Problemas de exámenes y soluciones
XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

2017

Christian Páez Páez
Marvin Abarca Fuentes
Leonel Chaves Salas
Alexander Hernández Quirós
Gabriela Calderón Torres
Federico Mora Mora
Jeremías Ramírez Jiménez
David Jiménez López
German Mora Sáenz
Emmanuel Chaves Villalobos
Salomón Hernández Chaves

Revista digital
Matemática, Educación e *Internet*
http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/

(https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).

Christian Páez Páez
Marvin Abarca Fuentes
Leonel Chaves Salas
Alexander Hernández Quirós
Gabriela Calderón Torres
Federico Mora Mora
Jeremías Ramírez Jiménez
David Jiménez López
German Mora Sáenz
Emmanuel Chaves Villalobos
Salomón Hernández Chaves
Miembros de OLCOMA, 2017

Problemas de exámenes y soluciones

XXIX Olimpiada Costarricense de Matemáticas

Edición del 2017

Correo Electrónico: wmora2@itcr.ac.cr
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Apdo. 159-7050, Cartago
Teléfono (506)25502225
Fax (506)25502493

Páez Páez, Christian; Abarca Fuentes, Marvin; Chaves Salas, Leonel; Hernández Quirós Alexander; Calderón Torres, Gabriela; Mora Mora, Federico; Ramírez Jiménez, Jeremías; Jiménez López, David; Mora Sáenz, German; Chaves Villalobos, Emmanuel; Hernández Chaves, Salomón.
Problemas de exámenes y soluciones de la XXIX Olimpiada Costarricense de Matemáticas.
118 pp
– OLCOMA, 2019.
ISBN Obra Independiente: 978-9930-541-42-5
1. Ejercicios. 2. Olimpiadas Matemática

Miembros de OLCOMA, 2017

Christian Páez
cpaez@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática

Marvin Abarca
mabarca@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática

Leonel Chaves
leonel.chaves.salas@una.cr
Universidad Nacional, Escuela de Matemática

Alexander Hernández
alexander.hernandez.quiros@una.cr
Universidad Nacional, Escuela de Matemática

Gabriela Calderón
maria.calderon.torres@una.cr
Universidad Nacional, Escuela de Matemática

Federico Mora
federico.mora.mora@una.cr
Universidad Nacional, Escuela de Matemática

Jeremías Ramírez
jeremias.ramirez.jimenez@una.cr
Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática

David Jiménez
david.jimenezlopez@ucr.ac.cr
Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática

German Mora
germorasaenz@gmail.com
Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática

Emmanuel Chaves
echavesv@uned.ac.cr
Universidad Estatal a Distancia, Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

Salomón Hernández
shernandezch@hotmail.com
Universidad Estatal a Distancia, Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

Citar como:
C. Páez et al. (2019) "Problemas de exámenes y soluciones, XXIX Olimpiada Costarricense de Matemáticas. Edición del 2017." Revista digital, Matemática, Educación e Internet.
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/
Recuperado, fecha

Contenido

Prólogo

OLCOMA es la Comisión de Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas. Esta comisión está conformada por académicos en el área de Matemática de la Universidad Nacional, del Instituto Tecnológico de Costa Rica, de la Universidad de Costa Rica, de la Universidad Estatal a Distancia, y por representantes del Ministerio de Educación Pública y del Ministerio de Ciencia, Tecnología y Telecomunicaciones.

Dentro de la estructura de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas, se tienen tres niveles de competencia. En Nivel I participan estudiantes de sétimo año, entre 10 y 13 años, aproximadamente (también pueden optar por participar en este nivel los estudiantes de primaria que cursan sexto grado). En Nivel II participan estudiantes de octavo y noveno años, entre 14 y 15 aõs, aproximadamente. En Nivel III participan estudiantes de décimo, undécimo y duodécimo años, más de 15 años.

Durante el año 2017, se trabajó con tres etapas. En la I Eliminatoria los estudiantes resolvieron un examen de selección única con 25 ítems. En la II Eliminatoria, los clasificados realizaron un examen con 12 preguntas de selección única y tres problemas de desarrollo. En la Etapa Final, los estudiantes clasificados realizaron dos pruebas en días consecutivos, cada prueba con tres problemas de desarrollo.

El objetivo de este libro es que los futuros participantes en Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas posean material de consulta.

Los problemas que en este libro se enuncian representan un reto para quienes gustan resolver ejercicios matemáticos. Cada uno de los problemas tiene la solución respectiva, así que una vez que intenten resolver cada problema, pueden comparar el procedimiento realizado con la solución propuesta.

Se han incorporado todos los problemas de I Eliminatoria para cada uno de los tres niveles, los problemas de II Eliminatoria para cada uno de los tres niveles, los problemas propuestos para conformar los exámenes de la Etapa Final y los problemas que conformaron los exámenes de la Etapa Final.

Cartago, febrero de 2019 CHRISTIAN PÁEZ PÁEZ

Agradecimientos

En relación con la edición XXIX de la Olimpiada Costarricense de Matemáticas, se agradece toda la ayuda en logística y apoyo que Evelyn Rodríguez Ledezma brindó.

Además, se agradece a todos los estudiantes del Instituto Tecnológico de Costa Rica, de la Universidad Nacional de Costa Rica y de la Universidad de Costa Rica que colaboraron en la aplicación de las pruebas de I y II Eliminatorias, a Eslyn Valverde Madriz, nombrada por la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica para colaborar con parte de la edición de este material, y a Kendall Rodríguez Bustos por la revisión completa y todas observaciones realizadas.

A los representantes del MEP (Ministerio de Educación Pública): Carlos Salazar Padilla, del MICITT (Ministerio de Ciencia, Tecnología y Telecomunicaciones.): Yarima Sandoval Sánchez, con labores administrativas por parte de la Universidad de Costa Rica: Pedro Méndez Hernández, Marco Alfaro Carranza y Mariam Phillips Tencio.

En especial a los representantes académicos de cada una de las instituciones públicas que conformana OLCOMA por su dedicación y esmero en la propuesta de preguntas y soluciones, apoyo en logística y preparación de estudiantes que nos representaron en los eventos internacionales.

Universidad Nacional de Costa Rica: Leonel Chaves Salas, Alexander Hernández Quirós, Gabriela Calderón Torres y Federico Mora Mora.

Instituto Tecnológico de Costa Rica: Christian Páez Páez y Marvin Abarca Fuentes.

Universidad de Costa Rica: Jeremías Ramírez Jiménez, David Jiménez López y German Mora Sáenz (Juleana Villegas Segura estuvo parte del año 2017).

Universidad Estatal a Distancia: Emmanuel Chaves Villalobos y Salomón Hernández Chaves.

Universidad Técnica Nacional: Durante algún período (muy corto) estuvo colaborando Ana Magali Salazar Ávila.

Capítulo 1

I Eliminatoria

1.1 Nivel I

1.1.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

Ejemplo 1.1

En una ciudad, don César es dueño de cinco residenciales; tiene a cada uno enumerado del uno al cinco. En cada residencial existen 35 apartamentos, enumerados con tres dígitos. El primer dígito indica el número de residencial, los siguientes dos dígitos indican el número de apartamento (del 101 al 135 en el primer residencial, del 201 al 235 en el segundo residencial, y así sucesivamente). Para enumerar todos los apartamentos de los cinco residenciales, la cantidad de veces que se utiliza el número 2 es

(a) 65

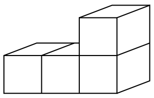
(b) 70

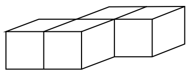
(c) 100

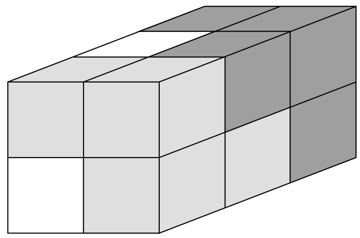
(d) 105

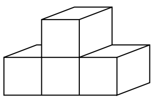
Solución:
En cada residencial existen apartamentos que pueden contener: 2, 12, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32; es decir, el número 2 es utilizado 14 veces por cada residencial.
Como son 5 residenciales, el número 2 es utilizado $14 \cdot 5 = 70$ veces.
Sin embargo, en el residencial 2, se utiliza 35 veces en la posición de las centenas.
Luego, $70 + 35 = 105$ es la respuesta.

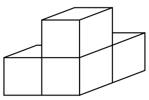
1.1.1 El paralelepípedo de la imagen adjunta está hecho de tres piezas. Cada pieza consiste de cuatro cubos del mismo color. La apariencia que tiene la pieza blanca es

(a) 

(b) 



(c) 

(d) 

1.1.2 En cierta ciudad, la calle Soledad es paralela a la calle Luciérnaga, la calle Estrella es perpendicular a la calle Pastora, la calle Pastora es paralela a la calle Luciérnaga y la calle Soledad es perpendicular a la calle Gaviota. Si la calle Estrella va de Norte a Sur, con certeza se cumple que

(a) La calle Gaviota es paralela a la calle Pastora.

(b) La calle Soledad es perpendicular a la calle Pastora.

(c) La calle Estrella es perpendicular a la calle Soledad.

(d) La calle Gaviota va de Este a Oeste.

1.1.3 Ana y Antonio se reparten un terreno que heredaron. Según las condiciones de la herencia, Ana recibe dos quintas partes del terreno y Antonio el resto. Sin embargo, Antonio decide ceder a Ana una cuarta parte de la porción del terreno que él recibiría. La parte del terreno que finalmente recibió Ana es

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{7}{10}$

(c) $\frac{9}{20}$

(d) $\frac{11}{20}$

1.1.4 Un número *palíndromo* es aquel que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. La menor cantidad de dígitos que deben eliminarse en el número $87\,979\,981$ para que sea *palíndromo* es

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) 5

Ejemplo 1.2

Se desean repartir 35 libros entre varias personas de manera que no tengan la misma cantidad. La máxima cantidad de personas a las que se les pueden repartir los libros es

(a) 6

(b) 7

(c) 8

(d) 9

Solución:

Si repartimos 1 al primero, 2 al segundo y así sucesivamente, podemos repartir $1+2+3+4+5+6+7=\dfrac{7\cdot 8}{2}=28$ libros y faltan 7 por repartir.
Una posibilidad es darle uno más a cada uno y así se repartirían a 7 personas.
Otra posibilidad es repartirlos de la forma 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 14.
Así, la máxima cantidad es 7.

1.1.5 En la Olimpiada Internacional de Matemática hay 100 estudiantes de varias nacionalidades. Se sabe que 90 de ellos hablan inglés, 76 hablan francés, 78 hablan español y 58 hablan alemán. El mínimo número de estudiantes que se puede asegurar que hablan los cuatro idiomas es

(a) 2

(b) 34

(c) 56

(d) 98

1.1.6 Andrea forma dos números con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Ambos números tienen tres dígitos y cada dígito puede ser utilizado una sola vez. Si Andrea suma los dos números, entonces el resultado más grande que Andrea puede obtener es

(a) 975

(b) 999

(c) 1083

(d) 1173

1.1.7 Un pulpero recibió un encargo de cajas de leche. Se le informó que no son más de 1000 cajas ni menos de 900, y que si se agrupan en grupos de cinco cajas sobran dos, al igual que si se agrupan en grupos de siete cajas; pero si se hace en grupos de dos cajas no sobran y en grupos de tres cajas sobra una. La cantidad de cajas que recibió el pulpero es

(a) 912

(b) 946

(c) 982

(d) 996

1.1.8 Un prisionero lleva muchos años encerrado, por lo cual el carcelero decide darle una oportunidad de escapar; coloca la llave de la celda en una de cuatro cajas idénticas y le dice al prisionero que si escoge la caja que contiene la llave, queda en libertad. El prisionero (que no sabe en cuál caja está la llave) selecciona una caja al azar. Antes de abrirla, el carcelero (que sí sabe dónde está dicha llave) le abre dos cajas que no tienen la llave y le dice: como puedes observar, ahora hay dos cajas y una de ellas tiene la llave, ¿deseas cambiar la caja que escogiste? Si el prisionero decide cambiar de caja, la probabilidad de escapar es

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{4}$

(d) $\frac{3}{4}$

1.1.9 Un cilindro se puede llenar con una manguera en dos horas y con otra manguera en seis horas. Además, se puede vaciar por medio de un desagüe en una hora y 45 minutos. El encargado del cilindro deseaba llenarlo lo más rápido posible, así que decidió utilizar ambas mangueras a la vez, pero olvidó cerrar el desagüe. El tiempo, en horas, que perdió el encargado por este error es

(a) 2

(b) 9

(c) 5,5

(d) 10,5

1.1.2 Teoría de Números

Ejemplo 1.3

Sean x y y números enteros, tales que al dividir x por y se obtiene el cociente q y el residuo r. El residuo que se obtiene al dividir $x + 2ry$ por y es

(a) 0

(b) r

(c) $2q$

(d) $2r$

Solución:

Como el residuo de dividir $2ry$ por y es cero, entonces el residuo de dividir $x + 2ry$ por y es igual al residuo de dividir x por y; es decir, el residuo es r.

1.1.10 Diego y Daniela corren alrededor de una pista con rapidez constante. Diego corre seis vueltas en 14 minutos, mientras que Daniela tres vueltas en ocho minutos. Después de iniciar al mismo tiempo una carrera, cuando ambos llegaron juntos a la meta por primera vez, Diego observó que había pasado una cantidad entera de minutos. El total de vueltas que dieron entre los dos es

(a) 24

(b) 45

(c) 56

(d) 64

Ejemplo 1.4

El primer dígito (de izquierda a derecha) de un número de cuatro dígitos es la cantidad de ceros que aparecen en él, el segundo dígito es la cantidad de unos, el tercer dígito es la cantidad de dos, y el último es la cantidad de tres. La máxima cantidad de números que cumplen con las condiciones es

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

Solución:
El primer dígito debe ser mayor que 0 y menor que 3.
Ahora si el primer dígito es 3 el resto son ceros y no es posible porque el último en la cantidad de 3 y debería ser 1.
Si el primer dígito es 2, entonces el tercer dígito debe ser mayor que 1 y la única posibilidad es 2020.
Si el primer dígito es 1, entonces el segundo dígito es mayor que 1 y la única posibilidad es 1210. Por lo tanto, solo hay 2 números que cumplen.

1.1.11 La cantidad de números de tres dígitos en los que el dígito de las centenas es el triple del dígito de las unidades y la suma de sus dígitos es 12 es

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

1.1.12 Hoy es domingo y Karla inicia la lectura de un libro de 290 páginas. Ella lee solo cuatro páginas cada día, excepto los domingos, ya que esos días lee exactamente 25 páginas. La cantidad mínima de días que le tomará a Karla leer el libro completamente es

(a) 36

(b) 40

(c) 41

(d) 46

Ejemplo 1.5

Considere el número $n = 4489\,6135a8$ donde a es un dígito. La cantidad máxima de opciones para las cuales n es múltiplo de 132 es

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

Solución:
Para que sea múltiplo de 132, como $132 = 3 \cdot 4 \cdot 11$, entonces el número debe ser divisible por 3, 4 y 11.
Para ser divisible por 3, como la suma de las cifras restantes es 48, entonces a debe ser múltiplo de 3. Para que sea divisible por 4 las últimas dos cifras deben ser múltiplos de 4, por lo que solo cumplen 0 y 6 por la condición anterior.
Por último, para que sea divisible por 11, la diferencia de las cifras impares y las pares deben ser múltiplo de 11 y solamente cumple el 6. Por lo tanto, la cantidad es 1.

Ejemplo 1.6

En una bolsa hay solo monedas de 25, 50 y 100 colones. Hay 170 monedas en total. Hay al menos una moneda de cada denominación y cantidades diferentes de todas. Además, si se colocan en orden las respectivas cantidades de monedas, la primera divide a la segunda y la segunda a la tercera. La máxima cantidad de dinero, en colones, que puede haber en la bolsa es

(a) $14\,250$

(b) $16\,375$

(c) $16\,875$

(d) $17\,000$

Solución:
Sean a,b,c las cantidades, donde $1 \leq a < b < c$.
La cantidad que maximiza el monto debe contener la mínima cantidad de monedas de 25.
En este caso, si hay una moneda de 25; es decir, $a = 1$, entonces hay 169 monedas de 50 o 100, luego, como $b \mid c$ y $b + c = 169$ entonces $b \mid 169 = 13^2$.
Como $b > 1$ y entonces debe ser $b = 13$, en cuyo caso $c = 13 \cdot 12 = 157$. Luego, la cantidad de dinero es $25 + 13 \cdot 50 + 157 \cdot 100 = 16\,375$.

1.1.13 Sean p y q dígitos. Los posibles valores de p para que el número $pp\,ppq\,qqq$ sea divisible por 45 son

(a) 5 y 0

(b) 3 y 7

(c) 4 y 9

(d) 5 y 9

1.1.3 Geometría

Ejemplo 1.7

Si en el cuadrilátero $ABCD$ se tiene que $AD = BC$, $m\angle DAC = 50°$, $m\angle DCA = 65°$ y $m\angle ACB = 70°$, entonces $m\angle ABC$ es

(a) $50°$

(b) $55°$

(c) $60°$

(d) $65°$

Solución:
Se tiene que la suma de las medidas de los ángulos internos del $\triangle ADC$ es $180°$.
Ahora $m\angle ADC = 180° - (50° + 65°) = 65°$.
El $\triangle ADC$ es isósceles y $AC = AD$.
Como $AD = BC$ y comparten el lado $\overline{AC}$, el $\triangle ABC$ es también isósceles.
Resulta que $AC = AD = BC$.
Luego, $m\angle ABC = \dfrac{180° - 70°}{2} = 55°$.

1.1.14 El perímetro de un $\triangle MNP$ es 12 cm. Si en el triángulo se tiene que $MP = \dfrac{5}{3}MN$ y $MP = \dfrac{5}{4}NP$, entonces la medida en centímetros de $\overline{MN}$ es

(a) 3

(b) 4

(c) 5

(d) 12

1.1.15 Considere un $\triangle ABC$ con F un punto en $\overline{AC}$, tal que $\overline{DF} \perp \overline{AC}$ y $A - D - E - B$ con $DE = CE$. Si $m\angle CAB = 30°$ y $m\angle CEA = 70°$, entonces $m\angle FDC$ es

(a) $25°$

(b) $55°$

(c) $65°$

(d) $125°$

1.1.16 Si el perímetro de un triángulo es 50 cm, entonces la medida en centímetros de uno de sus lados es

(a) 20

(b) 25

(c) 30

(d) 35

Ejemplo 1.8

Considere el triángulo equilátero $\triangle ABC$. Si M es el punto medio de $\overline{AC}$, Q un punto en $\overline{BM}$, P y R puntos en $\overline{BC}$, tales que $B-P-R-C$ y el $\triangle QPR$ es isósceles y recto en P, entonces $m\angle MQR$ es

(a) $75°$

(b) $90°$

(c) $105°$

(d) $120°$

Solución:
El $\triangle ABC$ es equilátero, por lo que $m\angle ABC = 60°$.
M es punto medio de $\overline{AC}$ por lo que $m\angle MBC = 30°$.
El $\triangle QPR$ es recto en P, por lo que $m\angle QPR = 90°$ y $m\angle QPB = 90°$.
Luego, por la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, $m\angle BQP = 60°$.
El $\triangle QPR$ es isósceles, por lo que $m\angle PQR = 45°$.
Finalmente, $m\angle MQR = 180° - m\angle PQR - m\angle BQP = 180° - 45° - 60° = 75°$.

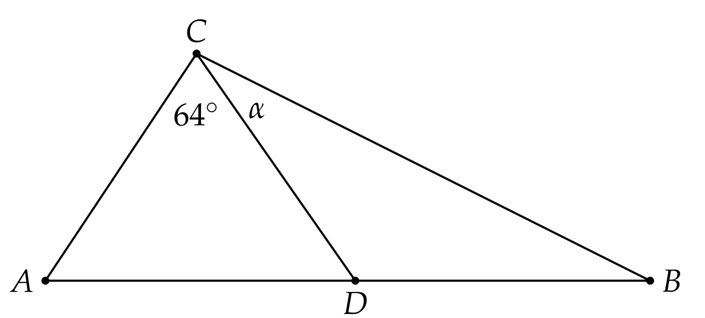
1.1.17 En la figura adjunta, se tiene que $AC = CD$, $CD = BD$ y $m\angle ACD = 64°$. La medida del $\angle BCD$ es

(a) $29°$

(b) $58°$

(c) $64°$

(d) $122°$



1.2 Nivel II

1.2.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

Ejemplo 1.9

Se realizó un experimento del cual se obtuvieron cuatro resultados posibles: A, B, C y D. Los cuatro resultados son mutuamente excluyentes. Se tiene que la probabilidad de que ocurra A es $P(A) = 0{,}3$; la probabilidad de que ocurra B es $P(B) = 0{,}3$ y la probabilidad de que ocurra D es $P(D) = 0{,}25$. La probabilidad de que ocurra C es

(a) $0{,}10$

(b) $0{,}15$

(c) $0{,}20$

(d) $0{,}25$

Solución:
Por definición, como los resultados son mutuamente excluyentes, se sabe que la suma de las probabilidades de los resultados posibles es 1.
De esta forma, $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$. Es decir, $1 - [P(A) + P(B) + P(D)] = P(C)$.
Por lo tanto, se obtiene $1 - (0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}25) = 0{,}15$.

1.2.1 En una fábrica, 15 máquinas empacan 15 bolsas de arroz en 15 segundos. La cantidad de bolsas de arroz que se empacan con 60 máquinas en 60 segundos es

(a) 4

(b) 15

(c) 60

(d) 240

1.2.2 En figura adjunta A, B, C y D representan, cada una, un dígito distinto. El valor de $A + B + C + D$ es

(a) 15

(b) 16

(c) 17

(d) 18

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D \\ +\quad A\,B\,C \\ \hline 2\,0\,1\,7 \end{array}$$

Ejemplo 1.10

Cuando a un barril le falta 30% para llenarse, contiene 30 litros más que cuando está lleno hasta 30%. La cantidad de litros que le caben al barril es

(a) 60

(b) 75

(c) 90

(d) 100

Solución:
Sea x la capacidad del barril. Cuando le falta el 30% para llenarse, la capacidad del barril es $70\%x$ y como contiene 30 litros más que cuando está lleno hasta el 30% se puede formar la ecuación:

$70\%x = 30\%x + 30$, que es equivalente a

$$\frac{70}{100}x = \frac{30}{100}x + 30$$

$$\Longrightarrow 70x = 30x + 3000$$

$$\Longrightarrow 40x = 3000$$

$$\Longrightarrow x = \frac{3000}{40}$$

$$\Longrightarrow x = 75$$

Por lo tanto, le caben 75 litros al barril.

1.2.3 Sean p, q, r, s y t cinco números reales, tales que la media aritmética (promedio) de p, q y r es ocho y la media aritmética de p, q, r, s y t es siete. Entonces la media aritmética de s y t es

(a) 5

(b) 6

(c) 4,5

(d) 5,5

1.2.4 Juan estaba caminando con rapidez constante por una avenida en Heredia cuando vio un camión que estaba transportando una pieza grande de madera (también se desplazaba con una rapidez constante).
Juan quería medir el largo de la pieza de madera, entonces decidió caminar a lo largo de la pieza de madera en dirección contraria al camión y contó 10 pasos, mientras que cuando caminó a lo largo de la pieza de madera en dirección del camión contó 70 pasos. Si se sabe que cada paso de Juan mide un metro, entonces la longitud en metros de la pieza de madera es

(a) 30

(b) 35

(c) $17{,}5$

(d) $30{,}5$

1.2.5 En un Centro de Entrenamiento Deportivo hay dos equipos de atletismo, uno practica carreras y el otro saltos. De un total de 105 deportistas que entrenan en el Centro, 83 pertenecen al equipo de carreras, 39 al de saltos y 27 a ambos. Si se elige al azar uno de los deportistas que pertenecen a algún quipo de atletismo para que represente al Centro de Entrenamiento en una competencia, entonces la probabilidad de que sea integrante del equipo de carreras pero no del de salto es

(a) $\frac{44}{95}$

(b) $\frac{56}{95}$

(c) $\frac{44}{105}$

(d) $\frac{56}{105}$

Ejemplo 1.11

Seis pueblos A, B, C, D, E y F se encuentran a lo largo de una carretera. Las distancias en kilómetros entre ellos se muestra en el cuadro adjunto. Un orden correcto en el que se encuentran los pueblos a lo largo de la carretera es

(a) $BADEFC$

(b) $CEFDAB$

(c) $CEFADB$

(d) $FCEDAB$

	A	B	C	D	E	F
A	0	2	20	3	15	8
B	2	0	22	5	17	10
C	20	22	0	17	5	12
D	3	5	17	0	12	5
E	15	17	5	12	0	7
F	8	10	12	5	7	0

Solución:
Del cuadro podemos observar que la distancia más grande está entre C y B por lo que todos los demás puntos deben estar entre ellos.
A continuación se procede a ordenar los demás pueblos desde el más lejano a C hasta el más cercano.
Con esto obtenemos que el orden es $CEFDAB$ o $BADFEC$, donde la primera es la que aparece entre las opciones.

1.2.6 Se van a repartir 100 cartas en grupos de 7, 5 y 3 cartas, respectivamente. Si se sabe que hay al menos un grupo de 7 cartas, uno de 5 cartas y uno de 3 cartas, entonces la mínima cantidad de grupos que hay para que las 100 cartas sean repartidas es

(a) 15

(b) 16

(c) 17

(d) 18

1.2.7 La negación del enunciado: *"Cada estudiante compró más de 10 manzanas"* es

(a) Ningún estudiante compró más de 10 manzanas.

(b) Algún estudiante compró más de 10 manzanas.

(c) Algún estudiante compró menos de 11 manzanas.

(d) Cada estudiante compró menos de 11 manzanas.

1.2.2 Teoría de Números

Ejemplo 1.12

Sean a, b, c y d dígitos. Denotamos $abcd$ al número cuyos dígitos son a, b, c y d, respectivamente. La cantidad de números de cuatro dígitos, tales que $abcd = bac + cbd$ es

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

Solución:

$$\begin{aligned} abcd = bac + cbd \quad &\Rightarrow \quad 1000a + 100b + 10c + d = 100b + 10a + c + 100c + 10b + d \\ &\Rightarrow \quad 990a = 91c + 10b \end{aligned}$$

Sin embargo, como $1 \leq a \leq 9$, pues de lo contrario el número no sería de cuatro dígitos, entonces $990 \leq 990a \leq 8910$ mientras que $0 \leq 91c + 10b \leq 909$, pues el valor mayor se alcanza cuando $c = 9$ y $b = 9$. De modo que es imposible que se cumpla la igualdad.

1.2.8 En cuatro tarjetas están escritos los números 2, 5, 7 y 12 (un número en cada tarjeta). En la parte posterior de cada tarjeta están escritas, respectivamente, las siguientes frases: *Divisible por 7*, *Primo*, *Impar* y *Mayor que 100*. Se sabe que cada número escrito en cada tarjeta **NO CORRESPONDE** con la palabra en la parte posterior de la misma. El número que está escrito en la tarjeta con la frase *Mayor que 100* es

(a) 2

(b) 5

(c) 7

(d) 12

Ejemplo 1.13

El número entero $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ **no** es múltiplo de cinco si n es

(a) 2016

(b) 2017

(c) 2018

(d) 2019

Solución:
Para que sea múltiplo de 5, el último dígito debe ser 0 o 5. Consideremos los últimos dígitos de las potencias según el siguiente cuadro.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
1^n	1	1	1	1	1	1	1	1
2^n	2	4	8	6	2	4	8	6
3^n	3	9	7	1	3	9	7	1
4^n	4	6	4	6	4	6	4	6
$+$	0	0	0	4	0	0	0	4

Para que la suma no sea múltiplo de 5, n debe ser múltiplo de 4 y de las opciones cumple 2016.

1.2.9 Un número entero positivo múltiplo de cinco es tal que si se divide entre tres el residuo es uno y si se divide entre siete el residuo es dos. La suma de las cifras del menor número que cumple con las condiciones es

(a) 1

(b) 4

(c) 7

(d) 8

Ejemplo 1.14

La cantidad de números naturales n menores que 1000 que cumplen $n = 17s + (d-3)^2 + 2$, donde s es la suma de las cifras de n, y d es la cifra de las decenas es

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

Solución:
Sea $n = 100a + 10b + c$, por lo que $100a + 10b + c = 17(a+b+c) + (b-3)^2 + 2$, de donde se tiene: $83a = b(b+1) + 16c + 11$. Note que el lado derecho de la expresión es impar (ya que $b(b+1)$ es par), por lo tanto a tiene que ser impar.
Por otro lado, $a < 3$ ya que el lado derecho no supera $9 \times 10 + 16 \times 9 + 11 = 245$ y $83 \times 3 = 249$, con lo cual $a = 1$, lo que significa que $83 = b(b+1) + 16c + 11$, simplificando tenemos $9 = \dfrac{b(b+1)}{8} + 2c$.
Con ello si $b = 7$, entonces $c = 0$, y si $b = 8$, entonces $c = 1$.
Los números son 180 y 171.

1.2.3 Geometría

1.2.10 La diferencia de las dimensiones b y h de un rectángulo (con $b > h$) es igual a la medida del lado de un triángulo equilátero. Si el triángulo y el rectángulo tienen el mismo perímetro, entonces el valor numérico de $\dfrac{b}{h}$ es

(a) $\dfrac{1}{5}$

(b) $\dfrac{1}{2}$

(c) 2

(d) 5

Ejemplo 1.15

Sea el $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, con $m\angle ABC = 90°$. Sean E y F puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, y sea G un punto tal que $B - G - C$. Si el área del $\triangle ABC$ es 24 cm^2, entonces el área en cm^2 del $\triangle EFG$ es

(a) 3

(b) 6

(c) 9

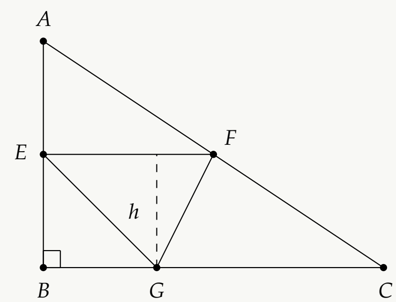
(d) 12

Solución:

Considere al figura adjunta.

$\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ por ser una paralela media, entonces $h = \dfrac{AB}{2}$ y además $EF = \dfrac{BC}{2}$, así tenemos que:

$$(EFG) = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{(ABC)}{4} = \frac{24}{4} = 6$$



1.2.11 En un paralelogramo $\square ABCD$ se tiene que $m\angle ABC = 120°$ y $2AB = BC$. Si M es el punto medio de $\overline{BC}$ y $MA = 7\sqrt{3}$, entonces la medida del lado mayor del paralelogramo es

(a) 7

(b) 14

(c) $\sqrt{3}$

(d) $7\sqrt{3}$

Ejemplo 1.16

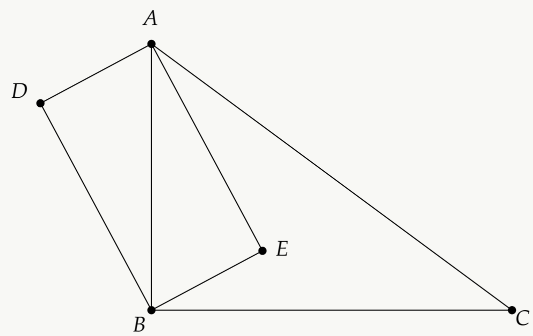
En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $m\angle ABC = 90°$; además, $\overline{AB}$ es diagonal del rectángulo $\square ADBE$. Si $BC = 5\sqrt{2}$, $BE = 3$ y $AC = 5\sqrt{3}$, entonces el área del $\square ADBE$ es

(a) 5

(b) 6

(c) 12

(d) 14



Solución:
Utilizando el teorema de Pitágoras en el $\triangle ABC$, se tiene:

$$\begin{aligned} & AB^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 = \left(5\sqrt{3}\right)^2 \\ \Rightarrow\ & AB^2 = 25 \cdot 3 - 25 \cdot 2 = 25 \\ \Rightarrow\ & AB = 5 \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras en el $\triangle ABE$, se tiene:

$$\begin{aligned} & AE^2 + 3^2 = 5^2 \\ \Rightarrow\ & AE^2 = 25 - 9 = 16 \\ \Rightarrow\ & AE = 4 \end{aligned}$$

Luego, $(ADBE) = 3 \cdot 4 = 12$.

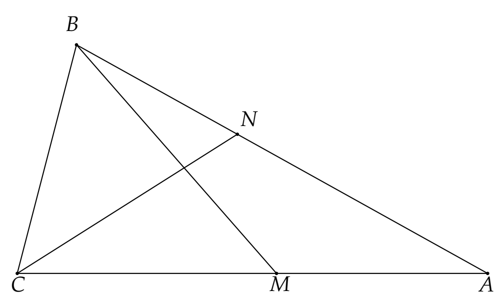
1.2.12 En la figura adjunta se tiene que $m\angle BCN = 6x$, $m\angle CBM = 5x$, $m\angle CMB = 5x$, $m\angle BNC = 4x$ y $m\angle BAC = 2x$. La medida del $\angle ABM$ es

(a) 20°

(b) 30°

(c) 40°

(d) 60°



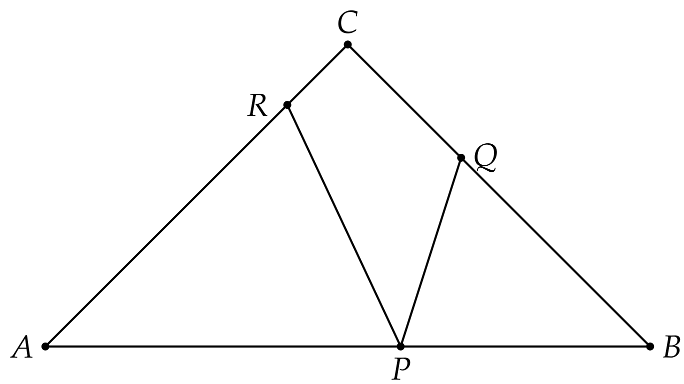
1.2.13 En la figura adjunta, se tiene que $\overline{AC} \perp \overline{BC}$, $BQ = BP$ y $AR = AP$. La medida del $\angle RPQ$ es

(a) $30°$

(b) $45°$

(c) $90°$

(d) $135°$



1.2.4 Álgebra

Ejemplo 1.17

Suponga que los números reales x y y satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3^x - 3^y &= 16 \\ 9^x - 9^y &= 320 \end{cases}$$

El valor de $x - y$ es

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

Solución:
Sea $a = 3^x$ y $b = 3^y$ entonces la primera ecuación corresponde a $a - b = 16$ mientras que la segunda ecuación equivale a $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 320$; es decir, $16(a+b) = 320$ o $a + b = 20$. Entonces, el sistema original es equivalente a $\begin{cases} a - b &= 16 \\ a + b &= 20 \end{cases}$, cuya solución es $a = 18$ y $b = 2$.
Es decir, $3^x = 18 = 2 \cdot 9 = 3^y \cdot 9 = 3^{y+2}$; por lo tanto, $x = y + 2$ y, finalmente, $x - y = 2$.
Otra alternativa es que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3^x}{3^y} = \dfrac{18}{2}$; es decir, $3^{x-y} = 9 = 3^2$. Por lo tanto $x - y = 2$.

1.2.14 En la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}=(a-1)\sqrt{x}$$

si $a>1$, entonces su solución es

(a) a^2-1

(b) $1-a^2$

(c) $\dfrac{3}{a^2-1}$

(d) $\dfrac{3}{1-a^2}$

1.2.15 Un turista hace un viaje durante varios días. El primer día recorre una quinta parte del total de la distancia por recorrer durante todo viaje. El segundo día recorre 21 kilómetros y luego de hacerlo se encuentra a la mitad del recorrido total. La cantidad de kilómetros recorridos por el turista durante los dos primeros días es

(a) 14

(b) 21

(c) 35

(d) 70

1.2.16 Si a y b son números reales, tales que $a+b=2$, entonces la solución de la ecuación $ax-x-a+1=b+2-bx$ es

(a) 1

(b) 3

(c) a

(d) $a+b$

1.3 Nivel III

1.3.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

Ejemplo 1.18

Considere todas las posibles figuras distintas que pueden formarse con tres triángulos rectángulos isósceles congruentes, de manera que cada uno de ellos siempre comparta un lado con alguno de los otros. Si la medida de un cateto es 1 cm, la diferencia en centímetros entre el mayor perímetro y el menor perímetro es

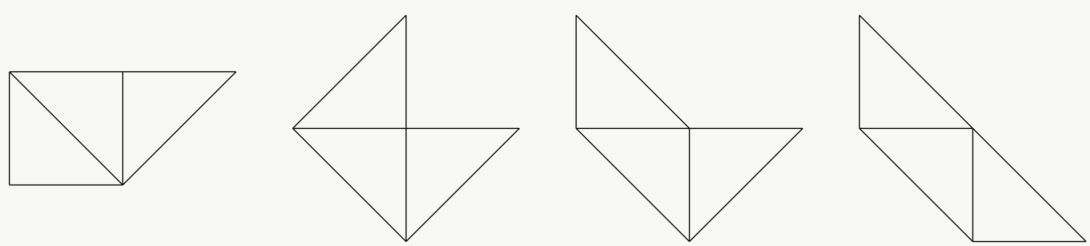
(a) $3\sqrt{2}$

(b) $\sqrt{2}-1$

(c) $2\sqrt{2}-2$

(d) $3\sqrt{2}-2$

Solución:
Las posibles figuras, sin contar simetrías ni rotación, son las siguientes.



Se observa que el mayor perímetro es $2+3\sqrt{2}$ y el menor es $4+\sqrt{2}$, por lo que la diferencia es $2\sqrt{2}-2$

1.3.1 En un juego se colocan fichas en una cuadrícula $n \times n$ y al seleccionar, sin quitar, una ficha cualquiera se eliminan todas las que están alineadas con ella, tanto horizontal, vertical y diagonalmente. Si el tablero es de 1000×1000, la cantidad máxima de fichas que pueden eliminarse al seleccionar una casilla es

(a) 3993

(b) 3994

(c) 3995

(d) 3996

1.3.2 Un juego de mesa consiste en seleccionar 22 cartas en las que se han escrito enteros positivos desde el 1 al 22 y tomar parejas para formar fracciones. La mayor cantidad de estas fracciones que pueden ser enteras es

(a) 7

(b) 9

(c) 10

(d) 11

Ejemplo 1.19

Sofía apostó contra Ana que al tirar tres monedas si salían más escudos que coronas ella ganaba y si salían más coronas que escudos ganaba Ana. Si la probabilidad de salir escudo en una moneda es $\frac{1}{2}$, en otra es $\frac{2}{3}$ y en la otra es $\frac{1}{4}$, entonces la probabilidad que tiene Ana de ganar es

(a) $\frac{9}{24}$

(b) $\frac{11}{24}$

(c) $\frac{13}{24}$

(d) $\frac{15}{24}$

Solución:

Primero ordenamos la probabilidad que tiene cada moneda de salir escudo o corona:

Moneda	1	2	3
Escudo	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$
Corona	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$

Veamos las posibles combinaciones de resultados, hay 8 posibles combinaciones, de las cuales las primeras 4 son los casos en que Ana gana, cuando salen más coronas que escudos:

1	C	C	C	E	C	E	E	E
2	C	C	E	C	E	C	E	E
3	C	E	C	C	E	E	C	E

De acuerdo a la primera tabla, las probabilidades de cada uno de estos casos es:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{13}{24}$$

Ejemplo 1.20

En una institución de educación secundaria de Costa Rica, se decidió nombrar a 31 de sus estudiantes para que integren las tres delegaciones que participarán en Olimpiadas Nacionales de Matemática, Química y Biología, respectivamente. Las delegaciones se conformaron de tal manera que hay dos estudiantes en Biología y Matemática a la vez, hay tres estudiantes en Química y Matemática a la vez, hay cuatro estudiantes en Biología y Química a la vez, y solo un estudiante participa en las tres delegaciones a la vez. Si se sabe que los estudiantes que son integrantes de una única delegación se distribuyen equitativamente entre las tres delegaciones, entonces el número de miembros de la delegación de Matemática es

(a) 8

(b) 12

(c) 13

(d) 14

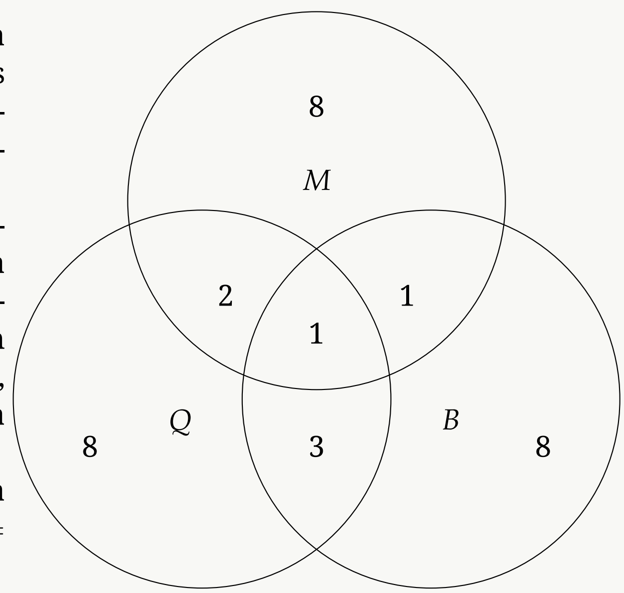
Solución:

Hay 2 estudiantes en Biología y Matemática a la vez y un estudiante participa en las tres delegaciones a la vez, por lo que $2-1=1$ estudiante participa exclusivamente en Biología y Matemática. Hay 3 estudiantes en Química y Matemática a la vez y un estudiante participa en las tres delegaciones a la vez, por lo que $3-1=2$ estudiantes participan exclusivamente en Química y Matemática.

Hay 4 estudiantes en Biología y Química a la vez y un estudiante participa en las tres delegaciones a la vez, por lo que $4-1=3$ estudiantes participan exclusivamente en Biología y Química.

Así, quedan $31-1-1-2-3=24$ estudiantes que integran una sola delegación a la vez. Como los estudiantes que son integrantes de una única delegación, se distribuyen equitativamente entre las tres delegaciones, hay $24 \div 3 = 8$ integrantes exclusivos en cada delegación.

Finalmente, el número de miembros de la delegación de Matemática es $8+1+1+2=12$.



1.3.3 En una fiesta se sabe que todas las personas se saludaron entre sí y que hubo 190 saludos. La cantidad de personas que asistieron a la fiesta es

(a) 17

(b) 18

(c) 19

(d) 20

1.3.2 Teoría de Números

Ejemplo 1.21

La cantidad de divisores que tiene el número 2017^{2017} que son cubos perfectos es

(a) 672

(b) 673

(c) 2016

(d) 2017

Solución:
Primero observemos que 2017 es primo, entonces para que un número sea cubo perfecto y divisor de $N = 2017^{2017}$ debe ser de la forma 2017^a, con $a = 3k$ y $0 \leq a \leq 2017$; es decir, $0 \leq 3k \leq 2017$.
Como 2017 no es múltiplo de 3, se tiene $0 \leq 3k \leq 2016$ de donde $0 \leq k \leq 672$.
Como se incluye el cero, n puede tomar 673 valores.

1.3.4 Existen números de tres dígitos que tienen la siguiente propiedad: si se remueve el primer dígito, se obtiene un cuadrado perfecto y si se remueve el último dígito, también se obtiene un cuadrado perfecto. La suma de todos los números con esta curiosa propiedad es

(a) 1013

(b) 1177

(c) 1465

(d) 1993

1.3.5 La cantidad de números de tres dígitos distintos, tales que el producto de sus dígitos sea un cuadrado perfecto es

(a) 36

(b) 102

(c) 174

(d) 180

Ejemplo 1.22

Cinco enteros se escriben en círculo de forma que no haya dos o tres números consecutivos cuya suma sea múltiplo de tres. La cantidad de esos cinco números que son divisibles por tres es

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

Solución:

Si hubiera tres múltiplos de 3, en cualquier caso quedarían dos consecutivos.
Si hubiera solo un múltiplo de 3 va a estar a la par de uno de la forma $3a+1$ o $3b+2$ y no pueden quedar dos distintos seguidos, pues su suma $(3a+1)+(3a+2)=6a+3=3(2a+1)$ es múltiplo de 3. Entonces tendrían que quedar tres seguidos del mismo tipo y su suma es múltiplo de 3. $(3a+1)+(3a+1)+(3a+1)$ o $(3a+2)+(3a+2)+(3a+2)$

Si no hay múltiplos de 3 los números son de la forma $3a+1$ o $3b+2$ y es análogo al caso anterior. Por lo tanto, el único caso posible es cuando hay solo dos múltiplos de 3 (ver figura adjunta).

Ejemplo 1.23

Considere los números de la forma

$$1 \cdot a_1 + 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \cdots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot a_n$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son enteros, tales que $0 \leq a_k \leq k$. Al expresar 2017 de esa forma, la suma de los coeficientes $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ es

(a) 9

(b) 10

(c) 11

(d) 12

Solución:
Nótese que $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot = 5040 > 2017$, así que

$$2017 = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a_5 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot a_6$$

Es decir $2017 = a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 24a_4 + 120a_5 + 720a_6$.

Es claro que $a_1 = 1$ y $a_6 = 2$, entonces se tiene que

$576 = 2a_2 + 6a_3 + 24a_4 + 120a_5$, y ahora se tiene que $a_5 = 4$, entonces

$96 = 2a_2 + 6a_3 + 24a_4$ y entonces $a_2 = a_3 = 0$ y $a_4 = 4$.

$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1 + 0 + 0 + 4 + 4 + 2 = 11.$

1.3.6 La cantidad de pares de enteros positivos (a, b) que cumplen que $a + 3b < 100$ y que $a + b$ divide a $a^2 + ab + 2b$ es

(a) 50

(b) 49

(c) 25

(d) 24

1.3.3 Geometría y Trigonometría

Ejemplo 1.24

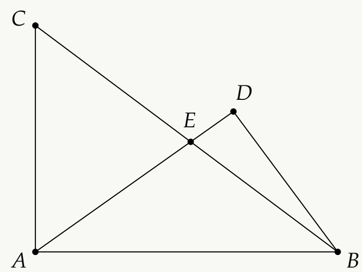
En la figura adjunta se tiene que el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $m\angle BAC = 90°$, el $\triangle ADB$ es también un triángulo rectángulo con $m\angle ADB = 90°$, E es el punto de intersección de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. Si $AC = 15\,$cm, $AD = 16$ cm. y $BD = 12$ cm, entonces el área del $\triangle ABE$, en centímetros cuadrados, es

(a) 50

(b) 75

(c) 100

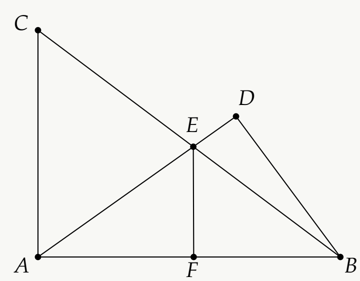
(d) 150



Solución:

De acuerdo con la información dada, considere la figura adjunta. Por el Teorema Pitágoras, se tiene que: $AB = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20\,cm$.

Observe que $\triangle ABC \sim \triangle DAB$ por el criterio de semejanza lado-ángulo-lado, pues $\dfrac{AB}{DA} = \dfrac{AC}{DB}$. Entonces, $m\angle BAE = m\angle ABE$ y por lo tanto $\triangle ABE$ es isósceles.



Se traza la altura del $\triangle ABE$ que interseca al segmento $\overline{AB}$ en el punto F, $AF = FB = 10\,cm$.

Por otro lado, $\triangle BFE \sim \triangle BAC$ por el criterio de semejanza ángulo-ángulo. Entonces, $\dfrac{FE}{AC} = \dfrac{BF}{BA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow FE = \dfrac{15}{2}$ cm. Por lo tanto, $(AEB) = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot FE = \dfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot \dfrac{15}{2} = 75\,cm^2$.

1.3.7 Sea el $\triangle ABC$ en el que la mediana desde A es perpendicular a la mediana desde B. Si $BC = 7$ y $AC = 6$, entonces AB es

(a) 4

(b) $2\sqrt{5}$

(c) $\sqrt{17}$

(d) $\dfrac{9}{2}$

Ejemplo 1.25

En un $\triangle ABC$ se tiene que $AB = 3$, $AC = 2\sqrt{2}$ y $m\angle BAC = 45°$. Si $m\angle ABC = \beta$, entonces $\cos\beta$ es

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

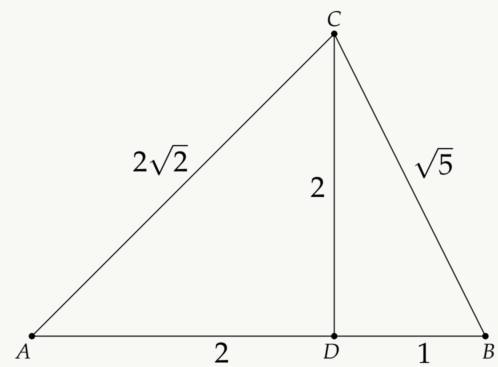
(c) $2\sqrt{2}$

(d) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Solución:

Sea D el pie de la perpendicular desde C sobre $\overline{AB}$. Se tiene entonces que $\triangle ADC$ es rectángulo isósceles, por lo que $AD = DC = 2$.

Luego $DB = AB - AD = 1$ y como $\triangle BDC$ es rectángulo, por Pitágoras se tiene que $BC = \sqrt{5}$. Entonces $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.



1.3.8 Sea $\square ABCD$ un cuadrado, E y F los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Si G es la intersección de $\overline{DF}$ con $\overline{CE}$, entonces $\dfrac{EG}{GC}$ es

(a) 2

(b) $\dfrac{5}{2}$

(c) $\dfrac{1}{3}$

(d) $\dfrac{3}{2}$

Ejemplo 1.26

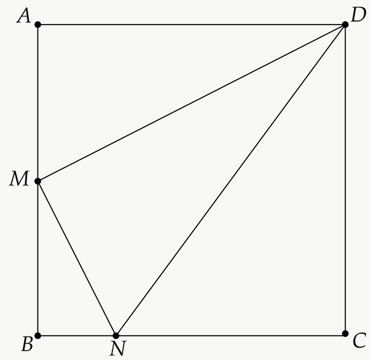
En la figura adjunta, el $\square ABCD$ es cuadrado de 4 cm^2 de área, M es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{MN} \perp \overline{MD}$, con $B - N - C$. El área en cm^2 del $\triangle DMN$ es

(a) $\dfrac{5}{2}$

(b) $\dfrac{5}{4}$

(c) $\dfrac{4}{3}$

(d) $\dfrac{4}{5}$



Solución:

Como $\square ABCD$ es un cuadrado de 4 cm^2 de área, cada uno de sus lados mide 2 cm. Si $x = BN$, se tiene que $NC = 2 - x$.
En el $\triangle AMD$ y utilizando el teorema de Pitágoras, $MD = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.
En el $\triangle BMN$ y utilizando el teorema de Pitágoras, $MN = \sqrt{x^2 + 1}$.
En el $\triangle CND$ y utilizando el teorema de Pitágoras, $ND = \sqrt{4 + (2-x)^2}$.
Así, el teorema de Pitágoras aplicado en el $\triangle MND$ indica que

$$\begin{aligned} & 5 + x^2 + 1 = 4 + (2-x)^2 \\ \Rightarrow \quad & 6 + x^2 - 4 = 4 - 4x + x^2 \\ \Rightarrow \quad & 2 - 4 = -4x \Rightarrow \frac{1}{2} = x \\ \Rightarrow \quad & MN = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

Luego, el área del $\triangle DMN$ es $\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{5}{4}$.

1.3.9 En el $\triangle ABC$, $m\angle BAC = 60°$, $m\angle ABC = 45°$ y $AC = 30$. Si h es la longitud de la altura desde A y $h^2 = m + n\sqrt{3}$, con m y n números naturales, entonces el valor de m es

(a) 225

(b) 450

(c) 675

(d) 900

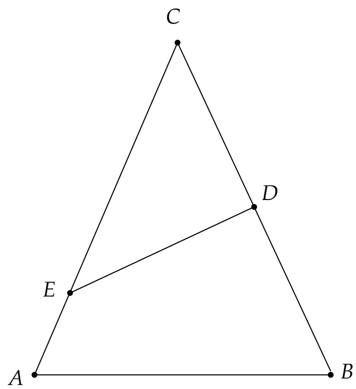
1.3.10 En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles con $CB = CA = 8$ cm, $A - E - C$, $C - D - B$, $\overline{DE}$ es la mediatriz del $\triangle ABC$ correspondiente con $\overline{BC}$. Si se tiene que $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{1}{3}$, entonces el área en cm^2 del $\triangle ABC$ es

(a) $8\sqrt{5}$

(b) $12\sqrt{5}$

(c) $\dfrac{16\sqrt{5}}{3}$

(d) $\dfrac{32\sqrt{5}}{3}$



1.3.4 Álgebra

Ejemplo 1.27

El valor de la expresión $\dfrac{2017^3 - 1}{1 + 2017^2 + 2018^2}$ es

(a) 1007

(b) 1008

(c) 2016

(d) 2017

Solución:
Observe que

$$\frac{x^3 - 1}{1 + x^2 + (x+1)^2} = \frac{(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)}{2\left(x^2 + x + 1\right)} = \frac{x-1}{2}$$

Luego, con $x = 2017$ se obtiene que

$$\frac{2017^3 - 1}{1 + 2017^2 + 2018^2} = \frac{2017 - 1}{2} = 1008$$

1.3.11 Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - 3y = a \\ mx + y = b \end{cases}$ en el que $a, b, m \in \mathbb{R}$. Con certeza, siempre se cumple que el sistema

(a) no tiene solución si $m < 0$

(b) tiene solución única si $m > 1$

(c) tiene infinitas soluciones si $a = b = 0$

(d) tiene solución para cualesquiera valores a y b

Ejemplo 1.28

Sean a y b números reales positivos, tales que $a^2 - b^2 = 2$. Una solución de la ecuación

$$\sqrt{\frac{4a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4} = \left(\frac{a-b}{b}\right)x + \frac{b}{a}$$

es

(a) $a - b$

(b) $a + b$

(c) $a(a - b)$

(d) $a(a + b)$

Solución:

Observe que $\frac{4a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 = \left(\frac{2a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2$

Además, como a y b son positivos entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4} &= \sqrt{\left(\frac{2a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2} \\ &= \frac{2a}{b} + \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Luego,

$$\sqrt{\frac{4a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4} = \left(\frac{a-b}{b}\right)x + \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{2a}{b} + \frac{b}{a} = \left(\frac{a-b}{b}\right)x + \frac{b}{a}$$

Despejando se obtiene que $x = \frac{2a}{a-b} = \frac{2a(a+b)}{a^2 - b^2} = a(a+b)$

1.3.12 Si a y b son las soluciones reales de la ecuación $x^2 - 7x + 3 = 0$, entonces $2ab - a - b$ es una solución de

(a) $x^4 + 2x^2 + x + 2$

(b) $x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x$

(c) $x^4 - 2x^2 - 3x - 2$

(d) $x^4 - 2x^2 - 3$

1.3.13 En la figura adjunta se muestra un diagrama que se desea completar insertando tres números, uno en cada espacio vacío. Se desea que la suma de los primeros tres números sea 100, que la suma de los tres del medio sea 200 y que la suma de los tres últimos sea 300. El número que debe insertarse en el centro del diagrama es

(a) 50

(b) 60

(c) 70

(d) 80

10				130

1.3.14 Al factorizar la expresión $6x^4y^4 + \sqrt{3}x^2y^2zw - 3z^2w^2$, uno de los factores es

(a) $2x^2y^2 + 3zw$

(b) $3x^2y^2 + \sqrt{3}zw$

(c) $2x^2y^2 - \sqrt{3}zw$

(d) $2x^2y^2 + \sqrt{3}zw$

Capítulo 2

II Eliminatoria

2.1 Nivel I

2.1.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

Ejemplo 2.1

Carlos tiene cuadrados verdes de tamaño 1×1, cuadrados amarillos de tamaño 2×2 y cuadrados rojos de tamaño 3×3. Él quiere crear un cuadrado usando estos cuadrados, en el cual aparezcan los tres colores. La mínima cantidad de cuadrados que debe utilizar es

(a) 5

(b) 6

(c) 7

(d) 8

Solución:
Si usa al menos un cuadrado rojo y uno amarillo se debe completar un cuadrado 5×5. Usando dos cuadrados amarillos más, y cuatro verdes se completa el cuadrado con 8 cuadrados. Falta ver que no es posible hacerlo con menos. Observe que la máxima área que se puede cubrir con 7 cuadrados es $5 \cdot 9 + 4 + 1 = 50$. Sean x, y, z las cantidades de cuadrados de cada tipo, entonces debe cumplirse que

$$\begin{aligned} 9x + 4y + z &= n^2 \\ x + y + z &\leq 7 \end{aligned}$$

donde $n = 5, 6, 7$. Las únicas soluciones son $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ y $(x, y, z) = (2, 1, 3)$, y verificando directamente se comprueba que ninguna de estas configuraciones es posible.

2.1.1 Una *suma circular* de dos números se define como sumar ambos números y restarle o sumarle seis las veces necesarias para que el resultado esté entre 1 y 6, inclusive. Por ejemplo, la *suma circular* de 8 y 9 es $17-6-6=5$, y la *suma circular* de 4 y -7 es $-3+6=3$.

Carlos y Karla juegan a lo siguiente: Karla elige un número y luego Carlos lanza un dado, si el resultado del dado es mayor o igual que la suma circular de este y el número de Karla, entonces Carlos gana (en caso contrario gana Karla).

Si Karla puede elegir solo algún valor del conjunto $\{-2,-1,2,3\}$, entonces el número que debe elegir Karla para tener más posibilidad de ganar es

(a) -2

(b) -1

(c) 2

(d) 3

2.1.2 Pablo lanza una moneda legal al aire tres veces y anota, para cada lanzamiento, si cae escudo o corona. La probabilidad de que Pablo obtenga exactamente una corona o exactamente un escudo es

(a) $\frac{1}{4}$

(b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{3}{8}$

(d) $\frac{3}{4}$

2.1.3 Sofía tiene cierta cantidad de caramelos; se come 30% de ellos y le quedan 280 caramelos. Carol tiene la misma cantidad de caramelos que Sofía, pero se come 26% de ellos. La cantidad de caramelos que Carol se come es

(a) 30

(b) 84

(c) 104

(d) 296

Ⓝ Problema de desarrollo
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

2.1.4 En cierto país se cumple lo siguiente:

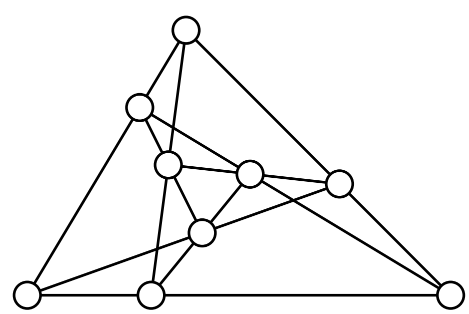
- Cada par de ciudades del país están enlazadas por exactamente un medio de transporte.
- Los únicos medios de transporte en el país son bus, tren y avión.
- Los tres medios de transporte son usados en el país.
- Ninguna ciudad del país tiene los tres servicios de transporte.
- No hay tres ciudades que estén enlazadas (dos a dos) por el mismo medio.

Determine el máximo número de ciudades de dicho país.

Ⓝ Problema de desarrollo
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

2.1.5 Un juego consiste en colocar fichas de dos colores diferentes en los círculos de la figura adjunta.

Dos jugadores tienen, cada uno, cuatro fichas del mismo color (el jugador A tiene cuatro fichas rojas y el jugador B tiene cuatro fichas azules).
Los jugadores colocan sus fichas alternadamente y gana el primero que logre colocar tres de sus fichas formando una línea recta.
Determine si alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora y, en caso de existir, explique cuál es esa estrategia.



N Problema de desarrollo
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

2.1.6 En un tablero de 8×4 casillas se han colocado nueve fichas de la siguiente manera: tres fichas en la primera fila de color verde cada una, tres fichas en la segunda fila de color amarillo cada una, y tres fichas en la tercera fila de color rojo cada una, tal y como se muestra en la figura adjunta.

Cada ficha se puede mover únicamente si salta sobre otra ficha y si la casilla en la que cae está desocupada; puede saltar horizontalmente, verticalmente o en diagonal. Por ejemplo, es válido mover la ficha de la casilla $2B$ (amarilla) a cualquiera de las casillas $2D$, $4D$ o $4B$, o bien mover la ficha de la casilla $3B$ (roja) a cualquiera de las casillas $1D$ o $3D$.

1) Determine la cantidad mínima de movimientos para mover todas la fichas verdes a la fila tres, todas las amarillas a la fila cuatro y todas la rojas la fila cinco pero que queden en las columnas A, B y C como están originalmente.

2) ¿Cuántos movimientos se necesitan para mover todas la fichas a las últimas tres filas, sin importar el color, ni la columna?

	A	B	C	D
1	v	v	v	
2	a	a	a	
3	r	r	r	
4				
5				
6				
7				
8				

2.1.2 Teoría de Números

Ejemplo 2.2

Considere el número $n = 7a93141b$ de ocho dígitos que es divisible por 792. El valor del dígito a es

(a) 2

(b) 5

(c) 6

(d) 11

Solución:
Como a y b son dígitos, sus valores están entre 0 y 9.
Se tiene que $7a93141b$ es divisible por 792, observe que $792 = 8 \cdot 9 \cdot 11$, entonces $7a93141b$ es divisible por 8, 9 y 11.
Veamos primero que $7a93141b$ es divisible por 8, esto nos dice que las últimas tres cifras de dicho número es divible por 8. En este caso, se tiene que $41b$ es divisible por 8. Observe que entre 410 y 419 solamente existe un número que es divisible por 8, el número es 416. Por lo tanto el valor de $b = 6$.
Luego, $7a93141b$ es divisible por 9, esto nos dice que la suma de sus cifras es divisible por 9. Entonces, $7 + a + 9 + 3 + 1 + 4 + 1 + b = 25 + a + b$ es divisible por 9. Observe que $a + b$ puede ser 2 o 11, pues $0 \leq a + b \leq 18$.
Como $b = 6$, cuando $a + b = 2 \Rightarrow a = -4$, se descarta, pues a está entre 0 y 9. Cuando $a + b = 11 \Rightarrow a = 5$.
Por lo tanto, el valor de a es 5.

2.1.7 Al simplificar al máximo la expresión:

$$\sqrt[2017]{\frac{\left(k^{2017}\right)^{2017}}{k^{2017}}} - k$$

donde k es un número entero positivo, se obtiene

(a) 0

(b) 1

(c) $k\left(k^{2015} - 1\right)$

(d) $k\left(k^{2016} - 1\right)$

2.1.8 Una pulga quiere subir una escalera. Ella puede hacer solo dos tipos de brincos: tres escalones hacia arriba o cuatro escalones hacia abajo. Empezando a nivel del piso, la cantidad mínima de brincos que tendrá que dar la pulga para descansar en el escalón 22 es

(a) 9

(b) 10

(c) 12

(d) 15

2.1.3 Geometría

Ejemplo 2.3

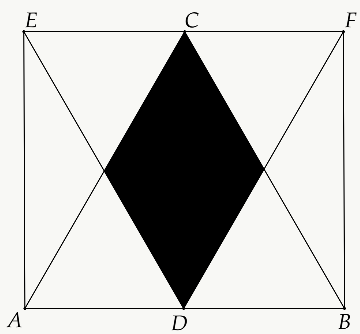
En la figura adjunta los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son equiláteros, $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$, C es el punto medio de $\overline{EF}$ y D es el punto medio de $\overline{AB}$. La razón entre el área de la región sombreada y el área del $\square AEFB$ es

(a) $\dfrac{1}{5}$

(b) $\dfrac{1}{4}$

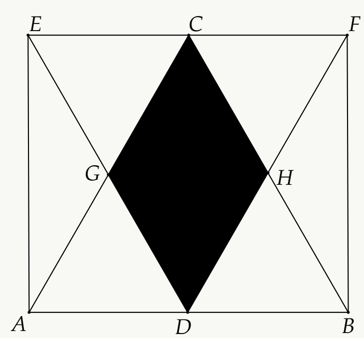
(c) $\dfrac{1}{3}$

(d) $\dfrac{2}{5}$



Solución:

Sean G y H los puntos de intersección de $\overline{AC}$ con $\overline{ED}$ y $\overline{DF}$ con $\overline{BC}$ respectivamente.



Observe que al trazar $\overline{GH}$, el $\triangle ABC$ queda dividido en 4 triángulos de igual área, al igual que $\triangle DEF$. Es decir que las áreas de $\triangle EGC$ y $\triangle CFH$, juntas,son iguales que el área sombreada; al igual que las de los $\triangle ADG$ y $\triangle BDH$.

Por otra parte, $\square CDBF$ y $\square EADC$ son rectángulos cuyas diagonales se intersecan en en el punto medio. Con esto se tiene que $\triangle CDH$ y $\triangle BFH$ tienen igual área (pues tienen bases y alturas de igual medida) al igual que $\triangle AEG$ y $\triangle CDG$. Es decir que las áreas de $\triangle AEG$ y $\triangle BFH$, juntas, son iguales que el área sombreada. $\therefore \dfrac{\text{área sombreada}}{(AEFB)} = \dfrac{1}{4}$

2.1.9 María dibujó un triángulo, tal que los lados miden números pares consecutivos y se sabe que el menor de ellos mide cuatro centímetros. Juan desea averiguar el área del triángulo equilátero que tiene el mismo perímetro que el triángulo que dibujó María. El área, en centímetros cuadrados, de este triángulo equilátero es

(a) 24

(b) 32

(c) $6\sqrt{3}$

(d) $9\sqrt{3}$

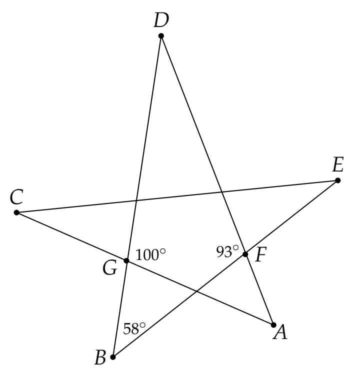
2.1.10 La figura adjunta muestra una estrella en forma de pentágono. La medida del $\angle CAD$ es

(a) 35°

(b) 42°

(c) 51°

(d) 65°



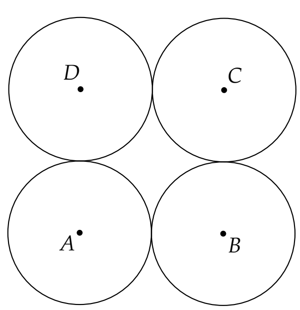
2.1.11 En la figura adjunta se muestran cuatro círculos tangentes de igual radio y de centros A, B, C y D, respectivamente (el único punto que comparten las circunferencias de centros D y C, por ejemplo, es el punto medio de $\overline{DC}$). Si la medida del radio de cada círculo es 6 cm, entonces el área en cm^2 del $\square ABCD$ es

(a) 24

(b) 36

(c) 48

(d) 144



Ejemplo 2.4

Considere un cuadrado $\square ABCD$ y un triángulo equilátero $\triangle BEC$. Este triángulo se divide en cuatro triángulos equiláteros y uno de estos se divide de nuevo en cuatro triángulos equiláteros más. Si el área de uno de los triángulos equiláteros resultantes de la última división es $x^2\sqrt{3}$, entonces el perímetro del polígono de vértices A, B, E, C y D es

(a) $8x$

(b) $20x$

(c) $24x$

(d) $40x$

Solución:

Si y denota la medida del lado de uno de los triángulos equiláteros resultantes de la última división, cuya área mide $x^2\sqrt{3}$, entonces $x^2\sqrt{3} = \dfrac{y^2\sqrt{3}}{4}$ y $y = 2x$.

Luego, la medida del lado de cada uno de los triángulos equiláteros resultantes de la última división es $2x$.

La medida del lado de cada uno de los triángulos equiláteros resultantes de la primera división es $4x$.

La medida del lado del triángulo equilátero $\triangle BEC$ es $8x$ y la medida del lado del cuadrado $\square ABCD$ es $8x$.

Finalmente, el perímetro del polígono de vértices A, B, E, C y D es $5 \cdot 8x = 40x$.

2.2 Nivel II

2.2.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

Ejemplo 2.5

Una *suma circular* de dos números se define como sumar ambos números y restarle o sumarle seis las veces necesarias para que el resultado esté entre 1 y 6, inclusive.
Por ejemplo, la *suma circular* de 8 y 9 es $17-6-6=5$, y la *suma circular* de 4 y -7 es $-3+6=3$.
Carlos y Karla juegan a lo siguiente: Karla elige un número y luego Carlos lanza un dado, si el resultado del dado es mayor o igual que la suma circular de este y el número de Karla, entonces Carlos gana (en caso contrario gana Karla).
Si Karla puede elegir solo algún valor del conjunto $\{-2,-1,2,3\}$, entonces el número que debe elegir Karla para tener más posibilidad de ganar es

(a) -2

(b) -1

(c) 2

(d) 3

Solución:
Si Karla elige el 2, entonces solo puede perder si el resultado del dado es 5 o 6, con lo que la suma circular sería 1 y 2 respectivamente (ya que $5>1$ y $6>2$); si el resultado del dado es otro, Karla gana.

En los otros casos se puede ver como Carlos gana en más de dos casos.

Para -2, Carlos gana con 3, 4, 5 o 6 como resultado del dado; para -1, Carlos gana con 2, 3, 4, 5 o 6 como resultado del dado; y para 3, Carlos gana con 4, 5 o 6 como resultado en el dado.

2.2.1 Sofía tiene cierta cantidad de caramelos; se come 30% de ellos y le quedan 280 caramelos. Carol tiene la misma cantidad inicial de caramelos que Sofía, pero se come 26% de ellos. La cantidad de caramelos que Carol se come es

(a) 30

(b) 84

(c) 104

(d) 296

N Problema de desarrollo
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

2.2.2 Un colegio organiza un campeonato de fútbol sala. Participan seis equipos; en cada ronda juegan todos los equipos, de modo que se juegan tres partidos por jornada. Al final del campeonato, todos han jugado exactamente una vez contra los demás equipos. El equipo ganador de un partido gana tres puntos, el que pierde no obtiene puntos, y si hay empate cada equipo gana un punto.

1) Si al final de la segunda jornada se sabe que solo un partido terminó en empate, determine si es posible que todos los equipos tengan puntuaciones diferentes.

2) Al final del campeonato se sabe que hubo exactamente 11 partidos que terminaron en empate. Si todos los equipos tienen diferentes puntuaciones, determine el menor puntaje posible para el equipo que queda en primer lugar del campeonato.

2.2.2 Teoría de Números

Ejemplo 2.6

La cantidad de números enteros positivos k, múltiplos de siete, que cumplen que el producto de sus dígitos es igual a $\dfrac{19k-2808}{8}$ es

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

Solución:
Como el producto $\dfrac{19k-2808}{8} = \dfrac{19k}{8} - 351$ es un número entero, entonces $8|k$ y por lo tanto $k = 8n$, para algún $n \in \mathbb{Z}$, lo que significa que k es par y el producto de sus dígitos $19n - 351$ también es par. De lo anterior se tiene que n tiene que ser impar y $n \geq 19$.
Por otra parte, el producto de los dígitos de k es menor que k (en efecto, sea k tal que $k = a_n 10^{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0 \geq a_n 10^{n-1} > a_n 9^{n-1} \geq a_n \cdot a_{n-1} \cdots a_0$). Así, $19n - 351 < 8n$ lo que significa que $n < 31$, pero k es múltiplo de 7 y, por lo tanto, $n = 21$; al comprobar se tiene que $k = 168$ cumple lo establecido.

Ejemplo 2.7

En el número 213 se tiene que 3 divide a 21. La cantidad de números de tres dígitos que cumplen que el dígito de las unidades divide al número formado por los dígitos de las centenas y decenas es

(a) 112

(b) 153

(c) 254

(d) 360

Solución:
Se hace el conteo para cada una de las opciones del tercer dígito.

Caso 1: Si este es 0, no hay ninguno, ya que 0 no es divisor de ningún número.

Caso 2: Si es 1, hay $\lfloor \frac{99}{1} \rfloor - \lfloor \frac{9}{1} \rfloor = 90$ múltiplos de dos dígitos de 1.

Caso 3: Si es 2, hay $\lfloor \frac{99}{2} \rfloor - \lfloor \frac{9}{2} \rfloor = 45$ múltiplos de dos dígitos de 2.

Caso 4: Si es 3, hay $\lfloor \frac{99}{3} \rfloor - \lfloor \frac{9}{3} \rfloor = 30$ múltiplos de dos dígitos de 3.

Caso 5: Si es 4, hay $\lfloor \frac{99}{4} \rfloor - \lfloor \frac{9}{4} \rfloor = 22$ múltiplos de dos dígitos de 4.

Caso 6: Si es 5, hay $\lfloor \frac{99}{5} \rfloor - \lfloor \frac{9}{5} \rfloor = 18$ múltiplos de dos dígitos de 5.

C. 7: Si es 6, hay $\lfloor \frac{99}{6} \rfloor - \lfloor \frac{9}{6} \rfloor = 15$ múltiplos de dos dígitos de 6.

C. 8: Si es 7, hay $\lfloor \frac{99}{7} \rfloor - \lfloor \frac{9}{7} \rfloor = 13$ múltiplos de dos dígitos de 7.

C. 9: Si es 8, hay $\lfloor \frac{99}{8} \rfloor - \lfloor \frac{9}{8} \rfloor = 11$ múltiplos de dos dígitos de 8.

C. 10: Si es 9, hay $\lfloor \frac{99}{9} \rfloor - \lfloor \frac{9}{9} \rfloor = 10$ múltiplos de dos dígitos de 9.

Sumando todas las opciones tenemos que en total son 254.

2.2.3 En la ecuación $O \cdot L \cdot (C+O+M+A) = 77$ cada letra corresponde a un dígito diferente $(0,1,2,\ldots,9)$. En este caso, las dos letras O toman valores distintos. La cantidad de maneras diferentes en que se pueden escoger los valores de las letras es

(a) 96

(b) 60

(c) 48

(d) 24

Ejemplo 2.8

Considere los números $p = n\left(n^2-1\right)$ con n entero y $1 \leq n \leq 2017$. La cantidad de números p que terminan en 0 es

(a) 1209

(b) 1210

(c) 1211

(d) 1212

Solución:

Note que $p = n(n-1)(n+1)$ es el producto de tres números consecutivos.
El último dígito de un producto solo depende de los últimos dígitos de los factores.
Como hay una secuencia de $\{0,6,4,0,0\}$, donde se presentan tres ceros, el múltiplo de 5 menor a 2017 (más cercano) es 2015, y $2015 = 403 \cdot 5$, significa que de $n = 1$ a $n = 2015$ hay $403 \cdot 3 = 1209$ números p que terminan en cero.
Además, al analizar los valores $n = 2016$ y $n = 2017$, se tiene que para $n = 2016$ el número $p = 2015 \cdot 2016 \cdot 2017$ termina en 0 y para $n = 2017$ el número p termina en 6.
Por lo que a 1209 hay que sumarle un número p adicional (el asociado con $n = 2016$).
Así, hay 1210 números p en total que terminan en 0.

$n-1$	n	$n+1$	Termina
0	**1**	2	**0**
1	**2**	3	**6**
2	**3**	4	**4**
3	**4**	5	**0**
4	**5**	6	**0**
5	**6**	7	0
6	**7**	8	6
7	**8**	9	4
8	**9**	10	0
9	**10**	11	0

N Problema de desarrollo
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

Ejemplo 2.9

Considere el número de 28 dígitos de la forma

$$1\,223\,334\,444\,555\,556\,666\,667\,777\,777$$

Determine la menor cantidad de dígitos que deben cambiarse para que el número resultante sea divisible por 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Solución:

Para que el número sea divisible por 5 debe terminar en 0 o 5, pero para que también sea divisible por 2 debe terminar en par, por lo tanto, debe cambiarse el último 7 por un 0.
Por otro lado, para que sea divisible por 4, el número formado por los dos últimos dígitos debe ser divisible por 4. Vemos que 70 no es divisible por 4, por lo que debe cambiarse el siguiente 7 por un número par (0, 2, 4, 6, 8).
Además, para que sea divisible por 3, la suma de los dígitos debe ser múltiplo de 3, y esto será suficiente para que también sea divisible por 6 (pues entonces será divisible por 2 y 3). La suma de los dígitos del número original es $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 140$, pero al cambiar el último 7 por un 0, la suma será 133. Como además se debe cambiar otro 7 por 8, 6, 4, 2 o 0, debemos asegurarnos de que la suma de los dígitos se múltiplo de 3. Lo anterior se puede lograr únicamente al cambiar el penúltimo siete por un seis o por un cero, pues esto resta 1 a la suma de los dígitos (en el caso del seis) y la suma será 132; en el otro caso la suma será 126 (cuando es cero el usado).
Por lo tanto, basta cambiar dos dígitos (los últimos)

$$1\,223\,334\,444\,555\,556\,666\,667\,777\,760$$

$$1\,223\,334\,444\,555\,556\,666\,667\,777\,700$$

2.2.3 Geometría

Ejemplo 2.10

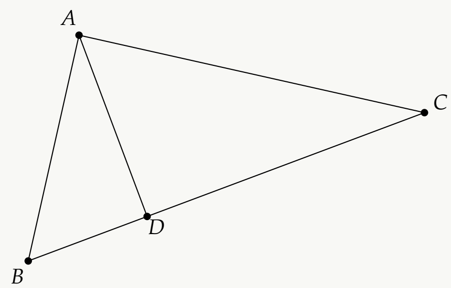
En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $m\angle BAC = 90°$ y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. Si $BC = 5$ y $AC = 4$, entonces el área del $\triangle ADC$ es

(a) 4

(b) 5

(c) $\dfrac{54}{25}$

(d) $\dfrac{96}{25}$



Solución:
Con base en el teorema de Pitágoras aplicado en el $\triangle ABC$, se tiene que

$$\begin{aligned} & AB^2 + AC^2 = BC^2 \\ \Rightarrow \quad & AB^2 = 25 - 16 = 9 \\ \Rightarrow \quad & AB = 3 \end{aligned}$$

En los triángulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DAC$ los ángulos agudos $\angle ABC$ y $\angle DAC$ son congruentes, ya que $\angle BAC \cong \angle ADC$ (ángulos rectos) y $\angle ACB \cong \angle DCA$ (mismo ángulo), por lo que $\triangle ABC \sim \triangle DAC$; así, $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow DA = \dfrac{3}{4}DC$.
Aplicando el teorema de Pitágoras en el $\triangle ADC$ se tiene que

$$\begin{aligned} & DA^2 + DC^2 = AC^2 \\ \Rightarrow \quad & \left(\frac{3}{4}DC\right)^2 + DC^2 = 4^2 \\ \Rightarrow \quad & \frac{9}{16}DC^2 + DC^2 = 16 \\ \Rightarrow \quad & \frac{25}{16}DC^2 = 16 \\ \Rightarrow \quad & DC^2 = 16 \cdot \frac{16}{25} \\ \Rightarrow \quad & DC = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

Por lo que $DA = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{16}{5} = \dfrac{12}{5}$ y $(ADC) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{16}{5} \cdot \dfrac{12}{5} = \dfrac{96}{25}$.

2.2.4 Sea el $\square ABCD$ un cuadrado en el que $AB = 3$. Sea E un punto tal que $B-C-E$ y sea F el punto de intersección de $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$. Si $BE = 4$, entonces el área del $\square ABCF$ es

(a) $4\frac{1}{4}$

(b) $5\frac{3}{8}$

(c) $5\frac{1}{2}$

(d) $5\frac{5}{8}$

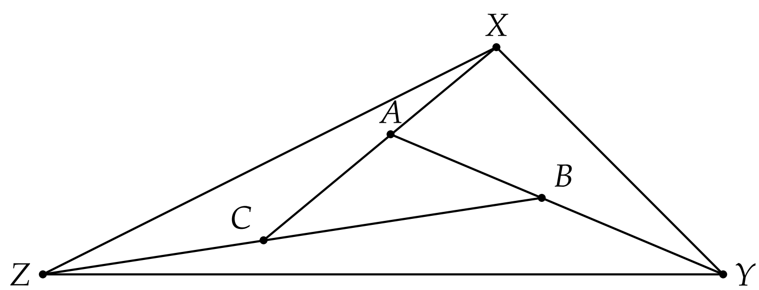
2.2.5 Los tres lados del $\triangle ABC$ se prolongan una distancia igual a sus respectivas longitudes, tal y como se observa en la figura adjunta. Si el área del $\square XCBY$ es 18 cm^2, entonces el área en cm^2 del $\triangle XYZ$ es

(a) 28

(b) 30

(c) 36

(d) 42



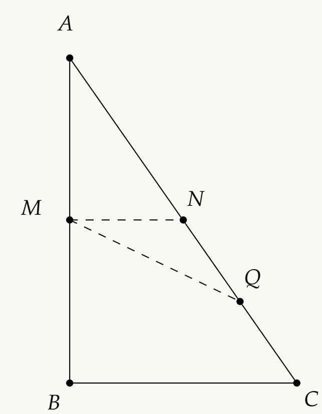
N Problema de desarrollo
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

Ejemplo 2.11

Sea el $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, tal que $m\angle ABC = 90°$ y $AB = 12$ cm. Sea Q un punto tal que $A - Q - C$ y $AQ = 3CQ$. Si M el punto medio de $\overline{AB}$ y el área del $\square BMQC = 30$ cm^2, determine CQ.

Solución:

Sea N el punto medio de $\overline{AC}$, así tenemos:



$$AQ + CQ = AC \Rightarrow 3CQ + CQ = AC \Rightarrow CQ = \frac{1}{4}AC = \frac{1}{2}CN$$

$\overline{BC} \parallel \overline{MN}$ y $BC = 2MN$.

Si h es la medida de la altura del $\triangle MNQ$ desde el punto Q, entonces $h = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{4}AB = 3$ cm.

Así, se tiene:

$$\begin{aligned}
(BMNC) = (MNQ) + (BMQC) \quad &\Rightarrow \quad (BMNC) = \frac{1}{2}(MN + BC) \cdot BM = \frac{1}{2}MN \cdot h + 30 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(MN + 2MN) \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}MN \cdot 3 + 30 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}3MN \cdot \frac{1}{2}12 = \frac{1}{2}MN \cdot 3 + 30 \\
&\Rightarrow \quad 9MN = \frac{3}{2}MN + 30 \Rightarrow 9MN - \frac{3}{2}MN = 30 \\
&\Rightarrow \quad \frac{15}{2}MN = 30 \Rightarrow MN = 4
\end{aligned}$$

Así, se tiene que $BC = 8$ cm. y por Pitágoras se cumple que $12^2 + 8^2 = AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{208}$ cm. $= 2\sqrt{52}$ cm.

Por lo tanto, $CQ = \dfrac{\sqrt{52}}{2}$ cm.

2.2.4 Álgebra

Ejemplo 2.12

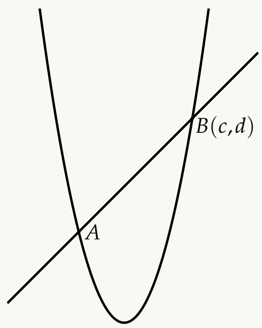
En la figura adjunta están representadas las ecuaciones $y = x - 1$ y $y = x^2 + ax + b$. Los puntos A y B son los puntos de intersección entre la recta y la parábola. Si las coordenadas del punto A son $(1,0)$ y el punto $(0,5)$ pertenece a la parábola, entonces las coordenadas del punto B son

(a) $(4,3)$

(b) $(5,4)$

(c) $(6,5)$

(d) $(7,6)$



Solución:

Como $(0,5)$ pertenece a la parábola, satisface la ecuación $y = x^2 + ax + b$; así, $b = 5$.
Como $A\,(1,0)$ pertenece a la parábola, satisface la ecuación $y = x^2 + ax + 5$; así, $a = -6$.
Con lo anterior, la ecuación de la parábola es $y = x^2 - 6x + 5$.
El punto $B\,(c,d)$ satisface tanto la ecuación de la recta como la ecuación de la parábola, por lo que $d = c - 1$ y $d = c^2 - 6c + 5$. Luego,

$$
\begin{aligned}
& c^2 - 6c + 5 = c - 1 \\
\Rightarrow\ & c^2 - 7c + 6 = 0 \\
\Rightarrow\ & (c-1)(c-6) = 0 \\
\Rightarrow\ & c = 1 \ \vee \ c = 6
\end{aligned}
$$

Uno de los puntos es $A\,(1,0)$ y el otro punto es $B\,(6,5)$.

2.2.6 Considere la ecuación cuadrática $x^2 + \dfrac{p}{3}x + q - 5 = 0$ en la que p y q son constantes reales. Si $p + q$ es un número primo y la ecuación posee una única solución real, entonces $p + q$ es

(a) 2

(b) 3

(c) 5

(d) 7

Ejemplo 2.13

Sean a, b y c números reales, con $a \neq c$. Sean

$$P(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$$

$$Q(x) = 3x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 2$$

Las condiciones que deben cumplir los números a, b y c para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes son

(a) $a = 3$ y $b = c$

(b) $b = -5$ y $a = -c$

(c) $c = -3$ y $a = b$

(d) $b = 5$ y $c = 2a$

Solución:

Para que $P(x) = Q(x) = 0$ se tiene que $P(x) - Q(x) = (a-c)x^3 + (c-a)x = (a-c)x(x-1)(x+1) = 0$.

Esto nos dice que las posibles raíces comunes deben ser 0, 1 o -1 y no puede haber una raíz doble común. Ahora $x = 0$ no es raíz de ninguno de los polinomios.

Por otra parte $P(1) = Q(1) = 0$ implica que $a + b + c + 5 = 0$ y $P(-1) = Q(-1) = 0$ implica que $-a + b - c + 5 = 0$, de donde $b = -5$ y $a = -c$.

2.3 Nivel III

2.3.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

Ejemplo 2.14

En una casa donde cuidan gatos hay camas para gatos y el cuidador observó que:

- En cada cama que hay en la casa han dormido seis gatos.
- Cada gato usó exactamente tres camas distintas.
- Por cada posible trío de camas hubo exactamente uno y solo un gato que usó las tres camas.

Se puede afirmar que el total de gatos en la casa es

(a) 10

(b) 15

(c) 18

(d) 21

Solución:
Si k denota la cantidad de camas, entonces como cada gato usó 3 camas distintas y por cada posible trío de camas hubo exactamente uno y solo un gato que usó las tres camas, por lo que la cantidad de gatos que hay en la casa es $\dfrac{k(k-1)(k-2)}{6}$.
Como en cada cama que hay en la casa han dormido 6 gatos si relacionaramos las camas con los gatos, cada gato estaría relacionado con tres camas y cada cama con seis gatos, entonces $6k = 3 \cdot \dfrac{k(k-1)(k-2)}{6}$.
Resolviendo la ecuación anterior se tiene que $k = 0$, $k = -2$ y $k = 5$.
Como k es un número entero positivo por ser una cantidad, entonces $k = 5$; así, la cantidad de gatos es $\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$.

2.3.1 En cada casilla de una cuadrícula de 2×2 se desea escribir los números 1, -1 o 0 de manera que ninguna fila o columna sume cero. La cantidad máxima de maneras en que es posible escribir estos números es

(a) 9

(b) 12

(c) 18

(d) 36

N Problema de desarrollo
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

2.3.2 En un torneo de fútbol durante la copa Europa–América, hubo nueve equipos más de Europa que de América. Cada pareja de equipos jugó exactamente una vez y, en total, los equipos europeos ganaron nueve veces tantos partidos como los ganados por los equipos americanos. Si no hubiera empates y el número de partidos ganados por los equipos americanos a los equipos europeos es seis, determine la cantidad de equipos americanos que participaron en dicha copa intercontinental.

2.3.2 Teoría de Números

Ejemplo 2.15

Considere los números $p = n\left(n^2 - 1\right)$ con n entero y $1 \leq n \leq 2017$. La cantidad de números p que terminan en 0 es

(a) 1209

(b) 1210

(c) 1211

(d) 1212

Solución:

Como $p = n(n-1)(n+1)$, p es el producto de tres números consecutivos y el último dígito de un producto solo depende de los últimos dígitos de los factores, basta examinar los productos.

Como hay una secuencia de $\{6,4,0,0,0\}$ y $2015 = 403 \cdot 5$, significa que de $n = 2$ a $n = 2017$ hay $403 \cdot 3 = 1209$ números p que terminan en cero.

Además, como el primer p es cero, hay 1210 en total.

$n-1$	n	$n+1$	Termina
1	2	3	6
2	3	4	4
3	4	5	0
4	5	6	0
5	6	7	0
6	7	8	6
7	8	9	4
8	9	10	0
9	10	11	0
10	11	12	0

Ejemplo 2.16

Si se tiene que n es un entero positivo y que la fracción $\dfrac{n^2+6n}{n+1}$ es un entero, entonces el valor de esta fracción es

(a) 0

(b) 5

(c) 8

(d) 15

Solución:

Como la fracción es entera entonces $\dfrac{\left(n^2+6n\right) - n(n+1) - 5(n+1)}{n+1} = \dfrac{-5}{n+1}$ es un entero.

Por lo tanto, $n+1 = 5$ y el valor de la fracción es $\dfrac{4^2 + 6 \cdot 4}{5} = 8$.

2.3.3 Geometría y Trigonometría

Ejemplo 2.17

Sea el $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, tal que $m\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$ y $CB = 4$. Sea O un punto tal que $A - O - B$. Si una circunferencia de centro O es tangente a $\overline{AC}$ en Q y a $\overline{BC}$ en P, entonces OP es

(a) $\dfrac{12}{7}$

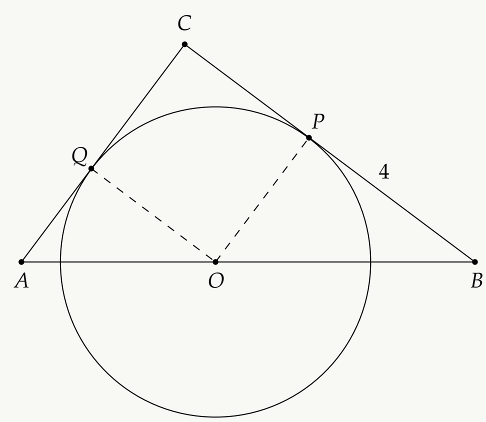
(b) $\dfrac{7}{12}$

(c) $\dfrac{9}{7}$

(d) 6

Solución:

Considere la figura adjunta:



Se tiene que $\overline{OQ} \perp \overline{AC}$ y $\overline{OP} \perp \overline{CB}$

Sean $OP = OQ = r$, por ser radios.

$$(ABC) = (AOC) + (BOC)$$

$$\Rightarrow \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AC \cdot OQ}{2} + \frac{BC \cdot OP}{2}$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{7r}{2} \Rightarrow \frac{12}{7} = r$$

$\therefore OP = \dfrac{12}{7}$

Ejemplo 2.18

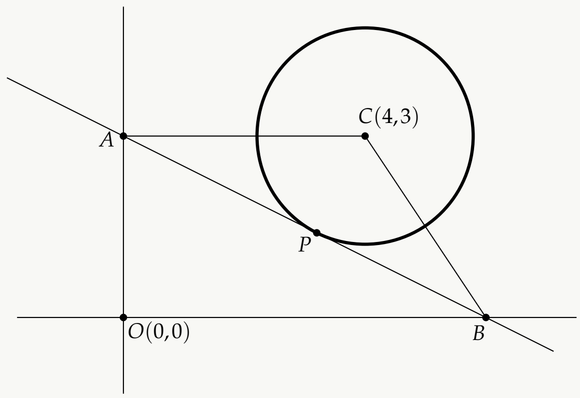
En la figura adjunta, A y B están en los ejes de coordenadas, la recta que contiene los puntos A y B tiene ecuación $x+2y=6$, C es el centro de la circunferencia, las coordenadas de C son $(4,3)$, la recta es tangente a la circunferencia en el punto P. El área del círculo de centro C es

(a) 16π

(b) $8\pi\sqrt{5}$

(c) $\dfrac{16\pi}{5}$

(d) $\dfrac{8\pi\sqrt{5}}{5}$



Solución:

Considerando la ecuación de la recta $x+2y=6$, si $x=0 \Rightarrow y=3$ y si $y=0 \Rightarrow x=6$, por lo que $A(0,3)$ y $B(6,0)$.

Como el $\triangle AOB$ es un triángulo rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que $AB=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$.

Así,

$$\begin{aligned}(ABC) &= \frac{1}{2}\cdot AB\cdot PC\\ \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot PC = 6 &\Rightarrow PC=\frac{6\cdot 2}{3\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

El área del círculo de centro C está dada por $\pi\cdot(PC)^2=\dfrac{16\pi}{5}$.

2.3.3 Considere el cuadrado $\square ABCD$, con $AB=8$ cm. Una circunferencia tangente a $\overline{BC}$ contiene a los vértices A y D. La longitud, en centímetros, del radio de la circunferencia es

(a) 4

(b) 5

(c) 6

(d) $4\sqrt{2}$

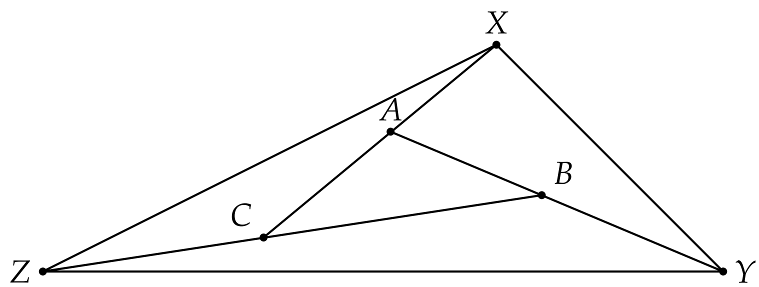
2.3.4 Los tres lados del $\triangle ABC$ se prolongan una distancia igual a sus respectivas longitudes, tal y como se observa la figura adjunta. Si el área del $\square XCBY$ es 18 cm^2, entonces el área en cm^2 del $\triangle XYZ$ es

(a) 28

(b) 30

(c) 36

(d) 42



N Problema de desarrollo

El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

Ejemplo 2.19

Considere el $\triangle ABC$, con $BC = 1$, $m\angle ABC = 60°$ y el radio del circuncírculo es $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Si D es otro punto en el circuncírculo del $\triangle ABC$, tal que $\overline{DC}$ pasa por el punto medio de $\overline{AB}$, determine DB.

Solución:

Sean O el centro del circuncírculo, E el punto medio de $\overline{AB}$ y F el punto medio de $\overline{BC}$; note que los triángulos $\triangle BFO$ y $\triangle CFO$ son congruentes por criterio L-L-L.

Así $m\angle BFO = 90°$; además $\triangle BFO$ y $\triangle CFO$ son especiales de $30° - 90° - 60°$, por lo que $m\angle OBA = 30° = m\angle OAB$.

Luego, $m\angle AOB = 120° = m\angle BOC$ y $m\angle COA = 360° - 120° - 120° = 120°$.

Por criterio L-A-L $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ y $\triangle COA$ son congruentes, así, $AB = CA = BC = 1$, de donde el $\triangle ABC$ es equilátero de lado 1.

Así, $\overline{CD}$ pasa por O y $OE = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$, por lo que $DE = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Por Pitágoras $DB = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2.3.4 Álgebra

Ejemplo 2.20

Sean f y g funciones. Si g es lineal, $g(3) = 5$, $f(2) = 7$ y $g(x) \cdot g(x+1) = f(x) + 8$, entonces $f(3)$ es

(a) 22

(b) 23

(c) 27

(d) 35

Solución:
$f(2) = 7$ y $g(x) \cdot g(x+1) = f(x) + 8$, por lo que $g(2) \cdot g(3) = f(2) + 8$ y $g(2) \cdot g(3) = 15$. Como $g(3) = 5$, se tiene que $g(2) = 3$.

Luego, como g es lineal, $g(3) = 5$ y $g(2) = 3$, el criterio de g es $g(x) = 2x - 1$.

Como $g(x) \cdot g(x+1) = f(x) + 8$, se tiene que $(2x-1) \cdot (2(x+1) - 1) = f(x) + 8 \Rightarrow 4x^2 - 9 = f(x)$. Por lo tanto, $f(3) = 27$.

2.3.5 Sean a, b y c números reales, con $a \neq c$. Sean

$$P(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$$

$$Q(x) = 3x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 2$$

Las condiciones que deben cumplir los números a, b y c para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes son

(a) $a = 3$ y $b = c$

(b) $b = -5$ y $a = -c$

(c) $c = -3$ y $a = b$

(d) $b = 5$ y $c = 2a$

2.3.6 La cantidad máxima de valores enteros que puede tomar n para los cuales la ecuación $x^2+nx-n=0$ tenga soluciones enteras es

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

Ejemplo 2.21

Suponga que $P(x)$ es un polinomio de grado cuatro, con coeficiente principal igual a uno. Se sabe que para un número n, $P(n-2)=1$, $P(n-1)=1$, $P(n)=1$ y $P(n+1)=1$. El valor de $P(n+5)-P(n-4)$ es

(a) 720

(b) 360

(c) 120

(d) 0

Solución:
Sea $R(x)=P(x)-1$.
De acuerdo con las hipótesis del enunciado, $n-2$, $n-1$, n y $n+1$ son ceros de $R(x)$; de esta manera:

$$R(x)=(x-(n-2))(x-(n-1))(x-n)(x-(n+1))$$
$$\Rightarrow P(x)=(x-n+2)(x-n+1)(x-n)(x-n-1)+1$$

Entonces $P(n+5)-P(n-4)$ es

$$(n+5-n+2)(n+5-n+1)(n+5-n)(n+5-n-1)-(n-4-n+2)\cdot$$
$$\cdot(n-4-n+1)(n-4-n)(n-4-n-1)=720$$

N Problema de desarrollo
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

Ejemplo 2.22

Sean x, y y z tres números reales positivos. Si se cumple simultáneamente que:

- $\left(\sqrt[4]{\frac{x}{y}}+\sqrt[4]{\frac{y}{x}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\frac{x}{z}}+\sqrt[4]{\frac{z}{x}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\frac{z}{y}}+\sqrt[4]{\frac{y}{z}}\right)^2=2017$
- $\sqrt{4xy}+\sqrt{4xz}+\sqrt{4yz}=4-x-y-z$

Determine el valor de $\dfrac{1}{19\sqrt{x}}+\dfrac{1}{19\sqrt{y}}+\dfrac{1}{19\sqrt{z}}$

Solución:
De la primera expresión se tiene que:

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+2+\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{z}}+2+\sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{z}{y}}+2+\sqrt{\frac{y}{z}}=2017$$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{x}{z}}\right)+\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{y}{z}}\right)+\left(\sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{z}{y}}\right)=2011$$

$$\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)-1+\sqrt{y}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)-1+\sqrt{z}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)-1=2011$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)=2014$$

Por otra parte, $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$ y con base en la segunda condición se tiene que $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2=4$ lo que implica que
$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2.$

Luego, $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)=2014$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}=1007$$

Finalmente, $\dfrac{1}{19\sqrt{x}}+\dfrac{1}{19\sqrt{y}}+\dfrac{1}{19\sqrt{z}}=53$

Capítulo 3

Etapa Final

3.1 Nivel I

3.1.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

N Problema 4 (día 2)
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

Ejemplo 3.1

Trece números impares distintos menores que 50 son seleccionados. Muestre que, para cualquier escogencia, al menos un par de ellos suma 50, o bien, uno de ellos es el 25.

Solución:

Se sabe que hay 25 números impares menores que 50.

De ellos hay 12 parejas que suman 50, veamos:

$$(1,49),(3,47),(5,45),(7,43),(9,41),(11,39),(13,37),(15,35),(17,33),(19,31),(21,29),(23,27).$$

El único número impar que no puede emparejarse para sumar 50 es el 25.

Como se tiene 13 números impares menores que 50, por el principio del Palomar, de esos 13 números al menos dos deben sumar 50, la única manera de que esto no suceda es que 12 correspondan a diferentes parejas y el otro número sea el 25.

Por lo tanto, se prueba lo solicitado.

N Problema 3 (día 1)
El siguiente ejemplo resuelto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

Ejemplo 3.2

Considere una cantidad par, mayor o igual a 4, de puntos en una circunferencia, pintados de rojo y azul, alternando colores. Dos jugadores llamados Rojo y Azul se disponen a jugar de la siguiente manera: Rojo solo puede trazar cuerdas, tales que sus dos extremos sean puntos rojos, y Azul solo puede trazar cuerdas tales que sus dos extremos sean puntos azules. Además de esto, solo se pueden trazar cuerdas que no intersequen a ninguna otra cuerda que ya haya sido trazada. Pierde el jugador que ya no le sea posible trazar más cuerdas. Si empieza Rojo trazando una cuerda, luego Azul trazando una cuerda, y así sucesivamente, determine si Rojo o Azul tienen estrategia ganadora.

Solución:

Sea n la cantidad de puntos en la circunferencia. Se va a mostrar que si $n = 4k$ Rojo tiene estrategia ganadora, y si $n = 4k + 2$ entonces Azul tiene estrategia ganadora.
Se pueden considerar los puntos n puntos que formen un polígono regular.

Caso $n = 4k$
Para esto imaginemos una recta l tal que hay $2k$ puntos a un lado de l y $2k$ al otro. Para esto Rojo en su primer movimiento traza la cuerda que une los dos puntos rojos más próximos a l y a partir de esto puede jugar en espejo con respecto a l, con lo que haga Azul. De esta forma Rojo tendría estrategia ganadora.

Caso $n = 4k + 2$
Considere las $2k + 1$ rectas que dividen al círculo en $2k + 1$ puntos a cada lado de las rectas. Si Rojo traza una cuerda, esta va a ser paralela a alguna de dichas rectas, digamos a l. Lo que tiene que hacer Azul es jugar con los puntos azules que son la reflexión de los puntos rojos que haya usado Rojo. De esta forma siempre que Rojo juegue, Azul podrá jugar, y así Azul posee estrategia ganadora.

3.1.1 Un prisionero lleva muchos años encerrado, por lo cual el carcelero decide darle una oportunidad de salir. El carcelero coloca en una mesa 11 llaves, numeradas del 1 al y 11, de las cuales 2 son necesarias para abrir la celda. Se sabe que las llaves que abren la celda tienen números de la misma paridad consecutivos. Para adivinar cuáles son las llaves, el prisionero puede escoger cualquier subconjunto de llaves y preguntar cuántas de ellas no le sirven. Tiene dos oportunidades de escoger y preguntar, pero las dos respuestas se le dan al final. Determine, si existe, una estrategia que le asegure poder salir libre.

3.1.2 Un juego para dos personas consiste en mover una ficha desde la casilla superior izquierda hasta la casilla inferior derecha de una cuadrícula de tamaño $n \times n$ siguiendo las siguientes reglas:

- Cada jugador mueve la ficha de manera alternada.
- La ficha se mueve con las reglas del caballo del ajedrez; es decir, dos casillas en forma horizontal y una vertical, o dos en forma vertical y una horizontal.
- En cada movimiento la ficha debe *avanzar* hacia la esquina inferior derecha; es decir, que no pueda quedar en una casilla que esté más a la izquierda o más arriba de donde estaba anteriormente.

a) Determine todos los posibles valores de n para los cuales es posible completar el juego.

b) Demuestre que existe una estrategia ganadora para el segundo jugador, para todos los casos en donde es posible llegar a la casilla inferior derecha.

3.1.2 Teoría de Números

N Problema 6 (día 2)
El siguiente ejercicio propuesto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

3.1.3 Encuentre todos los números de diez dígitos, en los que los dígitos del 0 al 9 se usan todos exactamente una vez, tal que el primer dígito de izquierda a derecha es divisible entre uno, el número formado por el primer y segundo dígitos (de izquierda a derecha) es divisible entre 2, y así sucesivamente hasta que el número completo es divisible entre 10.

3.1.4 ¿Existen 14 números enteros positivos consecutivos, cada uno de ellos divisibles por uno o más primos menores que 12?

N Problema 2 (día 1)
El siguiente ejemplo resuelto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

Ejemplo 3.3

Determine todos los números n de la forma $n = abcabc$, con a, b y c dígitos distintos, tales que n sea divisible por todos los números naturales desde 1 hasta 15 inclusive.

Solución:

Observe que $abcabc = abc \cdot 1000 + abc = abc \cdot 1001 = abc \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, por lo que cualquier número de la forma $abcabc$ será divisible por 7, 11 y 13.
Para que n sea divisible por $1, 2, \ldots, 15$ basta que abc sea divisible por 5, 8 y 9 porque:

- Si es divisible por 8, lo será también por 2 y 4, y como ya n es divisible por 7, entonces también será divisible por 14.
- Si es divisible por 9, lo será también por 3, y al ser n divisible por 2 y 4, entonces también será divisible por 6 y 12.
- Si es divisible por 5, al ser n divisible por 2 y 3, entonces también será divisible por 10 y 15.

Para que abc sea divisible por 5, 8 y 9 debe ser múltiplo de ellos (pues son coprimos); es decir $abc = 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot k = 360k$; de donde $k = 1$ o $k = 2$ (pues $k > 2$ genera un número de más de tres dígitos), además en ambos casos se generan números cons dígitos distintos.
Por lo tanto, todos los números que cumplen las condiciones pedidas son 360360 y 720720.

3.1.5 Encuentre todos los enteros n para los que el número $n^2 + 45$ es un cuadrado perfecto.

3.1.3 Geometría

N Problema 5 (día 2)
El siguiente ejemplo resuelto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

Ejemplo 3.4

Considere el $\triangle ABC$ y sean E y F puntos, tales que $A-E-C$, $B-F-C$ y $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$. Sean D y G puntos, tales que $D-E-F-G$. Si $m\angle CAB = 2m\angle DCE$, $m\angle FCG + m\angle DCE = m\angle ABC$, $DE = 3$ y $CG = 5$, determine el perímetro del $\triangle DEC$.

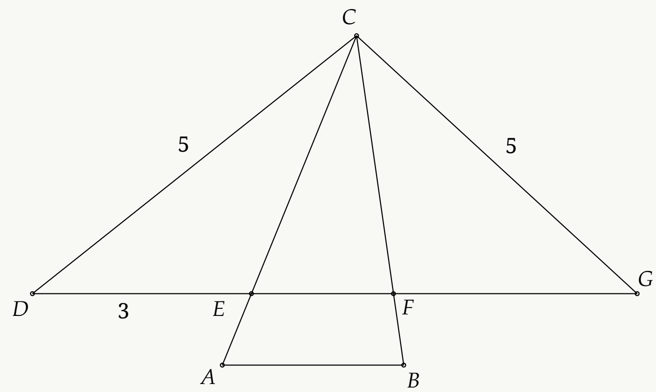
Solución:

Considere la figura:

Sea $\alpha = m\angle DEC$, entonces $m\angle CAB = 2\alpha$.

Sea $\beta = m\angle ABC$, entonces $m\angle FCG + \alpha = \beta \Rightarrow m\angle FCG = \beta - \alpha$

$m\angle CEF = m\angle CAB = 2\alpha$ y $m\angle CFE = m\angle ABC = \beta$



Luego $m\angle DEC = 180° - 2\alpha$ y $m\angle CFG = 180° - \beta$

En $\triangle DEC$ $m\angle EDC + (180° - 2\alpha) + \alpha = 180° \Rightarrow m\angle EDC = \alpha$
$\therefore \triangle DEC$ es isósceles con $DE = EC = 3$

En $\triangle GFC$ $m\angle FGC + 180° - \alpha + \beta - \alpha = 180° \Rightarrow m\angle FGC = \alpha$

$\therefore \triangle DGC$ es isósceles con $DC = GC = 5$

$\therefore$ Perímetro de $\triangle DEC$ es 11.

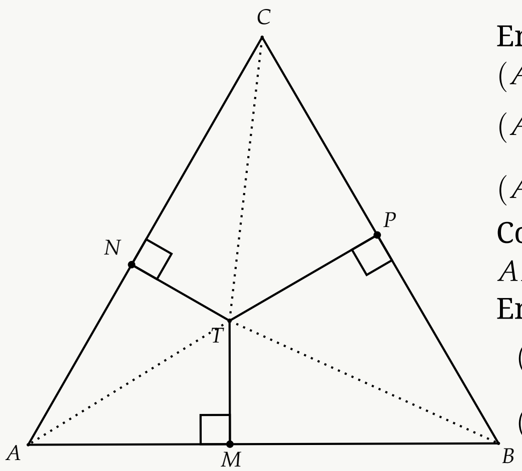
3.1.6 Considere el rectángulo $ABCD$ y los puntos P, Q, R y S puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. Sea M el punto medio de $\overline{PQ}$. Determine la razón entre las áreas del triángulo RSM y el rectángulo $ABCD$.

Ejemplo 3.5

Sean $\triangle ABC$ un triángulo equilátero y T un punto en su interior. Sean M, N y P puntos, tales que $A-M-B$, $B-P-C$, $A-N-C$, $\overline{AB} \perp \overline{TM}$, $\overline{BC} \perp \overline{TP}$ y $\overline{AC} \perp \overline{TN}$. Pruebe que $(ABC) = \dfrac{(TM+TN+TP)(BP+PC)}{2}$

Solución:

De acuerdo con la información dada y al trazar los segmentos $\overline{AT}, \overline{BT}, \overline{CT}$ en el triángulo, se obtiene la siguiente figura:



Entonces,

$$(ABC) = (ATB) + (BTC) + (ATC)$$

$$(ABC) = \frac{AB \cdot TM}{2} + \frac{BC \cdot TP}{2} + \frac{AC \cdot TN}{2}$$

$$(ABC) = \frac{AB \cdot TM + BC \cdot TP + AC \cdot TN}{2}$$

Como el triángulo ABC es equilátero, se tiene que $BC = AB = AC$.

Entonces,

$$(ABC) = \frac{BC \cdot TM + BC \cdot TP + BC \cdot TN}{2}$$

$$(ABC) = \frac{BC\,(TM + TP + TN)}{2}$$

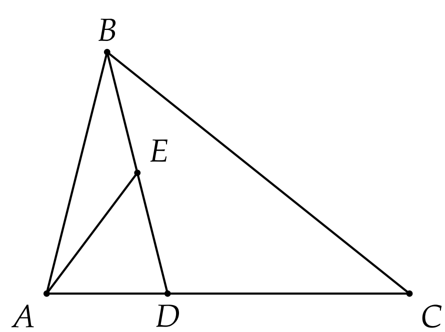
Como $BC = BP + PC$, se llega a la prueba planteada que

$$(ABC) = \frac{(BP+PC)\,(TM+TP+TN)}{2}$$

Problema 1 (día 1)

El siguiente ejercicio propuesto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

3.1.7 En el triángulo ABC de la figura adjunta, se tiene que el $\angle ABD$ mide $36°$, el $\angle BCA$ mide el doble del $\angle BAE$, $AD = ED$ y $AC = BC$. Determine la medida del $\angle BAE$.



3.2 Nivel II

3.2.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

N Problema 1 (día 1)
El siguiente ejercicio propuesto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

3.2.1 Carlos juega con Luis el juego llamado *AMOCLO*. En este juego se cuenta con varios puños de bolitas, el tamaño de los puños se puede modificar siguiendo las reglas:

- Se pueden juntar dos puños de bolitas en uno solo.
- Si un puño tiene un número par de bolitas, se puede dividir en dos puños con el mismo número de bolitas cada uno.

En determinado momento el juego AMOCLO cuenta con tres puños, uno de 5 bolitas, otro de 49 bolitas y el último de 51 bolitas.
Carlos le pide a Luis que jueguen hasta lograr 105 puños de bolitas y el que lo logre será el ganador. Sin embargo, Luis le indica que el juego, bajo esas condiciones, no tendría ganador.
Pruebe que la afirmación de Luis es verdadera.

3.2.2 En un aula hay 16 personas, donde cada persona conoce a exactamente tres personas (la relación es mutua). Determine si es posible o no repartir siempre a las 16 personas en ocho parejas, de tal forma que las personas en cada pareja se conozcan.

N Problema 6 (día 2)
El siguiente ejercicio propuesto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

3.2.3 Ana le propone a Pedro este problema: "Dado un número natural $n \geq 3$, considere las fracciones de la forma $\dfrac{2}{a \cdot b}$, donde a y b son números naturales y primos relativos que cumplen

$$a < b \leq n < a + b$$

Determine la suma $S(n)$ de estas fracciones".
Para resolver el problema, Pedro considera un valor de n particular y calcula la suma de las fracciones obteniendo $\dfrac{2015}{2017}$. Ana se da cuenta de que Pedro, por error, no consideró la fracción cuando $a = 1$. ¿Puede Ana deducir qué valor de n usó Pedro? Justifique.

3.2.4 En una cuadrícula de 2017×2017 se tiene una ficha que se mueve con las reglas del caballo del ajedrez; es decir, dos casillas en forma horizontal y una vertical, o dos en forma vertical y una horizontal. Se coloca esta ficha en la esquina superior izquierda y en cada movimiento se quiere que *avance* hacia la esquina inferior derecha; es decir, que no pueda quedar en una casilla que esté más a la izquierda o más arriba de donde estaba anteriormente. Determine la cantidad de casillas hasta la que podría llegar siguiendo estas reglas.

3.2.2 Teoría de Números

N Problema 2 (día 1)
El siguiente ejemplo resuelto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

Ejemplo 3.6

Encuentre todos los enteros positivos n tales que 3^n+5^n es múltiplo de $3^{n-1}+5^{n-1}$.

Solución:

Como 3^n+5^n es múltiplo de $3^{n-1}+5^{n-1}$ se buscan los enteros k tales que $3^n+5^n = k\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)$

Ahora,

$3^n+5^n = 3^n+5\cdot 5^{n-1} > 3^n+3\cdot 5^{n-1} = 3\cdot 3^{n-1}+3\cdot 5^{n-1} = 3\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)$

$\Rightarrow 3^n+5^n > 3\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)$

De forma análoga,

$3^n+5^n = 3\cdot 3^{n-1}+5^n < 5\cdot 3^{n-1}+5^n = 5\cdot 3^{n-1}+5\cdot 5^{n-1} = 5\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)$

$\Rightarrow 3^n+5^n < 5\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)$

Así, $3\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right) < 3^n+5^n < 5\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)$, por lo que $k=4$ y se sigue que:

$$\begin{aligned} 3^n+5^n = 4\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right) \quad &\rightarrow \quad 5^n-4\cdot 5^{n-1} = 4\cdot 3^{n-1}-3^n \\ &\Rightarrow \quad 5\cdot 5^{n-1}-4\cdot 5^{n-1} = 4\cdot 3^{n-1}-3\cdot 3^{n-1} \\ &\Rightarrow \quad 5^{n-1} = 3^{n-1} \end{aligned}$$

Y como n es entero positivo, el único valor posible es cuando $n-1=0$; es decir, $n=1$ el cual cumple pues $3^1+5^1=8$ es múltiplo de $3^0+5^0=2$.

3.2.5 Carlos juega un juego con las siguientes reglas:

- Se da un número natural N cualquiera.
- Si $N = a + b$, donde a y b son naturales, entonces se puede cambiar N por $M = ab$.

Por ejemplo, si se tiene $5 = 3 + 2$, se puede cambiar por $6 = 3 \cdot 2$.

1) Determine una secuencia de movimientos que comience con $N = 7$ y lleve a $K = 48$.
2) Suponga que Carlos comienza con un número natural $N \geq 5$. Dé una secuencia de pasos que lleve a un número natural K, cualquiera.

3.2.3 Geometría

N Problema 3 (día 1)
El siguiente problema resuelto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

Ejemplo 3.7

Considere el rombo $ABCD$ con $\angle BAD = 60°$. Sean G y Z dos puntos distintos en el segmento AC y considere puntos E y X en $\overline{AD}$, F y Y en $\overline{DC}$, tales que $\square GEDF$ y $\square ZXDY$ son paralelogramos. Demuestre que $\triangle BEX \cong \triangle BFY$.

Solución:

Se va a mostrar que $BE = BF$.
Note que EG paralela a DF así se tiene que $\angle GAE = \angle ACD = \angle AGE$, de donde $AE = FG = DF$.
Note que $\triangle ABD$ es equilátero, así $BA = BD$, y además $\angle BDF = 60 = \angle BAE$.
Por criterio de congruencia L.A.L se concluye que $\triangle BAE$ y $\triangle BDF$ son congruentes, por lo que $BE = BF$.
Análogamente $\triangle BAX$ y $\triangle BDY$ son congruentes y $BX = BY$.
Note que $\angle EBX = \angle ABX - \angle ABE = \angle DBY - \angle DBF = \angle FBY$ y como $BE = BF$, $BX = BY$ se tiene por criterio de congruencia L.A.L que $\triangle BEX \cong \triangle BFY$.

3.2.6 Considere el $\triangle ABC$ y sean E y F puntos, tales que $A - E - C$, $B - F - C$ y $\overline{EF} \| \overline{AB}$. Sean D y G puntos tales que $D - E - F - G$. Si $m\angle CAB = 2m\angle DCE$, $m\angle FCG + m\angle DCE = m\angle ABC$, $\dfrac{DG}{AB} = \dfrac{7}{3}$ y $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{5}{3}$, determine $\dfrac{DC}{EF}$.

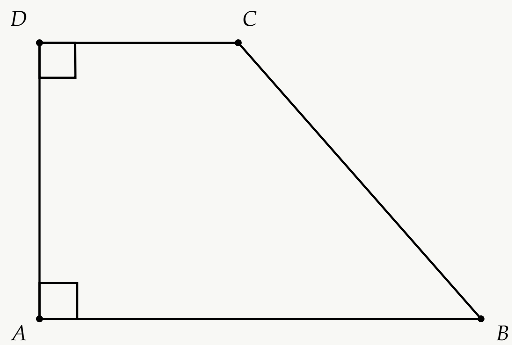
3.2.7 Sea L un punto en el interior de un $\triangle ABC$. Pruebe que

$$\frac{AB+BC+AC}{2} < LA+LB+LC < AB+BC+AC$$

N Problema 4 (día 2)
El siguiente ejemplo resuelto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

Ejemplo 3.8

El cuadrilátero $ABCD$ de la figura adjunta, es tal que sus lados tienen longitudes enteras y su área es 686 cm^2. Si $AD = 28$ cm. y $CB = AB$, determine el perímetro del cuadrilátero.



Solución:
Sean $CD = y$, $CB = AB = x$.
Considere el segmento CE perpendicular al segmento AB en E.
Se tiene que $AE = y$, $EB = x - y$.
Como $AD = 28$, se tiene que $CE = 28$.
Como el área del cuadrilátero mide 686, se tiene que $28y + \dfrac{28\,(x-y)}{2} = 686$. Luego, $y = 49 - x$.
Por otra parte, por el teorema de Pitágoras, se tiene que $28^2 + (x-y)^2 = x^2$, de donde $784 + (x - 49 + x)^2 = x^2$. Luego, $3x^2 - 196x + 3185 = 0$.
Se tiene que $x = 35$ o $x = \dfrac{91}{3}$.
Debido a que el cuadrilátero tiene lados de longitud entera, $x = 35$. Luego, $y = 14$.
Las longitudes de las medidas de los lados son 28, 14 y 35. Y el perímetro del cuadrilátero mide $28 + 14 + 2 \cdot 35 = 112$.

3.2.4 Álgebra

N Problema 5 (día 2)
El siguiente ejemplo resuelto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

Ejemplo 3.9

Sea m un número entero positivo, tal que la ecuación $m^2 - x(x+1) = 212$ posee dos soluciones enteras distintas. Determine todos los posibles valores de m.

Solución:

La ecuación $m^2 - x(x+1) = 212$ es equivalente a la ecuación cuadráctica

$$x^2 + x + \left(212 - m^2\right) = 0$$

Las soluciones de la ecuación son de la forma $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

Se requiere que la ecuación posea dos soluciones enteras distintas.

Por lo que, debe cumplirse que $\Delta > 0$, que $\Delta = u^2$ para algún u entero positivo y que $-1 \pm u$ sea par (es decir, que u sea impar).

Debe cumplirse que $1 - 4\left(212 - m^2\right) = u^2$; es decir, que $4m^2 - u^2 = 847$, de donde se requiere que $(2m-u)(2m+u) = 7 \cdot 11^2$

Se tienen tres posibilidades:
1. $(2m-u) = 7 \cdot 11^2$ y $(2m+u) = 1$, de donde $m = 212$ y $u = 423$
2. $(2m-u) = 7 \cdot 11$ y $(2m+u) = 11$, de donde $m = 22$ y $u = 33$
3. $(2m-u) = 7$ y $(2m+u) = 11^2$, de donde $m = 32$ y $u = 57$

Los valores admisibles para m son 212, 22 y 32.

Ejemplo 3.10

Determine los valores de m de modo que el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y = 4 \\ y^2 + (8-m)\,x^2 = 16 - m \end{cases}$$

tenga exactamente dos pares de soluciones (x,y).

Solución:

Despejando y de la primera ecuación se tiene que $y = 4 - x^2$, sustituyendo en la segunda se obtiene

$$\begin{aligned} y^2 + (8-m)\,x^2 - 16 + m = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(4 - x^2\right)^2 + (8-m)\,x^2 - 16 + m = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^4 - 8x^2 + 16 + (8-m)\,x^2 - 16 + m = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^4 - mx^2 + m = 0 \end{aligned}$$

Sea $u = x^2$, entonces se obtiene la ecuación $u^2 - mu + m = 0$.
El discriminante es $\Delta = m^2 - 4m$, que es positivo si $m < 0$ o $m \geq 4$. Si $m < 0$ entonces las raíces son $u = \dfrac{m \pm \sqrt{m^2 - 4m}}{2}$
En este caso, hay una raíz positiva y una negativa, luego, sustituyendo se tiene que

$$x^2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4m}}{2}$$

es decir $x = \pm\sqrt{\dfrac{m + \sqrt{m^2 - 4m}}{2}}$
y el sistema original tiene exactamente dos pares de soluciones.
Por otro lado, si $m \geq 4$ se tiene que las dos raíces son reales, pues es claro que

$$u = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4m}}{2} > 0$$

mientras que $m > \sqrt{m^2 - 4m}$ y entonces $u = \dfrac{m - \sqrt{m^2 - 4m}}{2} > 0$
pues $m > \sqrt{m^2 - 4m}$. En este caso se obtiene cuatro pares de soluciones reales para el sistema original.

3.3 Nivel III

3.3.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

N Problema 3 (día 1)
El siguiente ejercicio propuesto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

3.3.1 Un juego consiste de una cuadrícula de 4×4 y fichas de dos colores (Amarillas y Blancas). Un jugador escoje un tipo de ficha (A o B en cada turno) y se la da al segundo jugador quien la coloca donde quiera, luego el segundo jugador escoje un tipo de ficha y se la da al primero quien la coloca donde quiera, continúan de este modo y gana el que logre formar una línea con tres fichas del mismo color (horizontal, vertical o diagonal y sin importar si es la ficha con la que inició o no).
Antes de iniciar la partida ya se encuentran colocadas dos fichas amarillas y dos blancas tal como muestra la figura siguiente

A			
		B	
	B		
			A

Yolanda y Xinia juegan una partida. Si Yolanda inicia (escogiendo la ficha y dándosela a Xinia para que esta la coloque) indique si existe una estrategia ganadora para alguna de las dos jugadoras y, en caso de existir, describa la estrategia.

3.3.2 Se tiene un conjunto de 17 números enteros positivos consecutivos. Sea m el menor de estos números. Determine para cuáles valores de m se puede partir el conjunto en tres subconjuntos disjuntos, tales que la suma de los elementos de cada subconjunto sea la misma.

3.3.2 Teoría de Números

N Problema 2 (día 1)
El siguiente ejemplo resuelto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

Ejemplo 3.11

Determine el máximo común divisor de los números.

$$5^5-5, 7^7-7, \cdots, 2017^{2017}-2017$$

Solución:
Todos los números son de la forma n^n-n, con n impar, y $n^n-n=n\left(n^{n-1}-1\right)$. Como $n-1$ es par, es de la forma $2k$, con k entero positivo, y $n^{n-1}-1=n^{2k}-1=\left(n^2\right)^k-1$.
Si $n^2=m$, entonces m^k-1 se puede factorizar de la siguiente manera utilizando el teorema del factor.

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\
\downarrow & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 &
\end{array}$$

$$m^k-1=(m-1)\left(m^{k-1}+m^{k-2}+\cdots+1\right)$$

Así

$$\begin{aligned}
n^n-n &= n\left(n^{n-1}-1\right) \\
&= n\left(m^k-1\right) \\
&= n(m-1)\left(m^{k-1}+m^{k-2}+\cdots+1\right) \\
&= n\left(n^2-1\right)\left(\left(n^2\right)^{k-1}+\left(n^2\right)^{k-2}+\cdots+1\right) \\
&= n(n-1)(n+1)\left(n^{2k-2}+n^{2k-4}+\cdots+1\right)
\end{aligned}$$

Ahora, $n(n-1)(n+1)$ es divisible entre 3.
Además, $(n-1)(n+1)=(2k)(2k+1+1)=2k(2k+2)=4k(k+1)$ es divisible entre $4\cdot 2=8$, ya que $k(k+1)$ es divisible entre 2. Luego, n^n-n es divisible entre $m.c.m.(3,8)=24$. Por lo tanto, el máximo común divisor de los números enunciados es 24.

3.3.3 Un número entero positivo es *nefelibata* si al tomar el último dígito de izquierda a derecha y colocarlo de primero, manteniendo los demás en el mismo orden, el número resultante es exactamente el doble del número original. ¿Cuál es el menor número nefelibata?

3.3.3 Geometría y Trigonometría

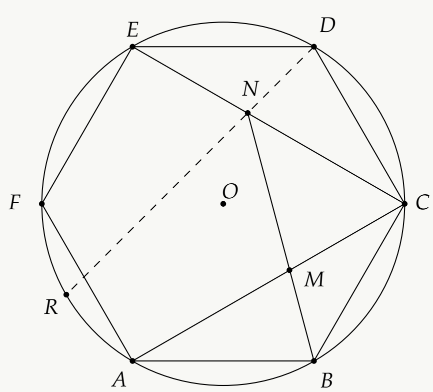
N Problema 1 (día 1)
El siguiente ejemplo resuelto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

Ejemplo 3.12

Sean el hexágono regular $ABCDEF$ inscrito en una circunferencia de centro O, N un punto tal que $E-N-C$, M un punto tal que $A-M-C$ y R un punto en la circunferencia, tal que $D-N-R$. Si $m\,\widehat{EFR}=90°$, $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{CN}{CE}$ y $AC=\sqrt{3}$, determine AM.

Solución:

Considere la figura:



Se tiene que:

- $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{CN}{CE}$ y $AC=CE \Rightarrow AM=CN \Rightarrow EN=CM$
- $CB=ED$ y $m\angle ACB=m\angle CED=30$
- $\triangle BMC\cong\triangle DNE$ (L-A-L) y $\angle MBC\cong\angle NDE$
- $m\angle NDE = m\angle RDE = \dfrac{1}{2} m widehat{EFR} = 45° = m\angle MBC$
- $m\angle BCE=90°$, $m\angle BNC=45°$ y $BC=NC$

- $\triangle BCE$ recto en C, $m\angle BEC=30°$
- $EC=\sqrt{3}BC \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{BC}{EC}$
- $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{CN}{CE}=\dfrac{BC}{CE}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
- $AM=\dfrac{1}{\sqrt{3}}AC=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}=1$

N Problema 5 (día 2)
El siguiente ejercicio propuesto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

3.3.4 Considere dos circunferencia Π_1 y Π_2 tangentes exteriormente en el punto S, tales que el radio Π_2 es el triple del radio de Π_1. Sea l una recta que es tangente a Π_1 en el punto P y tangente a Π_2 en el punto Q, con P y Q distintos de S. Sea T un punto en Π_2, tal que el segmento $\overline{TQ}$ es diámetro de Π_2 y sea el punto R la intersección de la bisectriz del $\angle SQT$ con $\overline{ST}$. Pruebe que $QR = RT$.

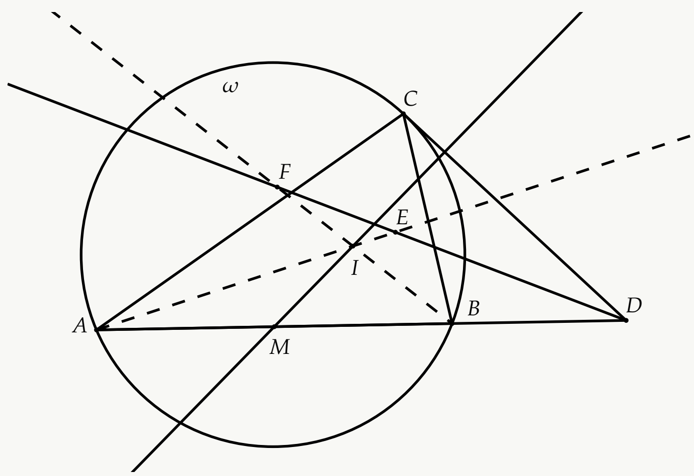
Ejemplo 3.13

En el triángulo ABC con incentro I y circuncírculo w, la tangente por C a w interseca $\overline{AB}$ en el punto D. Las rectas $\overleftrightarrow{AI}$ y $\overleftrightarrow{BI}$ intersecan a la bisectriz del $\angle CDB$ en E y F, respectivamente. M es el punto medio de $\overline{AB}$. Pruebe que $\overleftrightarrow{MI}$ pasa por el punto medio del arco ACB de w.

Solución:

Sean $\overline{AI} \cap \omega = G$, $\overline{BI} \cap \omega = H$ y P el punto medio del arco ACB de ω.

Se tiene que $m\angle FEA = m\angle EAB - m\angle EDB = \dfrac{1}{2}(m\angle CAB - m\angle CDB) = \dfrac{1}{2}m\angle DCA = \dfrac{1}{2}m\angle ABC = m\angle FBA = m\angle HGA \Rightarrow \overline{EF} \parallel \overline{GH}$.



Así, $\overline{IM}$ pasa por el punto medio de $\overline{GH}$.

Por otro lado, es conocido que $\overline{GH} \perp \overline{CI} \Rightarrow \overline{GH} \parallel \overline{CP} \Rightarrow m\angle GHB = m\angle CHG = m\angle PGH \Rightarrow \overline{HI} \parallel \overline{PG}$.

Similarmente, $\overline{GI} \parallel \overline{PH} \Rightarrow \square PGIH$ es un paralelogramo. Así, $\overline{IP}$ pasa por el punto medio de $\overline{GH}$

Como $\overline{IM}$ pasa por el punto medio de $\overline{GH}$ y $\overline{IP}$ pasa por el punto medio de $\overline{GH}$, se tiene que I, M y P son colineales.

3.3.5 Considere el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ recto en A y sea D un punto sobre la hipotenusa $\overline{BC}$. Considere la recta que pasa por los incentros del $\triangle ABD$ y del $\triangle ACD$, y sean K y L las intersecciones de dicha recta con $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Demuestre que si $AK = AL$ entonces D es el pie de la altura sobre la hipotenusa.

3.3.4 Álgebra y Funciones

N Problema 4 (día 2)
El siguiente ejemplo resuelto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

Ejemplo 3.14

Sea k un número real, tal que la ecuación $kx^2 + k = 3x^2 + 2 - 2kx$ posee dos soluciones reales distintas. Determine todos los posibles valores de k, tales que la suma de las raíces de la ecuación sea igual al producto de las raíces de la ecuación aumentado en k.

Solución:
Se tiene que la ecuación $kx^2 + k = 3x^2 + 2 - 2kx$ es equivalente a la ecuación cuadráctica $(k-3)\,x^2 + 2kx + k - 2 = 0$.

Se requiere que la ecuación $(k-3)\,x^2 + 2kx + k - 2 = 0$ posea dos soluciones reales distintas. Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación.

Debe cumplirse que $(2k)^2 - 4\,(k-3)\,(k-2) = 20k - 24 > 0$. De donde, $k > \dfrac{6}{5}$.

Debe cumplirse que $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 + k$.

Se sabe que $x_1 + x_2 = \dfrac{-2k}{k-3}$ y que $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{k-2}{k-3}$.

De donde debe cumplirse que $-2k = k - 2 + k\,(k-3)$ y, así, $k = -\sqrt{2}$ o $k = \sqrt{2}$.

El único valor admisible para k es $\sqrt{2}$.

3.3.6 Sea $P(x)$ un polinomio de grado $2n$, tal que $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$ para $k = 0, \cdots, 2n$. Determine $P(2n+1)$.

3.3.7 Sea $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, tal que $f(1) = 2018$ y $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$, para todo $n > 1$. Encuentre el valor de $f(2017)$.

N Problema 6 (día 2)
El siguiente ejemplo resuelto corresponde con uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

Ejemplo 3.15

Sea $f:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente, tal que $f(x)f\left(f(x)+\dfrac{1}{x}\right)=1$.
Determine $f(1)$.

Solución:

Considere $t=f(1)$. Si se evalúa la identidad descrita en $x=1$, se obtiene que

$$f(1)f(f(1)+1)=tf(t+1)=1$$

de donde podemos concluir que $t\neq 0$, y que $f(t+1)=\dfrac{1}{t}$.
Ahora, si se evalúa en $x=t+1$, se obtiene

$$f(t+1)f\left(f(t+1)+\frac{1}{t+1}\right)=\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}\right)=1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}\right)=t=f(1)$$

y al ser f estrictamente creciente, se tiene que $\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t+1}=1$ lo que implica que $(t+1)+t=(t+1)t$, cuyas soluciones son $t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
Nótese que si $t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, tendríamos que $1<t=f(1)<f(t+1)=\dfrac{1}{t}<1$, que es una contradicción.
Por lo tanto:

$$t=f(1)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Simbología

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida del $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida del $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida del $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área del $\triangle ABC$
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área del $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P - Q - R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

Bibliografía

[1] Andreescu, T. y Gelca, R. (2000). "*Mathematical Olympiad Challenges*". Segunda edición. Birkhauser, Boston. USA.

[2] Bulajich, R; Gómez, J. y Valdez, R. (2000). "*Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*". Birkhäuser Verlag AG, Berlin. Germany.

[3] Bulajich, R. y Gómez, J. (2002). "*Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas - Geometría*". Instituto de Matemáticas, UNAM. México.

[4] Bulajich, R; Gómez, J. y Valdez, R. (2016). "*Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas - Álgebra*". Tercera edición. Instituto de Matemáticas, UNAM. México.

[5] Chen, E. (2016). "*Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads (Maa Problem)*". MAA Press. USA.

[6] Engel, A. (1998). "*Problem-solving strategies*". Springer-Verlag, New York. USA.

[7] Illanes, A. (2002). "*Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas - Principios de olimpiada*". Instituto de Matemáticas, UNAM. México.

[8] Lidski, V; Ovsianikov, L; Tulaikov, A. y Shabunin, M. (1978). "*Problemas de matemáticas elementales*". Segunda edición. MIR, Moscú. Rusia.

Solución de los ejercicios

Soluciones del Capítulo 1

1.1.1 Nótese que en las piezas grises, los cuatro cubos están visibles, y llenan los seis cubos de uno de los cubos de una de las caras $1 \times 2 \times 3$, y las dos esquinas superiores de la siguiente. Lo que indica que la pieza blanca está compuesta de tres cubos en fila, y el cuarto sobre el central, tal como en la figura c.

1.1.2 La calle Estrella es perpendicular a la calle Pastora y la calle Pastora es paralela a la calle Luciérnaga, se tiene que la calle Estrella es perpendicular a la calle Luciérnaga.
Como la calle Luciérnaga es paralela a la calle Soledad, entonces se tiene que la calle Estrella es perpendicular a la calle Soledad.

1.1.3 Ana recibe dos quintas partes del terreno y Antonio el resto, por lo que Antonio recibe $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.
Antonio decide ceder a Ana una cuarta parte de la porción de terreno que él recibiría, por lo que Antonio cede a Ana $\frac{3}{5} \div 4 = \frac{3}{20}$.
Finalmente, Ana recibió $\frac{2}{5} + \frac{3}{20} = \frac{11}{20}$.

1.1.4 En 87979981 debe de quitarse el uno, de esta manera queda 8797998.
Ahora, en 8797998 debe quitarse los dos nueves que se encuentran a la derecha.
De esta manera queda 87978, el cual es un número *palíndromo*.
Finalmente, se eliminaron 1, 9, 9. Se eliminaron 3 dígitos.
Otra forma...
En 87979981 debe eliminarse el uno, de esta manera queda 8797998.
Seguidamente, se eliminan los dos sietes.
Nuevamente, se han eliminado tres dígitos: 1, 7, 7; quedando 89998.
Otra forma...
En 87979981 debe eliminarse el uno, de esta manera queda 8797998.
Seguidamente, se eliminará el siete que se encuentra a la izquierda y uno de los nueves que se encuentra a la derecha.
De esta manera quedará 89798, como resultado de eliminar 3 dígitos: 1, 7, 9.

BIBLIOGRAFÍA (https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).

1.1.5 Luego de razonar un poco el problema se puede observar que los 24 que no saben francés sí pueden saber inglés y los 10 que no saben inglés sí sepan francés, lo que descuenta un total de $24+10=34$ personas que no saben alguno de los dos idiomas.
Si los 22 que no saben español se encuentran entre las 66 personas que saben inglés y francés, volvemos a llegar a la peor situación posible; es decir, que $24+10+22=56$ tampoco hable alguno de estos tres idiomas.
Utilizando en mismo razonamiento con el alemán (que no lo hablan 42 de los participantes), se llega a la conclusión que en la peor situación se tiene que: $24+10+22+42=98$ estudiantes no sepan hablar alguno de los cuatro idiomas, por lo que solo se puede asegurar que 2 de ellos conocen los cuatro.

1.1.6 Los números más grandes son aquellos en los que los dos dígitos más altos (6 y 5) estén en la posición de las centenas, los segundos más altos (4 y 3) están en la posición de las decenas, y los bajos (2 y 1) están en la posición de las unidades.
Esto nos da cuatro posibles combinaciones: 642 y 531; 641 y 532; 632 y 541 y finalmente, 631 y 542.
Todas estas posibles combinaciones suman 1173.

1.1.7 Si se considera x como la cantidad de cajas, entonces $x-2$ sería múltiplo de 5, de 7 y de 2; es decir, múltiplo de 70.
Entre 900 y 1000 los múltiplos de 70 son 910 y 980.
Si x es 912 no sobrarían cajas al hacer grupos de 3, si es 982 sobraría una, así $x=982$.

1.1.8 Si no cambia de caja las posibilidades de ganar serán 1 de 4 (la probabilidad de haber acertado desde antes), mientras que si decide cambiar, la probabilidad de ganar es equivalente a la probabilidad de equivocarse en la primera elección que es 3 de 4.

1.1.9 En una hora se llena
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{4}{7}=\frac{2}{21}$$
del cilindro, por lo que se dura 10,5 horas en llenarlo. Si el desagüe se hubiera cerrado, en una hora se llena
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$
del cilindro, por lo que se dura 1,5 horas en llenar. Es decir gastó de más 9 horas.

1.1.10 Se procede a calcular el $m.c.m(14,8)=56$.
Entonces Diego y Daniela llegaron juntos por primera vez a la meta, después de 56 minutos.
Donde Diego en 56 minutos corre 24 vueltas y Daniela 21 vueltas.
Por lo tanto, ambos dieron 45 vueltas.

1.1.11 Sea $n=abc$ el número que representa la cantidad de tres dígitos.
Como el dígito a es el dígito de las centenas y debe ser el triple de c, el de las unidades, se tiene que $c=1,2,3$.
Tenemos entonces las siguientes posibilidades: $3b1$, $6b2$ y $9b3$.

Además, los dígitos deben sumar 12, tenemos que los siguientes números son los que cumplen con las condiciones: 381, 642 y 903.

1.1.12 Cada semana, iniciando en domingo y finalizando en sábado, Karla lee $25 + 4 \cdot 6 = 49$ páginas.
Es decir, $\frac{290}{49}$ resultará 5 semanas completas. En estas 5 semanas Karla leerá 245 páginas, por lo que le faltarán de leer 45 páginas.
Por lo tanto, inicia domingo leyendo 25 páginas, quedando 20 pendientes. Considerando cuatro páginas diarias, restarán 5 días más para concluir.
Invertirá entonces 5 semanas y 6 días, para un total de 41 días.

1.1.13 Como el número $pppppqqq$ debe ser divisible por 45 entonces debe ser divisible por 5 y por 9, para que sea divisible por 5 q debe ser 5 o 0.
Para que sea divisible por 9 la sumas de sus cifras debe ser un múltiplo de 9; es decir:
$p + p + p + p + q + q + q + q = 4p + 4q = 4(p + q)$ debe ser múltiplo de 9.
Y como 4 y 9 son coprimos entonces $p + q$ debe ser múltiplo de 9, pero como q no es 9 entonces se tiene que $p + q = 9$ y así $p = 4$ o $p = 9$.

1.1.14 De acuerdo con la información, el perímetro del $\triangle MNP$ es:

$$MN + NP + MP = 12$$

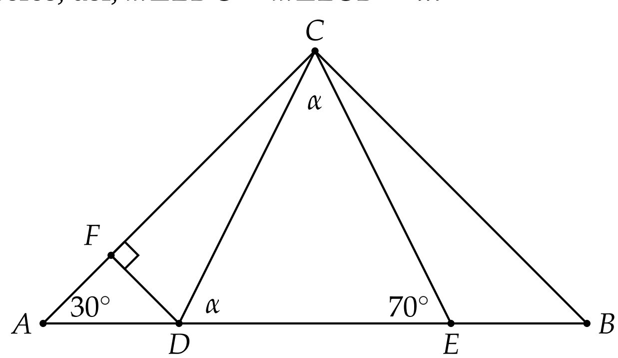
$$\frac{3}{5}MP + \frac{4}{5}MP + MP = 12$$

$$\frac{3MP + 4MP + 5MP}{5} = 12$$

$$MP = 5$$

$$MN = \frac{3}{5}MP = 3$$

1.1.15 De acuerdo con la información dada, se obtiene la figura adjunta.
Se tiene que $DE = CE$, por lo que el $\triangle CDE$ es isósceles; así, $m\angle EDC = m\angle ECD = \alpha$.



Como la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, se tiene que $2\alpha + m\angle CEA = 180° \Rightarrow \alpha = 55°$.
Se puede observar que el $\angle ADC$ es el suplementario del $\angle CDE$, entonces $m\angle ADC = 180° - \alpha = 125°$.
Como la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, se tiene que $m\angle CAD + m\angle ADC + m\angle ACD = 180° \Rightarrow m\angle ACD = 25°$.
Por oto lado, se tiene que $\overline{DF} \perp \overline{AC}$, entonces $m\angle FDC = 90° - m\angle ACD = 65°$.

1.1.16 Si a, b y c son las medidas de los lados del triángulo con $a \leq c$, $b \leq c$, por desigualdad triangular se tiene que $c < a + b$ entonces $2c < a + b + c$, así $c < 25$, por lo que la respuesta correcta es la opción (a).

1.1.17 Se tiene que $AC = CD$, por la clasificación de triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos internos y con la medida de sus lados se tiene que el $\triangle ACD$ es isósceles, entonces los ángulos $\angle CAD$ y $\angle ADC$ son de igual medida.
Por el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, se tiene que:
$2m\angle CAD + 64° = 180° \Rightarrow m\angle CAD = 58°$.
Por otro lado, se tiene que $CD = BD$, entonces $\angle BCD = \angle DBC = \alpha$.
Por el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, se tiene que:
$58° + 64° + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 29°$.

1.2.1 Cada máquina empaca 1 bolsa en 15 segundos por lo que empaca 4 bolsas en 60 segundos.
Dado que son 60 máquinas, tienen capacidad para 240 bolsas.

1.2.2 Como A es un dígito, se tiene $A = 1$ o $A = 2$, pero como $A + B$ termina en 0, se debe "llevar 1" por lo que A debe ser 1.
Igualmente, $C + B$ termina en 1 y se debe "llevar 1", por lo que $A + B$ debe ser 9 y como $A = 1$ se tiene $B = 8$.
Entonces $C + B = 11$ y $C = 3$. Finalmente, como $D + C = 7$ se tiene $D = 4$.
$\therefore A + B + C + D = 1 + 8 + 3 + 4 = 16$

1.2.3 Se tiene que $\dfrac{p+q+r}{3} = 8$ y $\dfrac{p+q+r+s+t}{5} = 7$

$\Longrightarrow p + q + r = 24$ y $p + q + r + s + t = 35$

Sustituyendo la primera escuación en la segunda $24 + s + t = 35$

$\Longrightarrow s + t = 11$

Así, el promedio de s y t es $\dfrac{s+t}{2} = \dfrac{11}{2} = 5{,}5$

1.2.4 Asumiendo que la velocidad a la que camina Juan es constante, y como $velocidad = \dfrac{distancia}{tiempo}$, sean x_1 y x_2 los tiempos que dura en recorrer Juan la pieza de madera en dirección contraria y en la misma dirección del camión respectivamente. Así, $\dfrac{10}{x_1} = \dfrac{70}{x_2}$, de donde $x_2 = 7x_1$.
Por otro lado, sea l la longitud de la pieza de madera y como se asume también que la velocidad del camión es constante, entonces $\dfrac{l-10}{x_1} = \dfrac{70-l}{x_2}$, de donde $l = 17{,}5$ metros.

1.2.5 83 deportistas pertenecen al equipo de carreras, 39 al de saltos y 27 a ambos, por lo que $83 - 27 = 56$ practican solamente carreras, $39 - 27 = 12$ practican solamente saltos y 27 practican ambos.

Luego, $56+12+27=95$ pertenecen a algún equipo de atletismo.
Si se elige, al azar, uno de los depostistas que entrenan atletismo, para que represente al centro de entrenamiento en una competencia, entonces la probabilidad de que sea integrante del equipo de carreras pero no del de salto, es $\frac{56}{95}$.

1.2.6 Si $x+1$, $y+1$, $z+1$ son la cantidad de grupos de 7, 5, y 3 cartas respectivamente, entonces $7x+5y+3z=85$, con x,y,z mayores o iguales a cero.
Veamos que la menor cantidad de grupos posibles se consigue haciendo la mayor cantidad de grupos de 7 cartas posibles.
Si se hacen 12 grupos de 7 cartas, entonces $5y+3z=1$, lo cual no es posible. Si $z=11$ entonces $5y+3z=8$, que se logra si $y=z=1$.
Por lo que la menor cantidad de grupos es $x+1+y+1+z+1=12+2+2=16$.

1.2.7 Decir que no fue cierto que todos hicieron algo, es porque alguien no lo hizo.
En este caso, alguien no compró más de 10 manzanas, por lo que tuvo que haber comprado 10 o menos.
Es decir, alguno compró menos de 11 manzanas.

1.2.8 El número 12 corresponde a la tarjeta *Primo*, pues es el único que no lo es.
Esto implica que 2 corresponde a la tarjeta *Impar*, pues los restantes, 5 y 7, ambos son impares, y por lo tanto, 5 corresponde a la tarjeta *Divisible por 7*.
Dado que 7 es el único número restante, éste correspondería a la tarjeta *Mayor que 100*

1.2.9 Por el algoritmo de la división el número es de la forma $3a+1$, $7b+2$ y $5c$ con a, b y c enteros.
Observe que si se suman cinco unidades al número, el número es múltiplo de 3, de 7 y de 5, ya que $3a+6=3\,(a+2)$, $7b+7=7\,(b+1)$ y $5c+5=5\,(c+1)$.
Si n es el número, como el mínimo común múltiplo de 3,7 y 5 es 105, entonces $n+5=105k$ y el menor que lo cumple es 105.
Así, $n=100$ y la suma de sus cifras es 1.

1.2.10 Denote x: medida del lado del triángulo equilátero.
La diferencia de las dimensiones b y h de un rectángulo (con $b>h$) es igual a la medida del lado de un triángulo equilátero, por lo que $x=b-h$.
El triángulo y el rectángulo tienen el mismo perímetro, por lo que $3x=2b+2h$. Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales para b y h, $h=\frac{x}{4}$ y $b=\frac{5x}{4}$.
Finalmente, $\frac{b}{h}=5$.

1.2.11 Denote x como la medida del lado menor del paralelogramo; es decir, $AB=DC=x$.
Como $2AB=BC$,entonces $BC=AD=2x$, como M es el punto medio de $\overline{BC}$, entonces $BM=MC=x$, y como $m\angle ABC=120^\circ$, entonces $m\angle BCD=60^\circ$.
As'i, el $\triangle MCD$ es equilátero, $MD=x$ y $m\angle DMC=60^\circ$. Por otra parte, el $\triangle ABM$ es isósceles y $m\angle AMB=30^\circ$; así, $m\angle AMD=180^\circ-m\angle AMB-m\angle DMC=180^\circ-30^\circ-60^\circ=90^\circ$.

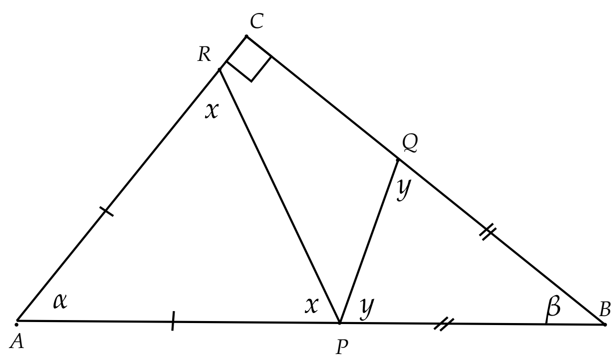
Finalmente, el $\triangle AMD$ es rectángulo en M, aplicando el Teorema de Pitágoras $(2x)^2 - x^2 = \left(7\sqrt{3}\right)^2$, $x = 7$ y el lado mayor del paralelogramo mide $2x = 14$.

1.2.12 Sean $m\angle ABM = b$ y $m\angle ACN = a$
Por suma de medida de ángulos internos del $\triangle BCN$ se tiene $15x + b = 180°$. (1)
Por suma de medida de ángulos internos del $\triangle CMB$ se tiene $16x + a = 180°$.
Igualando ambas ecuaciones, se tiene $15x + b = 16x + a \Rightarrow b - x = a$ Ahora, por suma de medida de ángulos internos del $\triangle ABC$, se tiene:

$$13x + a + b = 180° \Rightarrow 13x + b - x + b = 180° \Rightarrow 12x + 2b = 180° \Rightarrow 6x + b = 90° \Rightarrow b = 90° - 6x$$

Por último, sustituyendo en (1) se tiene $15x + 90° - 6x = 180° \Rightarrow 9x = 90° \Rightarrow x = 10$ y así $b = 30°$.
$\therefore m\angle ABM = 30°$

1.2.13 De acuerdo con la información dada, se tiene la figura adjunta, donde $m\angle ACB = 90°$, pues $\overline{AC} \perp \overline{BC}$.



Además, $\alpha + \beta + m\angle ACB = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$ (1), esto por el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo.
Además, se tiene que $BQ = BP$, por la clasificación de triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos internos y con la medida de sus lados, se tiene que el triángulo $\triangle BPQ$ es isósceles, entonces $m\angle BPQ = m\angle PQP = y$. Así, $\beta = 180° - 2y$ (2).
Por otro lado, se tiene que $AP = AR$, por la clasificación de triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos internos y con la medida de sus lados, se tiene que $\triangle APR$ es isósceles, entonces $m\angle APR = m\angle ARP = x$. Luego, $\alpha = 180° - 2x$ (3).
Sustituyendo (2) y (3) en (1), se tiene: $180° - x + 180° - 2y = 90° \Rightarrow x + y = 135°$. Por último, se tiene que: $m\angle RPQ = 180° - x - y \Rightarrow m\angle RPQ = 45°$.

1.2.14 En la expresión $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}} = \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+3} - \sqrt{x} = (a-1)\sqrt{x} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+3} = a\sqrt{x} \\
&\Leftrightarrow \quad x + 3 = a^2 x \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{a^2 - 1}
\end{aligned}$$

1.2.15 Denote x como la cantidad de kilómetros recorridos el primer día.
El primer día recorre una quinta parte del total de la distancia por recorrer durante todo viaje, por lo que la cantidad de kilómetros por recorrer luego del primer día de viaje es $4x$.
El segundo día, el turista recorre 21 kilómetros, por lo que ha luego de hacerlo ha recorrido $x+21$ kilómetros y le falta por recorrer $4x-21$ kilómetros.
Luego del recorrido del segundo día, el viajero se encuentra a la mitad del recorrido total, por lo que $x+21=4x-21$. Luego, la cantidad de kilómetros recorridos el primer día es $x=14$.
Finalmente, la cantidad de kilómetros recorridos por el viajero durante los dos primeros días es $14+21=35$.

1.2.16 Se satisface que:

$$\begin{aligned} ax-x-a+1=b+2-bx &\Leftrightarrow ax+bx-x=a+b+1 \\ &\Leftrightarrow (a+b-1)\,x=a+b+1 \\ &\Leftrightarrow x=3 \end{aligned}$$

1.3.1 Observamos que la mayor cantidad de fichas se elimina al seleccionar cualquiera de las cuatro casillas centrales, ahí se cancelan $(n-1)$ fichas de la fila, $(n-1)$ de la columna, $(n-1)$ de la diagonal mayor, además de $(n-2)$ de la diagonal menor; es decir, $3\,(n-1)+(n-2)=4n-5$.

Para $n=1000$ se tiene $4\times 1000-5=3995$.

1.3.2 Existen 3 números primos mayores que 11, estos son 13, 17 y 19 por lo que se puede utilizar uno de ellos con el número 1, y los otros dos se pueden tomar como una pareja de manera que solo quede una fracción no entera, las demás cartas es posible elegirlas de manera que formen fracciones que sean enteras, porque se tienen 10 parejas como máximo.

Por ejemplo, se puede tomar $\frac{17}{19}$ como la fracción no entera, y luego

$$\frac{13}{1},\frac{22}{11},\frac{21}{3},\frac{20}{10},\frac{18}{9},\frac{16}{8},\frac{15}{5},\frac{14}{7},\frac{12}{6},\frac{4}{2}$$

1.3.3 Sea n el número de personas. Para que se dé un saludo se necesitan 2 personas y el número de saludos distintos es igual a las combinaciones de n tomadas de 2 en 2; es decir, $\binom{n}{2}=\frac{n\,(n-1)}{2}$. Así, $\frac{n\,(n-1)}{2}=190$ de donde $n^2-n=380 \Rightarrow n^2-n-380=0 \Rightarrow (n-20)\,(n+19)=0$, con lo cual $n=20$ o $n=-19$. Por lo tanto, asistieron 20 personas a la fiesta.

1.3.4 Los cuadrados perfectos de dos dígitos son 16, 25, 36, 49, 64 y 81, por lo tanto, todos los números que cumplen esta propiedad son 164, 364, 649 y 816, que suman 1993.

1.3.5 Analizaremos dos casos:

I Caso: alguno de los dígitos es cero.

En este caso el producto de los dígitos siempre será cero, el cual es cuadrado perfecto. Hay dos posibilidades para escoger el dígito cero (el dígito de las unidades o el de las decenas); para el dígito de las centenas hay 9 posibilidades y para el otro dígito no nulo hay 8 posibilidades. Entonces la cantidad total en este caso es $2 \cdot 8 \cdot 9 = 144$

II Caso: ninguno de los dígitos es cero.

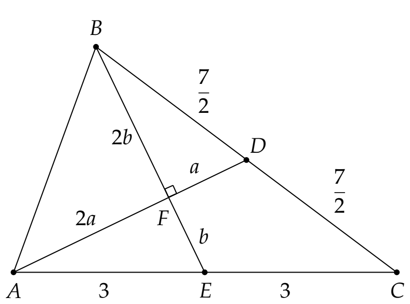
Para que dados tres dígitos distintos su producto sea cuadrado perfecto, este debe estar formado únicamente por potencias de 2 o de 3. Con esto se descartan los cuadrados 25, 47, 100, 121. También se descartan 4 y 9 pues se debería repetir un dígito. Quedan únicamente 6 posibilidades:
$16 = 2^4 = 1 \cdot 2 \cdot 8$
$36 = 2^2 \cdot 3^2 = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 6$
$64 = 2^6 = 2 \cdot 4 \cdot 8$
$144 = 2^4 \cdot 3^2 = 2 \cdot 8 \cdot 9 = 3 \cdot 6 \cdot 8$

Para cada uno de ellos hay $3! = 6$ maneras de ordenarlos para formar números de tres dígitos, por lo que en total hay $6 \cdot 6 = 36$ formas en este caso.

En total hay $144 + 36 = 180$ números que cumplen lo pedido.

1.3.6 $a + b | a^2 + ab + 2b \Leftrightarrow a + b | a(a + b) + 2b \Leftrightarrow a + b | 2b \Leftrightarrow a + b | b + b + a - a \Leftrightarrow a + b | b - a$. Como $0 \leq |\dfrac{b-a}{a+b}| < 1$ entonces $a - b = 0$, por lo que $a = b$, de donde $4a < 100 \Rightarrow a < 25$, por lo que hay 24 pares (a, b) que cumplen lo querido.

1.3.7 Considere la figura



F es el baricentro.

Aplicando Pitágoras en el $\triangle AFE$ se tiene que $4a^2 + b^2 = 9$.

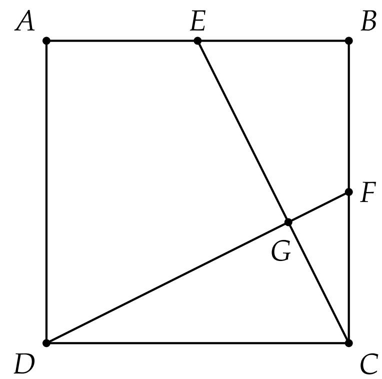
Aplicando Pitágoras en el $\triangle BFD$ se tiene que $a^2 + 4b^2 = \dfrac{49}{4}$.

Sumando ambas ecuaciones se tiene que $5a^2 + 5b^2 = \dfrac{85}{4}$ de donde $4a^2 + 4b^2 = 17$.

Ahora, aplicando Pitágoras en el $\triangle AFB$ se tiene que

$$AB^2 = 4a^2 + 4b^2 \Rightarrow AB^2 = 17 \Rightarrow AB = \sqrt{17}$$

1.3.8 Note que $\triangle DCF \cong \triangle CBE$, por (L-A-L). Entonces $\angle GCF \cong \angle FDC$ y como $m\angle C = 90°$ se tiene $m\angle CGF = 90°$, por lo que $\triangle DCF \sim \triangle CGF$.



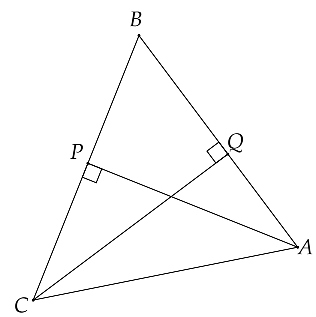
Entonces

$$2 = \frac{DC}{CF} = \frac{GC}{GF} = \frac{BC}{BE}$$

Sea $x = GF$, entonces por Pitágoras y las razones anteriores encontramos $GC = 2x$ y $EC = \sqrt{5FC^2} = 5x$, así la respuesta es

$$\frac{5x - 2x}{2x} = \frac{3}{2}$$

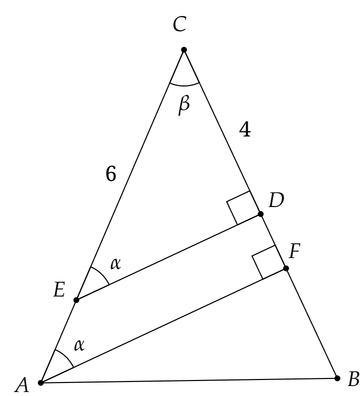
1.3.9 Sean P y Q los pies de las perpendiculares desde A y C respectivamente.



Como $m\angle B = 45°$ entonces $m\angle BCQ = 45°$ (triángulo rectángulo isósceles) y $m\angle QCA = 30°$ (pues $m\angle A = 60°$ y $\triangle ACQ$ es rectángulo).
Ahora, como $AC = 30$ se sigue que $CQ = 15\sqrt{3}$ y $AQ = 15$ (triángulo especial $30°, 60°$). Además, $QB = 15\sqrt{3}$, (triángulo especial $45°$) por lo que $AB = 15 + 15\sqrt{3}$.

También, como $\triangle APB$ es rectángulo isósceles y $AP = h$, entonces $AB = h\sqrt{2}$ (triángulo especial $45°$). Así, $h\sqrt{2} = 15 + 15\sqrt{3} \Rightarrow \left(h\sqrt{2}\right)^2 = \left(15 + 15\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 450 + 225\sqrt{3}$. Por lo tanto, $m = 450$.

1.3.10 Si $AE = x$, entonces $EC = 3x$, ya que $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{1}{3}$. Luego, $AC = 8 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$.



En el $\triangle DCE$ (que es un triángulo rectángulo), $DC = 4$ ($\overline{DE}$ es mediatriz) y $EC = 6$; aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene que $6^2 = 4^2 + DE^2 \Rightarrow DE = 2\sqrt{5}$.
* Sea $\overline{FA}$ la altura del $\triangle ABC$ correspondiente con $\overline{BC}$.
Por ser ángulos correspondientes entre paralelas se tiene que $m\angle DEC = m\angle FAC = \alpha$.
Así, $\triangle DEC \sim \triangle FAC$ (criterio de semejanza A-A-A) y se tiene que $\dfrac{FA}{DE} = \dfrac{AC}{EC} \Rightarrow \dfrac{FA}{2\sqrt{5}} = \dfrac{8}{6} \Rightarrow FA = \dfrac{8\sqrt{5}}{3}$.
Luego, $(ABC) = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot \dfrac{8\sqrt{5}}{3} = \dfrac{32\sqrt{5}}{3}$.

* Alternativo
Sea α la medida del $\angle ACB$.
En $\triangle CED$ se tiene $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, por lo que $(ABC) = \dfrac{AC \cdot CB \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2} = \dfrac{32\sqrt{5}}{3}$

1.3.11 De la primera ecuación, $x = a + 3y$. Sustituyendo este resultado en la segunda ecuación se tiene

$$\begin{aligned}
& m\,(a+3y)+y=b \\
\Rightarrow\quad & ma+3my+y=b \\
\Rightarrow\quad & (3m+1)\,y=b-ma \\
\Rightarrow\quad & y=\frac{b-ma}{3m+1}
\end{aligned}$$

El sistema posee solución única siempre que $m \neq \frac{-1}{3}$ y de las afirmaciones solo la segunda se cumple siempre.

1.3.12 Se tiene $x^2-7x+3=(x-a)\,(x-b)$, entonces $ab=3$ y $a+b=7$, por lo tanto $2ab-a-b=-1$.
De las opciones, la única que al evaluar -1 da como resultado 0 es la (c).

1.3.13 Asumamos que los números que no están en el diagrama son A, B y C de la siguiente manera:

10	A	B	C	130

Con estos datos se concluye que

$$\begin{aligned}
10+A+B&=100\\
A+B+C&=200\\
B+C+130&=300
\end{aligned}$$

* De la primera ecuación se tiene que $A+B=90$, y de la segunda se obtiene que $B+C=170$. Sumando estos resultados, se obtiene $A+2B+C=260$. Ahora, nótese que

$$B=(A+2B+C)-(A+B+C)=260-200=60$$

* Alternativo
De la primera ecuación se tiene que $A+B=90$, y sustituyendo esto en la segunda ecuación se obtiene que $C=110$. Al sustituir C en la tercera ecuación se obtiene $B=60$, que es el valor buscado.

1.3.14 Observe que

$$6x^4y^4+\sqrt{3}x^2y^2zw-3z^2w^2=\left(3x^2y^2-\sqrt{3}zw\right)\left(2x^2y^2+\sqrt{3}zw\right)$$

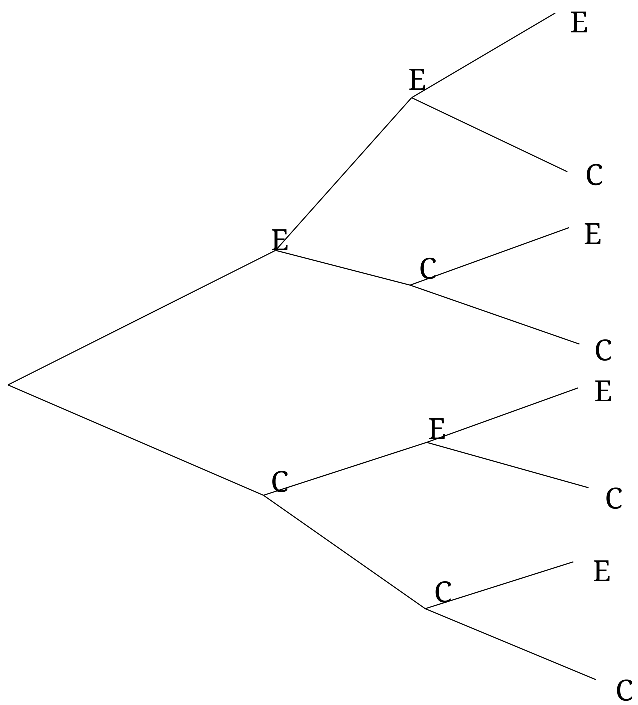
Soluciones del Capítulo 2

2.1.1 Si Karla elige el 2, entonces solo puede perder si el resultado del dado es 5 o 6, con lo que la suma circular sería 1 y 2 respectivamente (ya que $5>1$ y $6>2$); si el resultado del dado es otro, Karla gana.

En los otros casos se puede ver como Carlos gana en más de dos casos.

Para -2, Carlos gana con 3, 4, 5 o 6 como resultado del dado; para -1, Carlos gana con 2, 3, 4, 5 o 6 como resultado del dado; y para 3, Carlos gana con 4, 5 o 6 como resultado en el dado.

2.1.2 Mediante el diagrama de árbol se representan todos los casos posibles, donde E representa escudo y C representa corona.



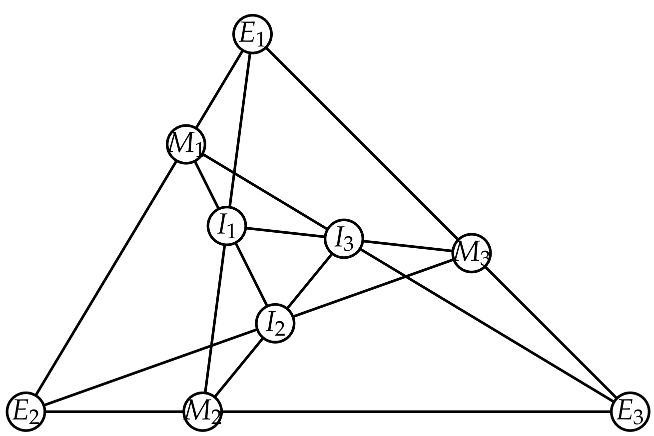
Como se puede observar en el diagrama de árbol, hay tres casos posibles de obtener exactamente una corona o tres casos posibles de obtener exactamente un escudo.
Por lo tanto, la probabilidad de que Pablo obtenga exactamente una corona o exactamente un escudo es $\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$.

2.1.3 Sofía tiene x caramelos, se come 30%, le queda 70%. Es decir, le quedan $\dfrac{70x}{100}$ caramelos, lo cual es 280 caramelos.
De $\dfrac{70x}{100}=280$ se tiene que $x=400$.
Sofía tiene entonces 400 caramelos, pero Carol se come 26% de ellos; es decir, $\dfrac{400\cdot 26}{100}=104$ caramelos.

2.1.4 Sea n el número de ciudades del país.
Los tres medios de transporte los denotaremos como A, B y T.
Para que se usen los tres medios de transporte en el país, debe tenerse $n\geq 3$.
Para $n=3$, basta unir cada par de ciudades con un medio de transporte distinto.

Para $n = 4$ sean C_1, C_2, C_3 y C_4 las cuatro ciudades. Unimos C_1 con C_2, C_2 con C_3, C_3 con C_4 y C_4 con C_1 mediante el medio de transporte A; unimos C_1 con C_3 mediante el medio de transporte B y, finalmente, unimos C_2 con C_4 mediante el medio de transpote T.
Para $n \geq 6$ cada ciudad está unida por lo menos con otras cinco ciudades; como ninguna de las ciudades tiene los tres servicios de transporte, entonces toda ciudad al menos debe estar unida con tres ciudades mediante un mismo medio de transporte. De esta manera, por ejemplo y sin pérdida de generalidad, tenemos una ciudad C_0 unida a otras tres ciudades C_1, C_2 y C_3 mediante un mismo medio de transporte A; luego las ciudades C_1, C_2 y C_3 solo pueden estar unidas por los medios de transporte B y T, pero las tres ciudades no pueden estar unidas por el mismo medio de transporte, por lo que entre los tres enlaces existentes debe haber por lo menos uno del tipo B y otro del tipo T, con lo que se tendría una ciudad atendida por los tres medios de trasporte, contradiciendo otra de las condiciones del problema.
Con lo anterior, no hay solución para este caso.
Para $n = 5$ hay que hacer un análisis de casos, llegando a la conclusión de que tampoco hay solución.
Finalmente, el máximo número de ciudades en dicho país es cuatro.

2.1.5 A los círculos que están en los vértices del triángulo grande denotémoslos E_1, E_2 y E_3, a los del triángulo interno I_1, I_2 e I_3, y los que están sobre los lados del trińgulo grande M_1, M_2 y M_3, tal como se muestra en la figura adjunta.



El primer jugador siempre gana colocando su primera ficha en alguna de las casillas M_1, M_2 o M_3.

Independientemente de la elección que efectúe el segundo jugador, el primero puede simpre lograr que la siguiente jugada del contrario sea obligada (defensiva) y seguidamente hacer una tercera que amenace tres en raya sobre dos líneas.

Con lo anterior, el jugador A se asegura la victoria al colocar su cuarta ficha.

Por ejemplo, si el primer jugador (jugador A) coloca su ficha en M_3, veamos las posibles jugadas.

Si el jugador B juega en una esquina:

B	A
E_1	I_1
I_3	I_2
M_1, E_2	Gana

B	A
E_2	I_3
I_1	E_3
M_1, E_1	Gana

B	A
E_3	I_3
I_1	I_2
M_2, E_2	Gana

Si el jugador B juega en una casilla interna:

B	A
I_1	E_1
E_3	E_2
M_1, I_2	Gana

B	A
I_2	E_1
E_3	I_1
M_2, I_3	Gana

B	A
I_3	E_3
E_1	E_2
M_2, I_2	Gana

Si el jugador B juega en una casilla media:

B	A
M_1	E_3
E_1	E_2
M_2, I_2	Gana

B	A
M_2	E_1
E_3	E_2
M_1, I_2	Gana

2.1.6 Para mover las fichas a la tercera, cuarta y quinta fila, se necesita un mínimo de 10 movimientos:

1) $2A$ ⓐ $\to 4A$
2) $3A$ ⓡ $\to 5A$
3) $2C$ ⓐ $\to 4C$
4) $3C$ ⓡ $\to 5C$
5) $1A$ ⓥ $\to 3C$
6) $1C$ ⓥ $\to 3A$
7) $3B$ ⓡ $\to 5D$
8) $1B$ ⓥ $\to 3B$
9) $2B$ ⓐ $\to 4B$
10) $5D$ ⓡ $\to 5B$

Por último, es imposible mover todas las filas a las últimas filas, ya que hay seis fichas (verdes y rojas) que se mueven solo en filas impares, mientras que las tres amarillas solo de mueven en filas pares y al final tenemos dos filas pares y una fila impar.

2.1.7 Al trabajar con leyes de potencias la expresión se tiene:

$$\sqrt[2017]{\frac{\left(k^{2017}\right)^{2017}}{k^{2017}}} - k = \frac{\left(k^{2017\cdot 2017}\right)^{\frac{1}{2017}}}{k} - k$$

$$= \frac{k^{2017}}{k} - k = k^{2016} - k = k\left(k^{2015} - 1\right)$$

2.1.8 Si la pulga sube 30 escalones (10 brincos hacia arriba) y luego baja 8 escalones (2 brincos hacia abajo) se llega a descansar en el escalón 22.
Ahora, note que hay que dar al menos 8 saltos, puesto que 7 o menos no llegaría a 22 ($3 \times 7 = 21$).
Por lo que se puede simplificar el problema a resolver $3x - 4y = 1$, minimizando $x + y$, donde ambos son enteros positivos, y representa los saltos hacia abajo, y x los saltos hacia arriba, después del sétimo hacia arriba.
Claramente $x > y$. Si hubiese una solución con $x + y < 5$, se tendría que los únicos casos con posibilidad de satisfacer las condiciones serían $x = 2, y = 1$ ($3x - 4y = 2$), o $x = 3, y = 1$ ($3x - 4y = 5$), donde ninguno satisface.
Por lo tanto, el menor número de saltos sería 12.

2.1.9 Se sabe que el perímetro del triángulo que dibujó María es $4 + 6 + 8 = 18$.
Para que Juan pueda dibujar un triángulo equilátero, cada lado debe medir la tercera parte de ese perímetro; es decir, cada lado debe medir $\frac{18}{3} = 6$.
Ahora, se calcula el área del triángulo equilátero cuyos lados miden 6 cm; para eso utilizamos la fórmula:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

2.1.10 Nótese que en el $\triangle BDF$, dado que $m\angle B = 58°$ y $m\angle F = 93°$, se tiene que $m\angle D = 29°$. Ahora, tomando el triángulo $\triangle ADG$, se tiene adicionalmente que $m\angle G = 100°$, por diferencia, $m\angle A = 51°$.

2.1.11 Cada círculo tiene radio 6 cm.
Los círculos de centros A y B, respectivamente, forman el lado $\overline{AB}$ cuya medida es 12 cm.
De igual manera, $AD = DC = CB = AB$.
El $\square ABCD$ es un cuadrado ya que son tangentes las circunferencias. De esta forma, se tiene $12 \cdot 12$ como área del $\square ABCD$.

2.2.1 Sofía tiene x caramelos, se come 30%, le queda 70%. Es decir, le quedan $\frac{70x}{100}$ caramelos, lo cual es 280 caramelos.
De $\frac{70x}{100} = 280$ se tiene que $x = 400$.
Sofía, originalmente, tiene entonces 400 caramelos, pero Carol se come 26% de ellos; es decir, $\frac{400 \cdot 26}{100} = 104$ caramelos.

2.2.2

1) Al final de la segunda jornada los resultados posibles son 0, 1, 3, 4 o 6, pues un equipo dado como máximo empató en un juego. Como hay 5 resultados posibles y 6 equipos, entonces hay dos equipos que tienen la misma puntuación y así, no es posible que todos los equipos tengan puntuaciones diferentes.

2) Si k es la puntuación del primer lugar y todas las puntuaciones son distintas, entonces la suma de los puntos de todos los equipos es como máximo

$$k + (k-1) + (k-2) + (k-3) + (k-4) + (k-5) = 6k - 15$$

Como de los 15 partidos 11 terminaron en empate, de estos se distribuyen $11 \cdot 2 = 22$ puntos. De los restantes 4 partidos, algún equipo tiene que haber ganado, de modo que se distribuye $4 \cdot 3 = 12$ puntos; es decir, la suma total debe ser igual a $22 + 12 = 34$ puntos. Luego, debe cumplirse que

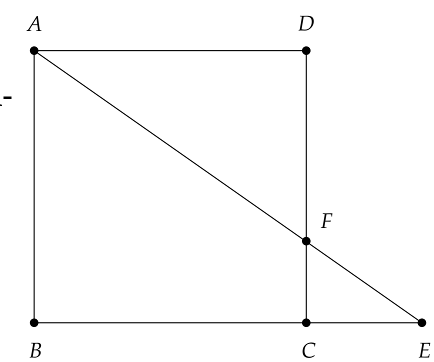
$$6k - 15 \geq 34 \Rightarrow k \geq 9$$

Para comprobar que esto, basta dar un ejemplo de tal situación. En la tabla siguiente se marca en la intersección de la fila i con la columna j con la cantidad de puntos ganados por el equipo i en ese partido.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	Total
E_1	$\times$	1	1	1	0	0	3
E_2	1	$\times$	1	1	1	0	4
E_3	1	1	$\times$	1	1	1	5
E_4	1	1	1	$\times$	3	1	7
E_5	3	1	1	0	$\times$	1	6
E_6	3	3	1	1	1	$\times$	9

2.2.3 Dado que $77 = 7 \cdot 11 = 1 \cdot 7 \cdot 11$, quiere decir que para O y L la única posibilidad para los valores es $\{O, L\} = \{1,7\}$, que son dos posibilidades.
Luego, para que cuatro dígitos distintos sumen 11, excluyendo al 1 y al 7, la únicas posibilidades son que $\{C, O, M, A\} = \{0,2,4,5\}$ o que $\{C, O, M, A\} = \{0,2,3,6\}$, de donde el número de posibilidades para cada caso es de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, por lo que en total el número de manera diferentes es de $2(24+24) = 96$.

2.2.4 Considere al figura adjunta:



Se tiene que $\overline{AB} \parallel \overline{FC}$ entonces $\triangle FCE \sim \triangle ABE$, entonces

$$\frac{FC}{AB} = \frac{CE}{BE} \Rightarrow \frac{FC}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow FC = \frac{3}{4}$$

El $\square ABCF$ es un trapecio, entonces

$$(ABCF) = \frac{(CF + AB)BC}{2} = \frac{\left(\frac{3}{4} + 3\right) \cdot 3}{2} = \frac{45}{8} = 5\frac{5}{8}$$

2.2.5 El $\triangle ABC$ tiene la misma base y la mitad de la altura del $\triangle AXY$ (esto con teorema de Tales o semejanza de triángulos al considerar las alturas desde B y desde Y sobre $\overline{AC}$ y $\overline{XC}$, respectivamente); por lo tanto, el $\triangle ABC$ tiene una área de 6 cm^2.
En forma similar, los triángulos $\triangle ZCX$ y $\triangle ZBY$ tienen áreas iguales a 12 cm^2 cada uno (el doble del área del $\triangle ABC$).
Por lo tanto, el área del $\triangle XYZ$ es de 42 cm^2.

2.2.6 Denote n: única solución de la ecuación cuadrática $x^2 + \frac{p}{3}x + q - 5 = 0$.
Luego, $x^2 + \frac{p}{3}x + q - 5 = 0$ se puede escribir como $(x-n)^2 = x^2 - 2nx + n^2 = 0$.
Luego, $-2n = \frac{p}{3}$ y $n^2 = q - 5$, de donde $p = -6n$, $q = n^2 + 5$ y $p + q = n^2 - 6n + 5 = (n-5)(n-1)$.
Como $p + q$ es un número primo, hay dos posibles casos:
1) $n - 5 = 1$, $n = 6$ y $n - 1 = 5$

2) $n-1=1$, $n=2$ y $n-5=-3$

En el primer caso $p+q=5$ y en el segundo $p+q=-3$. El segundo caso no puede darse pues $p+q$ es un número primo. Así, $p+q=5$.

2.3.1 Si el número en la primera casilla es x, entonces la casilla de la derecha y la de abajo tienen dos posibilidades para no sumar 0, digamos y y z.

Si estas dos fueran la misma, entonces la cuarta casilla tiene dos opciones para no sumar cero, pero si son diferentes solo le queda una opción.

Así por cada x hay 6 opciones y como x tiene 3 posibilidades en total hay 18 posibilidades.

x		y	
			z
y		2	1
	z	1	2

2.3.2 Sea n el número de equipos americanos y $n+9$ el número de equipos europeos. Los equipos americanos jugaron $\binom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$ partidos entre ellos y como no hubo empates ganaron en total $\dfrac{n(n-1)}{2}+6$ partidos.

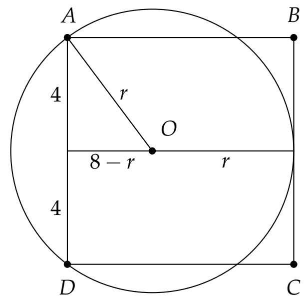
Similarmente, los equipos europeos jugaron $\binom{n+9}{2}=\dfrac{(n+8)(n+9)}{2}$ partidos entre ellos y ganaron $n(n+9)-6$ partidos contra equipos americanos, por lo que en total ganaron $\dfrac{(n+8)(n+9)}{2}+n(n+9)-6$ partidos.

Luego:

$$\begin{aligned}
& 9\left(\frac{n(n-1)}{2}+6\right) &=& \frac{(n+8)(n+9)}{2}+n(n+9)-6 \\
\Rightarrow\ & 3n^2-22n+24 &=& 0 \\
\Rightarrow\ & (3n-4)(n-6) &=& 0 \\
\Rightarrow\ & n=\frac{4}{3} \text{ o } n=6
\end{aligned}$$

Como n es entero, se concluye que la cantidad de equipos americanos es 6.

2.3.3 Considere la figura



Se tiene que O es el centro de la circunferencia y entonces por Pitágoras se tiene:

$$r^2 = 4^2 + (8-r)^2 \Rightarrow 16r = 80 \Rightarrow r = 5$$

2.3.4 El $\triangle ABC$ tiene la misma base y la mitad de la altura del $\triangle AXY$ (esto con teorema de Tales o semejanza de triángulos al considerar las alturas desde B y desde Y sobre $\overline{AC}$ y $\overline{XC}$, respectivamente); por lo tanto, el $\triangle ABC$ tiene una área de 6 cm^2.
En forma similar, los triángulos $\triangle ZCX$ y $\triangle ZBY$ tienen áreas iguales a 12 cm^2 cada uno (el doble del área del $\triangle ABC$).
Por tanto el área del $\triangle XYZ$ es de 42 cm^2.

2.3.5 Para que $P(x) = Q(x) = 0$ se debe cumplir que:
$P(x) - Q(x) = (a-c)x^3 + (c-a)x = (a-c)x(x-1)(x+1) = 0$
Esto nos dice que las posibles raíces comunes deben ser $0, 1$ o -1 y no puede haber una raíz doble común. Ahora $x = 0$ no es raíz de ninguno de los polinomios.
Por otra parte $P(1) = Q(1) = 0$ implica que $a+b+c+5 = 0$ y $P(-1) = Q(-1) = 0$ implica que $-a+b-c+5 = 0$, de donde $b = -5$ y $a = -c$

2.3.6 Utilizando fórmula general, el discriminante de $x^2 + nx - n$ debe cumplir que $n^2 + 4n = k^2$, con k entero.
Entonces $n^2 + 4n + 4 = k^2 + 4 \Rightarrow (n+2)^2 = k^2 + 4 \Rightarrow (n+2)^2 - k^2 = 4 \Rightarrow (n+2+k)(n+2-k) = 4$.
De lo anterior, se tienen los sistemas:
$n+2+k = 1 \wedge n+2-k = 4$ con soluciones $k = \dfrac{-3}{2} \wedge n = \dfrac{1}{2}$
$n+2+k = -1 \wedge n+2-k = -4$ con soluciones $k = \dfrac{3}{2} \wedge n = \dfrac{-9}{2}$
$n+2+k = 4 \wedge n+2-k = 1$ con soluciones $k = \dfrac{3}{2} \wedge n = \dfrac{1}{2}$
$n+2+k = -4 \wedge n+2-k = -1$ con soluciones $k = \dfrac{-3}{2} \wedge n = \dfrac{-9}{2}$
$n+2+k = 2 \wedge n+2-k = 2$ con soluciones $k = 0 \wedge n = 0$
$n+2+k = -2 \wedge n+2-k = -2$ con soluciones $k = 0 \wedge n = -4$
De los cuales solo los dos últimos tienen soluciones enteras, con $n = 0$ y $n = -4$, que dan soluciones para x que son $x = 0$ y $x = 2$.
Por lo que la cantidad de valores de n enteros para los cuales la ecuación tiene soluciones enteras es 2.

Soluciones del Capítulo 3

3.1.1 Sabemos que las llaves de la celda corresponden a alguna de las 9 parejas: $(1,3)$, $(3,5)$, $(5,7)$, $(7,9)$, $(9,11)$, $(2,4)$, $(4,6)$, $(6,8)$, $(8,10)$.

Podemos hacer dos subgrupos y preguntar cuántas de ellas no le sirven; por lo tanto, se sabe que en cada subgrupo le sirven 0, 1 o 2 llaves, entonces hay un total $3 \times 3 = 9$ posibilidades. La idea es escoger los subgrupos del tal manera que las 9 respuestas determinen las parejas.

Consideremos los siguientes dos subgrupos $P = \{1,2,3,5,8,10\}$ y $Q = \{1,2,3,4,6,11\}$

Pareja	¿Cuántos hay en P?	¿Cuántos hay en Q?
1 y 3	2	2
3 y 5	2	1
5 y 7	1	0
7 y 9	0	0
9 y 11	0	1
2 y 4	1	2
4 y 6	0	2
6 y 8	1	1
8 y 10	2	0

3.1.2 a)

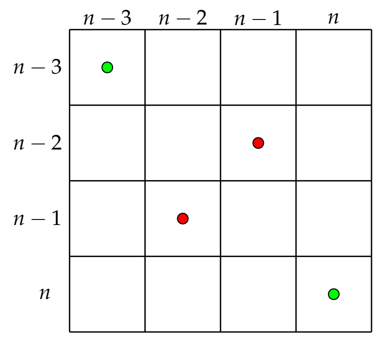
Numeremos las filas y columnas empezando por la casilla superior izquierda y llamemos (a,b) a la casilla que está en la fila a y columna b. Llamemos *movimiento 1* al que consiste en mover la ficha dos casillas a la derecha y una hacia abajo y *movimiento 2* al que consiste en mover la ficha dos casillas hacia abajo y una a la derecha. Observemos que para llegar a una casilla (n,n) se deben realizar la misma cantidad de *movimientos 1* que de *movimientos 2*.

Si la ficha se encuentra en la casilla (a,b) y se realizan k *movimientos 1* se llegará a la casilla $(a+2k, b+k)$; si la ficha se encuentra en la casilla (a,b) y se realizan k *movimientos 2* se llegará a la casilla $(a+k, b+2k)$. Entonces, si la ficha está en $(1,1)$ y se ralizan k *movimientos 1* y k *movimientos 2* se llegará a la casilla $(1+3k, 1+3k)$. Entonces, los únicos valores de n para los cuales se puede llegar a la casilla (n,n) son los que tienen la forma $n = 1+3k$, con $k \in \mathbb{N}$

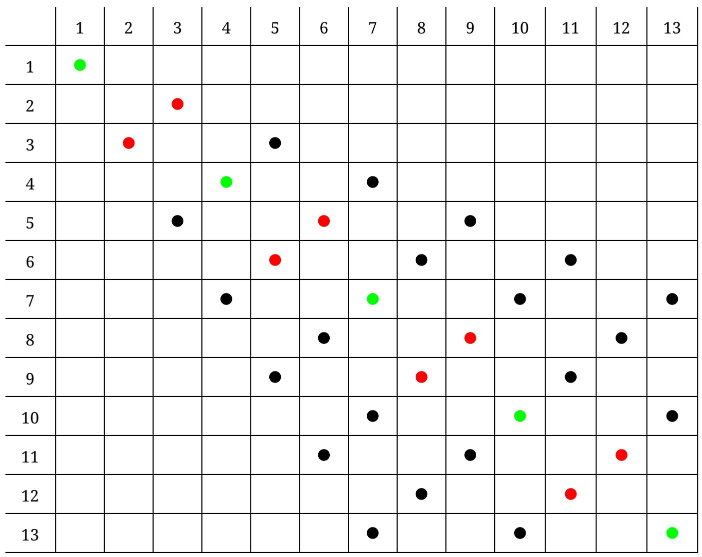
b)

Vemos que si la ficha llega a la casilla (n,n) ganará, por lo que diremos que esta casilla es *ganadora*, entonces, aquellas casillas desde las que se pueda mover la ficha a una posición ganadora serán casillas *perdedoras*. Vemos que las casillas $(n-1, n-2)$ y $(n-2, n-1)$ son *perdedoras*.

Ahora, una casilla que obligue al siguiente jugador a moverse a una casilla perdedora también será una casilla ganadora. Vemos que la casilla $(n-3, n-3)$ es *ganadora*.



Vemos entonces que todas las casillas (a,a) son casillas *ganadoras*, por lo que el primer jugador siempre llevará la ficha a una casilla *perdedora*; luego el segundo jugador siempre ganará manteniendo la ficha a una casilla ganadora (a,a); es decir, las que están sbre la diagonal principal.



3.1.3 Nótese que si tenemos los dígitos por posición, denotados como sigue:

$$d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6 \quad d_7 \quad d_8 \quad d_9 \quad d_0$$

entonces necesariamente $d_0 = 0$, puesto que el número completo es divisible entre 10. Además, el número $d_1d_2d_3d_4d_5$ es divisible entre 5, por lo que $d_5 = 0$ o $d_5 = 5$. Pero al ser $d_0 = 0$, entonces $d_5 = 5$. LLenando parcialmente se obtiene:

$$d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad 5 \quad d_6 \quad d_7 \quad d_8 \quad d_9 \quad 0$$

Nótese que d_1d_2, $d_1d_2d_3d_4$, $d_1d_2d_3d_45d_6$ y $d_1d_2d_3d_45d_6d_7d_8$ son todos pares, por lo que d_2, d_4, d_6 y d_8 son todos pares y, por lo tanto, en algún orden, son 2, 4, 6 y 8. Por lo tanto d_1, d_3, d_7 y d_9 son impares. Como $d_1d_2d_3d_4$ es divisible por 4, entonces, d_3d_4 es divisible por 4, y como d_3 es impar, esto fuerza a que d_4 sea 2 o 6. Esto nos da dos casos:

$$\begin{array}{cccccccccc} d_1 & d_2 & d_3 & 2 & 5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_9 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 6 & 5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_9 & 0 \end{array}$$

Como $d_1+d_2+d_3$ es múltiplo de 3, al igual que $d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6$, entonces $d_4+d_5+d_6$ es divisible por 3. Esto solo deja la posibilidad de $d_6=8$ en el primer caso, y $d_6=4$ en el segundo:

$$\begin{array}{cccccccccc} d_1 & d_2 & d_3 & 2 & 5 & 8 & d_7 & d_8 & d_9 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 6 & 5 & 4 & d_7 & d_8 & d_9 & 0 \end{array}$$

Dado que $d_1d_2d_3d_45d_6d_7d_8$ es divisible entre 8, se tiene que $d_6d_7d_8$ debe ser divisible entre 8, y d_7 impar, y distinto de 5, y d_8 par, y distinto de los pares usados, según el caso. En el primer caso las posibilidades serían, a primera vista, 816, 832, 873 y 896, pero 2 ya fue usado, entonces solo se podrían 816 y 896. Similarmente, en el segundo caso solo se puede usar 432 y 472:

$$\begin{array}{cccccccccc} d_1 & d_2 & d_3 & 2 & 5 & 8 & 1 & 6 & d_9 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 2 & 5 & 8 & 9 & 6 & d_9 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & d_9 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 6 & 5 & 4 & 7 & 2 & d_9 & 0 \end{array}$$

Aún mejor, en cada uno de estos casos, solo queda un dígito par, que debe ir en la posición: d_2.

$$\begin{array}{cccccccccc} d_1 & 4 & d_3 & 2 & 5 & 8 & 1 & 6 & d_9 & 0 \\ d_1 & 4 & d_3 & 2 & 5 & 8 & 9 & 6 & d_9 & 0 \\ d_1 & 8 & d_3 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & d_9 & 0 \\ d_1 & 8 & d_3 & 6 & 5 & 4 & 7 & 2 & d_9 & 0 \end{array}$$

Las posiciones restantes son impares: 3, 7 y 9 en el primer caso; 1, 3 y 7 en el segundo; 1, 7 y 9 en el tercero, y 1, 3 y 9 en el cuarto. Nótese que de todas las posibles sumas en el primer caso (3+7+4, 3+9+4 y 7+9+4), ninguna es divisible por 3 (recuerde que $d_1d_2d_3$ es divisible por 3), por lo que el caso completo se puede eliminar. Probando en los otros casos, por eliminación, (agregando el dígito restante en cada caso en la posición d_9) se obtienen las siguientes posibilidades:

$$\begin{array}{c} 1\,472\,589\,630 \\ 7\,412\,589\,630 \\ 1\,896\,543\,270 \\ 9\,816\,543\,270 \\ 7\,896\,543\,210 \\ 9\,876\,543\,210 \\ 1\,836\,547\,290 \\ 3\,816\,547\,290 \\ 1\,896\,547\,230 \\ 9\,816\,547\,230 \end{array}$$

No se ha probado la divisibilidad por 7 del número $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$. Esta propiedad solo la satisfacen tres: 816, 547 y 290.

3.1.4 La respuesta es no, ya que:

- De los 14 números, 7 de ellos son pares y, por lo tanto, divisibles por 2.
- Vamos a probar que de los 7 restantes al menos uno no es divisible por 3, 5, 7 y 11.

- De los 7 impares, a lo sumo 3 son divisibles por 3, a lo sumo 2 son divisibles por 5, únicamente 1 es divisible por 7, y únicamente 1 es divisible por 11.
- Pero para que 3 sean divisible por 3, se tiene que dar que el primero, el del centro y el ultimo sean múltiplos de 3. Eso significa que la diferencia entre los que sobran es menor que 10, por consiguiente solo 1 será divisible por 5. Quiere decir que de los 7 impares, a los sumo tendríamos 3 que son divisibles por 3, y 3 que son divisible por 5, 7 y 11, respectivamente; por lo tanto, habrá al menos uno no divisible por ellos.

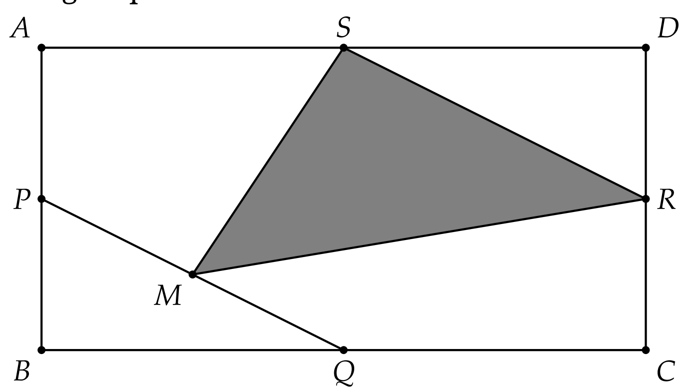
3.1.5 Observamos que si $n^2+45=x^2$, entonces $45=x^2-n^2=(x-n)(x+n)$.
Como $45=1\times 45=3\times 15=5\times 9$, y como $x-n<x+n$, se tiene que

$$\begin{array}{ccc} x+n=45 & x+n=15 & x+n=9 \\ x-n=1 & x-n=3 & x-n=5 \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ x=23 & x=9 & x=7 \\ n=22 & n=6 & n=2 \end{array}$$

Por lo que todos los posibles casos en los que esto pasa son $n=2$, $n=6$ y $n=22$.

3.1.6 Considere la siguiente figura como guía para la solución.

El triángulo RSM tiene la mitad del área del paralelogramo $PQRS$, esto dado que si tomamos como base el segmento RS la altura serìa la misma entre ellos, por lo tanto, se cumple que $(RSM)=\dfrac{(PQRS)}{2}$.
Esto quiere decir que el área del triángulo RSM es un octavo del área del rectángulo $ABCD$.



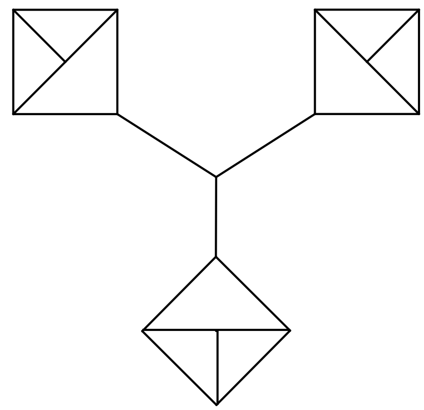
Por lo tanto, la razón entre sus áreas está dada por $\dfrac{(RSM)}{(ABCD)}=\dfrac{1}{8}$.

3.1.7 Sea x, tal que $m\angle BAE=x$. Como $m\angle BCA=2m\angle BAE$, entonces $m\angle BCA=2x$.
Luego, $m\angle AED=36^\circ+x$, ya que es ángulo externo del $\triangle AEB$.
Como $AD=ED$, entonces $m\angle EAD=36^\circ+x$; además, $m\angle BAC=36^\circ+2x$.
Por otra parte, como $AC=BC$, entonces $m\angle ABC=36^\circ+2x$.
Así, $36^\circ+2x+36^\circ+2x+2x=180^\circ$ y $x=18^\circ$.

3.2.1 En el primer movimiento se tiene que juntar dos de los tres puños de bolitas ya que ninguno de los tres tiene una cantidad par de bolitas, si se junta los puños de 49 y 51 entonces en el siguiente paso la cantidad de bolitas será múltiplo de 5.
Ahora bien, los posibles pasos son dividir el puño que tiene cantidad par o bien sumar los puños. Los pasos siguientes igual se tendrán cantidad de bolitas múltiplo de 5, por lo que es imposible conseguir puños de una bolita.

En las otras opciones de juntar dos puños se tendría 5 más 49, esto daría un puño de 44 y otro de 51, ambos son múltiplos de 3, utilizando el mismo análisis se concluye que es imposible lograr puños de una bolita.
La última posibilidad es juntar 5 y 51, por lo que quedaría puños de 49 y 56, ambos múltiplos de 7, análogamente se concluye lo mismo.
Observe que se tiene un total de 105 bolitas.
Por lo tanto, como lo indica Luis, es imposible obtener un ganador.

3.2.2 No siempre es posible.
Se puede probar que 16 es el menor número de personas que debe tener un aula en el que cada persona conoce a exactamente tres personas para que no sea posible repartirlos en parejas de tal forma que no haya dos personas en la misma pareja y que las personas en cada pareja se conozcan.
Un ejemplo en el que no es posible se muestra en la siguiente gráfica, donde los puntos corresponden a las personas y dos puntos están unidos si las personas se conocen.
Es imposible escoger ocho líneas que no se toquen y que cubran todos los puntos de la gráfica.



3.2.3 Ana se da cuenta del error de Pedro porque notó el patrón.
Para $n=3$ la suma es $S=\dfrac{2}{1\cdot 3}+\dfrac{2}{2\cdot 3}=1$
Para $n=4$ la suma es $S=\dfrac{2}{1\cdot 4}+\dfrac{2}{2\cdot 3}+\dfrac{2}{3\cdot 4}=1$
Esto se debe a que cuando pasamos de n a $n+1$ las fracciones donde $a+b=n+1$ (que cumplen las hipótesis para n) ya no cumplen las hipótesis para $n+1$. Es decir, se pierden las fracciones del tipo $\dfrac{2}{a\,(n+1-a)}$, pero se ganan dos nuevas fracciones $\dfrac{2}{a\,(n+1)}+\dfrac{2}{(n+1-a)\,(n+1)}$ ya que si a y $n+1$ son primos relativos, entonces también lo son $n+1$ y $n+1-a$.
Además, se tiene que

$$\frac{2}{a\,(n+1-a)}=\frac{2}{a\,(n+1)}+\frac{2}{(n+1-a)\,(n+1)}$$

Por lo tanto, la suma siempre es 1.
Si Pedro no consideró la fracción cuando $a=1$ y $b=n$; es decir, la fracción $\dfrac{2}{n}$ la suma sería.

Para $n=3$ la suma es $S=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

Para $n=4$ la suma es $S=1-\dfrac{2}{4}=\dfrac{2}{4}$

Para $n=5$ la suma es $S=1-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$

Por lo tanto, para Pedro $S=\dfrac{n-2}{n}=\dfrac{2015}{2017}$, con lo cual $n=2017$.

3.2.4 Numeremos las filas y columnas empezando por la casilla superior izquierda y llamemos (m,n) a la casilla que está en la fila m y columna n.

Vemos que los únicos movimientos posibles a partir de la casilla inicial $(1,1)$ es a las casillas $(3,2)$ y $(2,3)$; a partir de estas dos posiciones, únicamente se puede mover a las casillas $(5,3)$, $(4,4)$ y $(3,5)$; a partir de estas tres posiciones únicamente se puede mover a las casillas $(7,4)$, $(6,5)$, $(5,6)$ y $(4,7)$. Observamos que la cantidad posible de casillas a las que se puede llegar aumenta en una unidad y corresponden a casillas en diagonal.

	1	2	3	4	5	6	7
1	•						
2			•				
3		•			•		
4				•			•
5			•			•	
6					•		
7				•			

Si nos fijamos en la casilla que está más abajo de cada una de estas diagonales (hasta el momento son las casillas $(1,1)$, $(3,2)$, $(5,3)$ y $(7,4)$), como a partir de la casilla anterior se baja dos unidades y se mueve a la derecha una unidad, se observa que todas estas casillas están en una fila impar m y en una columna que correspode a $\dfrac{m+1}{2}$, por lo que en la cuadrícula de 2017×2017 se llegará hasta la casilla $(2017,1009)$.

Hasta esa casilla se tiene digonales *completas*, en el sentido que cada una tiene una casilla más que la anterior, por lo que hasta este momento se tienen $1+2+3+\cdots+1009 = \dfrac{1009 \cdot 1010}{2} = 1009 \cdot 505$ posibles casillas hasta las que se puede llegar.$(*)$

De ahí en adelante ya no son diagonales *completas*, por lo que se debe buscar otra forma de contar las casillas que faltan. Observemos que 2017 es impar y deja residuo 1 al dividirse por 3; esto es equivalente a decir que deja residuo 1 al dividirse por 6. Analicemos entonces lo que ocurre con números más pequeños con estas características: 7, 13, 19 y 25.

	1	2	3	4	5	6	7
1	•						
2			•				
3		•			•		
4				•			•
5			•			•	
6					•		
7				•			•

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	•												
2			•										
3		•			•								
4				•			•						
5			•			•			•				
6					•			•			•		
7				•			•			•			•
8						•			•			•	
9					•			•			•		
10							•			•			•
11						•			•			•	
12								•			•		
13							•			•			•

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	●																		
2			●																
3		●			●														
4				●			●												
5			●			●			●										
6					●			●			●								
7				●			●			●			●						
8						●			●			●			●				
9					●			●			●			●			●		
10							●			●			●			●			●
11						●			●			●			●			●	
12								●			●			●			●		
13							●			●			●			●			🔴
14									●			●			●			🔴	
15								●			●			●			🔴		
16										●			●			🔴			🔴
17									●			●			🔴			🔴	
18											●			🔴			🔴		
19										●			🔴			🔴			🔴

Ordenemos lo que se observa de la siguiente manera:
7×7: $7 = 6\cdot 1+1$, cantidad de casillas que no corresponden a diagonales *completas*: 1
13×13: $13 = 6\cdot 2+1$, cantidad de casillas que no corresponden a diagonales *completas*: $1+4$
19×19: $13 = 6\cdot 3+1$, cantidad de casillas que no corresponden a diagonales *completas*: $1+4+7$
En general se puede plantear que para una cuadrícula de tamaño $k\times k$, con $k = 6\cdot n+1$ la cantidad de casillas que no corresponden a diagonales *completas* es $1+4+7+\ldots+(3n-2)$. Como $2017 = 6\cdot 336+1$, se tiene

$$1+4+7+\ldots+1009 = \sum_{n=1}^{336}(3n-2) = 3\sum_{n=1}^{336} n - 2\cdot 336 = 3\cdot\frac{336\cdot 337}{2} - 672 = 169\,176$$

Finalmente, por lo obtenido en $(*)$, la cantidad total de casillas a las que se puede llegar es

$$1009\cdot 505 + 3\cdot\frac{336\cdot 337}{2} - 672 = 678\,721$$

3.2.5 Se analizan cada uno de los incisos.

(a) $7 = 5+2 \to 5\cdot 2 = 10 = 2+8 \to 2\cdot 8 = 16 = 12+4 \to 12\cdot 4 = 48$.
(b) Sea $N \geq 5$ un número natural. Sea K cualquier número entero. Se evidenciará una secuencia de pasos que lleva al número K. Primero observe que, como $N\geq 5$, entonces, haciendo la descomposición $N = (N-2)+2$, se obtiene $N_1 = 2(N-2) \geq 2\cdot 3 = 6$. Repitiendo este proceso se obtiene

$$N_1 = 2 + (N_1 - 2) \to N_2 = 2\,(N_1 - 2) \geq 2 \cdot 4 = 8 = 4 + 2^2$$

$$N_2 = 2 + (N_2 - 2) \to N_3 = 2\,(N_2 - 2) \geq 2 \cdot 6 = 12 = 4 + 2^3$$

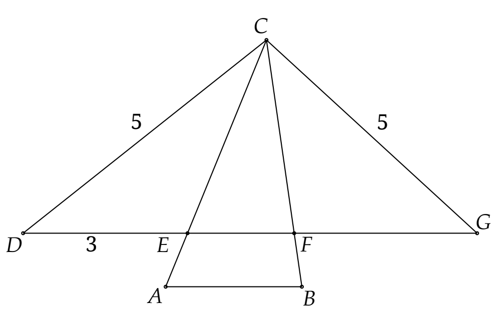
$$N_3 = 2 + (N_3 - 2) \to N_4 = 2\,(N_3 - 2) \geq 2 \cdot 10 = 20 = 4 + 2^4$$

$$\vdots$$

$$N_r = 2 + (N_r - 2) \to N_{r+1} = 2\,(N_r - 2) \geq 2 \cdot 10 = 20 = 4 + 2^{r+1}$$

donde r es un número natural.
Ahora, se escoge r de modo que $4 + 2^{r+1} \geq K$, luego, $N_{r+1} \geq K$. A continuación, se utiliza que $N_{r+1} = 1 + (N_{r+1} - 1)$, entonces $N_{r+2} = 1 \cdot (N_{r+1} - 1)$; es decir, $N_{r+2} = N_{r+1} - 1$, y repitiendo este proceso, se desciende un número a cada paso; como $N_{r+1} \geq K$, necesariamente $N_j = K$, para $j \geq r + 1$.

3.2.6 Considere la figura:



Sea $\alpha = m\angle DEC$, entonces $m\angle CAB = 2\alpha$. Sea $\beta = m\angle ABC$, entonces $m\angle FCG + \alpha = \beta \Rightarrow m\angle FCG = \beta - \alpha$
$m\angle CEF = m\angle CAB = 2\alpha$ y $m\angle CFE \leq m\angle ABC = \beta$

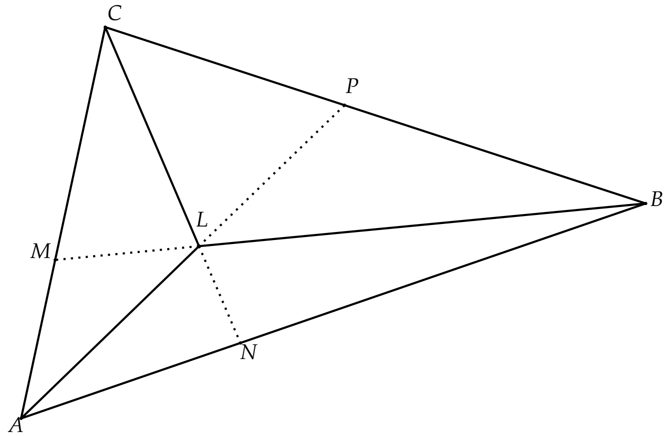
Luego $m\angle DEC = 180° - 2\alpha$ y $m\angle CFG = 180° - \beta$
En $\triangle DEC$, se tiene $m\angle EDC + (180° - 2\alpha) + \alpha = 180° \Rightarrow m\angle EDC = \alpha$
$\therefore \triangle DEC$ es isósceles con $DE = EC$.

En $\triangle GFC$, se tiene $m\angle FGC + 180° - \alpha + \beta - \alpha = 180° \Rightarrow m\angle FGC = \alpha$
$\therefore \triangle DGC$ es isósceles con $DC = GC$.

$\triangle ABC \sim \triangle EFC \Rightarrow \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{EC}{AC} \Rightarrow EC = AC \cdot \dfrac{EF}{AB}$
$\triangle DBC \sim \triangle DCG \Rightarrow \dfrac{DE}{DC} = \dfrac{DC}{DB}$
Así, $\Rightarrow DC^2 = DE \cdot DG \Rightarrow DC^2 = EC \cdot DG \Rightarrow DC^2 = AC \cdot \dfrac{EF}{AB} \cdot DG$
$\Rightarrow DC^2 = \dfrac{AC}{DC} \cdot EF \cdot \dfrac{DG}{AB} \Rightarrow DC = \dfrac{5}{3} \cdot EF \cdot \dfrac{7}{3} \Rightarrow \dfrac{DC}{EF} = \dfrac{35}{9}$

3.2.7 De acuerdo con la información dada, se obtiene la siguiente figura:

Por el triángulo ALB y la desigualdad triangular se obtiene que $LA + LB > AB$. Análogamente, $LB + LC > BC$ y $LA + LC > AC$.
La primera desigualdad se obtiene al sumar los respectivos lados de las tres desigualdades encontradas anteriormente. Es decir;
$LA + LB + LB + LC + LA + LC > AB + BC + AC \Rightarrow \dfrac{AB + BC + AC}{2} < LA + LB + LC$.
Para probar la segunda desigualdad ($LA + LB + LC < AB + BC + AC$), se prolonga el $\overline{BL}$ y se interseca con el $\overline{AC}$ en el punto M. Luego, $AB + AC = AB + AM + MC > BM + MC = LB + LM + MC > LB + LC \Rightarrow AB + AC > LB + LC$.



De forma análoga, $AC + BC > LA + LB$ (al prolongar el $\overline{CL}$ y se interseca con el $\overline{AB}$ en el punto N) y $AB + BC > LA + LC$ (al prolongar el $\overline{AL}$ y se interseca con el $\overline{BC}$ en el punto P).
Se obtiene la segunda desigualdad, al sumar los respectivos lados de las tres desigualdades encontradas anteriormente. Es decir;
$AB + AC + AC + BC + AB + BC > LB + LC + LA + LB + LA + LC \Rightarrow LA + LB + LC < AB + BC + AC$.

3.3.1 Llamemos a las fichas amarillas A y a las blancas B. Veamos primero que una posición perdedora es aquella en la que, sin importar la ficha que le toque escoger al jugador, al dársela al otro ganará.
Vemos también que en la primera jugada Yolanda debe escoger A, pues si escoge B Xinia ganará. Por su parte Xinia debe colocar esta ficha A en una esquina, pues de lo contrario quedará en una posición perdedora. Igualmente, en la segunda jugada Xinia debe escoger A y Yolanda debe colocarla en la otra esquina. Entonces, luego de las dos primeras jugadas se tendrá el siguiente acomodo

A			A
		B	
	B		
A			A

Veamos ahora que Yolanda siempre puede ganar si escoge una A para darle a Xinia.
Si Xinia la coloca en una casilla central, debe escoger una B para darle a Yolanda y esta ganará con solo colocarla en la otra casilla central y escoger una A para darle a Xinia, pues sin importar donde la coloque quedará en una posición perdedora.

A			A
		B	
	B	A	
A			A

A			A
	B	B	
	B	A	
A			A

Si Xinia la coloca en una casilla de los lados tiene dos posibilidades, pues las posiciones 1 son simétricas entre sí, al igual que las posiciones 2:

A	2	1	A
2		B	1
1	B		2
A	1	2	A

I Caso:
Si la coloca en una posición 1, debe escoger una B y Yolanda la colocará tapando la fila de fichas A. Ahora Yolanda gana escogiendo una A, pues sin importar donde la coloque Xinia quedará en una posición perdedora.

A			A
		B	A
	B		
A			A

A			A
		B	A
	B		B
A			A

II Caso:
Si la coloca en una posición 2, debe escoger una B. Yolanda la colocará tapando la fila de fichas A (como indica la figura) y escoge una A para darle a Xinia. Observe que la única posibilidad de Xinia para colocar esta A es la casilla marcada con $*$, pues en todas las demás llevaría a una posición perdedora. Además, para no perder inmediatamente, debe escoger una B para darle a Yolanda.

A			A
		B	
	B		A
A			A

A			A
		B	B
	B		A
A			A

A			A
	$*$	B	B
	B		A
A			A

Ahora Yolanda gana colocando esta B en la casilla indicada y escogiendo una A para que Xinia coloque, pues al igual que el I Caso, sin importar donde la coloque Xinia quedará en una posición perdedora.

A			A
	A	B	B
	B	B	A
A			A

3.3.2 Sea $m = n + 1$ y note que $\sum_{i=1}^{17}(n+i) = 17n + 17 \times 9$ por lo tanto n debe ser múltiplo de 3, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 3k$.

Ahora, por principio del palomar, hay dos subconjuntos que tienen al menos 6 elementos; es decir, que entre ellos dos hay 12 elementos. Así se tiene que:

$$2\left(\frac{17\times 3k+153}{3}-6\times 3k\right)\geq\sum_{i=1}^{12} i=78\Rightarrow 12\geq k\Rightarrow 36\geq n \tag{3.1}$$

Falta encontrar combinaciones que sirvan. Bastaría encontrar para k dos subconjuntos disjuntos de $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$ de seis elementos cada uno tal que su suma de $51-k$. Para esto observe la siguiente tabla:

k	51-k	Conjunto	Conjunto
12	39	1,2,3,10,11,12	4,5,6,7,8,9
11	40	1,2,3,9,12,13	4,5,6,7,8,10
10	41	1,2,3,8,13,14	4,5,6,7,9,10
9	42	1,2,3,7,14,15	4,5,6,8,9,10
8	43	1,2,3,,6,15,16	4,5,7,8,9,10
7	44	1,2,3,5,16,17	1,6,7,8,9,10
6	45	1,4,6,7,11,16	2,3,5,10,12,13
5	46	1,4,6,8,11,16	2,3,5,10,12,14
4	47	1,4,7,8,11,16	2,3,6,10,12,14
3	48	1,4,7,9,11,16	2,3,6,10,12,15
2	49	1,4,8,9,11,16	2,3,7,10,12,15
1	50	1,4,8,9,11,17	2,3,7,10,12,16
0	51	1,5,8,9,11,17	2,3,7,10,13,16

De esta forma todos los posibles valores de m son 1,4,7,10,13,16,19,22,25,28,31,34,37.

3.3.3 Sea x el número en cuestión. Expresemos $x=10b+a$, donde a es el último dígito del número, y por lo tanto, es un entero no negativo menor que 10. Si b tiene k dígitos, entonces, sabemos que $2x=10^k a+b=2\left(10b+a\right)=20b+2a$.
De aquí obtenemos que $19b=\left(10^k-2\right)a$. Como 19 es primo y $0<a<10$, necesariamente se cumple que 19 no divide a a, y por lo tanto, divide a 10^k-2.
Por lo tanto, estamos buscando la combinación, si esta existe, del menor posible valor de k y el menor valor de a. Además, se tiene que $10^k\cong 2 \mod 19$.
Nótese que

$$\begin{array}{lll}
10^1\cong 10 \mod 19, & 10^2\cong 5 \mod 19, & 10^3\cong 12 \mod 19,\\
10^4\cong 6 \mod 19, & 10^5\cong 3 \mod 19, & 10^6\cong 11 \mod 19,\\
10^7\cong 15 \mod 19, & 10^8\cong 17 \mod 19, & 10^9\cong 18 \mod 19,\\
10^{10}\cong 9 \mod 19, & 10^{11}\cong 14 \mod 19, & 10^{12}\cong 7 \mod 19,\\
10^{13}\cong 17 \mod 19, & 10^{14}\cong 16 \mod 19, & 10^{15}\cong 8 \mod 19,\\
10^{16}\cong 4 \mod 19, & 10^{17}\cong 2 \mod 19. &
\end{array}$$

De aquí se concluye que b tiene al menos 17 dígitos. Más aún, se tiene que

$$b=\frac{a\left(10^k-2\right)}{19},$$

Si se intenta $k = 17$ y $a = 1$, se obtiene $b = 5263157894736842$, que tiene únicamente 16 dígitos, y por lo tanto, no es una solución.
Si se intenta $a = 2$, se obtiene $b = 10526315789473684$, y por lo tanto

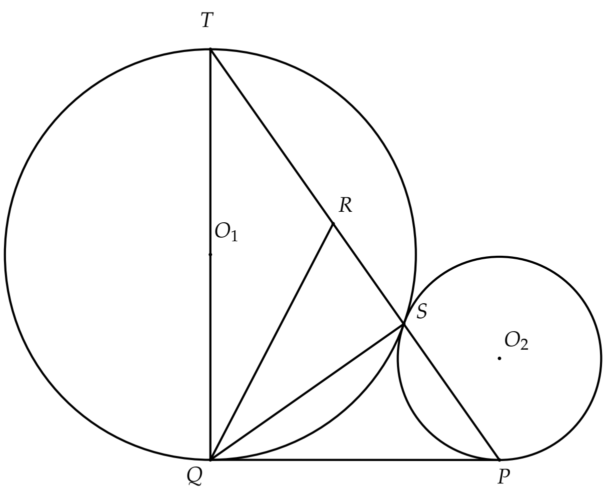
$$x = 105263157894736842$$

y nótese que

$$105263157894736842 \times 2 = 210526315789473684$$

por lo que tenemos nuestra solución.

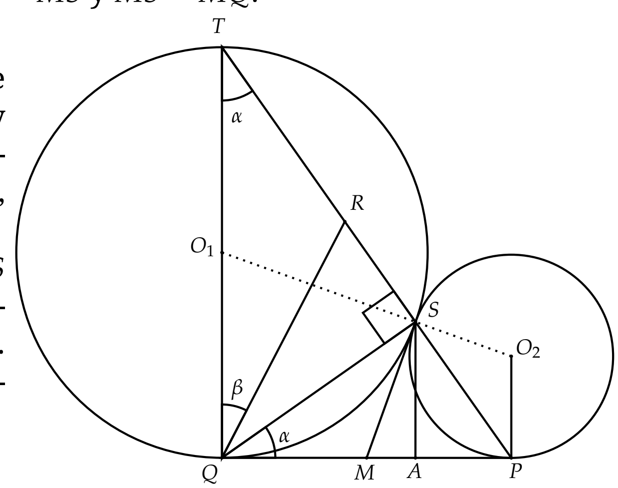
3.3.4 De acuerdo con la información dada, se obtiene la siguiente figura:



Considere $m\angle RTQ = \alpha$ y $m\angle RQT = m\angle SQR = \beta$. Para demostrar que $QR = RT$, basta probar que $\alpha = \beta$. Como el $\angle QST$ es un ángulo inscrito en Π_2 y inscribe medio círculo, $m\angle QST = 90^\circ$ y por lo tanto $\alpha + 2\beta = 90^\circ$.
Se tiene el paralelismo $O_1P \parallel O_2Q$, de modo que si A es el punto de intersección de una recta paralela a O_2P que pasa por S con la recta PQ, por el teorema de Tales se tiene que $\dfrac{PA}{AQ} = \dfrac{O_1S}{SO_2} = \dfrac{1}{3}$ y además $\overline{AS} \perp \overline{PQ}$.

Luego se traza la tangente común a ambas circunferencias, por el punto S, se procede a denotar por M la intersección de dicha tangente con $\overline{PQ}$ y se sabe que las tangentes externas desde un mismo punto a un círculo son iguales, entonces $PM = MS$ y $MS = MQ$.

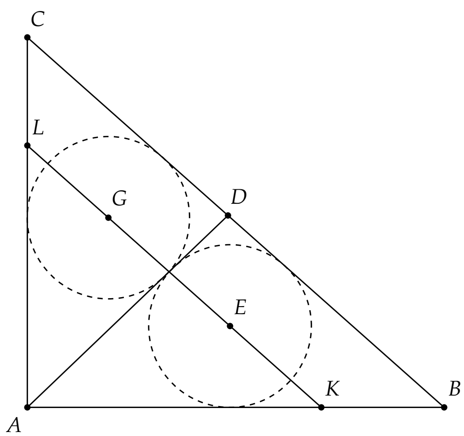
Se puede observar que el punto M es el centro de una circunferencia que pasa por los puntos P, Q, S y por lo tanto el triángulo PSQ es rectángulo con ángulo recto en $\angle PSQ$, y como $\angle QST$ también es recto, los puntos P, S y T son colineales.
Se sabe que $MS = MQ$, entonces $m\angle MSQ = m\angle MQS$ y como este último es semiinscrito en el arco $\widehat{SQ}$, entonces $m\angle MSQ = m\angle MQS = \alpha$, al igual que $m\angle STQ$. Lo mencionado anteriormente, se puede ver en la figura adjunta.



Como $\angle PMS$ es externo al $\triangle MSQ$, entonces la $m\angle PMS = 2\alpha$. Además, al ser $\triangle PSQ$ rectángulo, la $m\angle SPQ = 2\beta$ pues $m\angle PQS = \alpha$.
Por último, de la relación $AQ = 3PA$ que se encontró anteriormente, entonces $PQ = 4PA$ y como $PM = MQ$ se obtiene que $PM = 2PA$ y, por lo tanto, $AM = PA$. Por el criterior de congruencia LAL, se tiene que $\triangle PAS \cong \triangle MAS$, entonces $2\alpha = 2\beta$; es decir, $\alpha = \beta$.

Por lo tanto $\alpha=\beta$, entonces $QR=RT$.

3.3.5 Primero se va a mostrar que $AD=AK=AL$.



Considere I_1 e I_2 los incentros de los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$, respectivamente.
Sin perdida de generalidad, supongamos que $m\angle ADC\leq 90^\circ$. Sean $m\angle BAD=2\alpha$ y $m\angle ADC=2\omega$, así $\alpha\leq 45^\circ$ y $\omega\leq 45^\circ$.
Como $AK=AL$ entonces $m\angle AKL=45^\circ=m\angle ALK$.
Además, se tiene que $m\angle I_1DA=90^\circ-\omega$, $m\angle AI_1D=90^\circ+\omega-\alpha$, $m\angle KI_1A=135^\circ-\alpha$, $m\angle ADI_2=\omega$, $m\angle AI_2D=135^\circ-\omega+\alpha$, $m\angle LI_2A=90^\circ+\alpha$.
Por ley de senos en $\triangle AKI_1$ y $\triangle ADI_1$ se tiene que $AK=AI_1\dfrac{\operatorname{sen}(135^\circ-\alpha)}{\operatorname{sen}(45^\circ)}$ y $AD=AI_1\dfrac{\operatorname{sen}(90^\circ+\omega-\alpha)}{\operatorname{sen}(90^\circ-\omega)}$.

Note que $\dfrac{\operatorname{sen}(135^\circ-\alpha)}{\operatorname{sen}(45^\circ)}\geq\dfrac{\operatorname{sen}(90+\omega-\alpha)}{\operatorname{sen}(90-\omega)}$

$\iff\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\omega)\cos(\alpha)+\cos(\omega)\operatorname{sen}(\alpha))\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\omega)\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\omega)\operatorname{sen}(\alpha))$

$\iff\cos(\omega)\operatorname{sen}(\alpha)\geq\operatorname{sen}(\omega)\operatorname{sen}(\alpha)\iff\cos(\omega)\geq\operatorname{sen}(\omega)$, lo cual es cierto ya que $\omega\leq 45^\circ$. Por lo que $AK\geq AD$.

Por ley de senos en los triángulos $\triangle ALI_2$ y $\triangle ADI_2$, se tiene que $AL=AI_2\dfrac{\operatorname{sen}(90^\circ+\alpha)}{\operatorname{sen}(45^\circ)}$ y $AD=AI_2\dfrac{\operatorname{sen}(135^\circ+\alpha-\omega)}{\operatorname{sen}(\omega)}$.

Note que $\dfrac{\operatorname{sen}(135^\circ+\alpha-\omega)}{\operatorname{sen}(\omega)}\geq\dfrac{\operatorname{sen}(90^\circ+\alpha)}{\operatorname{sen}(45^\circ)}$

$\iff\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen}(\omega-\alpha)+\cos(\omega-\alpha))\geq\operatorname{sen}(\omega)\cos(\alpha)$

$\iff -\operatorname{sen}(\omega)\cos(\alpha)-\cos(\omega)\operatorname{sen}(\alpha)+\cos(\omega)\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\omega)\operatorname{sen}(\alpha)\geq 0$

$\iff(\cos(\omega)-\operatorname{sen}(\omega))(\cos(\alpha)-\operatorname{sen}(\alpha))\geq 0$, lo cual es cierto ya que $\omega\leq 45$ y $\alpha\leq 45$. Por lo que $AD\geq AL$.

De lo anterior como $AK\geq AD\geq AL$ y $AK=AL$ entonces $AK=AD=AL$.
Ahora como $\angle KAI_1=\angle DAI_1$, $AI_1=AI_1$ y $AK=AD$ entonces por criterio de congruencia L.A.L se tiene $\triangle AKI_1\cong\triangle ADI_1$ y así $m\angle ADI_1=m\angle AKI_1=45^\circ$ de donde $m\angle BDA=90^\circ$ y así D es el pie de la altura sobre la hipotenusa.

3.3.6 De la condición $P(k)=\dfrac{k}{k+1}$ se tiene que $(k+1)P(k)-k=0$ para $k=0,\cdots,2n$.
Por lo tanto, el polinomio $Q(x)=(x+1)P(x)-x$ de grado $2n+1$ tiene $2n+1$ soluciones y se puede escribir como: $Q(x)=(x+1)P(x)-x=Ax(x-1)(x-2)\cdots(x-2n)$.
Para determinar A considere $x=-1$, de donde $1=A\cdot -1\cdot -2\cdots(-2n-1)=-A(2n+1)!$, lo que significa $A=\dfrac{-1}{(2n+1)!}$ entonces

$$(x+1)P(x)-x=\frac{-1}{(2n+1)!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-2n)$$

Luego para $x\neq -1$ se tiene que $P(x)=\dfrac{1}{x+1}\left(x-\dfrac{1}{(2n+1)!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-2n)\right)$.

Por tanto $P(2n+1)=\dfrac{1}{2n+2}\left(2n+1-\dfrac{1}{(2n+1)!}(2n+1)(2n)(2n-1)\cdots(1)\right)=\dfrac{n}{n+1}$

3.3.7

$$\begin{array}{rrcl}
 & f(1)+\cdots+f(n)+f(n+1) & = & (n+1)^2 f(n+1) \\
\Rightarrow & n^2 f(n)+f(n+1) & = & (n+1)^2 f(n+1) \\
\Rightarrow & n^2 f(n) & = & (n+1)^2 f(n+1)-f(n+1) \\
\Rightarrow & n^2 f(n) & = & f(n+1)\left[(n+1)^2-1\right] \\
\Rightarrow & f(n+1) & = & \dfrac{n^2 f(n)}{n^2+2n} \\
\Rightarrow & f(n+1) & = & \dfrac{nf(n)}{n+2}
\end{array}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
f(2017) &= \frac{2016\cdot f(2016)}{2018} \\
&= \frac{2016\cdot 2015\cdot f(2015)}{2018\cdot 2017} \\
&= \frac{2016\cdot 2015\cdot 2014\cdots 3\cdot 2\cdot 1 f(1)}{2018\cdot 2017\cdot 2016\cdots 5\cdot 4\cdot 3} \\
&= \frac{2\cdot f(1)}{2018\cdot 2017} \\
&= \frac{2}{2017}
\end{aligned}$$