Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 20, No 1. Setiembre − Febrero, 2020 ISSN 1659 -0643

Algoritmo para calcular o aproximar la Raíz Cuadrada de un número real positivo

Jesús R. Guillén R.
jesus.guillen@isfodosu.edu.do
Recinto Emilio Prud´Homme, Santiago
Instituto Superior de formación Docente Salomé Ureña (ISFODOSU)
República Dominicana

Recibido: 28 febrero 2019 Aceptado: 20 julio 2019

Resumen. En este artículo se desarrolla una variante del algoritmo tradicional para el cálculo de la raíz cuadrada, que al igual que el algoritmo tradicional se basa en la descomposición decimal del número, pero en su ejecución se usan los elementos de la demostración formal de dicho algoritmo, dando una alternativa que mejora el proceso de comprensión del mismo. En esta investigación se presenta un estudio detallado a través de varios resultados de naturaleza algorítmica que permiten ahondar en la comprensión del proceso de calcular o aproximar la raíz cuadrada de un número real positivo, lo cual hace que el artículo tenga un publico meta universitario.

Palabras clave: Algoritmos, Aproximación, Expansión Decimal, Raíz Cuadrada

Abstract. In this article a variant of the traditional algorithm for the calculation of the square root is developed, that like the traditional algorithm is based on the decimal decomposition of the number, but in its execution the elements of the formal demonstration of this algorithm are used, giving an alternative that improves the process of understanding it. In this research a detailed study is presented through several algorithmic-based results that allow us to delve into the compression of the process of calculating or approximate the square root of a positive real number, which makes the article have a university target audience.

KeyWords: Algorithms, Approximation, Decimal Expansion, square root

1.1 Introducción

En la actualidad, con el avance de la tecnología y la gran necesidad de innovar, muchas empresas, realizan grandes inversiones en el desarrollo de aplicaciones, con el objetivo de poder encontrar algoritmos, altamente eficientes, que les permitan resolver o dar solución a sus problemas para poder seguir innovando y así seguir siendo competitivos en un mercado globalizado y tecnologizado. Por tanto, cada día somos más dependientes de la tecnología, lo que implica que tenemos que evolucionar para ponernos a tono con ella. En consecuencia es fundamental formar a nuestras futuras generaciones en función de los nuevos tiempos, lo que significa que la educación actual debe sufrir un cambio estructural y transformador para adaptarse; es decir, debe preocuparse en desarrollar en los jóvenes la creatividad, el pensamiento crítico, la capacidad de poder plantear y resolver problemas en distintos contextos presentando soluciones prácticas y metódicas. Esta necesidad podemos usarla para hacer ver a los estudiantes la importancia que tiene el estudio de las matemáticas y, en consecuencia, lo fundamental que es desarrollar su pensamiento lógico-matemático para que puedan adquirir la capacidad de plantear, resolver problemas y presentar algoritmos que nos lleven a la solución de los mismos.

Para Porto (2017), los algoritmos poseen una gran importancia tanto para informática, robótica y ciencias de la computación, ya que por medio de estos se llega a un orden de ideas y un proceso correcto en la elaboración de maquinarias, robots y solución de problemas complejos. Estos señalan que los algoritmos nos permiten dar solución a problemas y también son la base de cada lenguaje de programación utilizada para el desarrollo de software. Villadiego (2015), expresa que la programación de computadores, puede ser un instrumento efectivo para mejorar el potencial creativo en la educación secundaria. Sin embargo, la metodología tradicional de pseudocódigo y diagramas puede llegar a ser, debido a su complejidad, un factor que limite esta mejora solo a individuos cuyos niveles de comprensión de la lógica matemática sean lo suficientemente fundamentados. Para obtener resultados favorables en estudiantes de educación media, con cualquier tipo de estrategia que busque explotar el potencial creativo, se hace necesario emprender una labor de identificación de las fortalezas e intereses desde los primeros años escolares. En tal sentido, la enseñanza de algoritmos en educación básica, es de gran valor para el desarrollo científico del individuo y en consecuencia para su comunidad.

Nuñez y Servat (1992) señalan que "todo profesor de matemáticas sabe la complejidad que encierra para sus alumnos el aprendizaje del algoritmo usual de extracción de la raíz cuadrada", motivado a ello resulta engorroso y difícil para ser presentado al estudiante, que por lo general, se limita a memorizar el proceso sin comprenderlo.

En la actualidad, en los centros educativos de educación media, se ha dejado de enseñar el algoritmo clásico para calcular o aproximar la raíz cuadrada de un número real positivo por diversas razones (Lozzada y Ruiz (2011) y Orantes (1996)), una de ellas es la complejidad que presenta el algoritmo clásico. El algoritmo tradicional de la raíz cuadrada puede encontrarse en [3] y [4].

La utilización de algoritmos, involucra procesos de automatización de reglas, pasos y operaciones necesarias para resolver un problema. Se emplea dicho procedimiento como herramienta de enseñanza en la mayoría de los procesos matemáticos básicos, lo cual es bien significativo implementado del modo correcto. Debo resaltar que hay un mal uso de los algoritmos en el proceso enseñanza-aprendizaje, ya que en este proceso solo se limitan al uso de fórmulas, sustitución de datos y/o memorizar una serie de pasos sin comprenderlos y que hacen carecer de sentido y significado el estudio de las matemáticas. Esta forma de abordar la enseñanza de los algoritmos no permite que los estudiantes adquieran las competencias mínimas en matemática, por ser un proceso mecánico que memorizan y que luego olvidan. Tenemos que entender que para poder lograr que nuestros estudiantes adquieran la capacidad de presentar soluciones a problemas mediante procesos algorítmicos, primero tienen que aprender como funcionan los algoritmos básicos; por tal razón, es fundamental mostrar al estudiante como se llegan a éstos a partir de problemas específicos bien elaborados.

En este trabajo se hace una demostración por inducción de un método, que al mismo tiempo nos proporciona un algoritmo, que nos permite calcular o aproximar la raíz cuadrada de un número real positivo, el cual puede ser implementado en el proceso de enseñanza a nivel de secundaria. Cabe destacar que existen otros métodos para aproximar las raíz cuadrada de un número real positivo, como por ejemplo el método de Newton y el método de Steffensen, ver [5].

1.2 Preliminares

Denotemos por $\mathbb{R}^*$ el conjunto de los números reales no negativos, $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos y por $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, el cual por conveniencia se considerará desde 0, es decir, $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,......\}$. Sean $I_9 := \{1,...,9\}$ e $I_9^* := \{0,1,...,9\}$.
Ahora, enunciaremos algunos resultados básicos que serán muy útiles en el desarrollo de este trabajo.

Teorema 1.1 (Principio del Buen Orden).

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene mínimo.

***D*emostración:** Ver [6] página 31, **Teorema** 1. •

Corolario 1.1

Si $A \subset \mathbb{N}$ es acotado superiormente, entonces A tiene máximo; es decir, existe un único $N_0 \in A$ tal que $n \leq N_0$ para todo $n \in A$.

***D*emostración:** Inmediata del Teorema 1.1 . •

Teorema 1.2

$a \in \mathbb{R}^+$, si, y solo si, existen $n \in \mathbb{N}$, $a_1,....,a_n \in I_9^*$ y una sucesión $(b_k)_{k\geq 1}$, con $b_k \in I_9^*$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tales que

$$a = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} 10^{n-k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_n 10^{-k}.$$

$[a] := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}10^{n-k}$ y $d(a) := \sum_{k=1}^{\infty} b_n 10^{-k}$ se llaman la parte entera y la parte decimal de a respectivamente. Denotaremos por $p(a) := n$.

Demostración: Ver [2] página 30. •

1.3 Algoritmo de la Raíz cuadrada

Si a es un número real positivo, nos preguntamos si ¿existe un cuadrado que tenga área igual a a? Como el área de un cuadrado de lado con longitud x es x^2, entonces la respuesta a la pregunta planteada se encuentra exactamente en preguntarse si la ecuación $x^2 = a$ tiene solución. Es bien sabido que:

Para todo $a \in \mathbb{R}^+$, la ecuación $x^2 = a$ tiene dos soluciones, donde una es positiva y la otra negativa.

La motivación geométrica y el resultado anterior nos permiten de manera natural introducir la siguiente:

Definición 1.1

Sea $a \in \mathbb{R}^+$. La solución positiva de la ecuación $x^2 = a$, es llamada la raíz cuadrada de a, y la denotaremos por $\sqrt{a}$.

Teorema 1.3

Si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces existen un único $c_0 \in \mathbb{N}$ y un único $b_0 \in \mathbb{R}^*$ tales que:

B.1) $c_0^2 \leq a < \left(c_0+1\right)^2$;

B.2) $c_0^2 \leq [a] \leq \left(c_0+1\right)^2 - 1$;

B.3) $a = c_0^2 + b_0$.

Demostración: Sea $A := \left\{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq [a]\right\}$. Como $0 \in A$, entonces $A \neq \emptyset$. Por definición, es claro que A es acotado superiormente; por tanto, por el **Corolario 1.1**, existe un único $c_0 \in A$ tal que $n \leq c_0$ para todo $n \in A$. Como $c_0 \in A$, entonces $c_0^2 \leq [a]$. Note que si $\left(c_0+1\right)^2 \leq [a]$, entonces $\left(c_0+1\right)^2 \in A$, lo que significa $c_0 + 1 \leq c_0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, se satisface que $c_0^2 \leq [a] < \left(c_0+1\right)^2$. Por definición, $a = [a] + d(a)$, donde $d(a) \in [0,1)$. Como $[a] \in \mathbb{N}$, se tiene que $[a] + 1 \leq \left(c_0+1\right)^2$. Por tanto, $c_0^2 \leq [a] \leq a = [a] + d(a) < [a] + 1 \leq \left(c_0+1\right)^2$. Así, $c_0^2 \leq a < \left(c_0+1\right)^2$. Observe que $B.2)$ es claro, por construcción de c_0. Mientras que, para obtener $B.3)$, basta tomar $b_0 := a - c_0^2$. Note que la unicidad de c_0 implica la unicidad de b_0. •

Lema 1.0

Sea $a \in \mathbb{R}^+$. Si $a = c_0^2 + b_0$ para algunos $c_0 \in \mathbb{N}$ y $b_0 > 0$, entonces:

1. Para cada $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ se tiene que $a = \left(c_0 + \frac{c_n}{10^n}\right)^2 + b_n$, donde $c_n := \max\left\{k \in \mathbb{N} : 2 \cdot c_0 \cdot \frac{k}{10^n} + \left(\frac{k}{10^n}\right)^2 \leq b_0\right\}$, $b_n := b_0 - 2 \cdot c_0 \cdot \frac{c_n}{10^n} - \left(\frac{c_n}{10^n}\right)^2$ y $b_n \leq \frac{1}{\left(10^n\right)^2} \cdot \left[2 \cdot (c_0 \cdot 10^n + c_n) + 1\right]$.
2. Si $c_0 > 0$, entonces $b_n \leq 2 \cdot \left(c_0 + \frac{c_n}{10^n}\right)$, para todo $n \geq 1$.
3. Si $b_0 < 2 \cdot c_0$, entonces $c_1 \in I_9^*$.

***D*emostración:**

1. Sea $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ arbitrario y fijo. Denotemos por $A_n := \left\{k \in \mathbb{N} : 2 \cdot c_0 \cdot \frac{k}{10^n} + \left(\frac{k}{10^n}\right)^2 \leq b_0\right\}$. Claramente $A_n \subset \mathbb{N}$ y $k \leq [b_0 + 1] \cdot 10^{2 \cdot n}$ para todo $k \in A_n$. Por el **Corolario 1.1**, existe un único $c_n \in \mathbb{N}$ tal que $c_n = \max A_n$. Tomando
$$b_n := b_0 - 2 \cdot c_0 \cdot \frac{c_n}{10^n} - \left(\frac{c_n}{10^n}\right)^2,$$
es claro que
$$\left(c_0 + \frac{c_n}{10^n}\right)^2 + b_n = c_0^2 + b_0 = a.$$
Note que, por la definición de c_n,
$$2 \cdot c_0 \cdot \frac{c_n + 1}{10^n} + \left(\frac{c_n + 1}{10^n}\right)^2 > b_0.$$
Como
$$2 \cdot c_0 \cdot \frac{c_n + 1}{10^n} + \left(\frac{c_n + 1}{10^n}\right)^2 = 2 \cdot c_0 \cdot \frac{c_n}{10^n} + 2 \cdot c_0 \cdot \frac{1}{10^n} + \left(\frac{c_n}{10^n}\right)^2 + \frac{2 \cdot c_n + 1}{\left(10^n\right)^2},$$
se tiene que
$$2 \cdot c_0 \cdot \frac{1}{10^n} + \frac{2 \cdot c_n + 1}{\left(10^n\right)^2} > b_n \tag{1.1}$$
o equivalentemente,
$$b_n < \frac{1}{(10^n)^2} \cdot \left[2 \cdot \left(c_0 \cdot 10^n + c_n\right) + 1\right].$$
2. Sea $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, arbitrario y fijo. Como $c_0 \geq 1$, y $10^n - 1 \geq 1$, entonces $2 \cdot c_0 \cdot 10^n \cdot \left(10^n - 1\right) \geq 2 \cdot c_0 \geq 1$, y $2 \cdot c_n \cdot \left(10^n - 1\right) \geq 0$; por tanto,
$$2 \cdot c_0 \cdot 10^n \cdot \left(10^n - 1\right) + 2 \cdot c_n \cdot \left(10^n - 1\right) \geq 1. \tag{1.2}$$
Note que la expresión (1.2) es equivalente a:
$$2 \cdot \left(c_0 + \frac{c_n}{10^n}\right) \geq 2 \cdot c_0 \cdot \frac{1}{10^n} + \frac{2 \cdot c_n + 1}{\left(10^n\right)^2}. \tag{1.3}$$

Claramente de (1.1) y (1.3) se tiene que el resultado.

3. Si $b_0 \leq 2 \cdot c_0$, se tiene que $c_0^2 + b_0 \leq c_0^2 + 2 \cdot c_0 < (c_0+1)^2$. Por 1.), es claro que si $c_1 \geq 10$, entonces

$$c_0^2 + b_0 = \left(c_0 + \frac{c_1}{10}\right)^2 + b_1 \geq \left(c_0 + 1\right)^2,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, $c_1 \in I_9^*$. •

Teorema 1.4

Sea $a \in \mathbb{R}^+$. Si $a = c_0^2 + b_0$ para algunos $c_0 \in \mathbb{N}$ y $b_0 > 0$, entonces existen sucesiones $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que:

1. $c_n := \text{máx}\left\{k \in \mathbb{N} : 2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{10^i}\right)\left(\frac{k}{10^n}\right) + \left(\frac{k}{10^n}\right)^2 \leq b_{n-1}\right\}$; y
   $b_n := b_{n-1} - 2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{10^i}\right)\left(\frac{c_n}{10^n}\right) - \left(\frac{c_n}{10^n}\right)^2$; $\forall\ n \geq 1$;
2. $c_n \in I_9^*$, $\forall\ n \geq 2$;
3. $b_{n+1} \leq b_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$;
4. $a = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{10^i}\right)^2 + b_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$;
5. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
6. $a = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{10^i}\right)^2$.

Demostración: (Por Inducción)
Para $n = 1$, por **lema 1.1**, tenemos que:

$$a = c_0^2 + b_0 = \left(c_0 + \frac{c_1}{10}\right)^2 + b_1,$$

donde

$$c_1 := \text{máx}\left\{k \in \mathbb{N} : 2 \cdot c_0 \cdot \frac{k}{10} + \left(\frac{k}{10}\right)^2 \leq b_0\right\},$$

$$b_1 := b_0 - 2 \cdot c_0 \cdot \frac{c_1}{10} - \left(\frac{c_1}{10}\right)^2 \geq 0,$$

y

$$b_1 \leq \frac{1}{(10)^2} \cdot \left[2 \cdot (c_0 \cdot 10 + c_1) + 1\right].$$

Además, si $c_0 > 0$, entonces $b_1 \leq 2 \cdot \left(c_0 + \frac{c_1}{10}\right)$.
Como

$$a = \left(c_0 + \frac{c_1}{10}\right)^2 + b_1,$$

para $n=2$, aplicando el **lema 1.1** a esta nueva representación de a, tenemos que

$$a=\left(\left(c_0+\frac{c_1}{10}\right)+\frac{c_2}{10^2}\right)^2+b_2,$$

donde

$$c_2:=\text{máx}\left\{k\in\mathbb{N}:2\cdot\left(c_0+\frac{c_1}{10}\right)\cdot\frac{k}{10^2}+\left(\frac{k}{10^2}\right)^2\leq b_1\right\}.$$

$$b_2:=b_1-2\cdot\left(c_0+\frac{c_1}{10}\right)\cdot\frac{c_2}{10^2}-\left(\frac{c_2}{10^2}\right)^2\geq 0,$$

y

$$b_2\leq\frac{1}{(10^2)^2}\cdot\left[2\cdot\left(\left(c_0+\frac{c_1}{10}\right)\cdot 10^2+c_2\right)+1\right].$$

Note que si $c_0>0$, entonces $c_0+\frac{c_1}{10}>0$. Así, por 2 y 3 del **lema 1.1**, se cumple que $c_2\in I_9^*$, y $b_2\leq 2\cdot\left(\left(c_0+\frac{c_1}{10}\right)+\frac{c_2}{10^2}\right)$.

Supongamos que para $n>2$, existen $c_1,...,c_n\in\mathbb{N}$ tales que

$$a=\left(c_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{10^i}\right)^2+b_n, \tag{1.4}$$

donde

$$c_i:=\text{máx}\left\{k\in\mathbb{N}:2\cdot\left(c_0+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{c_j}{10^j}\right)\cdot\frac{k}{10^i}+\left(\frac{k}{10^i}\right)^2\leq b_{i-1}\right\},$$

$$b_i:=b_{i-1}-2\cdot\left(c_0+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{c_j}{10^j}\right)\cdot\frac{c_i}{10^i}-\left(\frac{c_i}{10^i}\right)^2\geq 0,$$

y

$$b_i\leq\frac{1}{(10^i)^2}\cdot\left[2\cdot\left(\left(\sum_{j=0}^{i-1}\frac{c_j}{10^j}\right)\cdot 10^i+c_i\right)+1\right],\quad i=1,...,n.$$

Además, si $c_0>0$, entonces $c_i\in I_9^*$, $i=2,...,n$; y $b_i\leq 2\cdot\left(\left(\sum_{j=0}^{i-1}\frac{c_j}{10^j}\right)+\frac{c_i}{10^i}\right)$, $i=1,...,n$.

Ahora, por el **lema 1.1**, para la representación de a dada en (1.4), existen c_{n+1} y b_{n+1} tales que:

$$a=\left(\left(c_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{10^i}\right)+\frac{c_{n+1}}{10^{n+1}}\right)^2+b_{n+1}=\left(c_0+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{c_i}{10^i}\right)^2+b_{n+1}$$

donde

$$c_{n+1}:=\text{máx}\left\{k\in\mathbb{N}:2\cdot\left(c_0+\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{10^j}\right)\cdot\frac{k}{10^{n+1}}+\left(\frac{k}{10^{n+1}}\right)^2\leq b_n\right\},$$

$$b_{n+1}:=b_n-2\cdot\left(c_0+\sum_{j=0}^{n}\frac{c_j}{10^j}\right)\cdot\frac{c_{n+1}}{10^{n+1}}-\left(\frac{c_{n+1}}{10^{n+1}}\right)^2\geq 0,$$

y

$$b_{n+1}\leq\frac{1}{(10^{n+1})^2}\cdot\left[2\cdot\left(\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{c_j}{10^j}\right)\cdot 10^{n+1}+c_{n+1}\right)+1\right].$$

Además, si $c_0 > 0$, entonces $c_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{c_i}{10^i} > 0$. Así, por 2 y 3 del **lema 1.1**, tenemos que: $c_{n+1} \in I_9^*$, y $b_{n+1} \leq 2 \cdot \left(\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{c_j}{10^j} \right) + \frac{c_{n+1}}{10^{n+1}} \right)$.

Esto demuestra que las sucesiones $(c_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$, satisfacen las condiciones 1., 2. y 3. respectivamente.

Por construcción, $0 \leq b_{n+1} \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, la sucesión $\left(b_n\right)_{n\geq 1}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. En efecto: si $c_0 > 0$, es claro que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j}{10^j} \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + 1;$$

por tanto,

$$b_n \leq \frac{1}{(10^n)^2} \cdot \left[2 \cdot \left(\left(c_0 + \frac{c_1}{10} + 1 \right) \cdot 10^n + c_n \right) + 1 \right] \leq \frac{1}{(10^n)^2} \cdot \left[2 \cdot \left(c_0 + \frac{c_1}{10} + 1 \right) \cdot 10^n + 19 \right].$$

Ahora, si $c_0 = 0$, entonces $0 < b_0 < 1$, lo cual implica que $c_n \in I_9^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia,

$$b_n \leq \frac{1}{(10^n)^2} \cdot \left[2 \cdot 10^n + 19 \right].$$

Por los casos considerados se concluye que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. •

El **Teorema 1.4** nos garantiza que es suficiente con tener una representación de un número real positivo a en la forma $c_0^2 + b_0$, para garantizar que la sucesión construida satisface que $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{10^i} = \sqrt{a}$. Por la construcción de la sucesión es claro que c_1 depende de la elección de c_0, mientras que para $n \geq 2$, c_n es independientes de la elección de c_0. Esto significa que de la elección de c_0, va a depender la complejidad de encontrar c_1, por tanto, es muy importante hacer una muy buena elección o construcción de c_0.

Ejemplo 1.1

Note que: $5 = 0^2 + 5 = 1^1 + 4 = 2^2 + 1$. Por tanto, si aplicamos el **Teorema 1.4**, a cada una de las descomposiciones de 5, tenemos que:

1. Caso 1 :

c_0	c_1	c_2	c_3
0	22	3	6
$5 = 0^2 + 5$	$\left(0 + \frac{22}{10}\right)^2 + 0{,}16$	$\left(2{,}2 + \frac{3}{10^2}\right)^2 + 0{,}0271$	$\left(2{,}23 + \frac{6}{10^3}\right)^2 + 0{,}000304$

2. Caso 2 :

c_0	c_1	c_2	c_3
1	12	3	6
$5 = 1^2 + 4$	$\left(1 + \frac{12}{10}\right)^2 + 0{,}16$	$\left(2{,}2 + \frac{3}{10^2}\right)^2 + 0{,}0271$	$\left(2{,}23 + \frac{6}{10^3}\right)^2 + 0{,}000304$

3. Caso 3 :

c_0	c_1	c_2	c_3
2	2	3	6
$5 = 2^2 + 1$	$\left(2 + \frac{2}{10}\right)^2 + 0{,}16$	$\left(2{,}2 + \frac{3}{10^2}\right)^2 + 0{,}0271$	$\left(2{,}23 + \frac{6}{10^3}\right)^2 + 0{,}000304$

Ejemplo 1.2

Note que: $739 = 5^2 + 714 = 27^2 + 10$. Por tanto, si aplicamos el **Teorema** 1.4, a cada una de las descomposiciones de 739, tenemos que:

1. Caso 1 :

c_0	c_1	c_2	c_3
5	221	8	4
$739 = 5^2 + 714$	$\left(5 + \frac{221}{10}\right)^2 + 4{,}59$	$\left(27{,}1 + \frac{8}{10^2}\right)^2 + 0{,}2476$	$\left(27{,}18 + \frac{4}{10^3}\right)^2 + 0{,}030144$

2. Caso 2 :

c_0	c_1	c_2	c_3
27	1	8	4
$739 = 27^2 + 10$	$\left(27 + \frac{1}{10}\right)^2 + 4{,}59$	$\left(27{,}1 + \frac{8}{10^2}\right)^2 + 0{,}2476$	$\left(27{,}18 + \frac{4}{10^3}\right)^2 + 0{,}030144$

Como se puede notar, en los **ejemplos** 1.1 y 1.2, mientras más grande es el número es más complicado hallar el valor de c_1 que satisface las condiciones pedidas por el **Teorema 1.4**, ya que éste depende de c_0. Por tanto, si esta primera estimación es buena el valor de c_1 será menor, y por tanto un poco más simple de encontrar.

La mejor elección o construcción que podemos hacer de c_0 es la que satisface las condiciones del **Teorema 1.3**, pero este sólo nos garantiza su existencia y no nos proporciona un método para calcularlo. Cabe destacar que distintos métodos o algoritmos se han desarrollado para calcular el valor inicial c_0 y algunos de ellos pueden ser consultados en [1, 4, 3, 10]. En lo que sigue nos centraremos en desarrollar un algoritmo que nos permita hallar el valor inicial c_0, que satisface las condiciones establecidas en el **Teorema** 1.3.

Para contextualizar la demostración que daremos del algoritmo para hallar c_0, partimos notando que:

Observación. Si $a \in \mathbb{N}$, tal que $0 \leq a < 99$, lo podemos descomponer, de acuerdo al **Teorema 1.3**, de la siguiente forma:

1. $0 = 0^2$
2. $a = 1^2 + k$, $0 \leq k \leq 2$ si $1 \leq a \leq 3$
3. $a = 2^2 + k$, $0 \leq k \leq 4$ si $4 \leq a \leq 8$
4. $a = 3^2 + k$, $0 \leq k \leq 6$ si $9 \leq a \leq 15$
5. $a = 4^2 + k$, $0 \leq k \leq 8$ si $16 \leq a \leq 24$
6. $a = 5^2 + k$, $0 \leq k \leq 10$ si $25 \leq a \leq 35$
7. $a = 6^2 + k$, $0 \leq k \leq 12$ si $36 \leq a \leq 49$
8. $a = 7^2 + k$, $0 \leq k \leq 14$ si $25 \leq a \leq 63$

9. $a = 8^2 + k$, $0 \leq k \leq 16$ si $64 \leq a \leq 80$
10. $a = 9^2 + k$, $0 \leq k \leq 18$ si $81 \leq a \leq 99$.

Por otro lado, note que si $100 \leq a \leq 999$, si, y sólo si, existe $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, con $a_2 \neq 0$, tal que $a = a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Lema 1.0

Si $a_0, a_1, a_2 \in I_9^*$, $a := a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ y $a_2 \neq 0$, existen $c_1 \in \Big\{1,2,3\Big\}$, $b_1 \in \Big\{0,1,2,3,4\Big\}$ y $c_0 \in I_9^*$ tales que:

1. $a_2 = c_1^2 + b_1$
2. $c_0 := \text{máx}\Big\{n \in \mathbb{N} : 2 \cdot c_1 \cdot 10 \cdot n + n^2 \leq b_1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0\Big\}$
3. $a = \Big(c_1 \cdot 10 + c_0\Big)^2 + b_0$, donde $b_0 := b_1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 - \Big(2 \cdot c_1 \cdot 10 + c_0\Big) \cdot c_0 \geq 0$.
4. $\Big(c_1 \cdot 10 + c_0\Big)^2 \leq a < \Big(\Big(c_1 \cdot 10 + c_0\Big) + 1\Big)^2$.

***D*emostración:** Por la **Observación 1.3**, tenemos que $a_2 = c_1^2 + b_1$, con $c_1 \in \Big\{1,2,3\Big\}$ y $b_1 \in \Big\{0,1,2,3,4\Big\}$. Así,

$$a = c_1^2 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = \Big(c_1 \cdot 10 + c_0\Big)^2 - 2 \cdot c_1 \cdot 10 \cdot c_0 - c_0^2 + b_1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

donde

$$c_0 := \text{máx}\Big\{n \in \mathbb{N} : 2 \cdot c_1 \cdot 10 \cdot n + n^2 \leq b_1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0\Big\}.$$

Como, por definición de c_0,

$$2 \cdot c_1 \cdot 10 \cdot c_0 + c_0^2 \leq b_1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

se tiene que

$$a = \Big(c_1 \cdot 10 + c_0\Big)^2 + b_0,$$

donde

$$b_0 := b_1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 - \Big(2 \cdot c_1 \cdot 10 + c_0\Big) \cdot c_0 \geq 0.$$

Por tanto, por la representación de a y la definición de c_0,

$$\Big(c_1 \cdot 10 + c_0\Big)^2 \leq a,$$

y

$$2 \cdot c_1 \cdot 10 \cdot (c_0 + 1) + (c_0 + 1)^2 > b_1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Dado que,

$$\left(\left(c_1\cdot 10+c_0\right)+1\right)^2-\left(c_1\cdot 10+c_0\right)^2+\left(2\cdot c_1\cdot 10+c_0\right)\cdot c_0=2\cdot c_1\cdot 10\cdot\left(c_0+1\right)+\left(c_0+1\right)^2$$

se tiene que;

$$\left(\left(c_1\cdot 10+c_0\right)+1\right)^2-\left(c_1\cdot 10+c_0\right)^2+\left(2\cdot c_1\cdot 10+c_0\right)\cdot c_0>b_1\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0.$$

En consecuencia,

$$\left(c_1\cdot 10+c_0\right)^2\leq a<\left(\left(c_1\cdot 10+c_0\right)+1\right)^2.$$

Como, $0\leq a\leq 999$, es claro que $c_1\in I_9^*$, ya que de lo contrario $c_1\geq 10$, y por tanto $\left(c_1\cdot 10\right)^2\geq 1000$, lo cual implicaría que $a\geq 1000$. •

Ejemplo 1.3

Consideremos el número 739 y encontremos su descomposición, de acuerdo al resultado anterior. Note que: $739=7\cdot 10^2+3\cdot 10+9=\left(2^2+3\right)\cdot 10^2+3\cdot 10+9=2^2\cdot 10^2+3\cdot 10^2+3\cdot 10+9=$ $2^2\cdot 10^2+339=\left(2\cdot 10+c_0\right)^2-2\cdot\left(2\cdot 10\cdot c_0\right)-c_0^2+339=\left(2\cdot 10+c_0\right)^2-\left(2\cdot 2\cdot 10+c_0\right)c_0+339,$ donde $c_0=\text{máx}\left\{n\in I_9^*:\left(2\cdot 2\cdot 10+n\right)\cdot n\leq 339\right\}$. Observe que el mayor valor en I_n^* que satisface la condición anterior es: $c_0=7$. Así, $\left(2\cdot 2\cdot 10+7\right)\cdot 7=329$ y $b_0=339-329=10$. Por tanto, $739=\left(2\cdot 10+7\right)^2+10=\left(27\right)^2+10.$ •

Lema 1.0

Si $a_0,a_1,a_2,a_3\in I_9^*$, $a:=a_3\cdot 10^3+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$ y $a_3\neq 0$, existen $c_0,c_1\in I_9^*$ y $b_1\in\left\{0,1,...,2\cdot c_1\right\}$ tal que:

1. $a_3\cdot 10+a_2=c_1^2+b_1$
2. $c_0:=\text{máx}\left\{n\in\mathbb{N}:2\cdot c_1\cdot 10\cdot n+n^2\leq b_1\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0\right\}$
3. $a=\left(c_1\cdot 10+c_0\right)^2+b_0$, donde $b_0:=b_1\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0-\left(2\cdot c_1\cdot 10+c_0\right)\cdot c_0\geq 0.$
4. $\left(c_1\cdot 10+c_0\right)^2\leq a<\left(\left(c_1\cdot 10+c_0\right)+1\right)^2.$

Demostración: Como $a=\left(a_3\cdot 10+a_2\right)\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$, y $a_3\neq 0$, por la **Observación 1.3** , existen únicos $c_1\in I_9$ y $b_1\in\left\{0,1,...,2\cdot c_1\right\}$ tal que $c_1^2\leq a_3\cdot 10+a_2\leq c_1^2+2\cdot c_1$ y $a_3\cdot 10+a_2=c_1^2+b_1$. Por tanto;

$$a=\left(c_1^2+b_1\right)\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0=c_1^2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0+b_1\cdot 10^2.$$

Si,

$$c_0 := \text{máx}\Big\{n \in \mathbb{N} : 2 \cdot c_1 \cdot 10 \cdot n + n^2 \leq b_1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0\Big\},$$

entonces

$$a = \Big(c_1 \cdot 10 + c_0\Big)^2 + b_0,$$

donde

$$b_0 := b_1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 - \Big(2 \cdot c_1 \cdot 10 \cdot c_0 + c_0^2\Big) \geq 0.$$

Como, $2 \cdot c_1 \geq b_1$, y $10^2 > a_1 \cdot 10 + a_0$, tenemos que $2 \cdot c_1 \cdot 10^2 + 10^2 > b_1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, lo que implica, por la definición de c_0, que $c_0 \in I_9^*$.
Dado que,

$$\Big(2 \cdot c_1 \cdot 10 + c_0\Big) \cdot c_0 + 2 \cdot \Big(c_1 \cdot 10 + c_0\Big) + 1 = 2 \cdot c_1 \cdot 10 \cdot \Big(c_0 + 1\Big) + \Big(c_0 + 1\Big)^2 > b_1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

se deduce que,

$$c_1^2 \cdot 10^2 + \Big(2 \cdot c_1 \cdot 10 + c_0\Big) \cdot c_0 + 2 \cdot \Big(c_1 \cdot 10 + c_0\Big) + 1 > c_1^2 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = a.$$

En consecuencia,

$$\Big(c_1 \cdot 10 + c_0\Big)^2 \leq a < \Big(\Big(c_1 \cdot 10 + c_0\Big) + 1\Big)^2,$$

ya que

$$c_1^2 \cdot 10^2 + \Big(2 \cdot c_1 \cdot 10 + c_0\Big) \cdot c_0 + 2 \cdot \Big(c_1 \cdot 10 + c_0\Big) + 1 = \Big((c_1 \cdot 10 + c_0) + 1\Big)^2.$$

•

Ejemplo 1.4

Consideremos el número 8369, por el **Teorema 1.2**, tenemos que: $8369 = 8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 9 = \big(8 \cdot 10 + 3\big) \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 9 = \big(83\big) \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 9 = \big(9^2 + 2\big) \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 9 = 9^2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 9 = 9^2 \cdot 10^2 + 269 = \big(9 \cdot 10 + c_0\big)^2 - 2 \cdot \big(9 \cdot 10 \cdot c_0\big) - c_0^2 + 269 = \big(2 \cdot 10 + c_0\big)^2 - \big(2 \cdot 9 \cdot 10 + c_0\big) \cdot c_0 + 269$, donde $c_0 := \text{máx}\Big\{n \in \mathbb{N} : \big(2 \cdot 9 \cdot 10 + n\big) \cdot n \leq 269\Big\}$. Observe que el mayor valor en $\mathbb{N}$ que satisface la condición anterior es: $c_0 = 1$. Así, $\big(2 \cdot 9 \cdot 10 + 1\big) \cdot 1 = 181$ y $b_0 = 269 - 181 = 88$. Por tanto, $8369 = \big(9 \cdot 10 + 1\big)^2 + 88 = \big(91\big)^2 + 88$. •

Por los **Lemas** 1.2 y 1.3, podemos observar que para $a, b \in \mathbb{R}^+$ tal que $p(a) = 2$ y $p(b) = 3$, tiene un representación similar, pero este comportamiento no es casual ni extraño, ya que será el comportamiento regular para cuando $p(a) = 2 \cdot n$ y $p(b) = 2 \cdot n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para no considerar casos separados en la demostración del algoritmo, que se hará a continuación, se usará la siguiente notación:

Para $n \in \mathbb{N}$, definamos:

$$k_n := \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{n es par;} \\ \\ \frac{n-1}{2}, & \text{n impar.} \end{cases}$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, definamos:

$$\rho_n := n - 2^{\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}} = \begin{cases} n-1, & \text{n es par;} \\ \\ n-2, & \text{n impar.} \end{cases}$$

$$\rho_n^j := \rho_n - j, \quad k_n^j := k_n - j, \ \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Es bien sabido que : $n \in \mathbb{N}$ es par si, y sólo si, $n-2$ es par. Por tanto; $n \in \mathbb{N}$ es impar si, y sólo si, $n-2$ es impar. En consecuencia,

A.1) $k_n^{k_{(n-2)}} = k_n - k_{(n-2)} = 1, \ \ \forall n \in \mathbb{N} - \Big\{0,1,2\Big\}.$

A.2) $k^i_{(n-2)} = k_n^{(i+1)}, \, 0 \leq i \leq k_{(n-2)}$

A.3) $(n-1) - \rho_n = 0$, si n es par y $(n-1) - \rho_n = 1$, si n es impar.

Observación. Si $b, c, x_0 \in \mathbb{R}^+$, entonces $x_0^2 + b \cdot x_0 + c = \big(x_0 + d\big)^2 + e$, donde $d := \text{máx}\Big\{n \in \mathbb{N} : 2 \cdot x_0 \cdot n + n^2 \leq b \cdot x_0 + c\Big\}$ y $e := b \cdot x_0 + c - \big(2 \cdot x_0 \cdot d + d^2\big) \geq 0$.

El siguiente teorema nos da un algoritmo que nos permite encontrar la descomposición de cualquier número natural en los términos del **Teorema** 1.3.

Teorema 1.5

Si $a := a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in I_9^*$ y $a_n \neq 0$, existen $c_{k_n}, c_{k_n - 1}, ..., c_1, c_0 \in I_9^*$, tal que:

1. $a_n \cdot 10^{((n-1)-\rho_n)} + \Big((n-1) - \rho_n\Big) \cdot a_{n-1} = c_{k_n}^2 + b_{k_n}$, con $1 \leq c_{k_n} \leq 3 \cdot \Big(2 + (-1)^{n+1}\Big)$ y $0 \leq b_{k_n} \leq 2 \cdot c_{k_n}$;

2. $c_{k_n^1} := \text{máx}\Big\{m \in \mathbb{N} : \Big(2 \cdot c_{k_n} \cdot 10 + m\Big) \cdot m \leq b_{k_n} \cdot 10^2 + a_{\rho_n} \cdot 10 + a_{\rho_n^1}\Big\}$

3. $c_{k_n^j} := \text{máx}\Bigg\{m \in \mathbb{N} : \Bigg(2 \cdot \Big(\sum\limits_{i=0}^{j-1} c_{k_n^i} \cdot 10^{j-i}\Big) + m\Bigg) \cdot m \leq b_{k_n^{(j-1)}} \cdot 10^2 + a_{\rho_n^j} \cdot 10 + a_{\rho_n^{(j+1)}}\Bigg\}$,

   $b_{k_n^j} := b_{k_n^{(j-1)}} \cdot 10^2 + a_{\rho_n^j} \cdot 10 + a_{\rho_n^{(j+1)}} - \Bigg(2 \cdot \Big(\sum\limits_{i=0}^{j-1} c_{k_n^i} \cdot 10^{j-i}\Big) + c_{k_n^j}\Bigg) \cdot c_{k_n^j}$, y

   $b_{k_n^j} \leq 2 \cdot \Big(\sum\limits_{i=0}^{k_n^j} c_{k_n^i}\Big)$, para $1 \leq j \leq k_n$.

4. $a = \Big(\sum\limits_{i=0}^{k_n} c_{k_n^i} \cdot 10^{k_n^i}\Big)^2 + b_0$

5. $\Big(\sum\limits_{i=0}^{k_n} c_{k_n^i} \cdot 10^{k_n^i}\Big)^2 \leq a < \Bigg(\Big(\sum\limits_{i=0}^{k_n} c_{k_n^i} \cdot 10^{k_n^i}\Big) + 1\Bigg)^2.$

***D*emostración:** (Por Inducción)

Por la **Observación** 1.3 y los **Lemas** 1.2 y 1.3, es claro que el resultado es cierto para $n = 0,1,2,3$. Supongamos que es cierto para todo $k < n$. Como $a = \left(a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \cdots + a_2\right) \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, entonces, por hipótesis inductiva, tenemos que para $c := a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \cdots + a_2$ existen $\bar{c}_{k_{(n-2)}}, \bar{c}_{k_{(n-2)}-1}, \ldots, \bar{c}_0 \in I_9^*$, tal que:

1. $a_n \cdot 10^{((n-3)-\rho_{(n-2)})} + \left((n-3) - \rho_{(n-2)}\right) \cdot a_{n-1} = \bar{c}^2_{k_{(n-2)}} + \bar{b}_{k_{(n-2)}}$, con $1 \leq \bar{c}_{k_{(n-2)}} \leq 3 \cdot \left(2 + (-1)^{n-1}\right)$ y
   $0 \leq \bar{b}_{k_{(n-2)}} \leq 2 \cdot \bar{c}_{k_{(n-2)}}$;
2. $\bar{c}_{k^1_{(n-2)}} := \text{máx}\left\{m \in \mathbb{N} : \left(2 \cdot \bar{c}_{k_{(n-2)}} \cdot 10 + m\right) \cdot m \leq \bar{b}_{k_{(n-2)}} \cdot 10^2 + a_{\rho_{(n-2)}} \cdot 10 + a_{\rho^1_{(n-2)}}\right\}$
3. $\bar{c}_{k^j_{(n-2)}} := \text{máx}\left\{m \in \mathbb{N} : \left(2 \cdot \left(\sum\limits_{i=0}^{j-1} \bar{c}_{k^i_{(n-2)}} \cdot 10^{j-i}\right) + m\right) \cdot m \leq \bar{b}_{k^{(j-1)}_{(n-2)}} \cdot 10^2 + a_{\rho^j_{(n-2)}} \cdot 10 + a_{\rho^{(j+1)}_{(n-2)}}\right\}$,
   $\bar{b}_{k^j_{(n-2)}} := \bar{b}_{k^{(j-1)}_{(n-2)}} \cdot 10^2 + a_{\rho^j_{(n-2)}} \cdot 10 + a_{\rho^{(j+1)}_{(n-2)}} - \left(2 \cdot \left(\sum\limits_{i=0}^{j-1} \bar{c}_{k^i_{(n-2)}} \cdot 10^{j-i}\right) + \bar{c}_{k^j_{(n-2)}}\right) \cdot \bar{c}_{k^j_{(n-2)}}$, y
   $\bar{b}_{k^j_{(n-2)}} \leq 2 \cdot \left(\sum\limits_{i=0}^{k^j_{(n-2)}} \bar{c}_{k^i_{(n-2)}}\right)$, para $1 \leq j \leq k_{(n-2)}$.
4. $c = \left(\sum\limits_{i=0}^{k_{(n-2)}} \bar{c}_{k^i_{(n-2)}} \cdot 10^{k^i_{(n-2)}}\right)^2 + \bar{b}_0$, donde $\bar{b}_0 \leq 2 \cdot \left(\sum\limits_{i=0}^{k_{(n-2)}\cdot} \bar{c}_{k^i_{(n-2)}} \cdot 10^{k^i_{(n-2)}}\right)$
5. $\left(\sum\limits_{i=0}^{k_{(n-2)}} \bar{c}_{k^i_{(n-2)}} \cdot 10^{k^i_{(n-2)}}\right)^2 \leq c < \left(\left(\sum\limits_{i=0}^{k_{(n-2)}} \bar{c}_{k^i_{(n-2)}} \cdot 10^{k^i_{(n-2)}}\right) + 1\right)^2$.

Note que:

$$a_n \cdot 10^{((n-3)-\rho_{(n-2)})} + \left((n-3) - \rho_{(n-2)}\right) \cdot a_{n-1} = a_n \cdot 10^{((n-1)-\rho_n)} + \left((n-1) - \rho_n\right) \cdot a_{n-1}.$$

Por tanto;

$$a = \left(\left(\sum_{i=0}^{k_{(n-2)}} \bar{c}_{k^i_{(n-2)}} \cdot 10^{k^i_{(n-2)}}\right)^2 + \bar{b}_0\right) \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = \left(\sum_{i=0}^{k_{(n-2)}} \bar{c}_{k^i_{(n-2)}} \cdot 10^{k^i_{(n-2)}}\right)^2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 + \bar{b}_0 \cdot 10^2.$$

Luego, por la **Observación** 1.3, se tiene que:

$$a = \left(\left(\sum_{i=0}^{k_{(n-2)}} \bar{c}_{k^i_{(n-2)}} \cdot 10^{k^i_{(n-2)}}\right) \cdot 10 + c_0\right)^2 + b_0,$$

donde

$$c_0 := \text{máx}\left\{t \in \mathbb{N} : 2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{k_{(n-2)}} \bar{c}_{k^i_{(n-2)}} \cdot 10^{k^i_{(n-2)}}\right) \cdot 10 \cdot t + t^2 \leq \bar{b}_0 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0\right\}$$

y

$$b_0 := \left(\bar{b}_0 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0\right) - 2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{k_{(n-2)}} \bar{c}_{k^i_{(n-2)}} \cdot 10^{k^i_{(n-2)}}\right) \cdot 10 \cdot c_0 - c_0^2$$

Ahora, haciendo el siguiente cambio de notación,

$$c_{k_n^j} = \bar{c}^j_{k_{(n-2)}}, \quad b_{j+1} = \bar{b}_j \quad 0 \le j \le k_n - 1,$$

tenemos que $k_{(n-2)} = k_n - 1$, y si $j = k_{(n-2)}$, entonces por $A.1)$, $c_1 = \bar{c}_{k_n^j} = \bar{c}_{k^j_{(n-2)}} = \bar{c}_0$. Así, por $A.2)$,

$$a = \left(\left(\sum_{i=0}^{k_n^1} c_{k_n^i} \cdot 10^{k_n^{(i+1)}} \right) \cdot 10 + c_0 \right)^2 + b_0 = \left(\sum_{i=0}^{k_n} c_{k_n^i} \cdot 10^{k_n^i} \right)^2 + b_0$$

donde,

$$c_0 := \text{máx}\left\{ t \in \mathbb{N} : 2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{k_n^1} c_{k_n^{i+1}} \cdot 10^{k_n^{i+1}} \right) \cdot 10 \cdot t + t^2 \le b_1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \right\}.$$

Veamos que $c_0 \in I_9^*$. Por hipótesis inductiva tenemos que

$$b_1 \le 2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{k_n^1} c_{k_n^{i+1}} \cdot 10^{k_n^{i+1}} \right),$$

como

$$a_1 \cdot 10 + a_0 < 10^2,$$

se tiene que

$$b_1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \le 2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{k_n^1} c_{k_n^{i+1}} \cdot 10^{k_n^{i+1}} \right) \cdot 10^2 + 10^2,$$

por tanto, por la definición b_0, se concluye que $b_0 \in I_9^*$. Claramente, haciendo el cambio a la nueva notación, tendremos todas las condiciones que necesitamos, restando demostrar solo, que

$$\left(\sum_{i=0}^{k_n} c_{k_n^i} \cdot 10^{k_n^i} \right)^2 \le a < \left(\left(\sum_{i=0}^{k_n} c_{k_n^i} \cdot 10^{k_n^i} \right) + 1 \right)^2.$$

Dado que

$$a = c \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

y

$$\left(\sum_{i=0}^{k_{(n-2)}} \bar{c}_{k^i_{(n-2)}} \cdot 10^{k^i_{(n-2)}} \right)^2 \le c < \left(\left(\sum_{i=0}^{k_{(n-2)}} \bar{c}_{k^i_{(n-2)}} \cdot 10^{k^i_{(n-2)}} \right) + 1 \right)^2,$$

transformando a la nueva notación, se tiene que

$$\left(\sum_{i=0}^{k_n^1} c_{k_n^{(i+1)}} \cdot 10^{k_n^{(i+1)}} \right)^2 \le c < \left(\left(\sum_{i=0}^{k_n^1} c_{k_n^{(i+1)}} \cdot 10^{k_n^{(i+1)}} \right) + 1 \right)^2.$$

Si $d := \sum_{i=0}^{k_n} c_{k_n^i} \cdot 10^{k_n^i}$, entonces, por la definición de c_0, es claro que

$$b_1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \le 2 \cdot d \cdot 10 \cdot \Big(c_0 + 1\Big) + \Big(c_0 + 1\Big)^2.$$

Luego, reproduciendo las cuentas de la parte final de la demostración del **Lema** 1.3, se concluye el resultado. •

Ejemplo 1.5

Consideremos el número 836956. Para hacer la descomposición de este número haremos uso del algoritmo dado en el **Teorema** 1.5. $836956 = 8 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6 = \left(8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 9\right) \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6 = 8369 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6 = \left((91)^2 + 88\right) \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6 = (91)^2 \cdot 10^2 + 88 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6 = (91)^2 \cdot 10^2 + 8856$ (por el **ejemplo** 1.4). Luego, haciendo completación de cuadrados, buscamos un elemento $c_0 \in \mathbb{N}$ tal que: $836956 = \left(91 \cdot 10 + c_0\right)^2 - \left(2 \cdot 91 \cdot 10 + c_0\right) \cdot c_0 + 8856$, donde $c_0 := \text{máx}\left\{n \in \mathbb{N} : \left(2 \cdot 91 \cdot 10 + n\right) \cdot n \leq 8856\right\}$. Note que el máximo elemento en $\mathbb{N}$ que satisface la condición anterior es: $c_0 = 4 \in I_9^*$. Así, $\left(2 \cdot 91 \cdot 10 + 4\right) \cdot 4 = 7296$ y $b_0 = 8856 - 7296 = 1560$. Por tanto, $836956 = \left(91 \cdot 10 + 4\right)^2 + 1560 = \left(914\right)^2 + 1560$. •

Algoritmo 1.

Si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces $a = [a] + d(a)$. Escribimos $[a] = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_0$. Definamos:
$b = 0$,
$c = 0$,
$R = 0$,
$k_1 = 0$,
$s = 0$,
$t = 0$.

$$k_0 = \begin{cases} a_n, & \text{si n es par;} \\ a_n \cdot 10 + a_{n-1}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si n es par;} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
Para & j = m, \ldots, 0 \\
 & d = R \cdot 10^2 + k_1 \cdot 10 + k_0 \\
 & \left\{\begin{array}{ll}
 Para & i = 0, \ldots, 9 \\
 & \left\{\begin{array}{ll}
 Mientras & \left(20 \cdot c + i\right) \cdot i > d \\
 & b = i - 1 \\
 s = 1 \ \ Salir \ \ del \ \ Mientras. & \\
 Fin \ \ del \ \ Mientras. &
 \end{array}\right. \\
 & si \ \ s = 1 \\
 Salir \ \ del \ \ para. &
 \end{array}\right. \\
 & R = d - \left(20 \cdot c + b\right) \cdot b \\
 & c = c + b \cdot 10^j \\
 & \left\{\begin{array}{l}
 si \ \ R = 0 \ \ o \ \ j = 0 \ \ Salir \ \ del \ \ para. \\
 sino \ \ k_1 = a_{(2 \cdot j - 1)} \ \ y \ \ k_0 = a_{(2 \cdot (j-1))}
 \end{array}\right. \\
Fin \ \ del \ \ para. &
\end{array}\right.$$

Termina esta parte del proceso donde calcula c, de tal forma que $d = R + d(a)$ y $a = c^2 + d$. Con estos datos entramos al siguiente proceso:

$$\begin{cases} Para & j=1,\ldots,100 \;\; (este\;\; es\;\; el\;\; error\;\; de\;\; aproximación) \\ & d = R + d(a) \\ & \begin{cases} Para & i=0,\ldots,9 \\ & \begin{cases} Mientras & \left(2\cdot c + \frac{i}{10^j}\right)\cdot \frac{i}{10^j} > d \\ & b = i-1 \\ t=1 \;\; Salir\;\; del\;\; Mientras. \\ Fin\;\; del\;\; Mientras. \end{cases} \\ si\;\; t=1\;\; salir\;\; del\;\; para. \end{cases} \\ & d = d - \left(2\cdot c + \frac{b}{10^j}\right)\cdot \frac{b}{10^j} \\ & c = c + \frac{b}{10^j} \\ si\;\; d=0\;\; Salir\;\; del\;\; para. \\ Fin\;\; del\;\; para. \end{cases}$$

Al finalizar este proceso tendremos que $\sqrt{a} = c$ o $\sqrt{a} \approx c$.

1.4 Conclusión

El método dado para calcular o aproximar la raíz cuadrada de un número real positivo, tiene la gran ventaja de que sin importar qué descomposición se de para el número real positivo la sucesión construida siempre va a converger a la raíz cuadrada del número en consideración; presentando como única dificultad hallar el primer término de la sucesión, pero a partir de este todos los demás términos de la sucesión son números naturales entre 0 y 9. Por otro lado, se da una demostración formal que nos proporciona un algoritmo que nos permite encontrar el mejor valor inicial c_0 para realizar la mejor descomposición del número real dado; cabe destacar, que en secundaria se enseña un método que nos permite encontrar c_0, pero dicho proceso es un método mecánico que los estudiantes aprenden y olvidan por no saber ni entender lo que hacen; es decir, es un método que carece de significado. Quiero resaltar, que tanto el algoritmo dado en el **Teorema** 1.4 como técnica usada para la demostración y presentación de los resultados dados son de mi autoría. En la revision bibliográfica realizada no se encuentra nada que trate de este algoritmo ni sobre la técnica utilizada, solo se consiguen métodos alternativos que funcionan en la práctica para casos particulares y números muy pequeños.

El uso de este algoritmo proporciona tanto a estudiantes como a maestros una forma alternativa de aprender y de enseñar la raíz cuadrada, además sirve de referencia a todos los que se interesen por los argumentos matemáticos para justificar la utilización de un método, técnica o algoritmo. La enseñanza de este algoritmo require que el estudiante tenga o adquiera conocimientos acerca de la representación en el sistema decimal de un número real, productos notables, completación de cuadrados, propiedades básicas de potenciación y por supuesto el manejo de las operaciones y propiedades básicas de la suma y multiplicación. Además, se introduce a la noción de un elemento máximo sobre el conjunto de los números naturales y se introduce de manera natural la noción de convergencia de una sucesión y series de números reales. Con lo cual no sólo se garantiza que el joven estudiante desarrolle las competencias en el cálculo o aproximación de la raíz cuadrada de un número real positivo sino que desarrollará la capacidad de realizar manipulaciones aritméticas y algebraicas. Por supuesto, que no se pretende que el estudiante desarrolle o entienda la demostración del método, sino el método en sí; es decir, que desarrolle la capacidad de resolver mediante manipulación cualquier problema planteado. El objetivo de este trabajo es proporcionar una herramienta tanto para los docentes de secundaria como para los estudiantes, que les permita ampliar la capacidad de análisis esencial para el desarrollo y fortalecimiento del pensamiento lógico-matemático, y para que entiendan que hay que preguntarse

¿por qué funciona?, ¿cuál es la razón?, ¿a qué se debe?, ¿qué es lo que subyace detrás de ese argumento o razonamiento?, y hacer entender que usar fórmulas o realizar procesos que no tienen significado no nos permiten evolucionar en nuestra forma de pensar y de ver las cosas.

Bibliografía

[1] Acosta, A., y Acosta, P. (2007). Un método para sacar raíces cuadradas exactas. *Revista UPCommons*, 1-10.

[2] Apostol, T.M. (1975). *Calculus, Vol. 1* Editorial Reverte: Barcelona, (2ª edición).

[3] Arenas, G. (2000). *Matemática 9º.* Zulia, Venezuela: Santillana.

[4] Baldor, A. (1981). *Aritmética*. México: Compañía Editora y Distribuidora de Textos Americanos.

[5] Hurtado, A., y Domínguez, F. (2014). *Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería.* Grupo Editorial Patria, México.(1ª edición).

[6] Lima, E.L. (1982). Curso de Análise. *Projeto Euclides, IMPA,(1)*.(6ª edición).

[7] Lozzada, J y Ruiz, C. (2011). *Estrategias Didácticas para la Enseñanza-Aprendizaje de la Multiplicación y División.* (Tesis de Grado) no publicado. Universidad de Los Andes, Trujillo.

[8] Núñez, E. y Servat, S. (1992). Los Algoritmos para el Cálculo de la Raíz Cuadrada y Sus Antecedentes en Textos Escolares Antiguos. *Revista Enseñanza de las Ciencias. 11(1)*, 69-77.

[9] Orantes, A. (1996). *Al rescate de los algoritmos para la enseñanza de las ciencias. Una herramienta para analizar y representar conocimientos condicionales.* (Tesis en línea). Universidad Central de Venezuela, Caracas. Recuperado de: http://www.crquan.com/aorantes/trabajos/algoritmos-96.pdf.

[10] Peña P., y Méndez L. (2015). Propuesta para el cálculo de la raíz cuadrada usando el método de cuadrar rectángulos.*Revista Premisa, 17* (65), 44-50.

[11] Porto, R., Silvera, A., Garcés, L., Porto, A., Suárez, D., y Arboleda, D. (2017). Marco de enseñanza basado en OVAs para el adiestramiento en la introducción de los algoritmos (OLIA). *Revista Científica Electrónica de Educación y Comunicación en la Sociedad del Conocimiento, (17)*, 60-75.

[12] Villadiego, A., López, J,. y Sierra, I., (2015). El aprendizaje de la programación y su influencia en el desarrollo del pensamiento creativo en estudiantes de educación media.*Revista Ingeniería e Innovación, 8*(1), 32-45.