabajo con la tabla de datos, centrada en el nivel A0. De esta diversidad semiótica, se justifica también los niveles de complejidad que proponemos en el estudio de los diferentes tipos de tablas estadísticas.

## 1.8 Conclusiones

En nuestro análisis se pone de manifiesto la actividad algebraica elemental llevada a cabo en el trabajo con las tablas estadísticas, que pasa desapercibida en las publicaciones de educación estadística, a pesar de la posible dificultad que conllevan para el estudiante. Específicamente, en el trabajo con tablas estadísticas no sólo se aplican los conocimientos estadísticos y aritméticos, sino se inicia también el razonamiento algebraico en los primeros niveles definidos por Godino et al. (2014). Pensamos que dicha actividad algebraica debiera ser reconocida, pues puede contribuir a introducir el álgebra temprana en el currículo de Educación Básica en Chile y otros países cuyos currículos sugieren el trabajo con las tablas estadísticas. Dicha introducción es recomendada por autores como Carraher y Schliemann (2007), Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014), o Radford (2014), entre otros.

El profesor que enseña el tema ha de ser consciente de esta actividad y de la complejidad que implica para el estudiante. Así, por ejemplo, la dificultad señalada en el trabajo con percentiles por algunos investigadores, puede venir explicada por la necesidad de trabajar con nivel algebraico A2 y con desigualdades para su determinación. Será además necesario preparar a los profesores responsables para que sean capaces de identificar el nivel de razonamiento requerido en el trabajo con tablas estadísticas y de evaluar si sus estudiantes lo alcanzan.

El análisis realizado en este trabajo puede servir de base para organizar actividades formativas para el profesorado donde ellos analicen las tareas propuestas sobre tablas estadísticas en los libros de texto y determinen la actividad algebraica requerida por parte del estudiante.

**Agradecimiento.** Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER), Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía) y Beca CONICYT Folio: 72190280

## Bibliografía

---

- [1] Aké, L. P., y Godino, J.D (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación matemática*, 30(2), 171-201.
- [2] Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, Granada, España.
- [3] Arteaga, P. y Batanero, C. (2011). Relating graph semiotic complexity to graph comprehension in statistical graphs produced by prospective teachers. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 368-377). Rzeszów: ERME.
- [4] Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 141-154.
- [5] Cañadas, G. (2012). *Comprensión intuitiva y aprendizaje formal de las tablas de contingencia en alumnos de psicología* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.
- [6] Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester Jr (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 669-706). Charlotte, NC: Information Age Publishing; Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [7] Castro, C., Curiche, A., y Vega, M. (2014). *Sé protagonista, Matemática 8*. Santiago, Chile: Ediciones SM Chile.

- [8] Catalán, D., Pérez, B., Prieto, C., y Rupin, P. (2016). *Texto del estudiante Matemática 8ºbásico*. Santiago: Ediciones SM.
- [9] Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2013). *Research methods in education*. Routledge.
- [10] Díaz-Levicoy, D., Morales, R., y López-Martín, M. M. (2015). Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de 1º y 2º año de Educación Primaria. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 4(7), 10-39.
- [11] Engel, J. (2019). Statistical literacy and society. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada: Grupo FQM-126. Disponible en: [www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html](http://www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html).
- [12] Evangelista, B. y Guimarães, G. (2019). Análise de atividades sobre tabelas em livros didáticos brasileiros dos anos iniciais do Ensino Fundamental. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en [www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html](http://www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html)
- [13] Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- [14] Gea, M. M. (2014). *La correlación y regresión en bachillerato: Análisis de libros de texto y del conocimiento de los futuros profesores* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.
- [15] Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219. <http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965>
- [16] Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S., y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142.
- [17] Guimarães, G., Gitirana, V., Cavalcanti, M., y Marques, M. (2007). Livros Didáticos de Matemática nas Séries Iniciais: análise das atividades sobre gráficos e tabelas. *Encontro nacional de educação matemática*, 9, 1-17.
- [18] Kheong, F. H., Soon, G. K., y Ramakrishnan, C. (2017). *Texto del estudiante Matemática 5ºbásico*. Santiago: Marshall Cavendish Education.
- [19] Lahanier-Reuter, D. (2003). Différents types de tableaux dans l'enseignement des statistiques. *Spirale-Revue de recherches en éducation*, 32(32), 143-154.
- [20] Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B., y Rupin, P. (2016). *Texto del estudiante Matemática 7ºbásico*. Santiago: Ediciones SM.
- [21] MINEDUC (2015). *Bases curriculares 7ºBásico a 2ºMedio*. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.
- [22] MINEDUC (2018). *Bases curriculares Primero a Sexto Básico*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- [23] Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas*. Educación General Básica y Ciclo Diversificado. Costa Rica: autor- <http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf>.
- [24] NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [25] Pallauta y Gea, M. (2019). Las actividades sobre tablas estadísticas en textos escolares chilenos de educación básica. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en [www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html](http://www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html)
- [26] Pallauta, J., Gea, M. y Batanero, C. (en revisión). Un análisis semiótico del objeto tabla estadística en libros de texto chilenos.

- [27] Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70. [http://dx.doi.org/10.1207/S15327833MTL0501\\_02](http://dx.doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02)
- [28] Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.
- [29] Sampieri, R. H. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw Hill México.