Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 20, No 1. Setiembre − Febrero, 2020

Artículo de sección
ISSN 1659 -0643

Leopoldo Kronecker y su gran aporte matemático

Leopoldo Kronecker and his great mathematical contribution

Vernor Arguedas T.
vernor.arguedas@ucr.ac.cr
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica, Costa Rica.

Recibido: 28 agosto 2019 Aceptado: 9 setiembre 2019

Resumen. Se presenta una biografía breve de Leopoldo Kronecker. Se muestran cuatro ejemplos de su enorme quehacer matemático y seconcluye con algunos de sus aportes a los fundamentos de la matemática.

Palabras clave: Kronecker, teoremas de Kronecker, fundamentos de las matemáticas

Abstract. A brief biography of Leopoldo Kronecker is presented. Four examples of his enormous mathematical work are shown and weconclude with his contributions to some of the foundations of mathematics

KeyWords: Kronecker, theorems of Kronecker, foundations of mathematics

1.1 Breve biografía de Kronecker

Leopold Kronecker nació el 7 de diciembre d 1823 en Liegnitz (Legnica)Alemania actualmente Polonia, hijo de Isidor Kronecker y Johanna Prausnitzer. Esta era una familia judía adinerada, muy preocupada por la educación de su hijo quien recibió tutorías privada en casa. En la escuela secundaria, Kronecker tuvo como profesor a Ernst Eduard Kummer (1810,1893), quien alentó el talento matemático natural del joven. Con Kummer lo unió una gran amistad. En 1841, Kronecker fue a la Universidad de Berlín, donde asistió a conferencias de matemática dictadas por Peter Lejeune Dirichlet con quien mantuvo una larguísima relación.

No solo estudió matemáticas, sino también astronomía, metereología y química. Estaba especialmente interesado en filosofía y estudió a Descartes, Leibniz, Kant, Spinoza y Hegel. El verano de 1843 lo pasó en la universidad de Bonn, estudiando astronomía. Después fue a la Universidad de Breslau durante el semestre de invierno de 1843-44 para encontrarse de nuevo con su viejo profesor Kummer. Regresó a Berlín en 1844-45, donde trabajó en su tesis doctoral sobre teoría de números algebraicos bajo la supervisión de Dirichlet. La tesis, sobre raíces de la unidad la presentó el 30 de julio de 1845 con 22 años de edad.

Dirichlet, quien fue uno de los examinadores de Kronecker y siguió siendo su amigo de toda la vida, quedó impresionado por la profundidad y el conocimiento de Kronecker.

Kronecker abandonó Berlín para ayudar a administrar el negocio bancario del hermano de su madre y, en 1848, se casó con Fanny Prausnitzer. También administraba una propiedad de la familia, aunque continuó trabajando en matemáticas, aunque sólo lo hacía para su amor a las matemáticas sin embargo continuó la correspondencia con distinguidos matemáticos. La situación financiera de los Kronecker mejoró tanto a lo largo de los años que pudo regresar a Berlín como académico independiente en 1855. Al año siguiente, Karl Weierstrass (1815-1897) llegó a Berlín y se hizo amigo de Kronecker y Kummer.

Alrededor de este tiempo, la productividad matemática de Kronecker aumentó enormemente. Escribió sobre teoría de números, funciones elípticas y álgebra. También relacionó distintas ramas de la matemática entre sí. Kummer propuso a Kronecker para ingresar a la Academia de Berlín en 1860, y la propuesta fue secundada por Borchardt y Weierstrass. El 23 de enero de 1861 Kronecker resultó electo miembro de la Academia lo que le atrajo sorprendentes beneficios. En 1868, se le ofreció le puesto de jefe del departamento de matemáticas en la famosa universidad de Göttingen, pero lo rechazó por quedarse en Berlín. Aceptó sin embargo el cargo de miembro de la Academía de Paris ese mismo año y mantuvo una buena relación con comunidad matemática.

Ejerciendo su derecho como miembro,a partir de octubre de 1862 trabaja en la Universidad de Berlín, aunque no tuvo puesto formal en Berlín hasta que Kummer se retiró en 1883 cuando se le otorgó esa cátedra. La fama internacional de Kronecker se difundió también y fue honrado con su elección como miembro correspondiente de la Real Sociedad de Londres el 31 de enero de 1884. También fue una figura muy influyente dentro de las matemáticas alemanas. Kronecker dio conferencias en la Universidad de Berlín sobre temas de ecuaciones algebraicas, teoría de números, determinantes e integrales múltiples. Kronecker no atrajo a muchos estudiantes, pero sus ideas, sin embargo, fueron bastante influyentes dentro de la academia.

Kronecker fue uno de los primeros en comprender plenamente los resultados de Galois y, en 1870, ofreció la primera definición axiomática de un grupo conmutativo finito. En 1882 introdujo el concepto de sistema modular, gracias al cual estudió la divisibilidad del anillo de los polinomios de grado n.
Borchardt, Weierstrass, Kummer y Kronecker fueron las figuras más notables de la llamada escuela de Berlín. Cuando Borhardt falleció en 1880, el cargo de director de la afamada revista Crelle?sJournal fue compartido entre Weiestrass y Kronecker.

Fue famosa su residencia en Berlín en la calle Bellevuestrasse, en donde invitaba a sus amistades y se caracterizaba por su amabilidad.

Durante la década de 1870, la relación de Kronecker con Weierstrass se desintegró gradualmente. Esto se debió principalmente a una divergencia en su enfoque de análisis. Weierstrass enfatizaba la importancia de los números irracionales y los métodos más modernos sobre todo el uso de series, mientras que Kronecker creía que la mayoría de la matemática, incluidos el álgebra y el análisis, debían estudiarse bajo la categoría de aritmética. El punto culminante de este enfrentamiento académico ocurrió cuando Weierstrass demostró que existe una función continua que no es derivable en ningún punto.

La función que encontró Weierstrass es:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

donde $0 < a < 1$ y b es un entero impar, positivo y cumplen que

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

De manera equivocada Kronecker criticó muy fuertemente este tipo de resultados.

Estas opiniones, que ahora parecen anticuadas y absurdas, se codearon con la marea de nuevas ideas en análisis. Finalmente, Weierstrass y Kronecker dejaron de comunicarse. La ortodoxia de Kronecker le impidió apreciar el valor de los nuevos resultados teóricos de Georg Cantor sobre el infinito. Debido a que era muy influyente, en realidadtrató de impedir el desarrollo de estos nuevos conceptos.
Sin embargo, Kronecker pudo hacer grandes avances en la matemática a raíz de su talento para unificar y conectar las diferentes ramas de la aritmética, el análisis y el álgebra. Sus teoremas sobre fórmulas de límites, teoría ciclotómica y la convergencia de series infinitas son particularmente notables. Su artículo "Über den Zahlbegriff" (Acerca del concepto de número) de 1887 describió su programa para estudiar solo objetos matemáticos que podrían construirse en un número finito de pasos. Como matemático, Kronecker destacó la utilidad del algoritmo como un medio de cálculo y no como una idea valiosa en sí misma.

Kronecker continuó en Berlín, mientras seguía su conflicto con Weierstrass. En 1891, la esposa de Kronecker murió y el mismo Kronecker murió poco después, el 29 de diciembre de 1891, en Berlín. Aunque de herencia judía, se convirtió al cristianismo en el último año de su vida por razones de conciencia.
Kronecker representa la ortodoxia del pensamiento del siglo XIX que resistió la nueva ola de ideas introducidas por matemáticos más jóvenes, como Cantor. El movimiento que buscó combatir más tarde se convirtió en una de las corrientes principales de la matemática moderna, y, por lo tanto, Kronecker parece, en retrospectiva muy simplista, un obstáculo para el progreso.

La vieja escuela de matemática todavía se aferraba a una concepción más intuitiva de la matemática, que la matemática cada vez más abstracta y formalista de finales del siglo XIX ignoraba. En el lado positivo, Kronecker tuvo éxito en sus intentos de unificar las diferentes ramas de la matemática. También se puede ver el énfasis de Kronecker en la matemática construida finitamente como anticipatoria del movimiento del intuicionismo del siglo XX, encabezado por LuitzenEgbertusJanBrouwer y Henri Poincaré. Aestos temas y su papel en el quehacer matemático nos ocuparemos más adelante. Kronecker pensó en su juventud en la posibilidad de generar números algebraicos a través de valores especiales de funciones meromorfas. El resultado es válido en el caso de las extensiones abelianas finitasdel cuerpo racional (teorema de Kronecker-Weber) y en el caso de las extensiones abelianas de los cuerpos cuadráticos imaginarios.

Hilbert (1862-1943) lo colocó como el problema 12 de su célebre lista, presentada en París en 1900.
Para cuerpos más generales, su demostración o búsqueda de contraejemplossigue siendo hoy uno de los mayores problemas abiertos en teoría denúmeros.
El sueño de juventud de Kronecker ha conocido avances muy importantes en las últimas décadas, debidos a Shimura, Langlands, Wiles y Lafforgue, entre otros.
En la actualidad a Kronecker se le recuerda tal vez de manera exagerada por sus fuertes polémicas sobre todo con Cantor o Weierstrass o por las afirmaciones de Mittag-Leffler(1846-1927 Suecia)quien decía que Kronecker hablaba mal de sus colegas.

1.2 Algunos ejemplos del quehacer matemático de Kronecker

Como hemos indicado trabajó en muchos campos de la teoría de números, del análisis matemático en una o varias variables, indicaré tres ejemplos de épocas distinta en donde se puede apreciar algo de su extraordinaria obra.

1. Sean una serie convergente de término general x_n y b_n una sucesión creciente no acotada de números reales entonces
$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \quad \text{tiende a } \; 0$$
2. El 11 de diciembre de 1884, en la sesión de la Academia de Ciencias de Berlín, el Profesor Leopoldo Kronecker presentó su trabajo titulado: "NärungsweiseGanzzahligeAuflösungLinearerGleichungen", cuya traducción es más o menos: "Solución de ecuaciones lineales por medio de aproximación de enteros". Una de las primeras fuentes en que aparece su demostración en un libro es en: Hardy and Wright: "AnIntroduction to theTheory of Numbers", Oxford Press de las que hay diversas ediciones; y en Bohr, "Collected Works".

   Sea $\theta \in \mathbb{I}$ donde I es el conjunto de números reales irracionales.Sea $\epsilon > 0$ entonces existen enteros n, m tales que $|m + n\theta| < \epsilon$

3. También presentó una generalización a n variables que es una pieza esencial en el desarrollo de su sueño de juventud.

Teorema 1.1 (Kronecker en varias variables).

Sean $\lambda_1, .., \lambda_N, \Theta_1, ..., \Theta_N \in \mathbb{R}$, sea $s \in \mathbb{I}$. La condición necesaria y suficiente para que el sistema siguiente tenga solución con respecto a t,
$$\forall \delta > 0 : \; |\lambda_j t - \Theta_j| \leq \delta \operatorname{mod}(s), \, j = 1, ..., N$$
es que se cumpla:

Si $m_1, ..., m_N \in \mathbb{N}$ tal que
$$m_1\lambda_1 + \cdots + m_N\lambda_N = 0$$
entonces:
$$m_1\Theta_1 + \cdots + m_N\Theta_N \operatorname{mod}(s)$$

Entendemos la desigualdad de las congruencias como:

$$|a| < b \bmod(p), \quad \text{si existe} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{tal que} \quad |a - np| < b$$

4. En los dos siguientes artículos publicados en 1853 y 1856 Kronecker hace un uso profundo de la teoría de Galois y por algunos detalles no concluye la demostración de lo que conocemos ahora como teorema de Kronecker − Weber: Cada extensión abeliana finita del cuerpo de los racionales está contenida en una extensión finita de raíces de la unidad.

    Uber die algebraischaufloebarenGleichungen, Monatsber. Akad. Berlin (20.6.1853), (1853), pp. 365–374; Werke IV, pp. 3–11. (Sobre las igualdades solubles algebraicamente)

    Uber die algebraischaufloesbarenGleichungen, Monatsber. Akad. Berlin (14.4.1856), (1856), pp. 203–215; Werke IV, pp. 25–37. (Sobre las igualdades solubles algebraicamente)

1.3 El quehacer matemático según la visión deKronecker

Para Kronecker –siguiendo parcialmente a Gauss– la aritmética general es la base del análisis matemático y las matemáticas están constituidas por: geometría, aritmética y mecánica.

Su biógrafo y alumno K. Hensel enumera 139 publicaciones entre 1845-1895

La aritmética general es la aritmética de formas o de polinomios homogéneos racionales. Erróneamente algunos autores han sugerido que Kronecker negaba la existencia de irracionales, en los ejemplos mostrados –sobre todo en el ejemplo 2– se puede apreciar como si usaba los números irracionales. Para Kronecker las matemáticas son una ciencia (siglo XIX) y sus resultados deben ser construidos sobre la base de la aritmética general en un número finito de pasos y basado en laexperiencia. Este sueño de la juventud no se ha cumplido hasta ahora.Dedekind usó la palabra cuerpo,Kronecker por otra parte usaba dominios de racionales (Rationalitäts-Bereich)

Un muy buen ejemplo de su forma de hacer matemáticas es su libro"GrundzügeeinerarithmetischenTheorie der algebraischenGrössen" (Fundamentos de una teoría aritmética de las magnitudes algebraicas) dedicado a los 50 años del doctorado de su mentor y amigo Kummer el 10 de setiembre de 1881 y publicado en 1882.

Además Kronecker continuó sus ideas en el artículo "Über den Zahlbegriff"(Sobre el concepto de número) en 1887. Este artículo y su ampliación posterior –también de 1887–, junto al curso del semestre de verano de 1891:"Lecciones sobre teoría de números", son útiles para obtener información sobre sus posturas referente a la aritmetización y el concepto de número.
A continuación tenemos fragmentos de una carta de Kronecker a Cantor del 21 de agosto de 1884 en donde reitera sus puntos de vista del quehacer matemático

> "Porque tú tomaste mis cursos hace más de 20 años, y has tenido contacto casi ininterrumpidamente conmigo desde entonces, has escuchado mis posiciones lo suficiente como para comprender mejor de lo que pudiera yo describir aquí, y que –habiendo profundizado muy temprano en cuestiones filosóficas bajo la tutela de Kummer– reconocí, al igual que Kummer hizo, la inestabilidad de tales especulaciones y tomé refugio en el paraíso de la matemática real. (...) en mi obra matemática he

> tenido mucho cuidado de expresar sus fenómenos y verdades en una forma lo más libre posible de conceptos filosóficos, y consecuentemente he comenzado el camino para basar toda la matemática en la teoría de los números naturales, y creo que esto puede hacerse sin excepción. Admito que este punto es solo mi creencia. Pero donde ha tenido éxito, veo el verdadero progreso, incluso -o porque es una regresión a los principios más simples, más aún porque prueba que los nuevos conceptos introducidos son al menos innecesarios. (...) Reconozco un verdadero valor científico -en el campo de la matemática- solo en verdades concretas, o para ponerlo más claro, solo en fórmulas matemáticas."

Cantor y Dedekind creían que la actividad matemática era puramente lógica, es decir, la matemática es una actividad intelectual; tal concepción se refleja en la libertad de creación que ambos matemáticos desarrollaron en su quehacer profesional. Además, Dedekind consideraba a los números una creación de la mente humana; mientras queCantor desarrolló toda una teoría sobre los números transfinitos, los que constituyeron una creación exclusiva de su intelecto. Por el lado contrario Kronecker al visualizar la matemática como una ciencia basada en la experiencia, y por tanto que se descubre; limita la libertad de creación.

El obituario que escribió Heinrich Weber sobre Kroneckeren Jahresberichte der DeutschenMathematiker-Vereinigung 2 (1891/92), contiene la famosa frase "... Die ganzenZahlen hat der liebeGottgemacht, allesandereistMenschenwerk ..."

> "Los números enteros fueron hechos por Dios, lo demás por los seres humanos..."

Aparentemente dicha en 1886 por Kronecker en una exposición sobre funciones elípticas. Desafortunadamente no existe un material escrito por Kronecker que lo verifique.

En su último curso de Teoría de Números dictado en 1891, precisa algunos conceptos de su aritmética general:

1. En la aplicación del análisis, una aproximación racional con un cierto orden de precisión es suficiente para conocer una cantidad irracional.

2. Cuando sea necesario, se puede conocer una cantidad irracional de una manera exacta por el método de indeterminadas y congruencias (los Modulsysteme de Kronecker). En mi opinión esta afirmación es dudosa.

3. Las teorías que definen el conjunto de los números reales por medio de conjuntos infinitos de números racionales o por sucesiones de Cauchy o cortaduras de Dedekind son inaceptables.

Kronecker fue un matemático extraordinario que abrió grandes avenidas en el desarrollo de esta disciplina. Desafortunadamente su férrea posición sobre lo que es válido generó muchas heridas en el mundo matemático de la época.

Kronecker es recordado de manera cotidiana por la delta y el producto de matrices con su nombre. De manera quizá irónica Hilbert exclamó: "Nadie nos podrá expulsar del paraíso que Cantor ha creado."

El legado de Kronecker está vivo, como lo demuestran la cantidad de trabajos de investigación actuales que se basan en los aportes hechos por él.

Bibliografía

[1] K, Hensel (Ed) Leopold Kronecker's Werke,cincotomos. Teubner,1895-1930

[2] Edwards, H. M. (1995): "Kronecker on the foundations of mathematics". En From Dedekind to Gödel. Essays in the development of the foundations of mathematics. Ed. por J. Hintikka. Kluwer Academic Publishers, pp. 45-52.

[3] Ferreirós, J. (2007) "Labyrinth of thought. A history of set theory and its role in modern mathematics". 2 da edición. Berlín, Alemania: Birkhäuser.

[4] Kronecker, L. (1887b) "On the concept of number" Trad. por E. T. Dean. URL: www.andrew.cmu.edu/user/edean/papers/kronecker_zahlbegriff.pdf

[5] Boniface, J. y N. Schapacher (2001): "Sur le concept de nombre dans la mathématique. Course inédit deLeopold Kronecker à Berlin (1891)" Revue d'histoire des mathematiques 7, pp. 207-275.Los autores hacen una traducción al francés de manuscritos inéditos de Kronecker.

[6] "From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic" 1879-1931 [ed. by] Jean Van Heijenoort. Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Pr., 1967