

Proceso de exclusión simple simétrico y la ecuación de calor

Simple symmetrical exclusion process and the heat equation

Patricia Gonçalves

patricia.goncalves@math.tecnico.ulisboa.pt
Center for Mathematical Analysis, Geometry
and Dynamical Systems
Universidade de Lisboa.
Portugal

Byron Jiménez Oviedo

byron.jimenez.oviedo@una.ac.cr
Escuela de Matemática
Universidad Nacional de Costa Rica.
Costa Rica

Recibido: Junio 26, 2018

Aceptado: Noviembre 30, 2018

Resumen. Nuestro principal foco consiste en motivar al lector para el estudio de los sistemas de partículas y que el lector entienda, de forma más o menos heurística e intuitiva, la deducción de ecuaciones diferenciales parciales a través de sistemas microscópicos subyacentes con dinámicas probabilistas. Para esto vamos a utilizar el modelo llamado proceso de exclusión simple simétrico que está en contacto con depósitos de partículas. Y la ecuación diferencial parcial involucrada es la ecuación de calor con condiciones de Dirichlet.

Palabras clave: Límite Hidrodinámico, Ecuación de calor, Condiciones de frontera, Proceso de exclusión simple

Abstract. Our main focus is to motivate the reader for the study of particle systems and for the reader to understand, in a more or less heuristic and intuitive way, the deduction of partial differential equations through underlying microscopic systems with probabilistic dynamics. For this, we are going to use the model called symmetric simple exclusion process in contact with reservoirs. The partial differential equation involved is the heat equation with Dirichlet conditions.

KeyWords: Hydrodynamic limit, Heat equation, Boundary conditions, Exclusion process.

1.1 Introducción

Es increíble como nuestro mundo aparece en diferentes escalas (macroscópicas y microscópicas). Por ejemplo, imaginemos un vaso con agua, a nivel macroscópico, es decir, con nuestros ojos podemos ver que el agua está tranquila y serena. Sin embargo, si realizáramos un acercamiento lo suficientemente adecuado (con un microscopio por ejemplo) veríamos que el agua está compuesto por millones de partículas que se mueven e interaccionan entre sí de manera caótica y salvaje. Entonces inmediatamente nos surge la pregunta ¿cómo un sistema que a nivel microscópico es completamente caótico se puede auto-organizar para que a nivel macroscópico se vea estable y sereno? Es aquí donde la mecánica estadística interviene. En general, el objetivo de la mecánica estadística es comenzar con las leyes microscópicas de la física que rigen el comportamiento de los componentes del sistema y deducir las propiedades del sistema como un todo. Así podemos decir que la mecánica estadística es un puente entre lo microscópico y lo macroscópico, entre lo caótico y el orden (ver Figura 1.1).

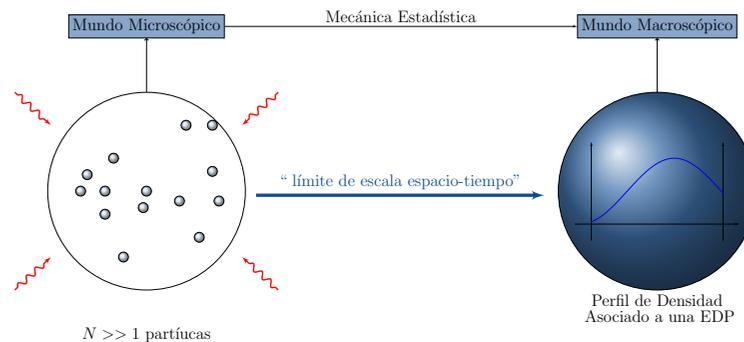


Figura 1.1: De lo micro a lo macro.

El problema que abordamos en estas notas es para estudiar y dar a conocer informalmente un método frecuentemente usado para establecer la relación entre el mundo microscópico (suponiendo que su evolución y dinámica es aleatoria) y el mundo macroscópico (que puede ser modelado a través de ecuaciones diferenciales parciales que describen la evolución de las características termodinámicas de un fluido de manera determinista).

Así, en estas notas presentamos al lector un sistema de partículas, el cuál es un modelo juguete, es decir, un modelo que no es real pero es adecuado para entender lo que está pasando entre lo microscópico y lo macroscópico. Este sistema de partículas está relacionado con una ecuación diferencial parcial, conocida como **ecuación del calor**.

El sistema de partículas que introducimos se llaman proceso de exclusión simple simétrico en contacto con depósitos de partículas. Informalmente hablando, este proceso consiste en un conjunto de partículas que ocupan un cierto conjunto discreto de sitios, digamos $\{1, 2, 3, \dots, N - 1\}$ con $N \geq 2$; cada sitio lleva un reloj aleatorio, de acuerdo con una cierta regla probabilística, y cuando un reloj de un sitio toca, si hay una partícula en el sitio correspondiente entonces ella ejecuta un salto con una cierta tasa de probabilidad, sin embargo, si el sitio está vacío nada sucede. Asumimos que los relojes en sitios diferentes son independientes y que cada reloj tiene distribución exponencial. La elección de esta ley de probabilidad para los relojes, nos garantiza que el proceso satisface la propiedad de Markov, es decir, el futuro del proceso, sólo depende del estado presente. Además, como los relojes tienen distribución exponencial, es decir, una distribución absolutamente continua, la probabilidad de que dos

relojes toquen simultáneamente es cero y por lo que cada vez que un reloj toca, o un salto se ejecuta o nada sucede (ver Figura 1.2).

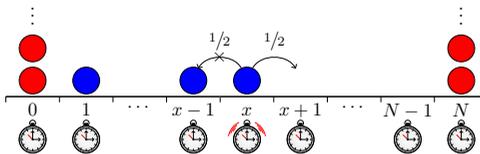


Figura 1.2: Proceso de Exclusión.

El sistema que acabamos de definir, se llama proceso de exclusión, ya que una partícula solo salta a un cierto sitio cuando este está vacío; en el caso de que el sitio esté, ocupado la partícula no se mueve y espera un nuevo toque del reloj. El proceso se dice simple una vez que un salto de una partícula ocurre sólo para uno de sus sitios vecinos. El proceso se dice simétrico pues la tasa de salto hacia el vecino a la izquierda y hacia el vecino a la derecha, es igual a la $1/2$. Cada partícula realiza así un paseo aleatorio simple simétrico, pero tenga en cuenta que el movimiento de las partículas no es independiente, ya que el movimiento de una partícula depende de la posición de las restantes. Vamos a considerar este proceso en contacto con depósitos de partículas, cada uno con una cierta probabilidad de entrar o salir del sistema a través de esos depósitos. En la Figura 1.2 los depósitos son representados en los extremos del sistema y se entiende que en estos existen infinitas partículas (para más detalles ver Sección 1.3).

El objetivo de estas notas consiste en relacionar este proceso con la ecuación del calor. Así que tomaremos cada vez más partículas, esto lo haremos tomando el tamaño de sistema cada vez más grande, es decir, tomando $N \rightarrow \infty$. Y vamos a ver (con probabilidad uno) que haciendo un re-escalamiento en espacio y tiempo la evolución de las partículas nos llevará a obtener la evolución global del sistema que está gobernado por la ecuación del calor. En otras palabras, imaginemos que estamos viendo las partículas brincar de un sitio a otro, o saliendo y entrando del sistema (con la dinámica del proceso de exclusión simple). Luego empezamos a alejarnos a una velocidad adecuada de tal forma que podemos pasar del mundo microscópico al macroscópico (límite escala ver Figura 1.1) y por lo tanto ahora vemos un sistema que es completamente determinístico. Por ejemplo, podemos imaginar una barra de metal que está siendo calentada a diferentes temperaturas en sus extremos, y que por lo tanto podríamos saber cual es la temperatura de cada parte de ella, simplemente con la solución de la ecuación del calor. La ecuación que modela la difusión del calor se basa en la idea de que el calor se extiende aleatoriamente en todas las direcciones de acuerdo con una cierta tasa. Esta ecuación tradicionalmente ha sido estudiada como una ecuación determinista, pero también puede ser tratada desde el punto de vista probabilístico considerando el movimiento aleatorio de partículas.

Para llevar a cabo lo anterior vamos a recordar algunas nociones básicas de los procesos de Markov e incluimos algunos de sus resultados clásicos que nos permiten hacer una descripción adecuada del proceso y establecer su relación con la ecuación del calor. No se pretende, en absoluto, hacer una presentación formal y auto-contenida de todos los asuntos abordados en estas notas, ya que eso requeriría la introducción de conceptos formales no accesibles en un primer encuentro con esta materia.

A continuación presentamos un resumen de lo que vamos a abordar. Como ya mencionamos anteriormente, pretendemos describir un sistema de partículas que está relacionado con la ecuación del calor. Como consideramos el sistema en contacto con depósitos con cierta densidad de partículas, la ecuación del calor estará restringida a condiciones de frontera que corresponden a las densidades fijadas en los

depósitos, en particular las condiciones de Dirichlet. Nuestro punto de partida en la sección 1.2 se presentará la definición de cadenas/procesos de Markov, y además, hacemos la construcción de cadenas de Markov a tiempo continuo, a partir de las cadenas de Markov tiempo discreto. Para una lectura más rápida y ligera el lector puede optar por no leer esta sección y pasar directamente a la descripción del proceso. La descripción formal del proceso de exclusión simple simétrico se puede encontrar en la sección 1.3, donde también vamos a discutir en el caso estático la relación del proceso con la ecuación de Laplace con condiciones de Dirichlet. En la sección 1.5 vamos a deducir las EDP's discretas relacionadas con el proceso de estudio. La ecuación del calor con condiciones de Dirichlet y la noción de una solución débil se describe en la sección 1.6. Esta relación es conocida en la literatura como **límite hidrodinámico**.

1.2 Cadenas de Markov

Para preparar al lector, primero discutimos la definición y propiedades de las cadenas de Markov en espacios de estados discretos, en primera instancia en tiempo discreto y después en tiempo continuo. Los paseos aleatorios hacen parte de una colección de procesos llamados procesos estocásticos, que tienen la propiedad de Markov.

Cadenas de Markov en tiempo discreto. Cuando hablamos de un proceso estocástico en el sentido más general, tenemos una familia de variables aleatorias $(X_j)_{j \in J}$ (donde J es un conjunto de índices), definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si el proceso estocástico representa la evolución temporal de algún sistema aleatorio, quiere decir que cada variable aleatoria X_j está indexada en tiempo, así, decimos que el proceso es en tiempo discreto en el caso en que $J = \{0, 1, 2, \dots\}$ o en tiempo continuo si $J = [0, +\infty)$, aunque se pueda considerar conjuntos más generales. Ahora, sea S un conjunto finito o numerable, al que llamamos **espacio de estados** del proceso y que definimos como los posibles valores que pueden tomar las variables aleatorias $(X_j)_{j \in J}$.

Ejemplo 1.1

Lanzamientos sucesivos, independientes e idénticamente distribuidos de una moneda al aire es un ejemplo clásico de un proceso estocástico (en tiempo discreto). El espacio de estados es $S = \{-1, +1\}$, y un posible resultado para el lanzamiento sucesivo de la moneda es $X_n = (-1)^n$ para $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

En la siguiente definición introducimos el concepto de una cadena de Markov, de manera informal podemos decir que, una cadena de Markov es un proceso con la propiedad de que, condicionado a su valor presente, su futuro es independiente del pasado.

Definición 1.1

Sea $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Entonces, $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ es una cadena de Markov si, y solamente si, satisface la propiedad de Markov

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x), \quad (1.1)$$

para cada $n \geq 1$ y cualquier elección $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x, y \in S$.

Como lo mencionamos anteriormente, la condición (1.1) dice que, dado el estado actual x , la evolución futura es totalmente independiente de la evolución pasada, es decir, no depende de la elección de x_0, x_1, \dots, x_{n-1} . Esta condición es llamada propiedad de Markov. Además, si el lado derecho de (1.1) no depende del tiempo n , entonces la cadena de Markov se dice homogénea en el tiempo.

Definición 1.2

Una cadena de Markov $(X_n)_{n=0}^\infty$ se dice homogénea en el tiempo si,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x) := p(x, y), \tag{1.2}$$

para todo n, x e y . La matriz $(p(x, y))_{(x, y) \in S^2}$ es la matriz de transición de probabilidad de la cadena.

Teorema 1.1

La matriz de transición $(p(x, y))_{(x, y) \in S^2}$ es una matriz estocástica, o sea, la matriz satisface las siguientes propiedades:

1. $p(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in S^2$.
2. $\sum_{y \in S} p(x, y) = 1, \quad \forall x \in S$.

Cadenas de Markov en tiempo continuo. Ahora vamos a construir una cadena de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$, en un espacio de estados contable S y en tiempo continuo. Como S es contable, necesariamente la cadena tiene que moverse en saltos (vea la figura 1.3). Así, la evolución de la cadena puede ser descrita de la siguiente forma. Si la cadena está en el estado x , entonces se espera un tiempo aleatorio, y salta, aleatoriamente, para un nuevo estado y . Después en y espera otro tiempo aleatorio y salta aleatoriamente para otro estado z , y así sucesivamente. Entonces, tenemos que determinar:

1. La distribución de los tiempos aleatorios de espera en cada estado $x \in S$.
2. El mecanismo de elección del próximo estado cuando se produce un salto.

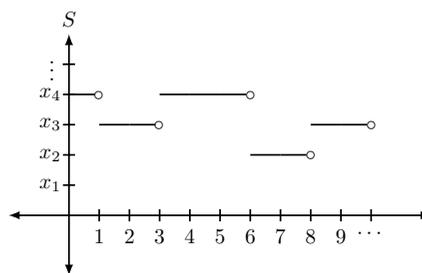


Figura 1.3: Proceso de saltos

Notamos que la propiedad de Markov nos dice que a distribución del tiempo hasta el salto siguiente, solo puede depender de la localización actual x y no puede depender del tiempo pasado. Así, ocupamos que la distribución del tiempo de espera tenga la propiedad de “pérdida de memoria”, para esto ocupamos del siguiente teorema.

Teorema 1.2

La única distribución continua con la propiedad de “pérdida de memoria” es la distribución exponencial.

Demostración Afirmamos que la distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ tiene dicha propiedad. De hecho, note que, $\forall s, t > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > s + t | X > t) &= \frac{\mathbb{P}(X > s + t, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= e^{-\lambda(s+t)} e^{\lambda t} \\ &= e^{-\lambda s} \\ &= \mathbb{P}(X > s).\end{aligned}$$

La igualdad anterior nos dice que la probabilidad de que X sea mayor a $t + s$ sabiendo que X es mayor que t , solo depende de la amplitud del intervalo, o sea, esa probabilidad coincide con a probabilidad de X ser mayor que s . Ahora veamos que la distribución es única. Sea X una variable aleatoria continua con “pérdida de memoria” y sea $F(t) = \mathbb{P}(X > t)$. Note que F es una función decreciente. Además, para todo $t, s > 0$ se tiene que

$$F(t + s) = e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} e^{-\lambda t} = F(t)F(s),$$

y esto implica que

$$F(2) = F^2(1) \quad \text{y} \quad F\left(\frac{1}{2}\right) = F^{\frac{1}{2}}(1).$$

En general, no es difícil ver que si $a \in \mathbb{Q}$, tenemos que $F(a) = F^a(1)$. Así la única función que satisface la ecuación funcional anterior para $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$, es la exponencial $F(a) = F^a(1) = e^{-a\lambda}$ donde $\lambda = -\ln(F(1))$. Ahora usando el hecho que F es decreciente obtenemos que F es la función exponencial sobre todo el dominio y no solo en $\mathbb{Q} - \{0\}$. ■

La “pérdida de memoria” fuerza a que el tiempo de espera en x sea distribuido exponencialmente. Así, siempre que la cadena está en la posición x , consideramos que el tiempo de espera T_x tiene distribución exponencial, es decir, $\forall t > 0$, $\mathbb{P}(T_x > t) = e^{-c(x)t}$, donde definimos $(c(x))^{-1}$ como su media. Entonces, $c(x)$ corresponde a la tasa de salto del estado x .

Cuando la cadena “salta”, la propiedad de Markov dice que la elección del siguiente estado solo depende del estado actual x . Así, los saltos son descritos por la matriz estocástica $p(x, y)_{(x, y) \in S^2}$, donde $p(x, y)$ es la probabilidad de estar en x y de saltar para y . Como p no depende del tiempo, la probabilidad de saltar de x a y no depende del instante de tiempo en que el salto ocurre.

Entonces, esto sugiere que para construir una cadena de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ en tiempo continuo con saltos exponencialmente distribuidos con parámetros $c(x)$ y con $p(x, y)_{(x, y) \in S^2}$ como matriz de transición, tomamos una cadena de Markov en tiempo discreto $(Y_n)_{n=0}^\infty$ con matriz de transición $p(x, y)_{(x, y) \in S^2}$ y ajustamos los tiempos de espera para producir los tiempos correctos, esto es, exponencialmente distribuidos con media $(c(x))^{-1}$.

Sea $x \in S$ el estado inicial y $(Y_n)_{n=0}^\infty$ la cadena discreta con matriz de transición $p(x, y)_{(x, y) \in S^2}$ y estado inicial x . Además, independientemente de $(Y_n)_{n=0}^\infty$, sea $(\tau_j)_{j=0}^\infty$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución exponencial de media 1. Note que los estados que la cadena $(X_t)_{t \geq 0}$ toma en tiempo continuo son los mismos valores de la cadena discreta $(Y_n)_{n=0}^\infty$. Definimos los tiempos de espera por $\sigma_n = (c(Y_n))^{-1} \tau_n$. Claramente, $(\sigma_n)_{n=0}^\infty$ no es independiente de la cadena $(Y_n)_{n=0}^\infty$, pero cuando está condicionada a la variable discreta Y_n , la variable aleatoria σ_n es independiente de $(\sigma_k, Y_k)_{k=0}^n$, y además, tiene distribución exponencial con media $(c(Y_n))^{-1}$.

Ahora, si definimos $T_0 = 0$ y para $n \geq 1$,

$$T_n = \sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_n,$$

entonces

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \mathbf{1}_{\{[T_n, T_{n+1})\}}(t).$$

Note que X_t está definida para todo tiempo $0 \leq t < \infty$, si $T_n \nearrow \infty$ cuando $n \nearrow \infty$. De hecho, esto acontece casi ciertamente en el caso en que exista una constante $C_0 < \infty$, tal que $c(x) \leq C_0, \forall x \in S$, pues, tendríamos que $(c(Y_n))^{-1}$ no se anula cuando $n \nearrow \infty$. Por tanto, de aquí en adelante vamos a asumir este hecho. Esta construcción puede ser repetida para cada estado inicial $x \in S$ (para más detalles ver [8]).

1.3 El proceso de exclusión simple simétrico

Como ya vimos anteriormente, podemos construir una cadena de Markov en tiempo continuo, a partir de una cadena de Markov en tiempo discreto. Ahora, queremos estudiar una cadena de Markov específica, y para esto tenemos que especificar el espacio de estados de la cadena, la distribución del tiempo entre saltos y el mecanismo de elección del salto.

Suponemos que tenemos $N + 1$ sitios, esto es, tenemos una malla con los puntos $\{0, 1, 2, \dots, N - 1, N\}$. En el interior de la malla, cada sitio contiene a lo sumo una partícula. En la frontera (los sitios $\{0, N\}$) podemos pensar que existen infinitas partículas, como se tuviéramos depósitos conectados a esos sitios. En cada sitio de la malla existe un reloj exponencial de parámetro 1, además relojes en sitios diferentes son independientes. Note que la probabilidad de que dos relojes toquen simultáneamente es nula. De hecho, como los relojes son variables aleatorias exponenciales independientes, la región donde las variables son iguales, corresponde a una recta en el plano, que tiene medida de Lebesgue nula o “ área” nula. Ahora, si un reloj en un sitio interior de la malla toca y si en este sitio hay una partícula, esta partícula puede saltar para uno de sus vecinos más próximo con una tasa de $\frac{1}{2}$ y sigue la siguiente regla de exclusión: el salto es suprimido si el sitio de destino está ocupado. Además de esto, si el reloj en la frontera izquierda toca (respectivamente en la frontera derecha) las partículas pueden entrar hacia el interior de la malla hacia el sitio 1 con tasa α (respectivamente para el sitio $N - 1$ con tasa β) y

pueden salir del sitio 1 hacia el depósito con tasa $1 - \alpha$ (respectivamente del sitio $N - 1$ con tasa $1 - \beta$), respetando la regla de exclusión, con $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

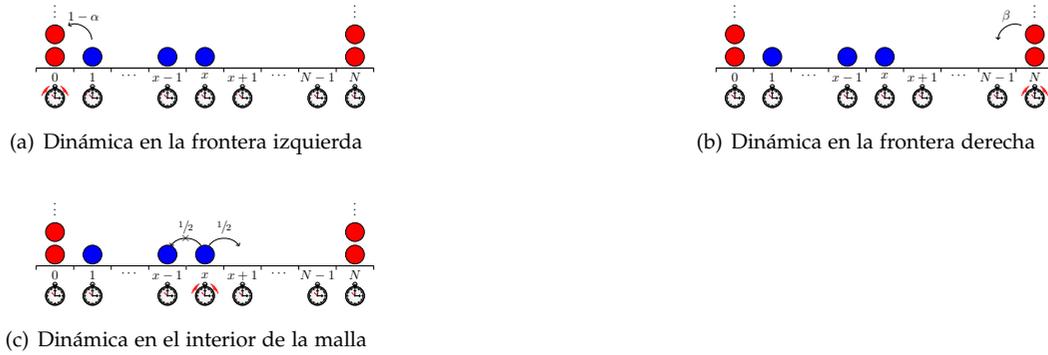


Figura 1.4: Dinámica.

Así, cada partícula ejecuta un paseo aleatorio en tiempo continuo, condicionado al evento de que ningún sitio es ocupado simultáneamente por más de una partícula. La figura 1.4, es una pequeña representación de la dinámica del sistema de partículas descrito.

Exclusión simple simétrico en contacto con depósito de partículas. El proceso anterior fue presentado de manera informal y para dar una definición rigurosa del proceso, necesitamos introducir cierta notación.

Fije $N \geq 2$ y sea $\Lambda_N \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, N-1\} \subseteq \mathbb{N}$. Los elementos de Λ_N son llamados sitios y son denotados por las letras x, y, z . Los puntos del intervalo $[0, 1]$ se van a denotar por las letras u, v, w . El espacio $[0, 1]$ es el **espacio macroscópico** y el espacio $\{0, 1\}^{\Lambda_N}$ es el **espacio microscópico**. Los elementos del espacio microscópico se pueden ver como vectores con $N - 1$ coordenadas, compuestos solamente de ceros y unos, y son llamados configuraciones. Así, si $\eta \in \{0, 1\}^{\Lambda_N}$ y $x \in \Lambda_N$, entonces $\eta(x) \in \{0, 1\}$ y $\eta(x)$ representa el número de partículas en sitio x para la configuración η . Es decir,

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si el sitio } x \text{ de la configuración } \eta \text{ está ocupado,} \\ 0 & \text{si el sitio } x \text{ de la configuración } \eta \text{ está vacío.} \end{cases}$$

Por ejemplo, la configuración $\eta = (10010101)$ es interpretada como en la figura 1.5, donde hemos considerado $N = 9$. Sin embargo apenas fijamos la configuración $\eta = (10010101)$ en los sitios de $\Lambda_9 = \{1, \dots, 8\}$, ya que en los sitios $x = 0$ y $x = 9$ la configuración no está definida.

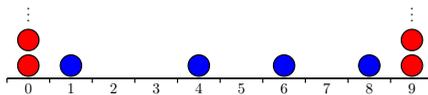


Figura 1.5: Configuración η .

Para tener una descripción de la tasa de transición entre configuraciones necesitamos introducir las siguientes operaciones: si $\eta \in \{0, 1\}^{\Lambda_N}$ y $x, y \in \Lambda_N$, entonces $\eta^x, \eta^{x,y} \in \{0, 1\}^{\Lambda_N}$ son definidas por

$$\eta^x(z) = \begin{cases} \eta(z) & \text{si } z \neq x \\ 1 - \eta(z) & \text{si } z = x; \end{cases} \quad \eta^{x,y}(z) = \begin{cases} \eta(z) & \text{si } z \neq x, y \\ \eta(y) & \text{si } z = x \\ \eta(x) & \text{si } z = y. \end{cases}$$

Así, η^x es obtenida de η al intercambiar su valor en el sitio x y $\eta^{x,y}$ es obtenida de η al cambiar sus valores en las posiciones x y y . Por ejemplo, si tomamos η como en la figura 1.5, tenemos respectivamente que η^1 (respectivamente $\eta^{4,5}$) es como en la figura 1.6 (respectivamente, figura 1.7).

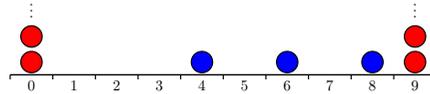


Figura 1.6: Configuración para η^1

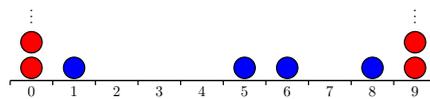


Figura 1.7: Configuración para $\eta^{4,5}$

Fije $\alpha, \beta \in [0,1]$. El proceso de exclusión simple simétrico en contacto con depósitos es la cadena de Markov con espacio de estados $\{0,1\}^{\Lambda_N}$ y con generador infinitesimal¹ dado en $f : \{0,1\}^{\Lambda_N} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$(L_N f)(\eta) = (L_{N,0} f)(\eta) + (L_{N,-} f)(\eta) + (L_{N,+} f)(\eta), \tag{1.3}$$

donde

$$\begin{aligned} (L_{N,0} f)(\eta) &= \sum_{x=1}^{N-2} \{f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)\}; \\ (L_{N,-} f)(\eta) &= \{\alpha(1 - \eta(1)) + (1 - \alpha)\eta(1)\} \{f(\eta^1) - f(\eta)\}; \\ (L_{N,+} f)(\eta) &= \{\beta(1 - \eta(N-1)) + (1 - \beta)\eta(N-1)\} \{f(\eta^{N-1}) - f(\eta)\}. \end{aligned}$$

Note que el espacio de configuraciones $\{0,1\}^{\Lambda_N}$ tiene 2^{N-1} elementos. Este resultado es obtenido teniendo en cuenta que hay $N - 1$ sitios, donde en cada uno de los cuales podemos tener un 0 o un 1, lo que resulta en 2^{N-1} posibilidades. Podemos ver que el generador infinitesimal codifica la dinámica introducida anteriormente. Para esto consideramos, por ejemplo, recordemos la configuración $\eta = (10010101)$ representada en la figura 1.5, y notemos que

$$\begin{aligned} (L_{N,0} f)(\eta) &= f(0101001) + f(01010001) + f(1000101) + f(1001010) \\ &\quad - 4f(10010101); \\ (L_{N,-} f)(\eta) &= (1 - \alpha)\{f(00010101) - f(10010101)\}; \\ (L_{N,+} f)(\eta) &= (1 - \beta)\{f(10010100) - f(10010101)\}. \end{aligned}$$

¹Intuitivamente el generador infinitesimal de un proceso estocástico es un operador diferencial parcial que codifica una gran cantidad de informaciones sobre el proceso. Para detalles formales vea [1].

El ejemplo siguiente tiene una doble finalidad, en primer lugar que el lector pueda comprender más sobre el generador y también tener en la mano un cálculo útil que ocuparemos en la sección 1.7, ya que el generador infinitesimal va ser una herramienta muy importante en la hora de probar el límite hidrodinámico, es decir, a la hora de hacer la relación entre el mundo microscópico y el mundo macroscópico.

Ejemplo 1.2

Sea $z \in \Lambda_N$ y $f_z: \{0,1\}^{\Lambda_N} \rightarrow \{0,1\}$ definida por $f_z(\eta) = \eta(z)$. Calculemos $(L_N f_z)(\eta) = (L_N \eta)(z)$. Si $z \in \{2, \dots, N-2\}$, entonces

$$\begin{aligned} L_{N,0}\eta(z) &= \sum_{x=1}^{N-2} \{\eta^{x,x+1}(z) - \eta(z)\} = \eta(z-1) - 2\eta(z) + \eta(z+1). \\ L_{N,-}\eta(z) &= L_{N,+}\eta(z) = 0. \end{aligned}$$

Si $z = 1$, entonces

$$\begin{aligned} L_{N,0}\eta(1) &= \sum_{x=1}^{N-2} \{\eta^{x,x+1}(1) - \eta(1)\} = \eta(2) - \eta(1). \\ L_{N,-}\eta(1) &= (\alpha(1 - \eta(1)) + (1 - \alpha)\eta(1))\{1 - 2\eta(1)\} = \alpha - \eta(1). \\ L_{N,+}\eta(1) &= 0. \end{aligned}$$

Note que por la ecuación (1.3) en este caso tenemos que

$$L_N \eta(1) = \eta(2) - \eta(1) + \alpha - \eta(1).$$

De manera similar, si $z = N-1$ tenemos

$$\begin{aligned} L_{N,0}\eta(N-1) &= \eta(N-2) - \eta(N-1). \\ L_{N,-}\eta(N-1) &= 0. \\ L_{N,+}\eta(N-1) &= \beta - \eta(N-1). \end{aligned}$$

Note que por la ecuación (1.3) en este caso tenemos que $L_N \eta(N-1) = \eta(N-2) - \eta(N-1) + \beta - \eta(N-1)$. Así, haciendo la convención $\eta(0) = \alpha$ y $\eta(N) = \beta$ tenemos que

$$L_N \eta(z) = \eta(z-1) - 2\eta(z) + \eta(z+1), \forall z \in \Lambda_N.$$

Del mundo microscópico hacia el macroscópico. Como lo hemos referimos anteriormente, el espacio macroscópico es el espacio continuo $I = [0,1]$ y si fijamos $N \in \mathbb{N}$, su discretización $\Lambda_N = \{1,2,\dots,N-1\}$ representa el espacio microscópico donde definimos una dinámica que tiene la propiedad de Markov. Podemos considerar el espacio Λ_N contenido en el espacio I , haciendo la siguiente identificación: a una posición $u \in I$ le corresponde el sitio $[uN] \in \Lambda_N$. Análogamente, a $x \in \Lambda_N$ le corresponde $\frac{x}{N} \in I$.

MACROSCÓPICO		MICROSCÓPICO
$[0,1]$		Λ_N
u	\longrightarrow	$x = [Nu]$
$u = \frac{x}{N}$	\longleftarrow	x

En el sistema microscópico, las partículas son colocadas de acuerdo con alguna medida de probabilidad. Podemos pensar por ejemplo en las siguientes opciones: colocar partículas en todos los sitios pares, o colocar partículas hasta una posición fija, como por ejemplo la posición 5, o lanzar una moneda al aire y si sale cara colocar una partícula en algún sitio y repetir el lanzamiento hasta tener la configuración inicial establecida (vea la figura 1.8).

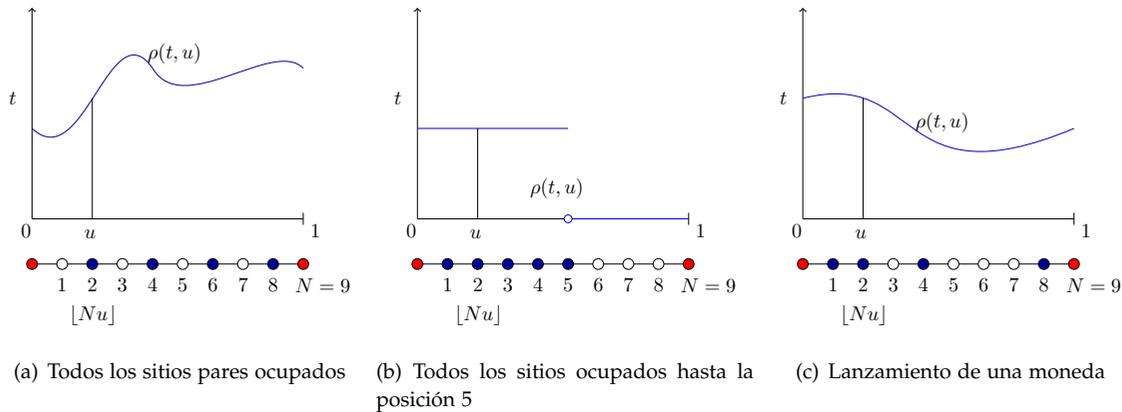


Figura 1.8: Configuración inicial

Después de tener la configuración inicial establecida, definimos la dinámica de las partículas. Estas se mueven de acuerdo con alguna tasa de transición probabilística respetando las restricciones del sistema específico. En el modelo introducido anteriormente, las partículas solo saltan para los vecinos más próximos (y lo hacen con una tasa de $\frac{1}{2}$), sin embargo el salto es suprimido en el caso de que el sitio de destino ya esté ocupado.

Ahora, estamos interesados en estudiar el comportamiento temporal de un perfil de densidad. Recuerde que anteriormente fijamos una discretización del espacio continuo considerando un parámetro de escala N . Si pretendemos que haya una evolución temporal de un perfil de densidades, ocupamos tomar dos escalas de tiempo, una macroscópica y otra microscópica. El tiempo macroscópico será representado por t y el tiempo microscópico por $t\theta(N)$. El valor de $\theta(N)$ depende de la dinámica que se define, pero para el modelo introducido arriba tenemos que $\theta(N) = N^2$.

1.4 Hidrostática

Como nuestro proceso es irreducible entonces existe una única medida invariante², que vamos a denotar por $\nu_{\alpha,\beta}^N$. Solo en casos muy especiales esta medida puede ser explícitamente calculada. Ahora, defina $\rho^N(x) := \mathbb{E}_{\nu_{\alpha,\beta}^N}[\eta(x)]$. Entonces, es muy fácil ver que ρ^N es solución de la ecuación discreta dada por

²Si el lector no está familiarizado con las medidas invariantes, en estas notas básicamente utilizamos la propiedad que para cualquier función local f vamos a tener que $\mathbb{E}_{\nu_{\alpha,\beta}^N}[Lf(\eta)] = 0$. Si el lector quisiera profundizar más recomendamos leer ([8]).

$$\begin{cases} \Delta_N \rho^N(x) = 0 & \text{para } x \in \Lambda_N \\ \rho^N(0) = \alpha \\ \rho^N(N) = \beta \end{cases},$$

donde definimos el laplaciano discreto de ρ^N en $x \in \Lambda_N$ por

$$\Delta_N \rho^N(x) = N^2 \{ \rho^N(x-1) - 2\rho^N(x) + \rho^N(x+1) \}. \quad (1.4)$$

Para probar esto, note que por el Ejemplo 1.3, tenemos que, para todo $x \in \Lambda_N$ se tiene que

$$L_N \eta(x) = \eta(x-1) - 2\eta(x) + \eta(x+1).$$

Así, por la definición de laplaciano discreto

$$\begin{aligned} \Delta_N \rho^N(x) &= N^2 \{ \rho^N(x-1) - 2\rho^N(x) + \rho^N(x+1) \} \\ &= N^2 \{ \mathbb{E}_{\nu_{\alpha,\beta}^N} [\eta(x-1)] - 2\mathbb{E}_{\nu_{\alpha,\beta}^N} [\eta(x)] + \mathbb{E}_{\nu_{\alpha,\beta}^N} [\eta(x+1)] \}. \end{aligned}$$

Luego, como la esperanza es lineal tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_N \rho^N(x) &= \mathbb{E}_{\nu_{\alpha,\beta}^N} [N^2 \{ \eta(x-1) - 2\eta(x) + \eta(x+1) \}] \\ &= \mathbb{E}_{\nu_{\alpha,\beta}^N} [N^2 L_N \eta(x)]. \end{aligned}$$

Ahora, como $\nu_{\alpha,\beta}^N$ es una medida invariante del proceso, entonces tenemos que

$$\mathbb{E}_{\nu_{\alpha,\beta}^N} [L f_x(\eta)] = 0. \quad (1.5)$$

Además, usando (1.5), tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \rho^N(x-1) - 2\rho^N(x) + \rho^N(x+1) = 0, \\ \alpha - 2\rho^N(1) + \rho^N(2) = 0 \\ \rho^N(N-2) - 2\rho^N(N-1) + \beta = 0, \end{cases}$$

que tiene como solución $\rho^N(x) = \frac{\beta - \alpha}{N}x + \alpha$.

El problema que queremos considerar en esta sección consiste en investigar el perfil de densidad asociado a este estado estacionario. Más precisamente, demostrar la existencia de un perfil $\bar{\rho} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \nu_{\alpha,\beta}^N \left\{ \eta \in \Omega_N : \left| \frac{1}{N-1} \sum_{x \in \Lambda_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \eta(x) - \int_{[0,1]} H(u) \bar{\rho}(u) du \right| > \delta \right\} = 0, \quad (1.6)$$

para toda función continua $H : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ y todo $\delta > 0$. El límite anterior se conoce como el límite hidrostático. Se espera que el perfil $\bar{\rho}$ sea solución de la ecuación de Laplace con condiciones de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta \bar{\rho}(x) = 0 & \text{para } x \in [0,1], \\ \bar{\rho}(0) = \alpha, \\ \bar{\rho}(1) = \beta. \end{cases} \quad (1.7)$$

Es decir, en este caso $\bar{\rho}(x) = (\beta - \alpha)x + \alpha$. Entonces, tenemos que $\rho^N(x)$ es solución de la ecuación de Laplace con condiciones de Dirichlet y $\bar{\rho}(x)$ lo es de la versión continua. Además, es fácil ver que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in \Lambda_N} |\rho^N(x) - \bar{\rho}(\frac{x}{N})| = 0. \tag{1.8}$$

Entonces, para probar el límite hidrostático (1.6) vamos a sumar y a substraer el término

$$\frac{1}{N-1} \sum_{x \in \Lambda_N} H(\frac{x}{N}) \rho^N(x),$$

aplicando la desigualdad triangular obtenemos que

$$\begin{aligned} & v_{\alpha,\beta}^N \left\{ \eta \in \Omega_N : \left| \frac{1}{N-1} \sum_{x \in \Lambda_N} H(\frac{x}{N}) \eta(x) - \int_{[0,1]} H(u) \bar{\rho}(u) du \right| > \delta \right\} \\ \leq & v_{\alpha,\beta}^N \left\{ \eta \in \Omega_N : \left| \frac{1}{N-1} \sum_{x \in \Lambda_N} H(\frac{x}{N}) (\eta(x) - \rho^N(x)) \right| > \frac{\delta}{2} \right\} \\ & + v_{\alpha,\beta}^N \left\{ \eta \in \Omega_N : \left| \frac{1}{N-1} \sum_{x \in \Lambda_N} H(\frac{x}{N}) \rho^N(x) - \int_{[0,1]} H(u) \bar{\rho}(u) du \right| > \frac{\delta}{2} \right\}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Usando la desigualdad de Markov tenemos que la expresión (1.9) es limitada por arriba por la expresión

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\delta} \mathbb{E}_{v_{\alpha,\beta}^N} \left[\left| \frac{1}{N-1} \sum_{x \in \Lambda_N} H(\frac{x}{N}) (\eta(x) - \rho^N(x)) \right| \right] \\ & + \frac{2}{\delta} \left| \frac{1}{N-1} \sum_{x \in \Lambda_N} H(\frac{x}{N}) \rho^N(x) - \int_{[0,1]} H(u) \bar{\rho}(u) du \right|. \end{aligned} \tag{1.10}$$

En la segunda expresión podemos usar (1.8) y definición de suma de Riemann para concluir que es igual a cero. Definamos para todo $x, y \in \Lambda_N$ las funciones $f_{x,y}(\eta) = (\eta(x) - \rho^N(x))(\eta(y) - \rho^N(y))$ el lector puede verificar fácilmente que

$$\begin{aligned} L_N f_{x,y}(\eta) &= L_N \eta(y) [\eta(x) - \rho^N(x)] + L_N \eta(x) [\eta(y) - \rho^N(y)] \\ &\quad - [\eta(x) - \rho^N(x)]^2 \mathbb{1}_{y=x+1}(x,y), \end{aligned} \tag{1.11}$$

también sea el subconjunto

$$V_N = \{(x,y) \in C_N : x < y\}$$

y su frontera es definida por $\partial V_N = \{(x,y) \in C_N : x = 0 \text{ o } y = N\}$, donde $C_N := \{0, \dots, N\}^2$. Además de eso, sea M el conjunto de las funciones $f : V_N \cup \partial V_N \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f|_{\partial V} = 0$. Así, podemos definir $\varphi(x,y) := \mathbb{E}_{v_{\alpha,\beta}^N} [f(x,y)(\eta)]$ en V_N y $\varphi(x,y) := 0$ en la frontera ∂V_N .

Así para limitar la primer expresión vamos a usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el hecho de que $|\eta(x) - \rho^N(x)| \leq 1$, así tenemos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\nu_{\alpha,\beta}^N} \left[\left| \frac{1}{N-1} \sum_{x \in \Lambda_N} H\left(\frac{x}{N}\right) (\eta(x) - \rho^N(x)) \right| \right] \\ & \leq \mathbb{E}_{\nu_{\alpha,\beta}^N} \left[\left(\frac{1}{N-1} \sum_{x \in \Lambda_N} H\left(\frac{x}{N}\right) (\eta(x) - \rho^N(x)) \right)^2 \right]^{1/2} \\ & \leq \|H\|_{\infty} \mathbb{E}_{\nu_{\alpha,\beta}^N} \left[\frac{1}{(N-1)^2} \left(\sum_{x \in \Lambda_N} (\eta(x) - \rho^N(x))^2 + \sum_{x,y \in \Lambda_N} f_{x,y}(\eta) \right) \right]^{1/2} \\ & \leq \|H\|_{\infty} \left(\frac{1}{(N-1)} + \max_{1 < x < y < N-1} \varphi(x,y) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

El lector puede ver que solo falta demostrar que $\max_{1 < x < y < N-1} \varphi(x,y)$ va para cero cuando N es muy grande. Para esto, vamos a introducir la siguiente definición.

Definición 1.3

Denotemos por Δ_N^V el laplaciano discreto en $V \cup \partial V$ tal que $\Delta_N^V : M \rightarrow \mathbb{R}$ es definido por

$$(\Delta_N^V f)(x,y) = N^2 \{f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y-1) + f(x,y+1) - 4f(x,y)\}$$

en el caso que $|x-y| > 1$,

$$(\Delta_N^V f)(x,x+1) = N^2 \{f(x-1,x+1) + f(x,x+2) - 2f(x,x+1)\}$$

y $(\Delta_N^V f)(x,y) = 0$ si $(x,y) \in \partial V$.

Ahora, usando (1.11) y el hecho de que $\nu_{\alpha,\beta}^N$ es invariante vemos que la función φ_N es solución de la ecuación

$$\begin{cases} (\Delta_N^V \varphi^N)(x,y) = -(\beta - \alpha)^2 \mathbb{1}_{y=x+1}(x,y) & \text{para } (x,y) \in V \\ \varphi^N(x,y) = 0 & \text{para } (x,y) \in \partial V, \end{cases} \quad (1.12)$$

Sin embargo, la ecuación (1.12) tiene solución única que es dada por

$$\left(\frac{\beta - \alpha}{N} \right)^2 \frac{x}{N-1} (N-y),$$

así concluimos que φ_N es igual a la expresión anterior y que $\max_{1 < x < y < N-1} \varphi(x,y)$ va para cero cuando N es muy grande. Esto muestra el límite Hidrostático (1.6).

También podemos ahora examinar la ley de Fick de transporte para el valor esperado de la corriente en el régimen estacionario. Para $0 \leq x \leq N-1$ defina $W_{x,x+1} := \eta(x) - \eta(x+1)$ la corriente sobre

$\{x, x + 1\}$, es decir, la tasa a la que una partícula salta de x para $x + 1$ menos la tasa en la cual una partícula salta de $x + 1$ para x .

Queremos probar que para cada $u \in [0, 1]$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E}_{\nu_{\alpha, \beta}} [W_{[uN], [uN]+1}] = -\partial_u \bar{\rho}(u). \tag{1.13}$$

Es muy fácil comprobar (1.13), ya que

$$\begin{aligned} N \mathbb{E}_{\nu_{\alpha, \beta}} [W_{[uN], [uN]+1}] &= N \left[\frac{\beta - \alpha}{N} [uN] + \alpha - \left(\frac{\beta - \alpha}{N} ([uN] + 1) + \alpha \right) \right] \\ &= -(\beta - \alpha) \\ &= -\partial_u \bar{\rho}(u). \end{aligned}$$

1.5 Deducción de las EDP's discretas

Podemos ahora introducir algunos hechos importantes sobre las ecuaciones diferenciales parciales discretas.

Definición 1.4

Dada ν^N una medida de probabilidad en $\{0, 1\}^{\Lambda_N}$, vamos a definir para $x \in \Lambda_N$ la función

$$\rho_t^N(x) := \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_{tN^2}(x)].$$

Extendemos la definición a las fronteras tomando $\rho_t^N(0) = \alpha$, $\rho_t^N(N) = \beta$.

Note que por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov tenemos que

$$\partial_t \rho_t^N(x) = \partial_t \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_{tN^2}(x)] = \mathbb{E}_{\nu^N} [N^2 L_N \eta_{tN^2}(x)].$$

Luego, por el Ejemplo 1.3, por la linealidad de la esperanza y para $x \in \Lambda_N$ tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_t^N(x) &= N^2 (\mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_{tN^2}(x-1)] - 2\mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_{tN^2}(x)] + \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_{tN^2}(x+1)]) \\ &= N^2 (\rho_t^N(x-1) - 2\rho_t^N(x) + \rho_t^N(x+1)) \\ &= \Delta_N \rho_t^N(x). \end{aligned}$$

Entonces podemos resumir este resultado en el siguiente lema.

Lema 1.0

Si $\rho_t^N(x) = \mathbb{E}_{\nu^N}[\eta_{tN^2}(x)]$, entonces $\rho_t^N(x)$ es solución de la ecuación semi-discreta del calor, esto es

$$\begin{cases} \partial_s \rho_s^N(x) = (\Delta_N \rho_s^N)(x) & \text{para } x \in \Lambda_N, s \geq 0 \\ \rho_0^N(x) = \mathbb{E}_{\nu^N}[\eta_0(x)] & \text{para } x \in \Lambda_N \\ \rho_s^N(0) = \alpha, \rho_s^N(N) = \beta & \text{para } s \geq 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

donde Δ_N es el laplaciano discreto en Λ_N definido en la ecuación (1.4).

Observación. [Nota 1] Si consideramos la medida inicial $\nu_{\rho_0(\cdot)}$ de la Definición 1.5, entonces definiendo

$$\rho_t^N(x) = \mathbb{E}_{\nu_{\rho_0(\cdot)}}[\eta_{tN^2}(x)],$$

tenemos que $\rho_t^N(x)$ satisface la ecuación (1.14), con condición inicial

$$\rho_0^N(x) = \mathbb{E}_{\nu_{\rho_0(\cdot)}}[\eta_{tN^2}(x)] = \rho_0\left(\frac{x}{N}\right).$$

Definición 1.5

Dada ν^N una medida de probabilidad en $\{0,1\}^{\Lambda_N}$, vamos a definir para $(x,y) \in V \cup \partial V$ la función $\varphi_t^N(x,y)$ por

$$\varphi_t^N(x,y) = \mathbb{E}_{\nu^N} \left[\{ \eta_{tN^2}(x) - \rho_t^N(x) \} \{ \eta_{tN^2}(y) - \rho_t^N(y) \} \right],$$

en V y $\varphi_t^N(x,y) = 0$ en ∂V .

EL laplaciano discreto introducido arriba es el generador de el paseo aleatorio simétrico en $V \cup \partial V$, absorbido en la frontera ∂V . Así tenemos el siguiente lema.

Lema 1.0

$\varphi_t^N(x,y)$ definida en $V \cup \partial V$ es solución de la ecuación

$$\begin{cases} \partial_s \tilde{\varphi}_s(x,y) = \Delta_V^N \tilde{\varphi}_s(x,y) + g_s(x,y) & \text{para } (x,y) \in V, \forall s \geq 0 \\ \tilde{\varphi}_0(x,y) = \varphi_0^N(x,y) & \text{para } (x,y) \in V \\ \tilde{\varphi}_s(x,y) = 0 & \text{para } (x,y) \in \partial V, \forall s \geq 0 \end{cases}, \quad (1.15)$$

donde $g_t(x,y) = -(\nabla_N \rho_t^N(x))^2 \delta_{y=x+1}$ y $\nabla_N \rho_t^N(x) = N(\rho_t^N(x+1) - \rho_t^N(x))$.

Demostración. Para simplificar la notación, vamos a considerar en esta prueba $\eta_t := \eta_{tN^2}$.

Caso 1: $|x - y| > 1$

Note que

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi_t^N(x, y) &= \partial_t \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x) \eta_t(y)] - \partial_t \left(\rho_t^N(x) \rho_t^N(y) \right) \\ &= \mathbb{E}_{\nu^N} \left[N^2 L_N(\eta_t(x) \eta_t(y)) \right] - \left[\partial_t \left(\rho_t^N(x) \right) \rho_t^N(y) + \partial_t \left(\rho_t^N(y) \right) \rho_t^N(x) \right] \end{aligned}$$

Entonces, primero tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x) \eta_t(y)] &= \mathbb{E}_{\nu^N} \left[N^2 \eta_t(1) \{ \eta_t(y-1) + \eta_t(y+1) - 2\eta_t(y) \} \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{\nu^N} \left[N^2 \eta_t(y) \{ \eta_t(x-1) + \eta_t(x+1) - 2\eta_t(x) \} \right] \\ &= N^2 \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x) \eta_t(y-1)] + N^2 \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x) \eta_t(y+1)] \\ &\quad - 2N^2 \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x) \eta_t(y)] + N^2 \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x-1) \eta_t(y)] \\ &\quad + N^2 \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x+1) \eta_t(y)] - 2N^2 \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x) \eta_t(y)] \\ &= N^2 \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x) \eta_t(y-1)] + N^2 \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x) \eta_t(y+1)] \\ &\quad + N^2 \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x-1) \eta_t(y)] + N^2 \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x+1) \eta_t(y)] \\ &\quad - 4N^2 \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x) \eta_t(y)] \\ &= \Delta_V^N [\mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x) \eta_t(y)]] . \end{aligned}$$

Seguidamente tenemos,

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\rho_t^N(x) \right) \rho_t^N(y) + \partial_t \left(\rho_t^N(y) \right) \rho_t^N(x) &= \partial_t \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x)] \rho_t^N(y) + \partial_t \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(y)] \rho_t^N(x) \\ &= N^2 \partial_t \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x-1) + \eta_t(x+1) \\ &\quad - 2\eta_t(x)] \rho_t^N(y) \\ &\quad + N^2 \partial_t \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(y-1) + \eta_t(y+1) \\ &\quad - 2\eta_t(y)] \rho_t^N(x) \\ &= \Delta_V^N \left[\rho_t^N(x) \rho_t^N(y) \right] . \end{aligned}$$

Ahora, juntando estos dos resultados tenemos

$$\partial_t \varphi_t^N(x, y) = \Delta_V^N \varphi_t^N(x, y) + \underbrace{g(x, y)}_{=0} .$$

Caso 2: $|x - y| = 1$

Note que

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi_t^N(x, x+1) &= \partial_t \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x) \eta_t(x+1)] - \partial_t \left(\rho_t^N(x) \rho_t^N(x+1) \right) \\ &= \mathbb{E}_{\nu^N} \left[N^2 L_N(\eta_t(x) \eta_t(x+1)) \right] - \left[\partial_t \left(\rho_t^N(x) \right) \rho_t^N(x+1) \right. \\ &\quad \left. + \partial_t \left(\rho_t^N(x+1) \right) \rho_t^N(x) \right] . \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x)\eta_t(x+1)] &= \mathbb{E}_{\nu^N} \left[N^2 \{ \eta_t(x-1)\eta_t(x+1) + \eta_t(x)\eta_t(x+2) \right. \\ &\quad \left. - 2\eta_t(x)\eta_t(x+1) \} \right] \\ &= \Delta_V^N [\mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x)\eta_t(x+1)]] .\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\partial_t \left(\rho_t^N(x) \right) \rho_t^N(x+1) + \partial_t \left(\rho_t^N(x+1) \right) \rho_t^N(x) &= \partial_t \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x)] \rho_t^N(x+1) \\ &\quad + \partial_t \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x+1)] \rho_t^N(x) \\ &= N^2 \partial_t \mathbb{E}_{\nu^N} [\eta_t(x-1) + \eta_t(x+1) \\ &\quad - 2\eta_t(x)] \rho_t^N(x) \\ &= \Delta_V^N \left[\rho_t^N(x) \rho_t^N(x+1) \right] \\ &\quad + \left(\nabla \rho_t^N(x) \right)^2 .\end{aligned}$$

Ahora, juntado estos dos resultados tenemos

$$\partial_t \varphi_t^N(x, y) = \Delta_V^N \left[\varphi_t^N(x, y) \right] + g_t(x, y).$$

Resta analizar lo que acontece en la frontera. Vamos a considerar $x = 0$, siendo los restantes casos análogos. Ahora,

$$\partial_t \varphi_t^N(0, y) = \mathbb{E}_{\nu^N} [(\eta_t(0) - \rho_t^N(0))(\eta_t(y) - \rho_t^N(y))].$$

Como $\eta_t(0) = \alpha$ y $\rho_t^N(0) = \alpha$ para todo $t > 0$ resulta que $\varphi_t^N(0, y) = 0$.

■

Observación. Consideremos la medida inicial $\nu_{\rho_0(\cdot)}$ como en la Nota ???. Entonces, definimos

$$\varphi_t^N(x, y) = \mathbb{E}_{\nu_{\rho_0(\cdot)}} \left[\{ \eta_{tN^2}(x) - \rho_t^N(x) \} \{ \eta_{tN^2}(y) - \rho_t^N(y) \} \right],$$

que también satisface (1.15), pero con condición inicial dada por

$$\begin{aligned}\varphi_0^N(x, y) &= \mathbb{E}_{\nu_{\rho_0(\cdot)}} \left[\{ \eta_0(x) - \rho_0^N(x) \} \{ \eta_0(y) - \rho_0^N(y) \} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\nu_{\rho_0(\cdot)}} \left[\eta_0(x) - \rho_0^N(x) \right] \mathbb{E}_{\nu_{\rho_0(\cdot)}} \left[\eta_0(y) - \rho_0^N(y) \right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Note que siempre que la medida inicial es una medida producto esta condición inicial va a ser cero pues las variables aleatorias van a ser independientes de media cero.

Aproximación discreta-continua. Vamos a fijar $N \geq 2$ y vamos a considerar el laplaciano discreto en la ecuación (1.4). Sea ρ_t^N solución de la ecuación parabólica homogénea semi-discreta dada por

$$\begin{cases} \partial_t \rho_t^N(x) = (\Delta_N \rho_t^N)(x), \text{ para } x \in \Lambda_N, t \geq 0 \\ \rho_t^N(0) = \alpha, \rho_t^N(N) = \beta, t \geq 0. \end{cases}$$

Y sea ρ_t solución de la ecuación parabólica homogénea dada por

$$\begin{cases} \partial_t \rho_t(u) = (\Delta \rho_t)(u), \text{ para } u \in (0,1), t \geq 0 \\ \rho_t(0) = \alpha, \rho_t(1) = \beta, t \geq 0. \end{cases}$$

Ahora, definimos para x en $\{0, \dots, N\}$

$$\omega_t^N(x) := \rho_t^N(x) - \rho_t\left(\frac{x}{N}\right), \tag{1.16}$$

y notamos que $\omega_t^N(0) = 0, \omega_t^N(N) = 0$ y para todo $x \in \Lambda_N$ tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t \omega_t^N(x) &= \partial_t \left(\rho_t^N(x) - \rho_t(x/N) \right) \\ &= \partial_t \rho_t^N(x) - \partial_t \rho_t(x/N) \\ &= (\Delta_N \rho_t^N)(x) - (\Delta \rho_t)(x/N) \\ &= (\Delta_N \rho_t^N)(x) - (\Delta_N \rho_t)(x/N) + \underbrace{(\Delta_N \rho_t)(x/N) - (\Delta \rho_t)(x/N)}_{:=F_N(t,x)} \\ &= (\Delta_N \omega_t^N)(x) + F_N(t,x). \end{aligned}$$

Para $\omega : \{0, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}$ introducimos la norma supremo dada por

$$\|\omega\|_\infty := \max_{x \in \{0, \dots, N\}} |\omega(x)|.$$

Lema 1.0

Sea ω_t^N como en (1.16), entonces

$$\|\omega_t^N\|_\infty \leq \|\omega_0^N\|_\infty + \frac{Ct}{N^2},$$

donde C es una constante.

Demostración. Como

$$\begin{cases} \partial_t \omega_t^N(x) = (\Delta_N \omega_t^N)(x) + F_N(t,x) \\ \omega_t^N(0) = 0, \omega_t^N(N) = 0, t \geq 0, \end{cases}$$

por la fórmula de Feynman-Kac (ver [5] y A.1.7 de [6]) tenemos que

$$\omega_t^N(x) = \mathbb{E}_x \left[\omega_0^N(X_{tN^2}) + \int_0^t F_N(t-s, X_{sN^2}) ds \right],$$

donde \mathbb{E}_x es la esperanza con respecto a la medida de probabilidad \mathbb{P}_x tal que el proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es un paseo aleatorio con generador Δ_N absorbido en la frontera, definido en (1.4) y con estado inicial x . Ahora, notamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\omega_0^N(X_{tN^2}) \right] &= \sum_{y=0}^N \mathbb{E}_x \left[\omega_0^N(X_{tN^2}) \mathbf{1}_{\{X_{tN^2}=y\}}(y) \right] \\ &= \sum_{y=0}^N \mathbb{E}_x \left[\omega_0^N(y) \mathbf{1}_{\{X_{tN^2}=y\}} \right] \\ &= \sum_{y=0}^N \omega_0^N(y) \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{X_{tN^2}=y\}} \right] \\ &= \sum_{y=0}^N \omega_0^N(y) \mathbb{P}_x [X_{tN^2} = y]. \end{aligned}$$

Así, obtenemos que

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}_x \left[\omega_0^N(X_{tN^2}) \right] \right| &\leq \sum_{y=0}^N |\omega_0^N(y)| \mathbb{P}_x [X_{tN^2} = y] \\ &\leq \|\omega_0^N\|_\infty \underbrace{\sum_{y=0}^N \mathbb{P}_x [X_{tN^2} = y]}_{=1}. \end{aligned}$$

Análogamente, tenemos que

$$\left| \mathbb{E}_x \left[\int_0^t F_N(t-s, X_{tN^2}) ds \right] \right| \leq \int_0^t \sum_{y=0}^N |F_N(t-s, y)| \mathbb{P}_x [X_{tN^2} = y] ds.$$

Ahora, como ρ_t es limitada y $\rho_t \in C^\infty(0,1)$ tenemos por un desarrollo de Taylor que

$$\begin{aligned} \rho_t \left(\frac{x-1}{N} \right) &= \rho_t \left(\frac{x}{N} \right) - \frac{1}{N} \partial_x \rho_t \left(\frac{x}{N} \right) + \frac{1}{2N^2} \partial_x^2 \rho_t \left(\frac{x}{N} \right) - \frac{1}{3!N^3} \partial_x^3 \rho_t \left(\frac{x}{N} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4!N^4} \partial_x^4 \rho_t \left(\frac{x}{N} \right) + O \left[\left(\frac{x}{N} \right)^5 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_t \left(\frac{x-1}{N} \right) &= \rho_t \left(\frac{x}{N} \right) + \frac{1}{N} \partial_x \rho_t \left(\frac{x}{N} \right) + \frac{1}{2N^2} \partial_x^2 \rho_t \left(\frac{x}{N} \right) + \frac{1}{3!N^3} \partial_x^3 \rho_t \left(\frac{x}{N} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4!N^4} \partial_x^4 \rho_t \left(\frac{x}{N} \right) + O \left[\left(\frac{x}{N} \right)^5 \right]. \end{aligned}$$

Así es fácil notar que

$$\frac{1}{N^2} \Delta_N \rho_t \left(\frac{x}{N} \right) = \frac{1}{N^2} \partial_x^2 \rho_t \left(\frac{x}{N} \right) + \frac{1}{12N^4} \partial_x^4 \rho_t \left(\frac{x}{N} \right) + O \left[\left(\frac{x}{N} \right)^6 \right].$$

Luego,

$$|F_N(t, x)| = |(\Delta_N \rho_t)(x/N) - (\partial_x^2 \rho_t)(x/N)| \leq \left| \frac{1}{12N^2} \partial_x^2 \rho_t \left(\frac{x}{N} \right) \right| \leq \frac{C}{N^2}.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}_x \left[\int_0^t F_N(t-s, X_{tN^2}) ds \right] \right| &\leq \int_0^t \sum_{y=0}^N |F_N(t-s, y)| \mathbb{P}_x [X_{tN^2} = y] ds \\ &\leq \int_0^t \underbrace{\frac{C}{N^2} \sum_{y=0}^N \mathbb{P}_x [X_{tN^2} = y]}_{=1} ds \\ &= \frac{Ct}{N^2}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\|\omega_t^N\|_\infty \leq \|\omega_0^N\|_\infty + \frac{Ct}{N^2}.$$

■

1.6 La ecuación del calor

La ecuación del calor describe la distribución de la temperatura en un cuerpo sólido, de acuerdo con el tiempo y el espacio. Esta ecuación es de interés y tiene múltiples aplicaciones en varias ramas de la ciencia. Esta ecuación es una ecuación diferencial parcial parabólica y está relacionada con varios procesos aleatorios. El modelo aleatorio que introducimos está relacionado con la ecuación del calor con condiciones de Dirichlet que es dada por:

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t, x) = \partial_x^2 \rho(t, x) & \text{para } x \in [0, 1] \\ \rho(0, x) = \rho_0(x) & \text{para } x \in [0, 1] \\ \rho(t, 0) = \alpha, \rho(t, 1) = \beta & \text{para } t \in [0, \infty). \end{cases} \quad (1.17)$$

Motivación y definición de solución débil. Una ecuación diferencial parcial puede tener soluciones que no son diferenciables, este tipo de soluciones son llamadas soluciones débiles. Para definir tales soluciones, tenemos que reescribir la ecuación diferencial parcial en una formulación débil. Consideramos la ecuación del calor con condiciones de Dirichlet dada por (1.17) y fijamos un tiempo $T > 0$. Sea $R = [0, T] \times [0, 1]$ y $C_0^{1,2}(R)$ el conjunto de funciones $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ tales que f es de clase $C^1[0, T]$ en el tiempo, de clase $C^2[0, 1]$ en espacio, tales que $f(t, 0) = f(t, 1) = 0$ para todo $t > 0$.

Sea ahora, $G \in C_0^{1,2}(R)$. Multiplicamos ambos miembros de la ecuación $\partial_t \rho(t, x) = \partial_x^2 \rho(t, x)$ por $G_t(x)$, e integrando ambos miembros de esa ecuación sobre la región R obtenemos

$$\underbrace{\int_0^1 \int_0^T \partial_t \rho(t, x) G_t(x) dt dx}_{=I_1} = \underbrace{\int_0^1 \int_0^T \partial_x^2 \rho(t, x) G_t(x) dt dx}_{=I_2}. \quad (1.18)$$

Haciendo una integración por partes en la integral I_1 tenemos que

$$I_1 = \int_0^1 \rho(T, x) G_T(x) - \rho(0, x) G_0(x) dx - \int_0^1 \int_0^T \rho(t, x) \partial_t G_t(x) dt dx.$$

Usando el Teorema de Fubini y haciendo integración por partes dos veces, tenemos

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^T \partial_x \rho(t, 1) G_t(1) - \partial_x \rho(t, 0) G_t(0) dt - \int_0^T \int_0^1 \partial_x \rho(t, x) \partial_x G_t(x) dx dt \\ &= \int_0^T \partial_x \rho(t, 1) G_t(1) - \partial_x \rho(t, 0) G_t(0) dt \\ &\quad - \int_0^T \rho(t, 1) \partial_x G_t(1) - \rho(t, 0) \partial_x G_t(0) dt + \int_0^T \int_0^1 \rho(t, x) \partial_x^2 G_t(x) dx dt. \end{aligned}$$

Como $p(t, 0) = \alpha$, $\rho(t, 1) = \beta$ y $G \in C_0^{1,2}(R)$, $I_1 = I_2$ puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho(T, x) G_T(x) - \rho(0, x) G_0(x) dx &= \int_0^1 \int_0^T \rho(t, x) (\partial_t + \Delta) G_t(x) dt dx \\ &\quad + \int_0^T \alpha \partial_x G_t(0) - \beta \partial_x G_t(1) dt. \end{aligned}$$

Entonces si para cada $G \in C_0^{1,2}(R)$, la función $\rho : [0, T] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisface la ecuación integral anterior, decimos que ρ es una solución débil de la ecuación (1.17). Además, notamos que si existe una solución débil de (1.17), entonces esa solución es única. Este resultado es esencial para la demostración del llamado *límite hidrodinámico* que vamos a presentar en próxima sección, pero cuya demostración no será realizada. Para el lector interesado recomendamos [2] y [9].

1.7 Límite Hidrodinámico

En esta sección queremos dar una idea del límite hidrodinámico para la cadena de Markov η_t con espacio de estados $\{0, 1\}^{\Lambda_N}$ y con generador infinitesimal $N^2 L_N$ definido en (1.3). Note que aquí consideramos el generador $N^2 L_N$ que corresponde de tomar el proceso η_{tN^2} , o sea, la escala microscópica de tiempo es tN^2 .

Primero definimos la medida empírica asociada al proceso η_t . Esta medida está definida en $\{0, 1\}^{\Lambda_N}$ y da peso $1/N$ a cada sitio ocupado de la configuración η_t . Siendo así, para $\eta \in \{0, 1\}^{\Lambda_N}$ definimos la medida empírica $\pi^N(\eta, du)$ en $[0, 1]$ por

$$\pi^N(\eta, du) = \frac{1}{N} \sum_{x \in \Lambda_N} \eta(x) \delta_{\frac{x}{N}}(du), \quad (1.19)$$

donde δ_a es la medida Delta de Dirac en a , o sea, es una medida que da peso 1 a a y 0 a todos los otros puntos. Como queremos analizar la evolución temporal de la medida empírica asociada al proceso $(\eta_t)_{t \geq 0}$, también definimos un proceso de medidas empíricas, de la siguiente forma: $\pi_t^N(\eta, du) := \pi^N(\eta_{tN^2}, du)$.

Con esta notación tenemos que si $G : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función test, entonces la integral de G con respecto a la medida empírica π_t^N es dada por

$$\langle \pi_t^N, G \rangle := \int G(u) \pi_t^N(\eta, du) = \frac{1}{N} \sum_{x \in \Lambda_N} G_x \eta_{tN^2}(x),$$

donde $G_x := G(x/N)$.

Ahora, definiendo

$$M_t^{N,G} = \langle \pi_t^N, G \rangle - \langle \pi_0^N, G \rangle - \int_0^t N^2 L_N \langle \pi_s^N, G \rangle ds,$$

podemos aplicar un resultado muy general para procesos de Markov, vea, por ejemplo el Lema 5.1 do apéndice 1 de [6]. Tal lema nos dice que la expresión $M_t^{N,G}$ tiene esperanza constante, y dado que $M_0^{N,G} = 0$, lo que es fácil de verificar, tenemos que la media de $M_t^{N,G}$ es 0, para cualquier $t \geq 0$.

La función $M_t^{N,G}$ es una versión discreta de la solución débil de la ecuación hidrodinámica que estamos buscando. Para encontrar la ecuación hidrodinámica asociada a nuestro modelo tenemos que calcular la parte integral de $M_t^{N,G}$.

Para esto notamos que haciendo una suma por partes tenemos que $N^2 L_N \langle \pi_s^N, G \rangle$ es igual a

$$\begin{aligned} & N^2 L_N \frac{1}{N} \sum_{x \in \Lambda_N} G_x \eta_s(x) \\ &= N L_N \left(G_1 \eta_s(1) + \sum_{x=2}^{N-2} G_x \eta_s(x) + G_{N-1} \eta_s(N-1) \right) \\ &= N G_1 (\alpha - 2\eta_s(1) + \eta_s(2)) + N G_{N-1} (\eta_s(N-2) - 2\eta_s(N-1) + \beta) \\ &\quad + N \sum_{x=2}^{N-2} G_x \Delta_N \eta_s(x) \\ &= \alpha N G_1 + \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N-1} \Delta_N G_x \eta_s(x) + \beta N G_{N-1} \\ &= \alpha \nabla_N^+ G_0 - \beta \nabla_N^- G_1 + \langle \pi_t^N, \Delta_N G^s \rangle, \end{aligned}$$

donde, $\Delta_N G_x = N^2(G_{x+1} + G_{x-1} - 2G_x)$, $\nabla_N^+ G_0 = N(G_1 - G_0)$, $\nabla_N^- G_1 = N(G_N - G_{N-1})$. Siendo así, tenemos que

$$M_t^{N,G} = \langle \pi_t^N, G \rangle - \langle \pi_0^N, G \rangle - \int_0^t N^2 \alpha \nabla_N^+ G_0 - \beta \nabla_N^- G_1 + \langle \pi_t^N, \Delta_N G \rangle ds.$$

Aplicando la esperanza con respecto a una cierta medida inicial μ_N , a ambos lados de $M_t^{N,G}$ y asumiendo que $E_{\mu_N}[\eta_s(x)] = \rho(t, x/N)$, entonces para $G \in C_0^{1,2}(\mathbb{R})$, la igualdad arriba se escribe como:

$$\frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N-1} (\rho(t, x/N) G_x^t - \rho(0, x/N) G_x^0) = \int_0^t N^2 \alpha \nabla_N^+ G_0^s - \beta \nabla_N^- G_1^s + \langle \pi_t^N, \Delta_N G^s \rangle ds.$$

Como $G \in C_0^{1,2}[0,1]$, tenemos que

$$\Delta_N G_u^s \xrightarrow{N \uparrow \infty} \partial_x^2 G_u^s;$$

$$\nabla_N^+ G_0^s \xrightarrow{N \uparrow \infty} \partial_u G_0^s;$$

$$\nabla_N^- G_1^s \xrightarrow{N \uparrow \infty} \partial_u G_1^s;$$

uniformemente en s , luego tomando el límite obtenemos la formulación débil de la solución de la ecuación del calor con condiciones de Dirichlet (1.17).

Así, el límite hidrodinámico nos dice lo siguiente. Considere una sucesión de medidas de probabilidad $(\mu^N)_{N=1}^\infty$ en $\{0,1\}^{\Lambda_N}$ que satisfaga

$$\pi_0^N(\eta, du) \xrightarrow{N \uparrow \infty} \pi_0(du) = \rho_0(u)du,$$

es decir, la medida aleatoria π_0^N converge en probabilidad, cuando $N \rightarrow \infty$ y con respecto a μ^N , para la medida determinista $\rho_0(u)du$. Entonces, para cada tiempo fijo t , la medida empírica π_t^N converge en probabilidad, cuando $N \rightarrow \infty$ y con respecto a μ_t^N , la distribución del sistema en el tiempo t , para la medida determinista π_t , que es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue o sea, $\pi_t(du) = \rho(t,u)du$, donde, $\rho(t,u)$ es la única solución débil de una ecuación diferencial parcial con condición inicial ρ_0 , en nuestro modelo, la ecuación viene dada por (1.17).

La prueba de este resultado es extremadamente técnica, sin embargo nos gustaría apenas recalcar que el método consiste en probar primero que la sucesión $(\pi_t^N)_{N=1}^\infty$ posee puntos límite, seguidamente se prueba que todo punto límite es una medida determinista, absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y finalmente se caracteriza su densidad como siendo una solución débil de la respectiva ecuación hidrodinámica. Habiendo apenas *una única* solución débil, se obtiene la convergencia de la sucesión a ese punto límite. Para más detalles referimos al lector a los capítulos 4 y 5 de [6].

1.8 Conclusiones

A pesar de haber tratado temas importantes y difíciles, hemos dejado por fuera otros, porque nuestro principal objetivo es informativo, para que el lector no tenga una lectura pesada, llena de formalismo. Por esto, esperamos profundamente que el lector:

1. Sea capaz de notar la poderosa herramienta que es la probabilidad y su relación con el campo de la física.
2. Entienda que muchas de las situaciones deterministas en nuestro mundo macroscópico puede ser deducidas a partir de un mundo microscópico, que es completamente caótico.
3. Se dé cuenta y aprenda sobre cuestiones y estrategias de demostración que están siendo usadas hoy en día por muchos investigadores. Y por qué no? pueda motivarse para estar directamente involucrado y se una al grupo de investigadores que quieren explorar esta área. O simplemente, pueda difundir el tema a las personas potencialmente interesadas en esta área.

Bibliografía

- [1] Ethier, S; Kurtz, T. (2005) *Markov processes, characterization and convergence*. Wiley-Interscience.
- [2] Franco, T; Goncalves, P; Neumann, A. (2015) *Phase transition of a heat equation with robin boundary conditions and exclusion process*. Transactions of the American Mathematical Society, 367(9), 6131-6158.
- [3] Grimmett, G; Stirzaker, D. (2001) *Probability and random process*. Oxford.
- [4] Chung, K. (2001) *A a course in probability theory*. Academic Press.
- [5] Karatzas, I; Shreve, S. (1991) *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer.
- [6] Kipnis, C and Landim, C. (1999) *Scaling limits of interacting particle systems*. Springer.
- [7] Landim, C; Milanese, A; Olla, S. (2008) *Stationary and nonequilibrium fluctuations in boundary driven exclusion processes*. Markov Processes Related Fields 14.
- [8] Liggett, T. (1968) *Interacting particle system*. Springer.
- [9] Ladyzhenskaya, O. (1985) *The Boundary value problems of mathematical physic*. Applied mathematical sciences, 49, Springer-Verlag, New York.