Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 20, No 1. Agosto − Febrero, 2020 ISSN 1659 -0643

Aprendizaje de la Aleatoriedad y Conceptos Asociados: un Estudio en Secundaria con Apoyo de Geogebra

Randomness Learning and Associated Concepts: a Secondary Study with Geogebra Support

Guillermo Ramírez Montes
grm1905@gmail.com
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

Ana Claúdia Batalha Henriques
achenriques@ie.ulisboa.pt
Instituto de Educação
Universidad de Lisboa.
Portugal

Recibido: 10 octubre 2018 Aceptado: 20 abril 2019

Resumen. En este trabajo presentamos los resultados de un estudio realizado durante el 1º semestre del año lectivo 2017, en el contexto de una experiencia de enseñanza apoyada con TIC, específicamente con Geogebra, dirigida al aprendizaje de la probabilidad en décimo año de escolaridad en el contexto costarricense. Se presenta, en particular, una de las cinco tareas de la secuencia de aprendizaje que conforma la experiencia de enseñanza, con el objetivo de comprender cómo los alumnos aprenden conceptos básicos asociados a experimentos aleatorios (aleatoriedad, casos favorables, casos totales y evento aleatorio) al realizar tareas exploratorias apoyadas con Geogebra, y cuál es el papel de este software como recurso didáctico para el aprendizaje de estos conceptos. La metodología utilizada fue de tipo cualitativa e interpretativa, siendo empleados, como instrumentos de recolección de datos, la observación participante y la recolección documental de las resoluciones de los alumnos. Los resultados evidencian que la mayor parte de los alumnos tienen noción de la aleatoriedad, asociando el concepto con experiencias de su día a día. Sin embargo, presentan dificultades para utilizar dicho concepto en la toma de decisiones que involucran probabilidades. Por su lado, los conceptos de casos favorables, casos totales y eventos aleatorios son desconocidos por la mayor parte de los alumnos. En cuanto a las contribuciones de la tecnología, el trabajo con Geogebra permitió que algunos alumnos fueran capaces de inferir correctamente relaciones asociadas a los conceptos de casos favorables, casos totales y eventos, a medida que simulan varias veces la experiencia del lanzamiento de dos dados. Además, las simulaciones para pequeñas repeticiones de la experiencia permitieron evidenciar que gran parte de los alumnos tienen creencias equivocadas sobre la aleatoriedad, producto de un uso inadecuado de la probabilidad clásica. De esta forma, los resultados obtenidos permiten hacer una evaluación positiva del uso de tareas exploratorias con recurso a Geogebra para la enseñanza y aprendizaje de conceptos de Probabilidad en secundaria. Durante la ponencia del trabajo se busca presentar estos resultados y mostrar la simulación de Geogebra utilizada en la tarea.

Palabras clave: Aleatoriedad, casos favorables y totales, tarea exploratoria, Geogebra, simulación

Abstract. In this paper we present the results of a study conducted during the 1st semester of the school year of 2017 in the context of a teaching experiment supported by ICTs, particularly Geogebra, aimed at the learning of Probability in the 10th grade of the Costa Rican context.
We present, in particular, one of the five tasks of the learning sequence that supports the teaching experiment, aiming to understand how 10th grade students of Costa Rica learn the basic concepts associated with random experiments (randomness, favorable cases, total cases and random event) when working on exploratory tasks supported by Geogebra, and what is the role of this software as a didactic resource for learning these concepts. The methodology used was qualitative and interpretative and data collection included: participant observation and the students? answers to the tasks. The results show that the majority of students have a notion of randomness, associating the concept with their real life experiences. However, they have difficulties in using this concept to make decisions involving probabilities. The concepts of favorable cases, total cases and events are unknown to most students. Regarding the contributions of technology, working with Geogebra allowed some students to be able to correctly infer relations associated with the concepts of favorable cases, total cases and events as they simulate the experience of throwing two dice several times. In addition, when they do a small number of simulations for an experience, it was possible to observe that a large part of the students have wrong beliefs about randomness, due to an inadequate use of classical probability. In this way, the results obtained allow us to make a positive evaluation of the use of exploratory tasks with Geogebra for the teaching and learning of Probability concepts in secondary school.
During the presentation of the work, we seek to present these results and show the simulation of Geogebra used in the task.

KeyWords: Randomness, favorable and total cases, exploratory task, Geogebra, simulation.

1.1 Introducción

La Probabilidad, como área de conocimiento de la Matemática, ha venido tomando mayor importancia a nivel educativo escolar y universitario en los últimos años (Inzunza, 2014), adquiriendo su enseñanza un papel más experimental a nivel de primaria y de secundaria (Batanero, 2006). Este hecho se refleja en la preocupación de varios países por considerar los conocimientos básicos probabilísticos en sus programas de Matemática, incluyendo el Programa de Matemática de Costa Rica, donde se incluye la Probabilidad desde los primeros años de la educación escolar (MEP, 2012). Esta importancia atribuida a la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad se debe al hecho de ser una herramienta matemática base para el aprendizaje de otras disciplinas y proveer al alumno de herramientas para lidiar con situaciones cotidianas donde reina el azar (Batanero, 2006). En este sentido, capacidades como interpretar, comprender y analizar datos probabilísticos se vuelven elementos fundamentales para que el alumno presente una mejor participación en la sociedad (Inzunza, 2014).

A nivel de secundaria, los contenidos probabilísticos enseñados en la clase de Matemática se han convertido en fuente necesaria no sólo para hacer lecturas básicas de probabilidades en periódicos y otras fuentes de información, sino también para ayudar a entender mejor algunos conceptos estadísticos que están muy ligados con conceptos básicos de probabilidad (Mendenhall, Beaver y Beaver, 2010). Así, conceptos probabilísticos como experiencia aleatoria, casos favorables, casos totales y eventos aleatorios están asociados a los conceptos estadísticos de muestra aleatoria. Estos conceptos forman una base para introducir al alumno al cálculo de probabilidades, no obstante, su asociación con diferentes significados, incluyendo los términos cotidianos, y el formalismo con el que son tratados en la clase de Matemática generan dificultades en el aprendizaje del alumno (Inzunza, 2014). En este sentido, dificultades como comprender y aplicar conceptos probabilísticos se tornan comunes en el aprendizaje, como consecuencia, elementos psicológicos como el miedo o disgusto para aprender Probabilidad llegan a ser más fuertes que la voluntad propia en algunos alumnos (Batanero, 2005).

Los programas de Matemática se han preocupado por integrar la Probabilidad en sus currículos y en proponer prácticas de enseñanza y aprendizaje distintas a las tradicionales, que permitan superar esas dificultades (Santos y Moita, 2009). Las Tecnologías de la Información y Comunicación [TIC] surgen como una forma de cambiar el papel pasivo que comúnmente asume el alumno en las clases tradicionales, otorgándole un papel de constructor de su conocimiento (Santos y Moita, 2009), a través del cual pueda minimizar la presencia de dificultades. La utilización de software matemático, como por ejemplo Geogebra, permite la exploración de conceptos probabilísticos a partir de simulación (Inzunza, 2014), proceso que se ha mostrado bastante favorable en el aprendizaje de la Probabilidad.

En este camino exploratorio que asume el alumno, la tarea propuesta adquiere un papel importante, siendo necesario que su formulación logre acoplar el concepto matemático con el componente tecnológico, ayudando al alumno en su aprendizaje. Así, las tareas exploratorias, entendidas como tareas abiertas donde el alumno es invitado y desafiado a explorar el concepto matemático de forma autónoma y, por tanto, con menor intervención del profesor, abren camino para que a partir de los conocimientos previos se pueda construir nuevo conocimiento matemático (Ponte, 2005). Estas tareas también permiten que procesos esenciales para el aprendizaje, enfatizados por el programa de Matemática costarricense (MEP, 2012), como la argumentación, la conexión de ideas entre conceptos, la comunicación y la utilización de representaciones del concepto matemático, sean puestos en práctica. En particular, en referencia a la Probabilidad, el programa establece entre sus propósitos el optar por metodologías que lleven al alumno a identificar, recoger e interpretar información necesaria para la resolución de tareas estocásticas, utilizando recursos como la simulación de situaciones del contexto cotidiano que conduzcan a una mejor comprensión del concepto.

Este estudio busca contribuir en el campo de la educación probabilística, en lo que se refiere al aprendizaje con nuevos enfoques de enseñanza, en particular con las tecnologías, que estimulen la participación efectiva de los alumnos en el aula. Así, en esta ponencia se presentan resultados de un estudio desarrollado en el contexto de una experiencia de enseñanza dirigido al aprendizaje de la Probabilidad en 10° año del contexto costarricense, utilizando tareas exploratorias apoyadas con Geogebra. En particular, se presentan los resultados relativos a una de las cinco tareas de la secuencia de aprendizaje que conforma la experiencia de enseñanza.

El objetivo del estudio es comprender cómo los alumnos costarricenses de 10º año aprenden conceptos básicos asociados a experimentos aleatorios, específicamente, los conceptos de aleatoriedad, casos favorables, casos totales y evento aleatorio, al realizar tareas exploratorias apoyadas con Geogebra, y cuál es el papel de este software como recurso didáctico para el aprendizaje de tales conceptos. Para responder a este objetivo se plantean dos cuestiones de investigación:

1. ¿Cuáles son los aprendizajes evidenciados por los alumnos en sus resoluciones referidas a estos conceptos después de finalizada la primera tarea de la experiencia de enseñanza?

2. ¿Qué dificultades revelan los alumnos en el trabajo con estos conceptos?

3. ¿Cuál es el papel de Geogebra en el aprendizaje, durante el desarrollo de la primera tarea de la experiencia de enseñanza?

4. ¿Qué dificultades revelan los alumnos en la utilización del Geogebra para el trabajo de los conceptos?

1.2 Marco teórico

Aprendizaje de los conceptos de aleatoriedad y conceptos asociados al espacio muestral en la clase de matemática.

El término aleatoriedad no resulta ser desconocido para el alumno, pues en el momento en el que inicia su estudio escolar ya ha vivenciado algunas situaciones de aleatoriedad que, de alguna u otra forma, le permiten comprender cuándo está en presencia de ellas (Ortiz, Batanero y Serrano 2001). Sin embargo, en este contacto alumno-cotidianidad, con experiencias aleatorias, el término aleatoriedad no siempre tiene el mismo sentido que se le intenta transmitir formalmente al estudiante en la clase de matemática, evidenciando de esta forma un carácter complejo asociado al concepto que tiende a traer dificultades para el alumno (Ortiz, Batanero y Serrano 2001). En cierta forma esta complejidad está asociada a su relación directa con el concepto de probabilidad. Según Martins (2011), la aleatoriedad viene a ser un medio para estudiar la probabilidad como una propiedad asociada a los fenómenos aleatorios y, por tanto, asociada a patrones que se rigen bajo la ley de los grandes números. En este sentido, Ortiz et al. (2001) hacen un estudio sobre los términos asociados a la probabilidad y la aleatoriedad, utilizados comúnmente en los libros de texto de bachillerato en España, encontrando que existe una diversidad tales como: acaso, incertidumbre, ganar, probable, urna, dado, entre otros.

En referencia a los conceptos asociados al espacio muestral, la teoría de conjuntos ha servido como el medio para trabajar el lenguaje formal del cálculo de probabilidades, asociando términos probabilísticos como espacio muestral, evento y evento imposible a los términos conjunto universal, subconjunto del espacio muestral y conjunto vacío, respectivamente (Pitman, 1993). Groth, Butler y Nelson (2016) trabajan actividades lúdicas para la enseñanza de tipos de eventos, enfatizando que, la utilización de estos términos probabilísticos muchas veces no va de la mano con las definiciones que ha aprendido el alumno en su día a día, generando dificultades en el aprendizaje de los términos evento imposible, evento seguro y evento menos probable, producto de la interpretación que hace el alumno con su cotidianidad.

Por su parte, el programa de Matemática costarricense enfatiza que el alumno de ciclo diversificado (10º, 11º y 12º) debe llegar con destrezas básicas asociadas a la Probabilidad, entre ellas el manejo de situaciones aleatorias, siendo relevante promover en la clase la reflexión y formalización de los conceptos básicos asociados al cálculo de probabilidades, entre estos, los conceptos asociados al espacio muestral. Para tales fines el programa sugiere la utilización de herramientas como la modelación y simulación que, además de permitir el trabajo colectivo, permitan al estudiante ver la probabilidad contextualizada, motivando su aprendizaje (MEP, 2012).

Otros autores, por ejemplo, Batanero (2006), también enfatizan en que los avances tecnológicos deben ser un medio para abordar el aprendizaje de la Probabilidad por caminos didácticos que, sin necesidad de un gran nivel de formalismo de los conceptos, ayuden a superar las dificultades atribuidas su aprendizaje. Así, las TIC se convierten en un camino para dejar de centrar el aprendizaje del alumno solamente en el contenido, buscando fortalecer su pensamiento matemático a través de la resolución de tareas en contextos reales que, además de permitir el aprendizaje del concepto, fomenten capacidades matemáticas (MEP 2012).

Simulación a través de computador en el estudio de conceptos probabilísticos

Por simulación se puede entender el proceso artificial utilizado para imitar o substituir el comportamiento de un fenómeno aleatorio, utilizando, de modo general, números aleatorios (Martins 2011). Esta imitación de la realidad permite un aprendizaje diferente al habituado por el alumno, promoviendo la exploración de teorías, el dinamismo del grupo y el trabajo con tareas que, mediante métodos analíticos de resolución, tienden a ser complejas para el alumno (Redecker 2013).

Para Erickson (2006), la simulación mediante la utilización del computador cobra importancia en el estudio del aprendizaje de la Probabilidad, facilitando la comprensión del concepto y el análisis de los cálculos. Este autor, enfatiza que la simulación con computador permite al alumno mejorar la inferencia de conceptos probabilísticos a través de la exploración de diferentes representaciones asociadas al concepto matemático, y con utilización de poco tiempo.

Algunas limitaciones deben ser consideradas al trabajar simulación con el computador, entre ellas, las simulaciones de números aleatorios que generan los computadores son pseudo-aleatorios, lo que implica que los comportamientos generados por el computador no sean ajustados perfectamente a los modelos teóricos, pudiendo llevar al alumno a sesgos a la hora de identificar el valor frecuencial de probabilidad, el cual puede no coincidir con el valor teórico según la lectura hecha por el alumno (Inzunza 2017). Además, Coutinho (2011) menciona que existe la posibilidad de que el alumno no esté familiarizado con el software matemático, existiendo cierta resistencia de este a utilizar la tecnología para resolver una tarea, cuando el cálculo a mano es posible y viable para el alumno.

Finalmente, Erickson (2006) enfatiza que es necesario hacer simulación tanto con tecnología como sin ella, de forma que haya un equilibrio que permita aprovechar las capacidades de aprendizaje del alumno. Para este autor, el trabajo sin tecnología debe procurar que no se pierda el formalismo dado por axiomas que sustentan la definición del concepto y otros elementos matemáticos necesarios para definirlo. Por su lado, el trabajo con tecnología debe procurar que la simulación sirva para profundizar en las representaciones y propiedades ligadas al concepto, ahorrando cálculos grandes que demoran mucho tiempo y cuyo proceso analítico de resolución ya se conoce.

La utilización de Geogebra en el aprendizaje de conceptos probabilísticos

Uno de los recursos con los que es habitual trabajar en las clases de Matemática, donde es utilizada tecnología, es Geogebra. Algunas características como la facilidad de uso, ser de descarga gratuita, disponer de herramientas que permiten la representación dinámica del concepto matemático y su relevancia para trabajar la Probabilidad en comparación con otros softwares dinámicos, lo convierten en un software con potencialidad didáctico (Inzunza 2014).

Autores como Inzunza (2014) enfatizan que Geogebra ayuda a visualizar diferentes comportamientos de los conceptos envueltos, utilizando para eso la construcción de parámetros que permiten simular y manipular el objeto matemático, lo que a su vez permite la exploración de propiedades de conceptos básicos de Probabilidad, y que el alumno participe en la construcción de su propio conocimiento. En su estudio, este autor utiliza la hoja de Excel y la hoja gráfica que dispone Geogebra para mostrar la simulación del lanzamiento de un dado después de repetir su lanzamiento una "gran" cantidad de veces, obteniendo por observación que el valor de probabilidad frecuencial para cualquier evento simple (obtener una cara con un número específico entre 1 y 6) tiende a aproximarse al valor teórico 1/6. En esta misma línea, Batanero (2005) en su estudio sobre los diferentes significados asociados a la probabilidad, afirma que "con el desarrollo progresivo de los ordenadores ha aumentado el interés por la introducción experimental de la probabilidad" (p.260), lo que a su vez envuelve el trabajo de los conceptos de aleatoriedad, casos favorables, casos totales y evento de una experiencia aleatoria. No obstante, para esta autora la utilización de software matemático no debe reemplazar el estudio formal de los conceptos probabilísticos, afirmando que ambos abordajes deben usarse, complementándose mutuamente. Finalmente, Mercado (2013) da algunos ejemplos de cómo utilizar Geogebra para el estudio de conceptos probabilísticos mediante simulación, destacando que a través de la simulación pueden abordarse fácilmente situaciones aleatorias complejas, cuyo aprendizaje a mano resulta muy difícil para el estudiante.

1.3 Metodología

El presente estudio se centra en la primera tarea de una secuencia de aprendizaje conformada por cinco tareas exploratorias apoyadas con Geogebra que sirven de base a una experiencia de enseñanza desarrollada en los meses de marzo y abril de 2017, con un grupo de alumnos (14 hombres y 14 mujeres) de la enseñanza regular de 10º año de un colegio científico del Valle central, ubicado en los alrededores de la capital de Costa Rica.

Esta tarea buscó alcanzar dos objetivos de aprendizaje: 1) identificar características asociadas a la aleatoriedad; e 2) identificar casos favorables, casos totales y eventos aleatorios. Ambos objetivos fueron trabajados utilizando Geogebra para hacer simulación de la experiencia aleatoria del lanzamiento de dos dados. En la primera parte de la tarea los alumnos son invitados a simular el lanzamiento de dos dados con un total de 10 y 20 repeticiones de la experiencia respectivamente, mientras que en la segunda parte simulan 900 y 1000 veces dicha experiencia. En cada simulación los alumnos tenían que ir registrando los datos observados de la simulación en la parte final de la tarea (Hoja de registro de datos) e ir respondiendo preguntas que orientaban la exploración de los conceptos abordados. Los alumnos trabajaron en parejas en la resolución de la tarea, cada par disponiendo de una computadora con acceso a Geogebra y el archivo ejecutable de simulación "lanzamiento de dos dados". Este archivo disponía de dos botones, etiquetados con los parámetros "n" y "e", conforme muestra la Figura 1. El parámetro "n", variando entre 1 y 1000, indicaba la cantidad de veces que se deseaba repetir la experiencia del lanzamiento, mientras que el parámetro "e", variando entre 1 y el valor de "n", permitía observar los resultados obtenidos en las caras de los dados para cada lanzamiento simulado. Finalmente, el gráfico de barras muestra las frecuencias absolutas y relativas para la suma de los números obtenidos en las caras de los dados después de simular el lanzamiento de los dados "n" veces.

La resolución de la tarea permitió a los alumnos explorar con Geogebra la experiencia del lanzamiento de dos dados, introduciéndolos a los conceptos formales de casos favorables, casos totales y evento aleatorio, y al mismo tiempo identificar sus nociones sobre la aleatoriedad y conceptos anteriores de casos favorables, casos totales y evento aleatorio. La tarea fue diseñada para ser trabajada por los alumnos en 2 lecciones de 40 minutos, desarrollando una discusión colectiva de los conceptos abordados, y la respetiva formalización de estos, realizada al inicio de la siguiente clase. Antes de comenzar el abordaje de la tarea, fue aplicada una prueba diagnóstica, identificando que gran parte de estos alumnos tenían una noción de aleatoriedad asociada a términos coloquiales y un conocimiento de la Probabilidad orientado al significado clásico de la regla de Laplace.

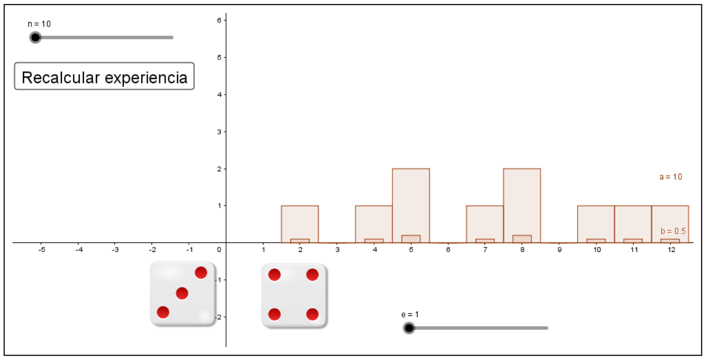


Figura 1.1: Imagen del archivo ejecutable de Geogebra para trabajo de la tarea

En miras a responder las cuestiones del estudio se recurrió a una metodología cualitativa asociada a un paradigma interpretativo, donde el investigador (primer autor de este trabajo) procura describir y interpretar los significados que los alumnos, como parte de un contexto educativo, atribuyen a los conceptos de aleatoriedad, casos favorables, casos totales y evento aleatorio (Latorre, Del Rincón y Arnal 1998). Durante la aplicación de la tarea el investigador asumió un papel de observador participante, atendiendo dudas en cuanto a la redacción de los enunciados, y tomando algunos apuntes de las discusiones que surgieron por parte de los alumnos durante el trabajo de la tarea.

Como instrumentos de recolección de datos fueron utilizados: 1) la revisión documental de las resoluciones de la tarea desarrollada por los alumnos, y de grabaciones de imágenes solicitadas a los alumnos en el enunciado de la tarea, correspondientes a extractos de momentos de simulación con Geogebra; y 2) la observación participante para identificar el ritmo de trabajo de los alumnos, acceder a cierta información específica sobre sus aprendizajes, y aclarar ciertos aspectos de redacción de los enunciados de la tarea. El análisis de los datos se desarrolló siguiendo una metodología descriptiva e interpretativa, tanto para el análisis de los aprendizajes de los conceptos trabajados y dificultades evidenciadas por los alumnos como para el análisis del papel de Geogebra (Walker, 1980). En la siguiente sección se describe lo que el alumno hizo y se presenta una interpretación de los aprendizajes y dificultades evidenciadas a través de ejemplos de las soluciones dadas por diferentes alumnos, todos con nombre de anonimato para efectos de salvaguardar su integridad, intentando abarcar la diversidad de soluciones observadas.

1.4 Resultados

Aprendizajes del concepto de aleatoriedad y conceptos básicos asociados al espacio muestral

En lo que concierne a aprendizajes del concepto de aleatoriedad, las resoluciones de los alumnos revelan que todos tienen noción de la aleatoriedad, algunos asociándola como una propiedad del azar y, por tanto, a la variabilidad de los datos, como se interpreta en la respuesta de Antonio y Marcos

(Figura 1.2) cuando se les cuestiona en la cuarta pregunta (denotado en la figura por P4) sobre la cantidad de veces que creían necesario realizar la experiencia de lanzar los dados para obtener todas las sumas posibles.

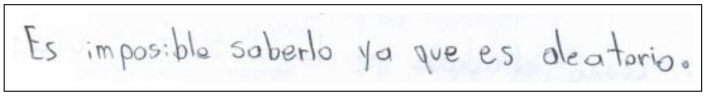

Es imposible saberlo ya que es aleatorio.

Figura 1.2: Resolución de Antonio y Marcos. P4

Otros asocian la aleatoriedad directamente al concepto de probabilidad, como en el caso de Laura y Johan en la última pregunta de la tarea, al cuestionárseles si los resultados obtenidos en las simulaciones realizadas para distintos valores de "n" habían sido diferentes y el porqué de esto. De la respuesta de Laura y Johan, en la Figura 1.3, se interpreta que consideran la aleatoriedad como una característica que no permite saber cuántas veces es necesario realizar la experiencia para obtener todos los resultados, al igual que Antonio y Marcos, quienes manifiestan esto en términos de probabilidades para referir que entre mayor cantidad de lanzamientos es más probable, pero no seguro, obtener un valor específico de suma para los dados.

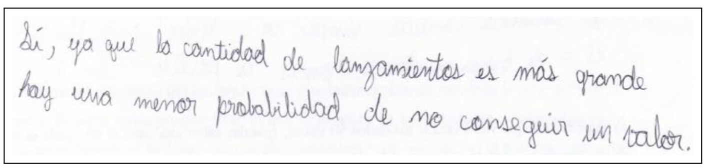

Sí, ya que la cantidad de lanzamientos es más grande
hay una menor probabilidad de no conseguir un valor.

Figura 1.3: Resolución de Laura y Johan. P8

Entre las dificultades presentadas por los alumnos, la mayor parte reveló la presencia de patrones no siempre correctos cuando se repite un número "pequeño" de veces un experimento aleatorio. Por ejemplo, Santiago y Simón, como también Vanuza y Charol, después de simular la experiencia del lanzamiento de dados para "n" igual diez y "n" igual veinte, respectivamente, al cuestionárseles en la primera pregunta si ¿los valores obtenidos en la experiencia eran los que esperaba?, responden según se muestra en las Figuras 1.4, 1.5.

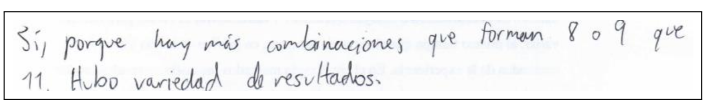

Sí, porque hay más combinaciones que forman 8 o 9 que
11. Hubo variedad de resultados.

Figura 1.4: Resolución de Santiago y Simón. P1

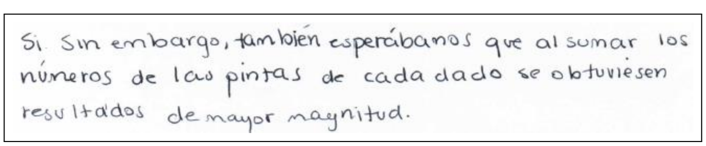

Si. Sin embargo, también esperábanos que al sumar los
números de las pintas de cada dado se obtuviesen
resultados de mayor magnitud.

Figura 1.5: Resolución de Vanuza y Charol. P2

La argumentación de Santiago y Simón es considerada incorrecta ya que, debido al carácter aleatorio de la experiencia, no deben necesariamente salir las sumas de ocho y nueve con mayor frecuencia. En el caso de Vanuza y Charol se interpreta que obtuvieron resultados variables y no con mayor frecuencia para las sumas de ocho y nueve, no obstante, su argumentación permite inferir que, aunque tienen una noción de la aleatoriedad, tienden a creer que debería ser más probable que las sumas se comportasen según el valor teórico de probabilidad. De esta forma, se evidencia que estos alumnos tienen una concepción vaga de la aleatoriedad y, por tanto, de la Ley de los grandes números para el cálculo de probabilidades, tendiendo a utilizar la Regla de Laplace para tomar decisiones donde interviene la probabilidad.

En referencia a los conceptos de casos favorables, casos totales y eventos, las soluciones que presentan los alumnos revelaron que más de la mitad del grupo dejan sin responder la pregunta introductoria donde se desafiaba al alumno al reconocimiento de estos conceptos, pudiendo ser causa el no haber trabajado en años anteriores con conceptos asociados al espacio muestral o no haber trabajado con eventos compuestos. El resto de los alumnos aluden a los conceptos asociados al espacio muestral en sus soluciones, cuando al ser cuestionados sobre los posibles resultados a obtener en las sumas de las pintas de las caras de los dados después de ser lanzados y la cantidad de veces necesarias de repetir el experimento para obtener todas las sumas posibles, muestran evidencia de identificar casos totales, casos favorables y eventos asociados a la experiencia aleatoria del lanzamiento, como es el caso de Dádiva y Ana en las Figuras 1.6 y 1.7, y Leonardo y Alfonso en la Figura 1.8.

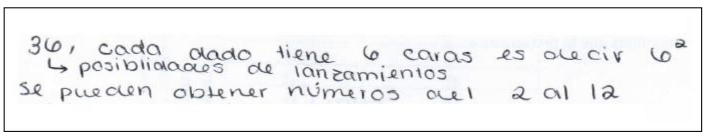
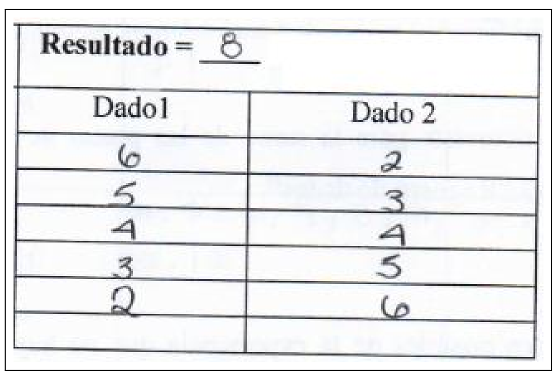


Figura 1.6: Resolución de Dádiva y Ana. PI.



Resultado = 8

Dado1	Dado 2
6	2
5	3
4	4
3	5
2	6

Figura 1.7: Resolución de Dádiva y Ana.P2

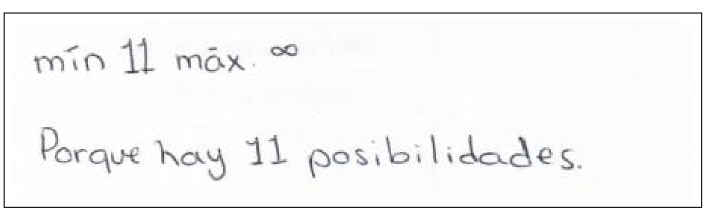


Figura 1.8: Resolución de Leonardo y Alfonso. P4.

De la primer resolución de Dádiva y Ana (Figura 1.6) se observa que ellas reconocen que en total hay 36 diferentes combinaciones (casos totales), y al usar la expresión "se pueden obtener números del 2 al

12" están manifestando que saben identificar eventos aleatorios, mientras que de la segunda resolución (Figura 1.7), donde se les solicita escribir el resultado que obtuvieron más veces después de simular 20 lanzamientos, se observa que Dádiva y Ana también identifican casos favorables, escribiendo en la tabla las distintas formas de obtener el evento "obtener una suma de ocho". Similarmente, Leonardo y Alfonso (Figura 1.8), además de saber que la aleatoriedad está presente, también saben identificar los eventos de la experiencia aleatoria, pero aludiendo a ellos implícitamente con la expresión "mín 11" para referirse a obtener una suma diferente en cada repetición de la experiencia, y "máx ∞" en el caso de obtener sumas repetidas en lanzamientos anteriores, pero aún no todas las once sumas posibles.

Utilización de Geogebra como recurso de apoyo en el aprendizaje de los conceptos trabajados

La utilización de Geogebra les permitió a todos los alumnos observar que a medida que aumenta la cantidad de lanzamientos se obtienen más eventos o resultados para la suma de las pintas de las caras de los dados y también más casos favorables para los distintos eventos. De la Figura 1.9 se interpreta que Kevin y Pedro manifiestan "sí" para decir que los resultados obtenidos son diferentes, evidenciándose que identifican más posibilidades para la suma de las pintas de las caras de los dados y, por tanto, más eventos y casos totales en las últimas simulaciones (900 y 1000 lanzamientos), en comparación con las primeras simulaciones (10 y 20 lanzamientos).

Sí, porque en el problema 6-7 hicimos 900 lanzamientos, lo cual aumenta más las probabilidades de conseguir más resultados, a diferencia del problema 2-3 en el que obtuvimos muchos resultados que no aparecieron.

Figura 1.9: Resolução de Kevin y Pedro. P8.

Por su lado, la tabla de la Figura 1.10, donde se les solicitaba a los alumnos registrar el resultado de suma con mayor frecuencia obtenido para "n" igual a veinte, y las respectivas formas en que se obtuvo ese resultado, permiten inferir que a pesar de ser el evento "obtener una suma de siete" el evento con mayor probabilidad teórica, la simulación con "n" igual a 20 llevó a Laura y Johan a obtener que el evento con mayor frecuencia es "obtener una suma de ocho", pudiendo recurrir a variar los valores del deslizador "e" para observar los casos favorables para ese evento con un valor pequeño de "n", en este caso obteniendo tres casos favorables. De esta forma, se evidencia que Laura y Johan logran identificar casos favorables para eventos aleatorios específicos.

	Resultado = 8
Dado1	Dado 2
4	4
5	3
6	2

Figura 1.10: Resolución de Laura y Johan. P2c.

Por otro lado, la utilización de simulación no fue suficiente para superar dificultades asociadas a la aleatoriedad, pues algunos alumnos, después de simular con diferentes valores de repetición la experiencia del lanzamiento de dados($n = 10, n = 20, n = 900$ y $n = 1000$), no fueron capaces de identificar que no existe un número fijo de lanzamientos necesarios para obtener todas las sumas posibles para las pintas de las caras de los dados. Esto se observa, por ejemplo, en las soluciones de Kevin y Pedro, en las Figuras 1.11 y 1.12, al responder a la cuarta pregunta de la tarea.

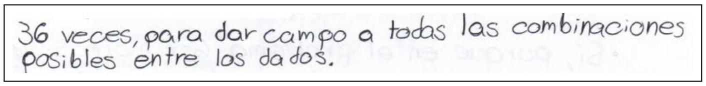


Figura 1.11: Resolución de Kevin y Pedro. P4.

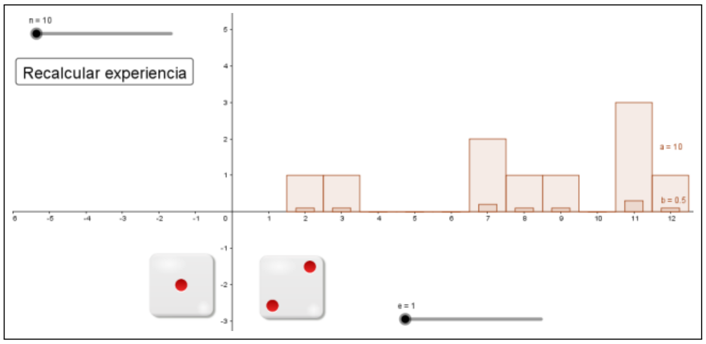


Figura 1.12: Simulación de Kevin y Pedro para n=10.

Los alumnos aluden a "36 veces" para indicar que se necesitan 36 repeticiones de la experiencia para obtener todos los resultados, número que corresponde a la cantidad de casos totales de la experiencia aleatoria. Así, se interpreta que Kevin y Pedro consideran que va a salir una combinación de números diferentes en cada repetición de la experiencia, cuando en la realidad no tiene que ser necesariamente de esa forma debido al carácter aleatorio de la experiencia. Los alumnos no logran observar de su simulación para $n = 10$ (Figura 1.12) que algunas de las combinaciones posibles para la suma de once se han repetido, pues su frecuencia es tres, cuando dicha suma sólo tiene dos posibles casos favorables de suceder, obtener 6 y luego 5, u obtener 5 y luego 6 en el primer y segundo dado, respectivamente.

1.5 Conclusiones

Los resultados del análisis de la tarea exploratoria trabajada por los alumnos involucrando Geogebra, permiten referir que ellos son capaces de desarrollar conocimiento frente a los conceptos de aleatoriedad, casos favorables, casos totales, y el concepto de evento aleatorio. No obstante, algunos alumnos presentan dificultades, posiblemente como producto de las experiencias vividas en su día a día con los términos probabilísticos trabajados (Groth, Butler y Nelson 2016; Ortiz et al. 2001) o del desconocimiento total de los términos.

Los aprendizajes observados en esta tarea permiten concluir que los alumnos tienen noción del concepto de aleatoriedad, pero no todos lo tienen consolidado, existiendo la presencia de patrones incorrectos que asocian a la aleatoriedad. Entretanto, el concepto de evento aleatorio, casos favorables, y casos totales son identificados apropiadamente por pocos alumnos, pareciendo ser desconocidos para el resto de ellos, o al menos existe dificultad para identificarlos en el trabajo con experiencias aleatorias trabajadas con eventos compuestos.

La utilización de Geogebra contribuyó a la exploración de los conceptos, incluyendo observación de relaciones entre casos totales y casos favorables en la repetición de una experiencia. No obstante, no fue suficiente utilizar simulación con Geogebra para que la mayor parte de los alumnos interiorizase totalmente el concepto de aleatoriedad, resultado de una falta de observación en las simulaciones por parte del alumno o una mejor guía en la redacción de la tarea a la hora de explorarla con Geogebra.

Lo anterior implica, por un lado, considerar reforzar conceptos probabilísticos en años anteriores (MEP, 2012), incluyendo el trabajo con experiencias aleatorias compuestas, y, por otro lado, trabajar más con recursos tecnológicos en la clase de matemática, acostumbrando al alumno a su uso, para profundizar más en el concepto y menos en el cálculo. Para esto es necesario mantener un equilibrio entre simulaciones de experiencias aleatorias hechas con tecnología y simulaciones con modelos concretos (Batanero, 2005), permitiendo al alumno ver las ventajas de la tecnología en el aprendizaje de la Matemática, en particular, en el aprendizaje de conceptos de Probabilidad.

Bibliografía

[1] Batanero, C. (2005) «Significados de la probabilidad en la educación secundaria», *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa- RELIME, 8* (3), p. 247-263, ISBN: 1665-2436.

[2] Batanero, C (2006). «Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo», en FLORES, Pablo; LUPIAÑEZ, José Luis (eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar.* Granada, Sociedad de Educación Matemática Thales, p. 1-16, ISBN: 84-688-0573-4

[3] Coutinho, C. (2011) *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas. Teoria e Prática*, 1º ed., Coimbra, Edições Almedina. ISBN: 9789724044873.

[4] Erickson, T. (2006) «Using simulation to learn about inference», en ROSSMAN, Allan; CHANCE, Beth (eds.), *Proceedings of the 7th International Conference on Teaching Statistics* (celebrado en Salvador, Bahia, Brasil, 2-7 jul, 2006), Bahia, IASE, ISI, 2006. ISBN-10: 90-73592-24-0, ISBN-13: 978-90-73592-24-7.

[5] Groth, R., Butler, J., Nelson, D. (2016) «Overcoming challenges in learning probability vocabulary», *Teaching Statistics, 38* (3), 102-107. Recuperado de doi.org/10.1111/test.12109.

[6] Inzunz, S. (2014) «Geogebra: Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad», en ASENJO, Joaquin; MACÍAS, Óscar; TOSCANO, Juan Carlos (eds.), *Actas do Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación* (celebrado en Buenos Aires, 12, 13 y 14 de nov, 2014), Buenos Aires, OEI, 2015. ISBN: 978-84-7666-210-6.

[7] Inzunza, S. (2017) «Conexiones entre las aproximaciones clásicas y frecuencial de la probabilidad en un ambiente de modelación computacional», *Avances de Investigación en Educación Matemática, 11*, 69-86.

[8] La Torre, A., Del Rincón, D., Arnal, J. (2003) *Bases metodológicas de la investigación educativa*, 1ºed., Barcelona, Ediciones Experiencia. ISBN 10: 8493288381, ISBN 13: 9788493288389.

[9] Martins, M° E. (2011) «Como Estimar a Probabilidade de um acontecimento por Simulação», en APM-Associação de Professores de Matemática- (eds.), Actas do PROFMAT (celebrado en Lisboa, 5-7 set, 2011), Lisboa, APM, 2011, p. 1-16.

[10] Mendenhall, W., Beaver, R., Beaver, B. (2010) *Introducción a la probabilidad y la estadística*, 13a ed., Ciudad de México, Cengage Learning. ISBN-13: 978-607-481-466-8.

[11] Mercado, M. (2013) «Exploración de conceptos de probabilidad con Geogebra», Probabilidad Condicionada: *Revista de didáctica de la Estadística*, *2*, 309-317. ISSN-e 2255-5854

[12] Ministerio de Educación Pública. (2012) *Programas de Estudio de Matemática*. San José, Costa Rica. Recuperado de http://www.mep.go.cr

[13] Ortiz, J., Batanero, C., Serrano, L. (2001) «El lenguaje probabilístico en los libros de texto». *Suma, 38*, 5-14. ISSN 1130-488X

[14] Itman, J. (1993) *Probability*, 1ºed, New York, Board. ISBN 978-1-4612-4374-8

[15] Ponte, J. (2005) «Gestão curricular em Matemática», en GTI (ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*, Lisboa, APM, p. 11-34. ISBN 972-8768-16-8

[16] Redecker, C. (2013). *JRC scientific and policy reports: The Use of ICT for Assessment of Key Competences*. Luxembourg, Publications Office of European Union. Recuperado de: doi:10.2791/87007.

[17] Santos, J., Moita, F. (2009) «Objetos de Aprendizagem e o Ensino de Matemática: Análise de sua importância na aprendizagem de conceitos de probabilidade», en 2° Encontro regional de educação matemática ? EREM, celebrado en Rio Grande do Norte, Brasil, 12-14 agosto. Recuperado de http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/objetos/comunica13.pdf

[18] Walker, R. (1980) *«The conduct of educational case study: ethics, theory and procedures»*, en Dockrell, William Bryan; Hamilton, David (ed.), Rethinking educational research, London, Hodder & Stoughton, 1980, p. 30-63. ISBN 9780340205488